Kovariante Differentialrechnung auf Quantensphären ungerader Dimension.

Ein Beitrag zur nichtkommutativen Geometrie homogener Quantenräume

Von der Fakultät für Mathematik und Informatik
der Universität Leipzig
angenommene

DISSERTATION

zur Erlangung des akademischen Grades

DOCTOR RERUM NATURALIUM

(Dr. rer. nat.)

vorgelegt

von Dipl.-Math. Martin Welk

geboren am 4. März 1970 in Pößneck

Die Annahme der Dissertation haben empfohlen:

1. Prof. Dr. Konrad Schmüdgen, Universität Leipzig
2. Prof. Dr. Gerd Rudolph, Universität Leipzig
3. Priv.-Doz. Dr. Folkert Müller-Hoissen,
   Max-Planck-Institut für Strömungsforschung Göttingen

Tag der Verteidigung: 26. November 1998

Bibliographische Beschreibung:

Welk, Martin
Kovariante Differentialrechnung auf Quantensphären ungerader Dimension.
Ein Beitrag zur nichtkommutativen Geometrie homogener Quantenräume

Universität Leipzig, Diss., 152, 7 S., 27 Lit.

Referat:

Auf den Quantensphären ungerader Dimension S_q^{2N-1} nach Vaksman und Soibelman werden für $N \geq 4$ unter zwei verschiedenen Setzungen der Nebenbedingungen kovariante Differentialkalküle erster Ordnung klassifiziert. Es wird gezeigt, daß für $N \geq 4$ genau vier Familien kovarianter $*$-Differentialkalküle erster Ordnung mit je zwei Parametern auf S_q^{2N-1} existieren, deren 1-Formen-Bimoduln von den Differentialen $\mathrm{d}z_i$, $\mathrm{d}z_i^*$, $1 \leq i \leq N$, der $2N$ algebraischen Erzeugenden der Quantensphäre als freie Linksmoduln erzeugt werden. Keiner dieser Differentialkalküle ist ein innerer Kalkül. Ferner wird gezeigt, daß für $N \geq 4$ genau fünf Familien kovarianter Differentialkalküle erster Ordnung mit je einem Parameter auf S_q^{2N-1} existieren, deren 1-Formen-Bimoduln von $\mathrm{d}z_i$, $\mathrm{d}z_i^*$, $1 \leq i \leq N$, als Linksmoduln erzeugt werden und für die alle Relationen im S_q^{2N-1}-Linksmodul der 1-Formen von genau einer Relation zwischen invarianten 1-Formen algebraisch erzeugt werden. Die Differentialkalküle dreier dieser Familien sind $*$-Kalküle, diejenigen einer davon innere Kalküle. Alle diese Kalküle existieren auch für $N = 2$ und $N = 3$.

Für einen der inneren Differentialkalküle erster Ordnung Γ auf S_q^{2N-1} wird gezeigt, daß in jedem Differentialkalkül höherer Ordnung $\Gamma^\wedge$, der Γ fortsetzt, alle Differentialformen der Ordnung $2N + 1$ und höherer Ordnung verschwinden. Für Γ wird ein Symmetriehomomorphismus (braiding) konstruiert.

Mit Hilfe des Differentialkalküls Γ, der Differentialkalküle höherer Ordnung und des Symmetriehomomorphismus werden Metriken und Zusammenhänge auf den Quantensphären S_q^{2N-1} eingeführt.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Theorie der Quantengruppen und Quantenräume sowie die nichtkommutative Geometrie sind zwei Gebiete im Grenzbereich von Mathematik und Mathematischer Physik, die im Laufe des letzten Jahrzehnts eine imposante Entwicklung genommen haben.

Der Grundgedanke der nichtkommutativen Geometrie, die maßgeblich durch Connes vorangetrieben wurde [Con], besteht darin, nichtkommutative Algebren zu untersuchen, die durch bestimmte Deformationen (Quantisierungen) aus kommutativen Funktionenalgebren über Mannigfaltigkeiten entstehen, und auf diesen algebraische Objekte zu spezifizieren, deren Eigenschaften in hohem Maße diejenigen der Elemente der klassischen Differentialgeometrie – in ihrer Formulierung für die ursprünglichen (kommutativen) Funktionenalgebren – widerspiegeln. Dadurch kann die nichtkommutativ deformierte Funktionenalgebra als Funktionenalgebra über einem „nichtkommutativen geometrischen Raum“ und die spezifizierten algebraischen Ausdrücke als Elemente einer Differentialgeometrie dieses „Raumes“ angesehen werden, obwohl es den nichtkommutativen geometrischen Raum im herkömmlichen Verständnis als ein aus Punkten zusammengesetztes und durch ihre gegenseitigen Beziehungen charakterisiertes Objekt in der Regel nicht gibt.

Als vereinfachende Sprechweise ist es üblich geworden, die nichtkommutativ deformierte Funktionenalgebra selbst als nichtkommutativen geometrischen Raum oder einfach als nichtkommutativen Raum zu bezeichnen. Da es den nichtkommutativen geometrischen Raum als aus Punkten zusammengesetztes Objekt gewöhnlich nicht gibt, sind durch diesen Sprachgebrauch Verwechslungen nicht zu befürchten, und so wird auch in der vorliegenden Arbeit des öfteren diese Redeweise Anwendung finden.

Voraussetzung für die Übertragung von Begriffsbildungen der Differentialgeometrie auf nichtkommutative Räume ist eine Differentialrechnung auf diesen. Hierzu bedarf es zunächst einer Anpassung der im Bereich der kommutativen Algebra gebräuchlichen Definition für Differentialkalküle erster Ordnung an die Situation nichtkommutativer Algebren. Diese Definition (siehe Abschnitt 2.1) ist dadurch gekennzeichnet, daß die 1-Formen einen Bimodul bilden und die durch die Differentialabbildung d zu erfüllende Leibnizregel, der nichtkommutativen Situation adäquat, die Form $\mathrm{d}(xy) = (\mathrm{d}x)y + x(\mathrm{d}y)$ annimmt. Bemerkenswerterweise bedeutet diese Definition selbst in der Anwendung auf kommutative Algebren bereits eine Verallgemeinerung der klassischen Definition, indem sie in vielen

Fällen *nichtkommutative Differentialkalküle* auch über kommutativen Algebren ermöglicht.

Die Konsequenz dieser allgemeineren Definition ist nun, daß es zumeist keinen ausgezeichneten, „natürlichen“ oder „kanonischen“ Differentialkalkül gibt. Daher stellt sich für nichtkommutative Räume die Aufgabe, Differentialkalküle zu klassifizieren – ggf. unter geeigneten Nebenbedingungen – und durch weitere Eigenschaften die für den Aufbau nichtkommutativer Geometrie relevanten Kalküle zu qualifizieren.

Quantengruppen, Quantenräume zu Quantengruppen sowie speziell homogene Quantenräume zu Quantengruppen ordnen sich in diesen Rahmen als nichtkommutative geometrische Räume mit besonderen Eigenschaften ein. Quantengruppen entstehen durch Deformation aus klassischen Lie-Gruppen, Quantenräume aus Mannigfaltigkeiten mit einer Wirkung einer Lie-Gruppe, und homogene Quantenräume sind Deformationen von homogenen Räumen zu Lie-Gruppen. In der Literatur wurde eine Fülle unterschiedlicher Quantengruppen und Quantenräume algebraisch beschrieben [Wor1, VS, RTF, NYM, NM, KV, Dij1, DN, Pod1].

Ganz analog den entsprechenden klassischen Objekten besitzen auch diese nichtkommutativen Räume eine reichhaltige zusätzliche Struktur, die ihnen besondere geometrische Eigenschaften verleiht und beim Studium ihrer Geometrie von Nutzen ist.

Eine natürliche Forderung, die in diesen Fällen die Vielfalt möglicher Differentialkalküle einschränkt, ist die der Kovarianz (definiert in Abschnitt 2.1). Sie entspricht der für klassische Differentialkalküle auf Mannigfaltigkeiten mit Gruppenwirkung gegebenen Vertauschbarkeit der Differentiation mit der Gruppenwirkung.

Die kovariante Differentialrechnung auf Quantengruppen war während der letzten Jahre Gegenstand intensiver Forschung. Den Ausgangspunkt bildete die Arbeit von Woronowicz [Wor2]; inzwischen gibt es eine Vielzahl weitere Arbeiten. So liegen Klassifikationen für bikovariante Differentialkalküle erster Ordnung auf den Deformationen der klassischen Matrixgruppen vor [Jur, CSWW, SS1, SS2], Konstruktionsverfahren für bikovariante Differentialkalküle erster Ordnung auf beliebigen koquasitriangulären Hopfalgebren [KS] und für linkskovariante Differentialkalküle auf deformierten Matrixgruppen. Weiterhin wurden verschiedene Verfahren zur Konstruktion von Differentialkalkülen höherer Ordnung betrachtet [Wor2, Schü] und Elemente der nichtkommutativen Differentialgeometrie für Quantengruppen eingeführt [AC, HS].

Für homogene Quantenräume, die sich aufgrund ihrer strukturellen Nähe zu Quantengruppen als nächstes Untersuchungsobjekt anbieten, liegen dagegen bislang noch wenige Resultate zur kovarianten Differentialrechnung vor. Diese beziehen sich vorwiegend auf Beispiele verhältnismäßig einfacher Struktur wie Quantenvektorräume und quantisierte projektive Räume [WZ]; darüber hinaus wurden kovariante Differentialkalküle auf den zweidimensionalen Quantensphären nach Podleś untersucht und klassifiziert [Pod1, Pod2, Pod3, AS].

Das Anliegen dieser Arbeit ist es, als ein erstes Beispiel homogener Quantenräume mit einer reichhaltigeren Struktur die von Vaksman und Soibelman eingeführten Quantensphären ungerader Dimension [VS, RTF, NYM] zu untersuchen. Diese Quantensphären S_q^{2N-1} sind homogene Quantenräume zu den Quantengruppen $\mathrm{SU}_q(N)$.

Wir erläutern nun die Gliederung der Arbeit und nennen die wichtigsten Resultate. Das Kapitel 1 stellt wesentliche Definitionen zu Quantenräumen zusammen und enthält eine kurze Beschreibung der für diese Arbeit relevanten Quantengruppen $\mathrm{SU}_q(N)$ einschließlich darstellungstheoretischer Aspekte und der Quantensphären S_q^{2N-1} sowie weitere Notationen und Konventionen.

Wir untersuchen zunächst kovariante Differentialkalküle erster Ordnung (Kapitel 2). Unsere Hauptresultate hierzu sind die Theoreme 2.1 und 2.3, in denen unter zwei verschiedenen Festlegungen der Nebenbedingungen kovariante Differentialkalküle erster Ordnung auf S_q^{2N-1} klassifiziert werden. Das Hauptinstrument dieser Klassifikation ist eine Untersuchung von Tensorprodukten von Kodarstellungen der Quantengruppen $\mathrm{SU}_q(N)$ auf den Quantensphären. Die Klassifikationsaussagen beider Theoreme gelten für $N \geq 4$; die beschriebenen Differentialkalküle existieren aber auch für $N = 2$ und $N = 3$.

Unter beiden Varianten der Nebenbedingungen gibt es eine Vielfalt kovarianter Differentialkalküle erster Ordnung mit unterschiedlichen Eigenschaften. Wir untersuchen einige wesentliche Merkmale (innere Kalküle, algebraische Besonderheiten, Verhalten im klassischen Grenzfall $q = 1$) und zitieren ein Resultat von K. Schmüdgen [Sch], wonach zumindest ein Teil der Kalküle durch kovariante Differentialkalküle auf $\mathrm{SU}_q(N)$ induziert wird.

Anhand dieser zusätzlichen Eigenschaften wählen wir einen speziellen Differentialkalkül erster Ordnung aus, auf dessen Grundlage wir sodann Untersuchungen zu Differentialkalkülen höherer Ordnung (Kapitel 3) sowie zu einem Symmetriebegriff (Kapitel 4) durchführen.

Eine wesentliche Schwierigkeit besteht darin, daß der ausgewählte Differentialkalkül nicht als frei erzeugter Linksmodul über der Algebra S_q^{2N-1} beschrieben werden kann. Aus diesem Grunde können wir zu Differentialkalkülen höherer Ordnung nur einige Aussagen über Relationen und über obere Schranken für die Ordnung nichtverschwindender Differentialformen treffen; eine umfassendere Beschreibung der Moduln der höheren Differentialformen muß ebenso künftiger Arbeit vorbehalten bleiben wie eine Beschreibung des Differentialkalküls erster Ordnung durch partielle Ableitungen und darauf aufbauende Untersuchungen etwa zu Differentialoperatoren oder Differentialgleichungen, der dasselbe Hindernis im Wege steht.

Als wichtigstes Resultat in diesem Teil der Arbeit ist Theorem 4.10 zu nennen, das einen Symmetriehomomorphismus (braiding) für den betrachteten Differentialkalkül beschreibt und somit eine Antisymmetrisierungsprozedur zur Gewinnung von Differentialkalkülen höherer Ordnung ermöglicht, aber auch ein Symmetriekonzept von eigenständigem Wert für den Aufbau einer nichtkommutativen Differentialgeometrie der Quantensphären bereitstellt. Es ist hierbei darauf hinzuweisen, daß der Symmetriehomomorphismus zwar auf dem Tensorprodukt $\Gamma \otimes \Gamma$ über dem Differentialkalkül erster Ordnung Γ definiert werden kann, jedoch zur Erfüllung der Zopfrelation als einer unerläßlichen Eigenschaft einer derartigen Abbildung das Tensorprodukt dritter Ordnung $\Gamma \otimes \Gamma \otimes \Gamma$ durch ein faktorisiertes Tensorprodukt ersetzt werden muß.

Im letzten Teil der Arbeit (Kapitel 5) wird die zuvor entwickelte kovariante Differentialrechnung angewendet, um exemplarisch Metriken und Zusammenhänge auf den Quantensphären als Beispiele elementarer Begriffe einer nichtkommutativen Geometrie einzuführen.

In Abhängigkeit von der Auswahl des höheren Differentialkalküls und der faktorisierten Tensorprodukte werden Familien von Metriken und Zusammenhängen mit verschiedenen Anzahlen von Parametern gefunden. Den Abschluß dieses Kapitels bildet eine Überlegung zu Levi-Civita-Zusammenhängen; hier kann aber keine abschließende Klärung erzielt werden, da es noch nicht gelingt, die Bedingung für die Verträglichkeit eines Zusammenhangs mit einer Metrik in hinreichend allgemeiner Form zu formulieren. Ein Beispiel eines Zusammenhangs, der eine eingeschränkte Verträglichkeitsbedingung gegenüber einer Familie von Metriken erfüllt und daher als Kandidat für einen Levi-Civita-Zusammenhang angesehen werden kann, wird in Satz 5.10 angegeben.

Es folgen zwei Anhänge, deren erster (Anhang A) Umrechnungen zwischen verschiedenen in der Literatur vorfindlichen Versionen der hier betrachteten Quantensphären bereitstellt und insbesondere den direkten Vergleich der in dieser Arbeit klassifizierten Differentialkalküle erster Ordnung auf S_q^{2N-1} mit den in [Sch] aus kovarianten Differentialkalkülen der Quantengruppe $\mathrm{SU}_q(N)$ konstruierten beinhaltet.

Der zweite Anhang (Anhang B) enthält eine Anzahl ausführlicherer Rechnungen zu einzelnen Beweisschritten der Kapitel 2–5, deren Aufnahme in den Haupttext diesen zu stark fragmentiert hätte.

Mein Dank gilt Herrn Prof. Dr. K. Schmüdgen für die Themenstellung und für die Betreuung dieser Arbeit. Weiterhin danke ich Herrn Dipl.-Math. I. Heckenberger für wertvolle Diskussionen.

Der Studienstiftung des deutschen Volkes gebührt Dank für die Förderung dieses Projektes durch ein Promotionsstipendium.

Kapitel 1: Quantenräume

Als Ausgangspunkt unserer Untersuchungen stellen wir in diesem Kapitel die wesentlichen Definitionen zu Quantenräumen, insbesondere homogenen Quantenräumen, bereit und charakterisieren diejenigen Quantenräume, die den eigentlichen Gegenstand dieser Arbeit bilden, nämlich die von Vaksman und Soibelman [VS] eingeführten Quantensphären S_q^{2N-1}. Diese sind homogene Quantenräume zu den Quantengruppen $\mathrm{SU}_q(N)$, weshalb auch einige grundlegende Fakten zu diesen Quantengruppen zu erwähnen sind.

Für eine umfassende Einführung in Quantengruppen sei auf die Arbeit von Woronowicz [Wor1] sowie das Buch von Klimyk und Schmüdgen [KS] verwiesen. Wir weisen darauf hin, daß der Begriff der Quantengruppe in der Literatur nicht einheitlich gebraucht wird; insbesondere schält sich eine Unterscheidung zwischen algebraischen Quantengruppen und C^*-algebraischen Quantengruppen heraus, vgl. etwa den Preprint von Kustermans und Van Daele [KVD]. Da wir topologische Aspekte nicht in unsere Untersuchungen einbeziehen, genügt es hier, im Sinne dieser Unterscheidung algebraische Quantengruppen zu betrachten. Allen gebräuchlichen Definitionen algebraischer Quantengruppen ist gemeinsam, daß eine Quantengruppe eine Hopfalgebra sein muß; für unsere Definitionen zu Quantenräumen, Differentialkalkülen auf Quantenräumen usw. benötigen wir nur diese Eigenschaft, so daß in allen allgemeinen Definitionen in dieser Arbeit die Begriffe „Quantengruppe“ und „Hopfalgebra“ Synonyme sind.

Da wir unsere Beschreibung der Quantengruppen $\mathrm{SU}_q(N)$ und der Quantensphären S_q^{2N-1} auf die für uns relevanten Fakten beschränken, verweisen wir für weitergehende Darstellungen auf die Arbeiten von Reshetikhin, Takhtajan und Faddeev [RTF], von Vaksman und Soibelman [VS], von Noumi, Yamada und Mimachi [NYM].

1.1 Definitionen zu Quantenräumen

Wir beginnen mit grundlegenden Definitionen zu Quantenräumen. Infolge der Nichtkommutativität der beteiligten Algebren können alle Definitionen in zwei grundsätzlich gleichwertigen Formen gegeben werden, je nachdem die Kowirkung der Quantengruppe auf dem Quantenraum als linke oder rechte Kowirkung vorausgesetzt wird. Wir geben hier die Definitionen mit einer rechten Kowirkung und damit für rechte Quantenräume. Analoge Definitionen, jedoch für linke Quantenräume, finden sich in der Arbeit von Apel und Schmüdgen [AS].

Definition 1.1: *Es sei $\mathcal{A}$ eine Hopf-Algebra mit der Komultiplikation Δ und der Koeins ε. Ein* ***(rechter) Quantenraum für*** $\mathcal{A}$ *ist ein Paar (X, Δ_{R}) aus einer unitalen Algebra X und einem Algebrenhomomorphismus $\Delta_{\mathrm{R}} : X \to X \otimes \mathcal{A}$, für den die Identitäten $(\Delta_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id})\Delta_{\mathrm{R}} = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta_{\mathrm{R}}$ und $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta_{\mathrm{R}} = \mathrm{id}$ gelten. Ein solcher Algebrenhomomorphismus heißt* ***(rechte) Kowirkung.***

Ebenso wie in der klassischen Situation einer Mannigfaltigkeit mit Gruppenwirkung diese Gruppenwirkung ähnliche Eigenschaften besitzt wie die Gruppenoperation – und daher gelegentlich multiplikativ geschrieben wird –, sind auch hier die für eine Kowirkung vorausgesetzten Identitäten Bedingungen für die Komultiplikation der Quantengruppe ähnlich, im einzelnen der Bedingung der Koassoziativität und der Koeinsdefinition. Um eine konkret gegebene Algebra als Quantenraum für eine Quantengruppe zu erweisen, ist es im allgemeinen erforderlich, diese Identitäten im einzelnen nachzuweisen; doch haben wir in einem wichtigen Spezialfall einfachere Verhältnisse, nämlich für homogene Quantenräume, die wir nunmehr definieren wollen.

Definition 1.2: *Es sei (X, Δ_{R}) ein Quantenraum zur Quantengruppe $\mathcal{A}$ mit den weiteren Bezeichnungen wie in der vorangegangenen Definition. (X, Δ_{R}) wird als* ***homogener Quantenraum für*** $\mathcal{A}$ *bezeichnet, wenn es eine Einbettung $\iota : X \to \mathcal{A}$ gibt, für die $\Delta_{\mathrm{R}} = \Delta \circ \iota$ gilt.*

In diesem speziellen Fall erübrigt die Angabe der Einbettung den Nachweis der Eigenschaften der Kowirkung, da diese dann unmittelbar aus der Gleichheit $\Delta_{\mathrm{R}} = \Delta \circ \iota$ folgen. Identifiziert man die Algebra X mit ihrem Bild unter der Einbettung ι, so bedeutet letztere Gleichheit gerade, daß Δ_{R} sich durch Einschränkung aus der Komultiplikation ergibt.

1.2 R-Matrizen und weitere Konventionen

Die Untersuchungen in der vorliegenden Arbeit basieren durchgängig auf der Quantengruppe $\mathrm{SU}_q(N)$. Hierin bezeichnet N stets die Dimension der Quantengruppe und damit eine natürliche Zahl mit $N \geq 2$. Der Deformationsparameter q ist eine reelle Zahl mit $q \notin \{-1, 0, 1\}$. Wir benutzen außerdem die folgenden

Abkürzungen:

$$Q = q - q^{-1}; \qquad \mathfrak{s}_+ = \sum_{i=0}^{N-1} q^{2i}; \qquad \mathfrak{s}'_+ = \mathfrak{s}_+ - 1;$$

$$Q_+ = q + q^{-1}; \qquad \mathfrak{s}_- = \sum_{i=0}^{N-1} q^{-2i}; \qquad \mathfrak{s}'_- = \mathfrak{s}_- - 1.$$

In dieser Arbeit gilt durchgängig die **Einsteinsche Summenkonvention** in der Form, daß über gleiche obere und untere Indizes von 1 bis N zu summieren ist, sofern nicht anders gekennzeichnet. In einzelnen Fällen schreiben wir zur Verdeutlichung zusätzlich ein Summenzeichen. Das **Kronecker-Symbol** δ_{ij} ist wie üblich durch $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ definiert. (In späteren Kapiteln werden wir den Buchstaben δ auch zur Bezeichnung von Koeffizienten benutzen; Verwechslungen sind aber ausgeschlossen, da diese Koeffizienten niemals zwei Indizes tragen.)

Die Kommutatorrelationen der Quantengruppe $\mathrm{SU}_q(N)$ werden durch eine R-Matrix beschrieben, die dadurch auch für unsere Betrachtungen von zentraler Bedeutung ist. Diese R-Matrix $\hat{R}$ ist eine invertierbare $N^2 \times N^2$-Matrix mit der Inversen $\hat{R}^-$; diese Matrizen sind gegeben durch

$$\hat{R}^{ij}_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = l \neq k = j, \\ q & \text{für } i = j = k = l, \\ Q & \text{für } i = k < j = l, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \qquad \hat{R}^{-\,ij}_{\ \ kl} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = l \neq k = j, \\ q^{-1} & \text{für } i = j = k = l, \\ -Q & \text{für } i = k > j = l, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem gilt $\hat{R} - \hat{R}^- = QI$, wobei I die $N^2 \times N^2$-Einheitsmatrix bezeichnet.

Entscheidend für die Eignung der R-Matrizen zur Beschreibung von Kommutatorrelationen einer Algebra ist die Gültigkeit der Zopfgleichungen

$$\hat{R}^{ij}_{ab} \hat{R}^{bk}_{ct} \hat{R}^{ac}_{rs} = \hat{R}^{jk}_{bc} \hat{R}^{ib}_{ra} \hat{R}^{ac}_{st};$$
$$\hat{R}^{-\,ij}_{\ \ ab} \hat{R}^{-\,bk}_{\ \ ct} \hat{R}^{-\,ac}_{\ \ rs} = \hat{R}^{-\,jk}_{\ \ bc} \hat{R}^{-\,ib}_{\ \ ra} \hat{R}^{-\,ac}_{\ \ st}$$

für beliebige Indizes $i, j, k, r, s, t \in \{1, \ldots, N\}$.

Einige von diesen grundlegenden R-Matrizen abgeleitete Matrizen werden sich als hilfreich erweisen:

$$\check{R}^{ij}_{kl} = \hat{R}^{lk}_{ji}; \qquad \check{R}^{-\,ij}_{\ \ kl} = \hat{R}^{-\,lk}_{\ \ ji};$$
$$\grave{R}^{ij}_{kl} = q^{2l-2i} \hat{R}^{jl}_{ik} = q^{2k-2j} \hat{R}^{jl}_{ik}; \qquad \grave{R}^{-\,ij}_{\ \ kl} = q^{2l-2i} \hat{R}^{-\,jl}_{\ \ ik} = q^{2k-2j} \hat{R}^{-\,jl}_{\ \ ik};$$
$$\acute{R}^{ij}_{kl} = \hat{R}^{ki}_{lj}; \qquad \acute{R}^{-\,ij}_{\ \ kl} = \hat{R}^{-\,ki}_{\ \ lj}.$$

Es sei darauf hingewiesen, daß zwar alle diese Matrizen invertierbar sind, gemäß der gewählten Konvention aber $\grave{R}^-$ (und nicht $\acute{R}^-$) invers zu $\acute{R}$ ist; gleichfalls ist $\big(\grave{R}\big)^{-1} = \acute{R}^-$.

Darüber hinaus überzeugt man sich leicht davon, daß die hier angegebenen R-Matrizen folgende Gleichungen erfüllen:

$$
\begin{aligned}
\hat{R}^{ij}_{st}\hat{R}^{st}_{kl} &= \delta_{ik}\delta_{jl} + Q\hat{R}^{ij}_{kl}; &\quad \hat{R}^{-\,ij}_{\ \ st}\hat{R}^{-\,st}_{\ \ kl} &= \delta_{ik}\delta_{jl} - Q\hat{R}^{-\,ij}_{\ \ kl};\\
\check{R}^{ij}_{st}\check{R}^{st}_{kl} &= \delta_{ik}\delta_{jl} + Q\check{R}^{ij}_{kl}; &\quad \check{R}^{-\,ij}_{\ \ st}\check{R}^{-\,st}_{\ \ kl} &= \delta_{ik}\delta_{jl} - Q\check{R}^{-\,ij}_{\ \ kl};\\
\acute{R}^{ij}_{st}\grave{R}^{st}_{kl} &= \delta_{ik}\delta_{jl} + q^{-1}Qq^{2k}\delta_{ij}\delta_{kl}; &\quad \grave{R}^{-\,ij}_{\ \ st}\acute{R}^{-\,st}_{\ \ kl} &= \delta_{ik}\delta_{jl} - qQq^{-2i}\delta_{ij}\delta_{kl};\\
\grave{R}^{ij}_{st}\acute{R}^{st}_{kl} &= \delta_{ik}\delta_{jl} + q^{2N+1}Qq^{-2i}\delta_{ij}\delta_{kl}; &\quad \acute{R}^{-\,ij}_{\ \ st}\grave{R}^{-\,st}_{\ \ kl} &= \delta_{ik}\delta_{jl} - q^{-2N-1}Qq^{2k}\delta_{ij}\delta_{kl};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{N} q^{-2s}\hat{R}^{si}_{sk} &= q^{-1}\delta_{ik}; &\qquad \sum_{s=1}^{N} q^{-2s}\hat{R}^{-\,si}_{\ \ sk} &= q^{-2N-1}\delta_{ik};\\
\sum_{s=1}^{N} q^{2s}\hat{R}^{is}_{ks} &= q^{2N+1}\delta_{ik}; &\qquad \sum_{s=1}^{N} q^{2s}\hat{R}^{-\,is}_{\ \ ks} &= q\delta_{ik}.
\end{aligned}
$$

1.3 Die Quantengruppen $\mathrm{SU}_q(N)$

Wir beschreiben nun kurz die Quantengruppen $\mathrm{SU}_q(N)$, vgl. hierzu [RTF]. Für jedes $N \geq 2$ ist die Quantengruppe $\mathrm{SU}_q(N)$ die von den N^2 Elementen u^i_j mit den Relationen

$$
\begin{aligned}
\hat{R}^{ij}_{st}u^s_k u^t_l &= \hat{R}^{st}_{kl}u^i_s u^j_t\\
\det_q u &= 1
\end{aligned}
$$

erzeugte Algebra. Hierbei ist die quantisierte Determinante $\det_q u$ definiert durch

$$
\det_q u := \sum_{\sigma\in\mathbf{S}(N)} (-q)^{\ell(\sigma)} u^1_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot u^N_{\sigma(N)},
$$

wobei für jede Permutation $\sigma \in \mathbf{S}(N)$ von $(1,\ldots,n)$ mit $\ell(\sigma)$ die Länge der Permutation, also die Anzahl der Inversionen derselben, bezeichnet wird.

Für $q = 1$ ist dies die Koordinatenalgebra über der Matrixgruppe $\mathrm{SU}(N)$.

Die Algebra $\mathrm{SU}_q(N)$ ist eine Hopfalgebra mit der Komultiplikation Δ, der Koeins ε und der Antipodenabbildung S, die durch

$$\begin{aligned}\Delta(u^i_j) &:= u^i_s \otimes u^s_j\\ \varepsilon(u^i_j) &:= \delta_{ij}\\ S(u^i_j) &:= \sum_{\sigma\in\mathbf{S}(N-1)} (-q)^{\ell(\sigma)} u^1_{\sigma(1)} \cdot \ldots \widehat{j} \ldots \cdot u^N_{\sigma(N-1)}\end{aligned}$$

definiert sind. In der Gleichung der Antipodenabbildung S ist dabei jede Permutation $\sigma \in \mathbf{S}(N-1)$ als bijektive Abbildung von $\{1,2,\ldots,N\}\setminus\{j\}$ in $\{1,2,\ldots,N\}\setminus\{i\}$ zu verstehen. Das Produkt $u^1_{\sigma(1)} \cdot \ldots \widehat{j} \ldots \cdot u^N_{\sigma(N-1)}$ ist über die oberen Indizes von 1 bis N mit Ausnahme von j zu nehmen. Mit $\ell(\sigma)$ wird wiederum die Länge der Permutation bezeichnet.

1.4 Kodarstellungen der Quantengruppen $\mathrm{SU}_q(N)$

Ein wesentliches Hilfsmittel bei der Klassifikation von Differentialkalkülen auf Quantenräumen sind Matrixkodarstellungen der zugehörigen Quantengruppen. Wir erinnern daher zunächst an wichtige Begriffsbildungen zu Matrixkodarstellungen. Da wir keine anderen Kodarstellungen als Matrixkodarstellungen benötigen, werden wir in den folgenden Kapiteln zumeist abkürzend von Kodarstellungen sprechen; gemeint sind stets Matrixkodarstellungen.

Definition 1.3: *Es sei $\mathcal{A}$ eine Hopfalgebra mit der Komultiplikation Δ und der Koeins ε, V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $v : V \to V \otimes \mathcal{A}$ eine lineare Abbildung, für die die Identitäten $(v \otimes \mathrm{id})v = (\mathrm{id} \otimes \Delta)v$ und $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)v = \mathrm{id}$ gelten. Dann heißt v* ***Matrixkodarstellung von $\mathcal{A}$*** *über dem Vektorraum V.*

Sind V_1 und V_2 zwei endlichdimensionale Vektorräume mit Matrixkodarstellungen $v_1 : V_1 \to V_1 \otimes \mathcal{A}$ und $v_2 : V_2 \to V_2 \otimes \mathcal{A}$, so ist die in natürlicher Weise definierte direkte Summe dieser Matrixkodarstellungen $v_1 \oplus v_2 : V_1 \oplus V_2 \to (V_1 \oplus V_2) \otimes \mathcal{A}$ eine Matrixkodarstellung von $\mathcal{A}$ auf dem ebenfalls endlichdimensionalen Vektorraum $V_1 \oplus V_2$. Gleichfalls ist das Tensorprodukt $v_1 \otimes v_2 : V_1 \otimes V_2 \to V_1 \otimes V_2 \otimes \mathcal{A}$ eine Matrixkodarstellung von $\mathcal{A}$ auf dem endlichdimensionalen Vektorraum $V_1 \otimes V_2$.

Ist $v : V \to V \otimes \mathcal{A}$ eine Matrixkodarstellung von $\mathcal{A}$ und V_1 ein Untervektorraum von V, so heißt V_1 ***invariant*** *unter v, wenn $v(V_1) \subseteq V_1 \otimes \mathcal{A}$ gilt. Eine Matrixkodarstellung $v : V \to V \otimes \mathcal{A}$, deren einzige invariante Untervektorräume $\{0\}$ und V sind, heißt* ***irreduzibel.***

Ist $\{e_1, \ldots, e_m\}$ eine Basis des Vektorraums V und ist $v : V \to V \otimes \mathcal{A}$ eine Matrixkodarstellung von $\mathcal{A}$, so kann v durch eine Matrix $(v^i_j)_{i,j=1,\ldots,m}$ von Elementen $v^i_j \in \mathcal{A}$ dergestalt beschrieben werden, daß $v(e_j) = e_i \otimes v^i_j$ für $j = 1, \ldots, m$ gilt (daher der Name Matrixkodarstellung).

Insbesondere ist durch die aus den Erzeugenden u^i_j der Quantengruppe $\mathrm{SU}_q(N)$ gebildete Matrix $u := (u^i_j)_{i=1,\ldots,N}$ eine Matrixkodarstellung von $\mathrm{SU}_q(N)$ gegeben, die als **Fundamentalkodarstellung** bezeichnet wird. Eine weitere wichtige Matrixkodarstellung von $\mathrm{SU}_q(N)$ ist u^{c}, die **Kontragrediente der Fundamentalkodarstellung,** die durch $u^{\mathrm{c}} := ({u^i_j}^*)_{i,j=1,\ldots,N} = (S(u^j_i))_{i,j=1,\ldots,N}$ gegeben ist.

In [Hay] wurde gezeigt, daß die Matrixkodarstellungen der Quantengruppe $\mathrm{SU}_q(N)$ auf dieselbe Weise in direkte Summen irreduzibler Matrixkodarstellungen (auf invarianten Untervektorräumen) zerfallen wie die Matrixdarstellungen der Gruppe $\mathrm{SU}(N)$ in irreduzible Matrixdarstellungen. (Dabei ist zu beachten, daß q reell und von 0, 1 und -1 verschieden und somit keine Einheitswurzel ist.)

Dadurch ist die gut untersuchte Darstellungstheorie der Matrixgruppe $\mathrm{SU}(N)$ auf Matrixkodarstellungen von $\mathrm{SU}_q(N)$ direkt übertragbar.

Insbesondere können daher Tensorprodukte von Matrixkodarstellungen von $\mathrm{SU}_q(N)$ ebenso wie Tensorprodukte von Matrixdarstellungen von $\mathrm{SU}(N)$ mit Hilfe von Young-Diagrammen in ihre irreduziblen direkten Summanden zerlegt werden.

Wir geben dieses Verfahren hier in seinen Grundzügen an und folgen dabei der Beschreibung in [BR] für Darstellungen von $\mathrm{SU}(N)$, mit dem Unterschied, daß wir die Aussagen bereits für Kodarstellungen von $\mathrm{SU}_q(N)$ formulieren.

Ein Young-Diagramm (Young diagram, Young frame) ist eine Anordnung von Kästchen gleicher Größe in lückenlosen waagerechten Zeilen, bei der die ersten Kästchen aller Zeilen untereinanderstehen und keine Zeile mehr Kästchen enthält als eine darüberstehende. (Werden in die Kästchen eines Young-Diagramms gemäß bestimmter Regeln Zahlen eingetragen, so erhält man ein Young-Tableau; wir gehen darauf hier nicht weiter ein.) Die Anzahl der Kästchen eines Young-Diagramms kann auch 0 sein; in diesem Fall werden wir dafür (0) schreiben.

In [BR] wird gezeigt, daß irreduzible Matrixdarstellungen von $\mathrm{SU}(N)$ eineindeutig Young-Diagrammen mit höchstens $(N-1)$ Zeilen entsprechen; aufgrund des Resultats von [Hay] entsprechen damit Matrixkodarstellungen von $\mathrm{SU}_q(N)$ ebenfalls eineindeutig Young-Diagrammen mit höchstens $(N-1)$ Zeilen. Der Fundamentalkodarstellung u entspricht dabei das Young-Diagramm $\square$, ihrer Kontragredienten u^{c} das Young-Diagramm $\left.\begin{matrix}\square\\ \vdots\\ \square\end{matrix}\right\}(N-1 \text{ Zeilen})$. Das Diagramm (0) entspricht der trivialen Kodarstellung der Dimension 1.

Die irreduziblen direkten Summanden des Tensorproduktes zweier gegebener irreduzibler Matrixkodarstellungen v_1 und v_2 (und damit auch zweier beliebiger Matrixkodarstellungen) können nun mittels des nachfolgend beschriebenen Verfahrens, das wiederum aus [BR] entnommen ist, bestimmt werden.

Das Young-Diagramm von v_1 wird festgehalten; daran werden die Kästchen des Young-Diagramms von v_2 auf jede unter Beachtung der folgenden Regeln (i)–(iii) zulässige Weise angefügt.

(i) Die entstehende Anordnung von Kästchen muß aus höchstens N Zeilen bestehen, wobei wiederum keine Zeile mehr Kästchen enthält als eine darüberstehende.

(ii) Zwei Kästchen, die im Young-Diagramm von v_2 in derselben Zeile stehen, dürfen nicht in derselben Spalte des neuen Diagramms stehen.

(iii) Werden die Kästchen im neuen Diagramm zeilenweise von oben nach unten und innerhalb jeder Zeile von rechts nach links abgeschritten, so darf in keinem Anfangsstück dieser Folge die Anzahl der einer bestimmten Zeile aus dem Young-Diagramm von v_2 entstammenden Kästchen größer sein als die Anzahl der einer darüberstehenden Zeile aus dem Young-Diagramm von v_2 entstammenden Kästchen.

Aus den so entstehenden Young-Diagrammen werden abschließend alle Spalten der Länge N gestrichen, so daß wiederum Young-Diagramme mit höchstens $N-1$ Zeilen entstehen. Diese Young-Diagramme entsprechen den irreduziblen direkten Summanden des Tensorproduktes $v_1 \otimes v_2$, wobei das Auftreten mehrerer gleicher Diagramme eine entsprechende Vielfachheit der betreffenden irreduziblen Kodarstellung in der Zerlegung des Tensorproduktes kennzeichnet.

1.5 Die Quantensphären S_q^{2N-1}

Wir stellen nun die wichtigsten Fakten über die Quantensphären S_q^{2N-1} zusammen, vgl. [VS], [RTF], [NYM].

Definition 1.4: *Es sei X die unitale Algebra mit $2N$ Erzeugenden z_i, z_i^*, $i = 1, \ldots, N$, und den definierenden Relationen*

$$\begin{aligned} z_i z_j &= q z_j z_i && (1 \le i < j \le N) \\ z_i^* z_j^* &= q^{-1} z_j^* z_i^* && (1 \le i < j \le N) \\ z_i z_j^* &= q z_j^* z_i && (1 \le i, j \le N; i \ne j) \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$z_i^* z_i - z_i z_i^* = q^{-1} Q \sum_{k>i} z_k z_k^* = 0, \tag{1.2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} z_i z_i^* = 1. \tag{1.3}$$

Mit der durch $(z_i)^* := z_i^*$, $(z_i^*)^* := z_i$ gegebenen Involution $*$ ist diese Algebra eine $*$-Algebra. Sie heißt **Quantensphäre** *und wird mit S_q^{2N-1} bezeichnet.*

Wir bemerken zunächst, daß die Relationen (1.1) und (1.2) mit den R-Matrizen aus Abschnitt 1.2 in der Form

$$\hat{R}^{kl}_{ij} z_k z_l = q z_i z_j; \qquad \check{R}^{-}{}^{kl}_{ij} z_k^* z_l^* = q^{-1} z_i^* z_j^*; \qquad \acute{R}^{kl}_{ij} z_k z_l^* = q z_i^* z_j \tag{1.4}$$

geschrieben werden können. Äquivalent dazu sind

$$\hat{R}^{-}{}^{kl}_{ij} z_k z_l = q^{-1} z_i z_j; \qquad \check{R}^{kl}_{ij} z_k^* z_l^* = q z_i^* z_j^*; \qquad \grave{R}^{-}{}^{kl}_{ij} z_k^* z_l = q^{-1} z_i z_k^*. \tag{1.5}$$

Aus (1.5) liest man insbesondere folgende, zu (1.2) äquivalente, Gleichung ab:

$$z_i z_i^* - z_i^* z_i = -qQ \sum_{k>i} q^{2i-2k} z_k^* z_k. \tag{1.6}$$

Schließlich ist Gleichung (1.3) vermöge (1.2) äquivalent zu

$$\sum_{i=1}^{N} q^{-2i} z_i^* z_i = q^{-2}. \tag{1.7}$$

Satz 1.1: *Die Quantensphäre S_q^{2N-1} ist ein homogener Quantenraum für die Quantengruppe $\mathrm{SU}_q(N)$ mit der durch*

$$\Delta_{\mathrm{R}}(z_i) = \sum_{j=1}^{N} z_j \otimes u_i^j, \qquad \Delta_{\mathrm{R}}(z_i^*) = \sum_{j=1}^{N} z_j^* \otimes S(u_j^i) \tag{1.8}$$

gegebenen Kowirkung Δ_{R} und der durch

$$\iota(z_i) = u_i^1; \qquad \iota(z_i^*) = S(u_1^i) \tag{1.9}$$

gegebenen Einbettung.

Beweis: Man rechnet anhand der Relationen (1.1)–(1.3) der Quantensphäre sowie der definierenden Relationen der Quantengruppe leicht nach, daß durch die Gleichungen (1.9) ein injektiver Algebrenhomomorphismus gegeben wird. Damit ist S_q^{2N-1} ein homogener Quantenraum für $\mathrm{SU}_q(N)$ mit der durch $\Delta_\mathrm{R} = \Delta \circ \iota$ gegebenen Kowirkung. Aus den Gleichungen für die Komultiplikation Δ in $\mathrm{SU}_q(N)$ folgen dann unmittelbar die Gleichungen (1.8), die ihrerseits Δ_R vollständig bestimmen. $\square$

Folgerung 1.2: *Die Einschränkung der Kowirkung Δ_R auf den von den Erzeugenden z_i, $i = 1, \ldots, N$, der Quantensphäre S_q^{2N-1} aufgespannten Vektorraum ergibt die Fundamentalkodarstellung u von $\mathrm{SU}_q(N)$, die Einschränkung auf den von den verbleibenden Erzeugenden z_i^*, $i = 1, \ldots, N$, aufgespannten Vektorraum deren Kontragrediente u^c.*

Beweis: Die Behauptung kann unmittelbar aus den Formeln für die Kowirkung Δ_R abgelesen werden. $\square$

Kapitel 2: Differentialkalküle erster Ordnung

Die Basis der kovarianten Differentialrechnung auf Quantenräumen bilden Differentialkalküle erster Ordnung. Deshalb ist dieses Kapitel der Untersuchung kovarianter Differentialkalküle erster Ordnung auf den Quantensphären gewidmet. Wir werden solche Differentialkalküle unter geeigneten Nebenbedingungen klassifizieren und Zusammenhänge zwischen diesen aufzeigen. Obwohl auch unter den gewählten Nebenbedingungen noch eine große Vielfalt von Kalkülen existiert, können wir abschließend einen davon kennzeichnen, der mehrere für den Aufbau einer kovarianten Differentialrechnung und nichtkommutativen Geometrie der Quantensphären bedeutsame Eigenschaften aufweist.

2.1 Definitionen und Konventionen

Wir beginnen mit der Zusammenstellung einiger grundlegender Definitionen für Differentialkalküle erster Ordnung auf Quantenräumen.

Entsprechende Definitionen für Differentialkalküle erster Ordnung im Falle der Quantengruppen finden sich bei Woronowicz [Wor2] sowie bei Klimyk und Schmüdgen [KS] und wurden z. B. in den Arbeiten zur Klassifikation von Differentialkalkülen auf Quantengruppen von Schmüdgen und Schüler [SS1, SS2] benutzt. Auch für die uns interessierende Situation von Quantenräumen, speziell homogenen Quantenräumen, sind diese Definitionen eingeführt, vgl. dazu Apel und Schmüdgen [AS], Klimyk und Schmüdgen [KS].

Definition 2.1: *Ein* ***Differentialkalkül erster Ordnung*** *auf einer Algebra X ist ein Paar (Γ, d) aus einem Bimodul Γ über X und einer linearen Abbildung $\mathrm{d} : X \to \Gamma$, die der Leibnizregel $\mathrm{d}(xy) = (\mathrm{d}x)y + x(\mathrm{d}y)$ für alle $x, y \in X$ genügt, wobei gilt $\Gamma = \mathrm{Lin}\{x\mathrm{d}y \mid x, y \in X\}$. Die Elemente von Γ heißen* ***1-Formen.***

Zwei Differentialkalküle (Γ_1, d_1) und (Γ_2, d_2) heißen ***isomorph*** *genau dann, wenn eine bijektive lineare Abbildung $\psi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ mit $\psi(x \cdot \mathrm{d}_1 y \cdot z) = x \cdot \mathrm{d}_2 y \cdot z$ für alle $x, y, z \in X$ existiert.*

Bemerkung: Diese Definition stellt eine Verallgemeinerung gegenüber der herkömmlichen kommutativen Differentialrechnung dar; es ist insbesondere darauf hinzuweisen, daß auch für eine kommutative Algebra X Differentialkalküle gemäß dieser Definition existieren können, die nicht kommutativ sind, vgl. auch Abschnitt 2.3.3.

Definition 2.2: *Ein Differentialkalkül erster Ordnung* (Γ, d) *auf einem Quantenraum* (X, Δ_{R}) *zur Quantengruppe* $\mathcal{A}$ *heißt (rechts-)* ***kovariant*** *(bezüglich* $\mathcal{A}$*), falls es eine lineare Abbildung* $\Phi_{\mathrm{R}} : \Gamma \longrightarrow \Gamma \otimes \mathcal{A}$ *mit der Eigenschaft gibt, daß für alle* $x, y \in X$, $\omega \in \Gamma$ *die Beziehungen* $(\Phi_{\mathrm{R}} \otimes \mathrm{id})\Phi_{\mathrm{R}} = (\mathrm{id} \otimes \Delta)\Phi_{\mathrm{R}}$; $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Phi_{\mathrm{R}} = \mathrm{id}$; $\Phi_{\mathrm{R}}(x\omega y) = \Delta_{\mathrm{R}}(x)\Phi_{\mathrm{R}}(\omega)\Delta_{\mathrm{R}}(y)$; $\Phi_{\mathrm{R}}(\mathrm{d}x) = (\mathrm{d} \otimes \mathrm{id})\Delta_{\mathrm{R}}(x)$ *gelten. Eine 1-Form* ω *heißt* ***invariant,*** *falls* $\Phi_{\mathrm{R}}(\omega) = \omega \otimes 1$.

Definition 2.3: *Ist* X *eine* $*$*-Algebra und* (Γ, d) *ein Differentialkalkül erster Ordnung auf* X*, so wird* (Γ, d) *als* $*$*-Kalkül bezeichnet, falls mit* $\sum_k x_k \mathrm{d}y_k = 0$ *für* $x_k, y_k \in X$ *stets auch* $\sum_k \mathrm{d}(y_k^*)x_k^* = 0$ *gilt.*

Entsprechend obiger Definition wird der Bimodul Γ der 1-Formen als Linksmodul (und damit vermittels der Leibnizregel auch als Rechtsmodul) von den Differentialen $\mathrm{d}y$ der Algebraelemente $y \in X$ erzeugt. Gelingt es für einen Differentialkalkül, ein geeignetes Erzeugendensystem für den Linksmodul Γ in der Form $\{\mathrm{d}y_1, \mathrm{d}y_2, \ldots, \mathrm{d}y_r\}$ mit $y_1, y_2, \ldots, y_r \in X$ anzugeben, so ist der Differentialkalkül vollständig bestimmt, wenn

- alle Relationen im Linksmodul Γ beschrieben werden und
- die Bimodulstruktur des Differentialkalküls angegeben wird, also ein Satz von Gleichungen, die es gestatten, jeden beliebigen Bimodulausdruck aus Γ in einen Linksmodulausdruck umzuformen.

Ist $\{\mathrm{d}y_1, \mathrm{d}y_2, \ldots, \mathrm{d}y_r\}$ wie oben ein Erzeugendensysten für Γ und $\{x_1, x_2, \ldots, x_s\}$ ein solches für X, so genügt es zur eindeutigen Beschreibung der Bimodulstruktur offensichtlich, Gleichungen anzugeben, die die Umrechnung jedes Ausdrucks $\mathrm{d}y_i \cdot x_j$ in einen Linksmodulausdruck ermöglichen.

Die Verträglichkeit der Bimodulstruktur mit eventuellen Relationen im Linksmodul Γ sowie mit den Relationen der Algebra X ist dabei jeweils noch nachzuweisen.

Wir werden im folgenden Differentialkalküle erster Ordnung in der Regel in dieser Weise beschreiben. Andere Charakterisierungen von Erzeugendensystemen für Γ erscheinen hier unzweckmäßig, insbesondere ist die Wahl einer Basis aus invarianten 1-Formen, wie sie z. B. zur Beschreibung der bikovarianten Differentialkalküle auf Quantengruppen in [Wor2, SS1, SS2] benutzt wird, hier nicht möglich.

Wir weisen darauf hin, daß bei der hier vorgestellten Beschreibungsweise für Differentialkalküle erster Ordnung Fragen zur Isomorphie besonders einfach beantwortet werden können: Zwei Differentialkalküle (Γ_1, d_1) und (Γ_2, d_2), deren Linksmodulerzeugendensysteme $\{\mathrm{d}_1 y_1, \mathrm{d}_1 y_2, \ldots, \mathrm{d}_1 y_r\}$ und $\{\mathrm{d}_2 y_1, \mathrm{d}_2 y_2, \ldots, \mathrm{d}_2 y_r\}$ (mit denselben y_i in beiden Fällen!) sind, sind offensichtlich genau dann isomorph, wenn in ihnen (bis auf Ersetzung von d_1 durch d_2) dieselben Linksmodulrelationen und dieselben Gleichungen für die Bimodulstruktur gelten.

2.2 Klassifikation kovarianter Differentialkalküle erster Ordnung auf den Quantensphären

In diesem Abschnitt sollen $*$-Differentialkalküle erster Ordnung auf den Quantensphären beschrieben und klassifiziert werden. Um eine solche Klassifikation erreichen zu können, muß zusätzlich zu den definitionsgemäßen Eigenschaften solcher Kalküle die Erfüllung geeigneter Nebenbedingungen gefordert werden.

Eine gebräuchliche Form solcher Klassifikationsbedingungen stellen Dimensionsbeschränkungen dar, vgl. die Klassifikationsresultate für Differentialkalküle auf Quantengruppen in den Arbeiten von Schmüdgen und Schüler [SS1, SS2] sowie für die Quantensphären nach Podleś in der Arbeit von Apel und Schmüdgen [AS]. Konkret fordert man zumeist, daß die Differentiale der Erzeugenden der zugrundeliegenden Algebra (Quantengruppe bzw. Quantenraum) den Modul der 1-Formen als Linksmodul erzeugen. Dazu können Forderungen hinsichtlich der algebraischen Unabhängigkeit dieser Erzeugenden treten.

Wir klassifizieren kovariante Differentialkalküle erster Ordnung auf den Quantensphären unter zwei leicht unterschiedlichen Festlegungen der Nebenbedingungen, die jetzt näher charakterisiert werden sollen.

Zunächst führen wir Bezeichnungen für zwei invariante 1-Formen in allen diesen Kalkülen ein, und zwar

$$\Omega_+ = \sum_{i=1}^{N} z_i \mathrm{d} z_i^*; \qquad \Omega_- = \sum_{i=1}^{N} q^{-2i} z_i^* \mathrm{d} z_i.$$

Unsere erste Klassifikationsbedingung entspricht derjenigen einer Reihe früherer Klassifikationsresultate für Differentialkalküle auf Quantengruppen und Quantenräumen: wir fordern, daß die Differentiale der Erzeugenden der Quantensphäre den Bimodul der 1-Formen als X-Linksmodul frei erzeugen. Außerdem fordern wir, daß die aufzufindenden Differentialkalküle $*$-Kalküle sein sollen.

Definition 2.4: *Ein $*$-Differentialkalkül erster Ordnung* (Γ, d) *auf der Quantensphäre* S_q^{2N-1}*, der kovariant bezüglich der Kowirkung der Quantengruppe* $\mathrm{SU}_q(N)$ *auf* S_q^{2N-1} *ist und für den die Menge* $\{\mathrm{d}z_i, \mathrm{d}z_i^* \mid i = 1, \ldots, N\}$ *eine freie Linksmodulbasis für* Γ *ist, heißt* ***freier kovarianter $*$-Differentialkalkül erster Ordnung.***

In jedem freien $*$-Differentialkalkül erster Ordnung auf S_q^{2N-1} bilden alle invarianten 1-Formen einen von Ω_+ und Ω_- erzeugten Vektorraum. Dabei sind Ω_+ und Ω_- linear unabhängig, der Vektorraum ist also zweidimensional. Dies entspricht nicht den Verhältnissen im klassischen Fall, denn für $q = 1$ gilt $\Omega_+ + \Omega_- = \mathrm{d}\big(\sum z_i z_i^*\big) = \mathrm{d}(1) = 0$; der Vektorraum der invarianten 1-Formen ist demnach eindimensional.

Dies nehmen wir zum Anlaß, als zweiten Fall solche Differentialkalküle erster Ordnung zu betrachten, die ebenfalls eine Relation dieser Form $\Omega_0 = 0$ mit einem invarianten Element Ω_0 (das notwendig eine Linearkombination von Ω_+ und Ω_- ist) tragen. In diesem zweiten Fall erstrecken wir die Untersuchungen auch auf solche Differentialkalküle, die keine $*$-Kalküle sind.

Definition 2.5: *Ein Differentialkalkül erster Ordnung* (Γ, d) *auf der Quantensphäre* S_q^{2N-1}*, der kovariant bezüglich der Kowirkung der Quantengruppe* $\mathrm{SU}_q(N)$ *auf* S_q^{2N-1} *ist, für den* $\{\mathrm{d}z_i, \mathrm{d}z_i^* \mid i = 1, \ldots, N\}$ *ein Linksmodul-Erzeugendensystem für* Γ *ist und in dem nur solche Relationen zwischen 1-Formen bestehen, die von einer einzigen Relation der Form* $\Omega_0 = 0$ *mit einer invarianten 1-Form* Ω_0 *algebraisch erzeugt werden, heißt* ***fast-freier kovarianter Differentialkalkül erster Ordnung.*** *Ein fast-freier kovarianter Differentialkalkül erster Ordnung, der zugleich $*$-Differentialkalkül ist, heißt* ***fast-freier kovarianter $*$-Differentialkalkül erster Ordnung.***

Es wird sich herausstellen, daß in vielen freien kovarianten $*$-Differentialkalkülen (Γ, d) auf S_q^{2N-1} eine invariante 1-Form Ω_0 existiert, die einen Unterbimodul in Γ als Linksmodul erzeugt. In diesen Fällen ergibt eine Faktorisierung von Γ nach diesem Unterbimodul einen fast-freien $*$-Differentialkalkül. Auf diese Faktorisierungen gehen wir in Abschnitt 2.3.1 genauer ein.

2.2.1 Klassifikation freier $*$-Differentialkalküle erster Ordnung auf den Quantensphären

Theorem 2.1: *Auf S_q^{2N-1} gibt es freie kovariante $*$-Differentialkalküle erster Ordnung*

- $(\Gamma, \mathrm{d}) = (\Gamma_{\alpha\tau}, \mathrm{d})$ *mit* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, q^{-2}\}$ *und* $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- $(\Gamma, \mathrm{d}) = (\Gamma'_{\alpha\omega}, \mathrm{d})$ *mit* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, q^{-2}\}$ *und* $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *sowie mit* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *und* $\omega = q^4 \alpha\overline{\alpha}$,
- $(\Gamma, \mathrm{d}) = (\Gamma''_{\omega\psi}, \mathrm{d})$ *mit* $\omega = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *und* $\psi \in \mathbb{R}$,
- $(\Gamma, \mathrm{d}) = (\Gamma'''_{\varrho\tau}, \mathrm{d})$ *mit* $\varrho, \tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

deren Bimodulstruktur durch die folgenden Gleichungen beschrieben wird:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\alpha\tau}:\ \mathrm{d}z_k z_l &= q\alpha \hat{R}^{-\,st}_{\ kl} z_s \mathrm{d}z_t && +(q^2\alpha - 1) z_k \mathrm{d}z_l \\
&&& +q^2\alpha^2(1 - \mathfrak{s}'_+\tau) z_k z_l \Omega_+ \\
&&& +q^2(1 - \alpha\mathfrak{s}'_+\tau) z_k z_l \Omega_- \\
\mathrm{d}z_k^* z_l^* &= q^{-1}\alpha^{-1} \check{R}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t^* && +(q^{-2}\alpha^{-1} - 1) z_k^* \mathrm{d}z_l^* \\
&&& +(1 - \mathfrak{s}'_+\tau) z_k^* z_l^* \Omega_+ \\
&&& +\alpha^{-2}(1 - \alpha\mathfrak{s}'_+\tau) z_k^* z_l^* \Omega_- \\
\mathrm{d}z_k z_l^* &= q^{-1}\alpha^{-1} \grave{R}^{-\,st}_{\ kl} z_s^* \mathrm{d}z_t && +(q^2\alpha - 1) z_k \mathrm{d}z_l^* \\
&&& -q^2\alpha(1 - \mathfrak{s}_+\tau) z_k z_l^* \Omega_+ - \alpha\tau q^{2k}\delta_{kl}\Omega_+ \\
&&& -\alpha^{-1}(1 - q^2\alpha\mathfrak{s}_+\tau) z_k z_l^* \Omega_- - \tau q^{2k}\delta_{kl}\Omega_- \\
\mathrm{d}z_k^* z_l &= q\alpha \acute{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t^* && +(q^{-2}\alpha^{-1} - 1) z_k^* \mathrm{d}z_l \\
&&& -q^2\alpha(1 - \mathfrak{s}_+\tau) z_k^* z_l \Omega_+ - q^{2N}\alpha\tau\delta_{kl}\Omega_+ \\
&&& -\alpha^{-1}(1 - q^2\alpha\mathfrak{s}_+\tau) z_k^* z_l \Omega_- - q^{2N}\tau\delta_{kl}\Omega_-
\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma'_{\alpha\omega}:\ \mathrm{d}z_k z_l &= q\alpha \hat{R}^{-\,st}_{\ kl} z_s \mathrm{d}z_t && +(q^2\alpha - 1) z_k \mathrm{d}z_l \\
&&& +\omega z_k z_l \Omega_+ + (\alpha^{-1}\omega - q^2(\alpha - 1)) z_k z_l \Omega_- \\
\mathrm{d}z_k^* z_l^* &= q^{-1}\overline{\alpha}^{-1} \check{R}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t^* && +(q^{-2}\overline{\alpha}^{-1} - 1) z_k^* \mathrm{d}z_l^* \\
&&& +(q^2\overline{\alpha}\omega^{-1} - (\overline{\alpha}^{-1} - 1)) z_k^* z_l^* \Omega_+ \\
&&& +q^2\omega^{-1} z_k^* z_l^* \Omega_- \\
\mathrm{d}z_k z_l^* &= q^{-1}\alpha^{-1} \grave{R}^{-\,st}_{\ kl} z_s^* \mathrm{d}z_t && +(q^2\overline{\alpha} - 1) z_k \mathrm{d}z_l^* \\
&&& -q^2\overline{\alpha} z_k z_l^* \Omega_+ - \alpha^{-1} z_k z_l^* \Omega_- \\
\mathrm{d}z_k^* z_l &= q\overline{\alpha} \acute{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t^* && +(q^{-2}\alpha^{-1} - 1) z_k^* \mathrm{d}z_l \\
&&& -q^2\overline{\alpha} z_k^* z_l \Omega_+ - \alpha^{-1} z_k^* z_l \Omega_-
\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma''_{\omega\psi}: \ \mathrm{d}z_k z_l &= q^{-1}\hat{R}^{-\,st}_{\ \,kl} z_s \mathrm{d}z_t && +\omega z_k z_l \Omega_+ && +(q^2\omega\psi - 1) z_k z_l \Omega_- \\
\mathrm{d}z_k^* z_l^* &= q\check{R}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t^* && +(\psi - q^2) z_k^* z_l^* \Omega_+ && +q^2\omega^{-1} z_k^* z_l^* \Omega_- \\
\mathrm{d}z_k z_l^* &= q\grave{R}^{-\,st}_{\ \,kl} z_s^* \mathrm{d}z_t && -z_k z_l^* \Omega_+ && -q^2 z_k z_l^* \Omega_- \\
\mathrm{d}z_k^* z_l &= q^{-1}\acute{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t^* && -z_k^* z_l \Omega_+ && -q^2 z_k^* z_l \Omega_-
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma'''_{\varrho\tau}: \ \mathrm{d}z_k z_l &= q^{-1}\hat{R}^{-\,st}_{\ \,kl} z_s \mathrm{d}z_t && -q^{-2}\frac{\varrho}{\tau}(\mathfrak{s}'_+\varrho - 1) z_k z_l \Omega_+ - \frac{\varrho}{\tau}(\mathfrak{s}'_+\tau - q^2) z_k z_l \Omega_- \\
\mathrm{d}z_k^* z_l^* &= q\check{R}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t^* && -\frac{\tau}{\varrho}(\mathfrak{s}'_+\varrho - 1) z_k^* z_l^* \Omega_+ - q^2\frac{\tau}{\varrho}(\mathfrak{s}'_+\tau - q^2) z_k^* z_l^* \Omega_- \\
\mathrm{d}z_k z_l^* &= q\grave{R}^{-\,st}_{\ \,kl} z_s^* \mathrm{d}z_t && -q^{-2}\varrho q^{2k}\delta_{kl}\Omega_+ - \tau q^{2k}\delta_{kl}\Omega_- \\
& && +(\mathfrak{s}_+\varrho - 1) z_k z_l^* \Omega_+ + q^2(\mathfrak{s}_+\tau - 1) z_k z_l^* \Omega_- \\
\mathrm{d}z_k^* z_l &= q^{-1}\acute{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t^* && -q^{2N-2}\varrho\delta_{kl}\Omega_+ - q^{2N}\tau\delta_{kl}\Omega_- \\
& && +(\mathfrak{s}_+\varrho - 1) z_k^* z_l \Omega_+ + q^2(\mathfrak{s}_+\tau - 1) z_k^* z_l \Omega_-
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Gilt $N \geq 4$, so ist jeder freie kovariante $*$-Differentialkalkül erster Ordnung (Γ, d) *auf* S_q^{2N-1} *zu einem der freien kovarianten $*$-Differentialkalküle* $(\Gamma_{\alpha\tau}, \mathrm{d})$, $(\Gamma'_{\alpha\omega}, \mathrm{d})$, $(\Gamma''_{\omega\psi}, \mathrm{d})$, $(\Gamma'''_{\varrho\tau}, \mathrm{d})$ *isomorph.*

Der Beweis dieses Theorems wird in den Abschnitten 2.2.3 ff. gegeben.

Folgerung 2.2: *Die Differentialkalküle* $(\Gamma_{\alpha\tau}, \mathrm{d})$, $(\Gamma'_{\alpha\omega}, \mathrm{d})$, $(\Gamma''_{\omega\psi}, \mathrm{d})$ *und* $(\Gamma'''_{\varrho\tau}, \mathrm{d})$ *sind paarweise nicht isomorph. Keiner der Differentialkalküle* $(\Gamma_{\alpha\tau}, \mathrm{d})$, $(\Gamma'_{\alpha\omega}, \mathrm{d})$, $(\Gamma''_{\omega\psi}, \mathrm{d})$, $(\Gamma'''_{\varrho\tau}, \mathrm{d})$ *aus Theorem 2.1 ist ein innerer Kalkül.*

Beweis: Wir zeigen, daß in keinem der Kalküle eine invariante 1-Form $\tilde{\Omega} = \alpha\Omega_+ + \beta\Omega_-$ mit $\mathrm{d}x = \tilde{\Omega}x - x\tilde{\Omega}$ für alle $x \in \mathrm{S}_q^{2N-1}$ existiert.

In $\Gamma_{\alpha\tau}$ und $\Gamma'_{\alpha\omega}$ gilt

$$
\begin{aligned}
\Omega_+ z_m &= -\alpha^{-1} z_m \Omega_- + \nu z_m(\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-) + (q^{-2}\alpha^{-1} - 1)\mathrm{d}z_m \\
(\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-) z_m &= \alpha z_m (\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-)
\end{aligned}
$$

mit $\nu = \alpha\mathfrak{s}'_+\tau$ für $\Gamma_{\alpha\tau}$ und $\nu = 0$ für $\Gamma'_{\alpha\omega}$, während in $\Gamma''_{\omega\psi}$ und $\Gamma'''_{\varrho\tau}$ jeweils sowohl $\Omega_+ z_m$ als auch $\Omega_- z_m$ Linearkombinationen von $z_m\Omega_+$ und $z_m\Omega_-$ sind.

Folglich ist keiner der Kalküle ein innerer Kalkül.

Die Aussagen zur Isomorphie ergeben sich entsprechend der Feststellung aus Abschnitt 2.1 durch Vergleich der Koeffizienten in den Bimodulstrukturgleichungen; Relationen in den Linksmoduln der 1-Formen kommen für die hier betrachteten Kalküle nicht in Frage. □

Wird der Wert $\tau = 0$, der als Parameter der Kalküle $\Gamma_{\alpha\tau}$ ausgeschlossen wurde, in die Bimodulstrukturgleichungen für $\Gamma_{\alpha\tau}$ eingesetzt, so erhält man die entsprechenden Gleichungen des Differentialkalküls $\Gamma'_{\alpha\omega}$ mit demselben Wert für α und $\omega = q^2\alpha^2$. In diesem Sinne fügen sich die Kalküle $\Gamma''_{\alpha,q^2\alpha^2}$ in die „Lücke“ der Familie der Kalküle $\Gamma_{\alpha\tau}$ bei $\tau = 0$ ein.

In gleicher Weise erhält man durch Einsetzen des im Theorem nicht zugelassenen Wertes $\alpha = q^{-2}$ in die Gleichungen der Kalküle $\Gamma_{\alpha\tau}$ und $\Gamma''_{\omega\psi}$ diejenigen von $\Gamma'''_{\varrho\tau}$ mit demselben Wert für τ und $\varrho = \tau$ (im Falle $\Gamma_{\alpha\tau}$) bzw. diejenigen für $\Gamma''_{\omega\psi}$ mit demselben Wert für ω und $\psi = 1 + \omega^{-1}$.

Für die Parameter ϱ, τ der Kalküle $(\Gamma'''_{\varrho\tau}, \mathrm{d})$ kann der Wert 0 nicht ohne weiteres in die Bimodulstrukturgleichungen eingesetzt werden, da in diesem Fall einige Koeffizienten nicht definiert wären. Es können jedoch die richtungsabhängigen Grenzwerte für $\varrho \to 0$, $\tau \to 0$ mit $\varrho/\tau = \mathrm{const}$ gebildet werden, wobei sich die Bimodulstruktur von $\Gamma'''_{\varrho\tau}$ mit $\omega = q^{-2}\varrho/\tau$ und $\psi = q^2 + q^{-2}\omega^{-1}$ ergibt.

Insbesondere fügt sich damit der Differentialkalkül $\Gamma''_{q^{-2},1+q^2}$ als Grenzfall bzw. Richtungsgrenzwert in alle übrigen Familien ein, nämlich in die Familie der $\Gamma_{\alpha\tau}$ im Grenzfall $\alpha = q^{-2}, \tau = 0$, in $\Gamma'_{\alpha\omega}$ im Grenzfall $\alpha = q^{-2}, \omega = q^{-2}$ sowie in $(\Gamma'''_{\varrho\tau}, \mathrm{d})$ als Richtungsgrenzwert für $\varrho \to 0$, $\tau \to 0$, $\varrho/\tau = 1 = \mathrm{const}$.

2.2.2 Klassifikation fast-freier Differentialkalküle erster Ordnung auf den Quantensphären

Theorem 2.3: *Auf* S_q^{2N-1} *gibt es fast-freie kovariante Differentialkalküle erster Ordnung*

- $(\tilde\Gamma, \mathrm{d}) = (\tilde\Gamma_\lambda, \mathrm{d})$ *mit* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, q^2\}$,
- $(\tilde\Gamma, \mathrm{d}) = (\tilde\Gamma'_\lambda, \mathrm{d})$ *mit* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,
- $(\tilde\Gamma, \mathrm{d}) = (\tilde\Gamma''_\lambda, \mathrm{d})$ *mit* $\lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$,
- $(\tilde\Gamma, \mathrm{d}) = (\tilde\Gamma^{\bullet}_\lambda, \mathrm{d})$ *mit* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, q^2\}$,
- $(\tilde\Gamma, \mathrm{d}) = (\tilde\Gamma^{\bullet\bullet}_\lambda, \mathrm{d})$ *mit* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, q^2\}$,

in denen die Relation $\Omega_+ + \lambda\Omega_- = 0$ (falls $\lambda \in \mathbb{C}$) bzw. $\Omega_- = 0$ (falls $\lambda = \infty$) gilt und deren Bimodulstruktur durch die folgenden Gleichungen beschrieben wird:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_\lambda:\quad \mathrm{d}z_k z_l &= q\lambda^{-1}\hat{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t + (q^2\lambda^{-1}-1) z_k \mathrm{d}z_l + q^2\lambda^{-1}(\lambda^{-1}-1) z_k z_l \Omega_+ \\
\mathrm{d}z_k^* z_l^* &= q^{-1}\lambda \check{R}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t^* + (q^{-2}\lambda-1) z_k^* \mathrm{d}z_l^* - (\lambda-1) z_k^* z_l^* \Omega_+ \\
\mathrm{d}z_k z_l^* &= q^{-1}\lambda \grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t + (q^2\lambda^{-1}-1) z_k \mathrm{d}z_l^* - (q^2\lambda^{-1}-1) z_k z_l^* \Omega_+ \\
\mathrm{d}z_k^* z_l &= q\lambda^{-1} \acute{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t^* + (q^{-2}\lambda-1) z_k^* \mathrm{d}z_l - (q^2\lambda^{-1}-1) z_k^* z_l \Omega_+
\end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}'_\lambda:\quad \mathrm{d}z_k z_l &= q^{-1}\hat{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t - \lambda^{-1}(q^4\lambda^{-1}-1) z_k z_l \Omega_+ \\
\mathrm{d}z_k^* z_l^* &= q\check{R}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t^* - q^{-2}\lambda(q^4\lambda^{-1}-1) z_k^* z_l^* \Omega_+ \\
\mathrm{d}z_k z_l^* &= q\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t + (q^2\lambda^{-1}-1) z_k z_l^* \Omega_+ \\
\mathrm{d}z_k^* z_l &= q^{-1}\acute{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t^* + (q^2\lambda^{-1}-1) z_k^* z_l \Omega_+
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$\tilde{\Gamma}''_\lambda, \lambda \notin \{0,\infty\}:$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z_k z_l &= q^{-1}\hat{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t \\
\mathrm{d}z_k^* z_l^* &= q\check{R}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t^* \\
\mathrm{d}z_k z_l^* &= q\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t + q^{-2}\mathfrak{s}'_+{}^{-1}(q^4\lambda^{-1}-1) q^{2k}\delta_{kl}\Omega_+ \\
&\qquad - \mathfrak{s}'_+{}^{-1}(q^{2N+2}\lambda^{-1}-1) z_k z_l^* \Omega_+ \\
\mathrm{d}z_k^* z_l &= q^{-1}\acute{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t^* + q^{2N-2}\mathfrak{s}'_+{}^{-1}(q^4\lambda^{-1}-1)\delta_{kl}\Omega_+ \\
&\qquad - \mathfrak{s}'_+{}^{-1}(q^{2N+2}\lambda^{-1}-1) z_k^* z_l \Omega_+
\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}''_0:\quad \mathrm{d}z_k z_l &= q^{-1}\hat{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t \\
\mathrm{d}z_k^* z_l^* &= q\check{R}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t^* \\
\mathrm{d}z_k z_l^* &= q\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t - q^{-2N+2}\mathfrak{s}'_+{}^{-1} q^{2k}\delta_{kl}\Omega_- + q^2\mathfrak{s}'_+{}^{-1} z_k z_l^* \Omega_- \\
\mathrm{d}z_k^* z_l &= q^{-1}\acute{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t^* - q^2\mathfrak{s}'_+{}^{-1}\delta_{kl}\Omega_- + q^2\mathfrak{s}'_+{}^{-1} z_k^* z_l \Omega_-
\end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}''_\infty:\quad \mathrm{d}z_k z_l &= q^{-1}\hat{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t \\
\mathrm{d}z_k^* z_l^* &= q\check{R}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t^* \\
\mathrm{d}z_k z_l^* &= q\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t - q^{-2}\mathfrak{s}'_+{}^{-1} q^{2k}\delta_{kl}\Omega_+ + \mathfrak{s}'_+{}^{-1} z_k z_l^* \Omega_+ \\
\mathrm{d}z_k^* z_l &= q^{-1}\acute{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t^* - q^{2N-2}\mathfrak{s}'_+{}^{-1}\delta_{kl}\Omega_+ + \mathfrak{s}'_+{}^{-1} z_k^* z_l \Omega_+
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}^\bullet_\lambda:\quad \mathrm{d}z_k z_l &= q\lambda^{-1}\hat{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t + (\lambda^{-1}-1) z_k \mathrm{d}z_l + q^2\lambda^{-1}(\lambda^{-1}-1) z_k z_l \Omega_+ \\
\mathrm{d}z_k^* z_l^* &= q\check{R}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t^* + (q^{-2}\lambda - q^2) z_k^* z_l^* \Omega_+ \\
\mathrm{d}z_k z_l^* &= q^{-1}\lambda\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t \\
\mathrm{d}z_k^* z_l &= q^{-1}\acute{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t^* + (q^{-2}\lambda-1) z_k^* \mathrm{d}z_l
\end{aligned} \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\tilde\Gamma^{\bullet\bullet}_\lambda:\quad \mathrm{d}z_k z_l &= q^{-1}\hat R^{-}{}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t + \lambda^{-1}(1-q^4\lambda^{-1}) z_k z_l \Omega_+\\ \mathrm{d}z^*_k z^*_l &= q^{-1}\lambda \check R^{-}{}^{st}_{kl} z^*_s \mathrm{d}z^*_t + (\lambda-1) z^*_k \mathrm{d}z^*_l - (\lambda-1) z^*_k z^*_l \Omega_+\\ \mathrm{d}z_k z^*_l &= q \grave R^{-}{}^{st}_{kl} z^*_s \mathrm{d}z_t + (q^2\lambda^{-1}-1) z_k \mathrm{d}z^*_l\\ \mathrm{d}z^*_k z_l &= q\lambda^{-1} \acute R^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z^*_t\end{aligned}\tag{2.11}$$

Die Differentialkalküle $(\tilde\Gamma_\lambda, \mathrm{d})$, $(\tilde\Gamma'_\lambda, \mathrm{d})$ *und* $(\tilde\Gamma''_\lambda, \mathrm{d})$ *mit reellem* λ *(und im Falle* $(\tilde\Gamma''_\lambda, \mathrm{d})$ *auch* $\lambda = \infty$*) sind* $*$*-Kalküle.*

Gilt $N \geq 4$*, so ist jeder fast-freie kovariante Differentialkalkül erster Ordnung* (Γ, d) *auf* S_q^{2N-1} *zu einem der fast-freien kovarianten Differentialkalküle* $(\tilde\Gamma_\lambda, \mathrm{d})$, $(\tilde\Gamma'_\lambda, \mathrm{d})$, $(\tilde\Gamma''_\lambda, \mathrm{d})$, $(\tilde\Gamma^\bullet_\lambda, \mathrm{d})$, $(\tilde\Gamma^{\bullet\bullet}_\lambda, \mathrm{d})$ *isomorph und jeder fast-freie kovariante* $*$*-Differentialkalkül erster Ordnung* (Γ, d) *auf* S_q^{2N-1} *ist zu einem der fast-freien kovarianten* $*$*-Differentialkalküle* $(\tilde\Gamma_\lambda, \mathrm{d})$, $(\tilde\Gamma'_\lambda, \mathrm{d})$, $(\tilde\Gamma''_\lambda, \mathrm{d})$ *mit reellem* λ *(zuzüglich* $\lambda = \infty$ *im Falle* $(\tilde\Gamma''_\lambda, \mathrm{d})$*) isomorph.*

Auch dieses Theorem wird in den Abschnitten 2.2.3 ff. bewiesen.

Folgerung 2.4: *Die Differentialkalküle* $(\tilde\Gamma_\lambda, \mathrm{d})$ *sind innere Kalküle mit* $\mathrm{d}x = \Omega x - x\Omega$ *für* $\Omega := (q^{-2}\lambda - 1)^{-1}\Omega_+$ *und alle* $x \in \mathrm{S}_q^{2N-1}$*. Keiner der Differentialkalküle* $(\tilde\Gamma'_\lambda, \mathrm{d})$, $(\tilde\Gamma''_\lambda, \mathrm{d})$, $(\tilde\Gamma^\bullet_\lambda, \mathrm{d})$ *und* $(\tilde\Gamma^{\bullet\bullet}_\lambda, \mathrm{d})$ *ist ein innerer Kalkül.*

Die Differentialkalküle $(\tilde\Gamma_\lambda, \mathrm{d})$, $(\tilde\Gamma'_\lambda, \mathrm{d})$, $(\tilde\Gamma''_\lambda, \mathrm{d})$ *mit* $\lambda \neq q^4$, $(\tilde\Gamma^\bullet_\lambda, \mathrm{d})$ *und* $(\tilde\Gamma^{\bullet\bullet}_\lambda, \mathrm{d})$ *sind paarweise nicht isomorph.*

Die Differentialkalküle $(\tilde\Gamma'_\lambda, \mathrm{d})$ *und* $(\tilde\Gamma''_\lambda, \mathrm{d})$ *mit* $\lambda = q^4$ *sind identisch.*

Beweis: Für die Kalküle $\tilde\Gamma_\lambda$ rechnet man nach, daß $\Omega z_m - z_m\Omega = \mathrm{d}z_m$ und $\Omega z^*_m - z^*_m\Omega = \mathrm{d}z^*_m$ für Ω wie in der Folgerung definiert und jedes m. Daraus folgt mit der Leibnizregel sofort $\Omega x - x\Omega = \mathrm{d}x$ für alle $x \in \mathrm{S}_q^{2N-1}$.

Für die Kalküle $\tilde\Gamma'_\lambda$, $\tilde\Gamma''_\lambda$, $\tilde\Gamma^\bullet_\lambda$ und $\tilde\Gamma^{\bullet\bullet}_\lambda$ gilt jeweils $\Omega_+ z_m = \nu z_m \Omega_+$ (im Falle von $\tilde\Gamma''_\infty$: $\Omega_- z_m = \nu z_m \Omega_-$) mit einer komplexen Zahl ν, so daß diese keine inneren Kalküle sein können.

Zwei Differentialkalküle aus Theorem 2.3 können nur dann isomorph sein, wenn die Relation $\Omega_+ + \lambda\Omega_- = 0$ in beiden mit demselben Parameterwert λ erfüllt ist. Folglich genügt es, die Koeffizienten der Bimodulstrukturgleichungen der verschiedenen Familien von Kalkülen für gleiche λ zu vergleichen, wobei nur für $\tilde\Gamma'_\lambda$ und $\tilde\Gamma''_\lambda$ mit $\lambda = q^4$ Übereinstimmung eintritt. □

Daß für die inneren Kalküle $(\tilde\Gamma_\lambda, \mathrm{d})$ der Parameterwert $\lambda = q^2$ ausgeschlossen werden muß, liegt ausschließlich daran, daß für diesen Wert der Skalierungsfaktor $(q^{-2}\lambda - 1)^{-1}$ für Ω nicht definiert ist. Schreibt man die Bimodulstrukturgleichungen mit Ω_+ statt Ω auf, so kann der Grenzübergang $\lambda \to q^2$ ohne weiteres vollzogen werden, und es ergibt sich der Kalkül $(\tilde{\Gamma}'_\lambda, \mathrm{d})$ mit $\lambda = q^2$ (der kein innerer Kalkül ist).

2.2.3 Darstellungstheoretischer Beweisansatz

Die folgenden Abschnitte sind dem Beweis der beiden in den Abschnitten 2.2.1 und 2.2.2 gegebenen Klassifikationstheoreme für freie und fast-freie kovariante Differentialkalküle gewidmet. Den Ausgangspunkt unseres Beweises bildet eine Untersuchung der Kodarstellungen der Quantengruppen $\mathrm{SU}_q(N)$ auf den Quantensphären. Eine solche Methode liegt auch der Klassifikation von Differentialkalkülen erster Ordnung auf den Podleś-Sphären S^2_{qc} in der Arbeit von Apel und Schmüdgen [AS] zugrunde.

Wir bezeichnen mit $V(k)$ den Vektorraum aller (nichtkommutativen) Polynome des Grades k in den Erzeugenden z_i, z_i^* der Algebra $X = \mathrm{S}_q^{2N-1}$. Durch die definierenden Relationen (1.1)–(1.3) der Quantensphären werden einige dieser Polynome mit Polynomen niedrigeren Grades identifiziert; diese Polynome bilden einen Untervektorraum in $V(k)$. Es sei $\tilde{V}(k)$ das Komplement dieses Unterraumes in $V(k)$.

Aus der Kowirkung Δ_{R} der Quantengruppe $\mathcal{A} = \mathrm{SU}_q(N)$ auf $X = \mathrm{S}_q^{2N-1}$ resultieren Kodarstellungen $\pi(k)$ von $\mathcal{A}$ auf X, wobei

$$\pi(k) : \tilde{V}(k) \to \tilde{V}(k) \otimes \mathcal{A}.$$

Die Forderung nach Kovarianz des gesuchten Differentialkalküls hat zur Folge, daß seine Bimodulstruktur durch Linearkombinationen von Morphismen

$$T \in \mathrm{Mor}(\pi(1) \otimes \pi(1), \pi(k) \otimes \pi(1))$$

gegeben sein muß; deshalb untersuchen wir die Zerlegung der $\pi(k)$ sowie der Tensorprodukte $\pi(k) \otimes \pi(1)$ in irreduzible Summanden.

Zunächst ist $\pi(1)$ aufgrund der Folgerung 1.2 die Summe zweier irreduzibler Kodarstellungen von $\mathrm{SU}_q(N)$, nämlich der Fundamentalkodarstellung u und ihrer kontragredienten Kodarstellung u^{c}; in Matrixform geschrieben ist

$$(\pi(1)^i_j)_{i,j=1,\ldots,2N} = \begin{pmatrix} u^1_1 & \ldots & u^1_N & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u^N_1 & \ldots & u^N_N & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & S(u^1_1) & \ldots & S(u^N_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & S(u^1_N) & \ldots & S(u^N_N) \end{pmatrix} = u \oplus u^{\mathrm{c}}.$$

Dabei sind u^i_j wiederum die Matrixelemente der Fundamentalkodarstellung u und S die Antipodenabbildung der Quantengruppe $\mathrm{SU}_q(N)$.

Die Kodarstellungen höheren Grades können nun z. B. mit Hilfe von Young-Diagrammen berechnet werden. Dabei erhält man die Zerlegung von $\pi(k+1)$ dadurch, daß aus der Zerlegung $\pi(k) \otimes \pi(1)$ diejenigen Summanden gestrichen werden, deren zugehörige invariante Vektorräume durch die Kommutatorrelationen (1.1), (1.2) annulliert werden.

Da in den zu berücksichtigenden Young-Diagrammen für beliebiges N ausschließlich Spalten aus 1, 2, $N-2$ und $N-1$ Zellen auftreten, sollen die Young-Diagramme im folgenden zur besseren Übersichtlichkeit der Rechnungen für $N=5$ angegeben werden. Die entsprechenden Diagramme für beliebiges $N \geq 2$ erhält man daraus, indem regelmäßig Spalten aus 3 oder 4 Zellen durch solche der Längen $N-2$ bzw. $N-1$ ersetzt werden.

Es ist also für $N=5$

$$\pi(1) = \ydiagram{1} \oplus \ydiagram{1,1,1,1}.$$

Daraus ergibt sich zunächst

$$\pi(1) \otimes \pi(1) = \ydiagram{2} \oplus \ydiagram{1,1} \oplus \ydiagram{2,2,2,2} \oplus \ydiagram{1,1,1} \oplus 2\,\ydiagram{2,1,1,1} \oplus 2(0)$$

und unter Berücksichtigung der Kommutatorrelationen (1.1), (1.2)

$$\pi(2) = \ydiagram{2} \oplus \ydiagram{2,1,1,1} \oplus \ydiagram{2,2,2,2}.$$

Durch erneute Tensorproduktbildung ergibt sich

$$\begin{aligned}\pi(2) \otimes \pi(1) = {} & \ydiagram{3} \oplus \ydiagram{2,1} \oplus \ydiagram{2,2,1,1} \oplus \ydiagram{2,1,1} \oplus \ydiagram{2,2,2,1} \oplus \ydiagram{3,3,3,3} \\ & \oplus 2\,\ydiagram{3,1,1,1} \oplus 2\,\ydiagram{1} \oplus 2\,\ydiagram{3,2,2,2} \oplus 2\,\ydiagram{1,1,1,1}\end{aligned}$$

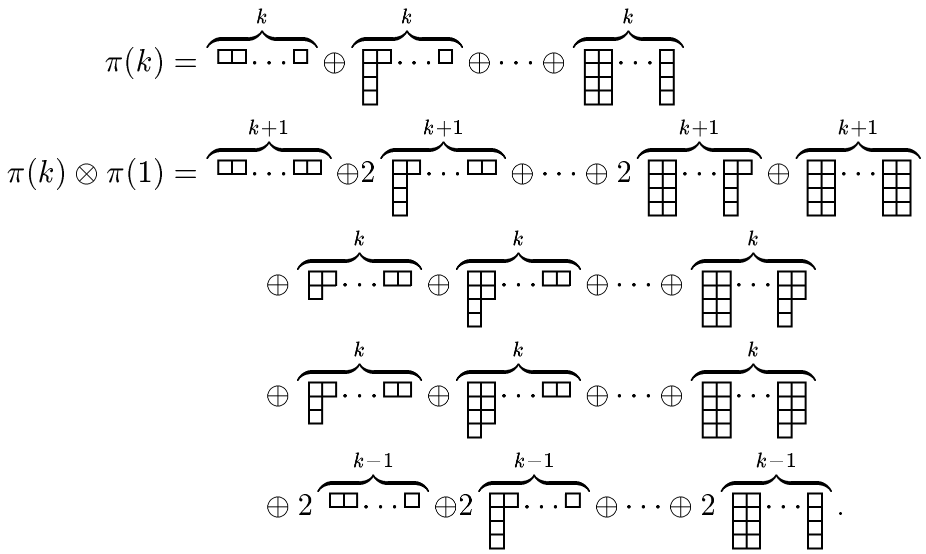
und infolge der Kommutatorrelationen

$$\pi(3) = \ydiagram{3} \oplus \ydiagram{3,1,1,1} \oplus \ydiagram{3,2,2,2} \oplus \ydiagram{3,3,3,3}\,.$$

Fortgesetzte Anwendung des Verfahrens ergibt

$$\begin{aligned}\pi(3)\otimes\pi(1) &= \ydiagram{4} \oplus \ydiagram{3,1} \oplus \ydiagram{3,2,1,1} \oplus \ydiagram{3,3,2,2} \oplus \ydiagram{3,1,1} \oplus \ydiagram{3,2,2,1} \oplus \ydiagram{3,3,3,2} \oplus \ydiagram{4,4,4,4}\\ &\quad \oplus 2\,\ydiagram{4,1,1,1} \oplus 2\,\ydiagram{2} \oplus 2\,\ydiagram{4,2,2,2} \oplus 2\,\ydiagram{2,1,1,1} \oplus 2\,\ydiagram{4,3,3,3} \oplus 2\,\ydiagram{2,2,2,2}\\ \pi(4) &= \ydiagram{4} \oplus \ydiagram{4,1,1,1} \oplus \ydiagram{4,2,2,2} \oplus \ydiagram{4,3,3,3} \oplus \ydiagram{4,4,4,4}\end{aligned}$$

und allgemein



Die gesuchten Morphismen $T \in \mathrm{Mor}(\pi(1)\otimes\pi(1), \pi(k)\otimes\pi(1))$ können nun aus identischen direkten Summanden in den Zerlegungen von $\pi(k)\otimes\pi(1)$ und $\pi(1)\otimes\pi(1)$ gewonnen werden.

Hieraus ist ersichtlich, daß für $N \geq 4$ gemeinsame direkte Summanden nur für $k = 1$ (trivialerweise) und $k = 3$ existieren. Aus diesen ergeben sich 20 Komodulhomomorphismen von $\tilde{V}(1)\otimes\tilde{V}(1)$ in $\tilde{V}(1)\otimes\tilde{V}(1)$ (insgesamt 12 Morphismen) sowie $\tilde{V}(3)\otimes\tilde{V}(1)$ (insgesamt 8 Morphismen), die nachfolgend aufgelistet sind.

Hierzu ist noch zu bemerken, daß der von $z_k \otimes z_l$, $1 \leq k, l \leq N$, aufgespannte Vektorraum bereits die direkte Summe zweier invarianter Unterräume, entsprechend zwei irreduziblen Kodarstellungen, ist; dies ist zum einen der von $(z_k \otimes z_l - q z_l \otimes z_k)$, $k < l$, aufgespannte (antisymmetrische) Vektorraum mit der durch $\begin{smallmatrix}\Box\\\Box\end{smallmatrix}$ beschriebenen Kodarstellung und zum anderen der von $(z_k \otimes z_l + q^{-1} z_l \otimes z_k)$, $k \geq l$, aufgespannte (symmetrische) Vektorraum mit der durch $\Box\!\Box$ gegebenen Kodarstellung. Jedem dieser Unterräume entspricht ein Morphismus (der identische Morphismus). Die beiden in der ersten Zeile der folgenden Liste angeführten Abbildungen sind zwei unabhängige Linearkombinationen dieser Morphismen und damit eine andere Basis für den von diesen beiden aufgespannten Vektorraum von Morphismen. Für die nachfolgenden Rechnungen sind diese durch R-Matrizen gegebenen Abbildungen des gesamten von $z_k \otimes z_l$ aufgespannten Vektorraums besser geeignet. Ähnliches gilt für die von $z_k^* \otimes z_l^*$, von $z_k \otimes z_l^*$ oder von $z_k^* \otimes z_l$ aufgespannten Vektorräume und die entsprechenden Abbildungen der Liste.

$$
\begin{array}{rclcrcl}
z_k \otimes z_l & \mapsto & z_k \otimes z_l & \qquad & z_k \otimes z_l & \mapsto & \hat{R}^{-\,st}_{\;kl} z_s \otimes z_t \\
z_k^* \otimes z_l^* & \mapsto & z_k^* \otimes z_l^* & & z_k^* \otimes z_l^* & \mapsto & \check{R}^{st}_{kl} z_s^* \otimes z_t^* \\
z_k \otimes z_l^* & \mapsto & z_k \otimes z_l^* & & z_k \otimes z_l^* & \mapsto & \grave{R}^{-\,st}_{\;kl} z_s^* \otimes z_t \\
z_k^* \otimes z_l & \mapsto & z_k^* \otimes z_l & & z_k^* \otimes z_l & \mapsto & \acute{R}^{st}_{kl} z_s \otimes z_t^* \\
\\
z_k \otimes z_l^* & \mapsto & \delta_{kl} q^{2k} \Psi_+ & & z_k \otimes z_l^* & \mapsto & \delta_{kl} q^{2k} \Psi_- \\
z_k^* \otimes z_l & \mapsto & \delta_{kl} \Psi_+ & & z_k^* \otimes z_l & \mapsto & \delta_{kl} \Psi_- \\
\\
z_k \otimes z_l & \mapsto & z_k z_l \Psi_+ & & z_k \otimes z_l & \mapsto & z_k z_l \Psi_- \\
z_k^* \otimes z_l^* & \mapsto & z_k^* z_l^* \Psi_+ & & z_k^* \otimes z_l^* & \mapsto & z_k^* z_l^* \Psi_- \\
z_k \otimes z_l^* & \mapsto & z_k z_l^* \Psi_+ & & z_k \otimes z_l^* & \mapsto & z_k z_l^* \Psi_- \\
z_k^* \otimes z_l & \mapsto & z_k^* z_l \Psi_+ & & z_k^* \otimes z_l & \mapsto & z_k^* z_l \Psi_-
\end{array}
$$

Hierbei wurde $\Psi_+ = \sum_{i=1}^{N} z_i \otimes z_i^*$, $\Psi_- = \sum_{i=1}^{N} q^{-2i} z_i^* \otimes z_i$ gesetzt.

Für $N = 2$ existieren weitere Übereinstimmungen von direkten Summanden sowohl für $k = 1$ als auch für $k = 3$ und dementsprechend zusätzliche Morphismen. In diesem Falle sind nämlich die Kodarstellungen u und u^c isomorph, was sich an der Übereinstimmung der zugehörigen Young-Diagramme ($\Box$ in beiden Fällen) ausdrückt. Daraus resultiert ein Komodulisomorphismus zwischen dem von den z_i erzeugten und dem von den z_i^* erzeugten invarianten Vektorraum und durch dessen Verknüpfung mit den oben für alle $N \geq 2$ aufgeführten Morphismen weitere Morphismen für $k = 1$ und $k = 3$. Durch Auszählen der Young-Diagramme ergibt sich die Anzahl der im Falle $N = 2$ zu beachtenden Komodulmorphismen zu 64 (32 für $k = 1$, 32 für $k = 3$).

Für $N = 3$ finden sich zusätzliche Übereinstimmungen direkter Summanden im Falle $k = 2$. In $u \otimes u$ ist nämlich der (antisymmetrische) Summand $\Box\!\Box$ enthalten, der mit u^c übereinstimmt; gleichfalls haben $u^c \otimes u^c$ und u den Summanden $\square$ gemeinsam. Ganz ähnlich wie für $N = 2$ resultiert hieraus zunächst je ein Komodulisomorphismus zwischen den beiden invarianten Unterräumen, die von den antisymmetrischen Linearkombinationen $(z_i \otimes z_j - qz_j \otimes z_i)$, $i < j$, und von den z_i^* erzeugt werden, sowie zwischen den beiden invarianten Unterräumen, die von den antisymmetrischen Linearkombinationen $(z_i^* \otimes z_j^* - q^{-1} z_j^* \otimes z_i^*)$, $i < j$, und von den z_i erzeugt werden. Auch hier ergeben sich durch Verknüpfung mit den für alle $N \geq 2$ gültigen Morphismen weitere Morphismen. Aus den Young-Diagramme ist wiederum die Gesamtzahl dieser Morphismen abzulesen; sie ergibt sich zu 10, so daß hier eine vollständige Liste 30 Morphismen enthalten müßte.

Aus diesem Grunde sind die Vollständigkeitsaussagen beider Klassifikationstheoreme nur für $N \geq 4$ gesichert. Eine vollständige Untersuchung für $N = 2$ und $N = 3$ würde aufgrund der zusätzlichen Morphismen einen wesentlich größeren Aufwand erfordern; wir können dies hier nicht weiter verfolgen.

Mit den für alle $N \geq 2$ vorgefundenen Morphismen erhalten wir den nachfolgend angegebenen Ansatz für die Bimodulstruktur eines freien kovarianten $*$-Differentialkalküls erster Ordnung auf S_q^{2N-1} mit den 20 unbestimmten (komplexen) Koeffizienten a_ν, b_ν, c_ν, $d_{\nu'}$, e_ν, $f_{\nu'}$ ($\nu = 1, 2, 3, 4$; $\nu' = 3, 4$):

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z_k z_l &= a_1 \hat{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t + b_1 z_k \mathrm{d}z_l + c_1 z_k z_l \Omega_+ + e_1 z_k z_l \Omega_- \\
\mathrm{d}z_k^* z_l^* &= a_2 \check{R}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t^* + b_2 z_k^* \mathrm{d}z_l^* + c_2 z_k^* z_l^* \Omega_+ + e_2 z_k^* z_l^* \Omega_- \\
\mathrm{d}z_k z_l^* &= a_3 \grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t + b_3 z_k \mathrm{d}z_l^* \\
&\quad + c_3 z_k z_l^* \Omega_+ + d_3 q^{2k} \delta_{kl} \Omega_+ + e_3 z_k z_l^* \Omega_- + f_3 q^{2k} \delta_{kl} \Omega_- \\
\mathrm{d}z_k^* z_l &= a_4 \acute{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t^* + b_4 z_k^* \mathrm{d}z_l \\
&\quad + c_4 z_k^* z_l \Omega_+ + d_4 \delta_{kl} \Omega_+ + e_4 z_k^* z_l \Omega_- + f_4 \delta_{kl} \Omega_-
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Es sei daran erinnert, daß

$$\Omega_+ = \sum_{i=1}^N z_i \mathrm{d}z_i^*, \qquad \Omega_- = \sum_{i=1}^N q^{-2i} z_i^* \mathrm{d}z_i.$$

Aus der Definition von Ω_+ und Ω_- und (2.12) erhält man die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\Omega_+ z_m &= (qa_4 + c_4 + d_4) z_m \Omega_+ + (e_4 + f_4) z_m \Omega_- + b_4 \mathrm{d}z_m \\
\Omega_- z_m &= q^{-2} c_1 z_m \Omega_+ + q^{-2}(qa_1 + e_1) z_m \Omega_- + q^{-2} b_1 \mathrm{d}z_m \\
\Omega_+ z_m^* &= (qa_2 + c_2) z_m^* \Omega_+ + e_2 z_m^* \Omega_- + b_2 \mathrm{d}z_m^* \\
\Omega_- z_m^* &= q^{-2}(c_3 + q^2 d_3) z_m^* \Omega_+ + q^{-2}(qa_3 + e_3 + q^2 f_3) z_m^* \Omega_- + q^{-2} b_3 \mathrm{d}z_m^*,
\end{aligned} \tag{2.13}$$

die für die weiteren Berechnungen (Abschnitt 2.2.6) von Bedeutung sind. Für die Klassifikation fast-freier Differentialkalküle gilt bis hierher grundsätzlich das Gleiche; jedoch reduziert sich durch das Hinzutreten einer Relation der Form $\Omega_0 = \mu\Omega_+ + \lambda\Omega_- = 0$ der Ansatz (2.12) auf

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z_k z_l &= a_1 \hat{R}^{-\,st}_{\;kl} z_s \mathrm{d}z_t + b_1 z_k \mathrm{d}z_l + c_1 z_k z_l \Omega_1 \\ \mathrm{d}z^*_k z^*_l &= a_2 \check{R}^{st}_{kl} z^*_s \mathrm{d}z^*_t + b_2 z^*_k \mathrm{d}z^*_l + c_2 z^*_k z^*_l \Omega_1 \\ \mathrm{d}z_k z^*_l &= a_3 \grave{R}^{-\,st}_{\;kl} z^*_s \mathrm{d}z_t + b_3 z_k \mathrm{d}z^*_l + c_3 z_k z^*_l \Omega_1 + d_3 q^{2k} \delta_{kl} \Omega_1 \\ \mathrm{d}z^*_k z_l &= a_4 \acute{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z^*_t + b_4 z^*_k \mathrm{d}z_l + c_4 z^*_k z_l \Omega_1 + d_4 \delta_{kl} \Omega_1, \end{aligned} \tag{2.14}$$

wobei Ω_1 eine von Ω_0 linear unabhängige invariante 1-Form ist.

2.2.4 Bedingungen für die Koeffizienten

Zum Beweis der Klassifikationsresultate (Theoreme 2.1 und 2.3) sollen in den folgenden Abschnitten die Koeffizienten der Ansätze (2.12) und (2.14) systematisch eingeschränkt werden.

Dazu werden verschiedene Bedingungen herangezogen, die durch Koeffizientenvergleiche in dem von $\{\mathrm{d}z_i, \mathrm{d}z^*_i\}$ erzeugten X-Linksmodul bezüglich der Erzeugenden $\mathrm{d}z_i$ und $\mathrm{d}z^*_i$ ausgewertet werden.

Im Falle der freien Differentialkalküle ist die Möglichkeit solcher Koeffizientenvergleiche dadurch gesichert, daß gemäß der Definition solcher Differentialkalküle das Erzeugendensystem $\{\mathrm{d}z_i, \mathrm{d}z^*_i\}$ eine Linksmodulbasis für Γ ist.

Im Falle der fast-freien Differentialkalküle ist dies nicht gegeben; jedoch zeigt eine nähere Betrachtung der nachfolgend beschriebenen Bedingungen, daß in den Gleichungen, für die der Koeffizientenvergleich durchzuführen ist, neben der Summe Ω_+ (oder Ω_-) jeweils nur bis zu drei einzelne Erzeugende $\mathrm{d}z^{(*)}_i$ auftreten, so daß der Koeffizientenvergleich stets nur die Unabhängigkeit von maximal vier Erzeugenden voraussetzt. Hierfür reicht die abgeschwächte Unabhängigkeitsbedingung fast-freier Differentialkalküle, die nur eine Relation des Typs $\mu\Omega_+ + \lambda\Omega_- = 0$ zuläßt (in der offensichtlich stets alle Erzeugenden $\mathrm{d}z_i$, $i = 1, \ldots, N$ oder alle Erzeugenden $\mathrm{d}z^*_i$, $i = 1, \ldots, N$ gleichzeitig vorkommen), aus, sofern nur $N \geq 4$ ist. Da die Vollständigkeit der Klassifikation ohnehin nur für $N \geq 4$ gewährleistet werden kann, sind also auch hier die Koeffizientenvergleiche gerechtfertigt.

Im einzelnen werden fünf grundlegende Gruppen von Bedingungen ausgewertet, die für die gesuchten Differentialkalküle erfüllt sein müssen.

(i) Es sei $\sum_i z_{k_i}^{(*)} z_{l_i}^{(*)} = 0$ eine der definierenden Relationen (1.1), (1.2) der Quantensphäre. Dann muß auch $\mathrm{d}\left(\sum_i z_{k_i}^{(*)} z_{l_i}^{(*)}\right)$ verschwinden. Dieser Ausdruck wird mit Hilfe der Leibnizregel und der Gleichungen des jeweiligen Ansatzes als Element des von $\{dz_i, \mathrm{d}z_i^*\}$ erzeugten X-Linksmoduls dargestellt. Durch Koeffizientenvergleich für die Erzeugenden $\mathrm{d}z_i$ und $\mathrm{d}z_i^*$ erhalten wir sodann Gleichungen für die Koeffizienten des Ansatzes.

(ii) Aufgrund der Relation (1.3) muß gelten $\sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}z_i \cdot z_i^* + \Omega_+ = 0$ sowie $\sum_{i=1}^{N} q^{-2i} \mathrm{d}z_i^* \cdot z_i + \Omega_- = 0$. Mit Hilfe der Gleichungen des Ansatzes entsteht hieraus ein Ausdruck in Linksmodulform, der einen Koeffizientenvergleich für Ω_+ und Ω_- ermöglicht.

(iii) Es sei wiederum $\sum_i z_{k_i}^{(*)} z_{l_i}^{(*)} = 0$ eine der definierenden Relationen (1.1), (1.2) und außerdem $\mathrm{d}z_m^{(*)}$ eine der $2N$ Erzeugenden des Differentialkalküls. Dann muß der Ausdruck $\mathrm{d}z_m^{(*)} \cdot \sum_i z_{k_i}^{(*)} z_{l_i}^{(*)}$ verschwinden. Durch (iterierte) Anwendung der Gleichungen des Ansatzes wird dieser Ausdruck in Linksmodulform geschrieben und ein Koeffizientenvergleich vorgenommen.

(iv) Ist $\mathrm{d}z_m^{(*)}$ eine der Erzeugenden des Moduls Γ, so müssen wegen (1.3), (1.7) die Ausdrücke

$$\mathrm{d}z_m^{(*)} - \mathrm{d}z_m^{(*)} \left(\sum_{i=1}^{N} z_i z_i^*\right) \quad \text{und} \quad q^{-2}\mathrm{d}z_m^{(*)} - \mathrm{d}z_m^{(*)} \left(\sum_{i=1}^{N} q^{-2i} z_i^* z_i\right)$$

verschwinden. Umschreiben in Linksmodulform und Koeffizientenvergleich führt zu weiteren Bedingungen für die Koeffizienten.

(v) Aufgrund der (in den bisherigen Gruppen von Bedingungen nicht benutzten) Forderung, daß die gesuchten Differentialkalküle $*$-Kalküle sein sollen, müssen die Gleichungen

$$(\mathrm{d}z_k \cdot z_l)^* = z_l^* \mathrm{d}z_k^* \qquad (\mathrm{d}z_k^* \cdot z_l^*)^* = z_l \mathrm{d}z_k \tag{2.15}$$

$$(\mathrm{d}z_k \cdot z_l^*)^* = z_l \mathrm{d}z_k^* \qquad (\mathrm{d}z_k^* \cdot z_l)^* = z_l^* \mathrm{d}z_k \tag{2.16}$$

für $k, l = 1, \ldots, N$ gelten. In jeder dieser Gleichungen kann der Ausdruck in der Klammer auf der linken Seite mit Hilfe der Gleichungen des Ansatzes (2.12) oder (2.14) in Linksmodulform gebracht werden. Durch Ausnutzung der $*$-Eigenschaft wird anschließend die Klammer aufgelöst, wobei sich ein Ausdruck in Rechtsmodulform ergibt, der durch erneute Anwendung der Gleichungen des Ansatzes wieder in Linksmodulform gebracht wird. Ein abschließender Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite der jeweiligen Gleichung ergibt Bedingungen für die Koeffizienten des Ansatzes.

Durch Summation unter Beachtung der Gleichungen aus Punkt (ii) folgt aus den Gleichungen (2.16) zudem $\Omega_\pm^* = -\Omega_\pm$ und damit die Gleichungen

$$(\Omega_\pm z_m)^* = -z_m^* \Omega_\pm; \qquad (\Omega_\pm z_m^*)^* = -z_m \Omega_\pm,$$

die ebenfalls auf die für die Gleichungen (2.15) und (2.16) beschriebene Weise ausgewertet werden.

Die aus Bedingungen dieser Gruppe resultierenden Gleichungen für die Koeffizienten – und nur diese – enthalten neben den Koeffizienten selbst die komplexen Konjugierten derselben.

2.2.5 Bedingungen aufgrund der derivierten Kommutatorrelationen

Lemma 2.5: *Für die Koeffizienten der Ansätze (2.12) und (2.14) gelten die Gleichungen*

$$a_1 = q^{-1}(b_1 + 1); \qquad a_2 = q(b_2 + 1); \tag{2.17}$$

$$a_3 = q(b_4 + 1); \qquad a_4 = q^{-1}(b_3 + 1); \tag{2.18}$$

$$a_1 a_3 = 1; \qquad a_2 a_4 = 1; \tag{2.19}$$

$$c_3 = c_4; \qquad d_3 = q^{-2N} d_4 \tag{2.20}$$

sowie für (2.12) zusätzlich

$$e_3 = e_4; \qquad f_3 = q^{-2N} f_4. \tag{2.21}$$

Beweis: Wir werten zunächst die Bedingungen des Typs (i) aus Abschnitt 2.2.4 aus. Hieraus ergeben sich in beiden betrachteten Fällen die Gleichungen (2.17), (2.18) und (2.20) sowie für freie Differentialkalküle zudem (2.21).

Zur Gruppe (iv) von Bedingungen aus Abschnitt 2.2.4 gehört die Beziehung

$$\mathrm{d}z_m - \mathrm{d}z_m \left(\sum_{i=1}^{N} z_i z_i^* \right) = 0,$$

deren linke Seite für freie Differentialkalküle umgeformt wird in

$$\begin{aligned}
&(1-a_1a_3)\mathrm{d}z_m \\
&-(qa_1(b_3+c_3+q^{2N}d_3)+(-Qa_1+b_1)+c_1(qa_2+c_2)+c_1b_2 \\
&\qquad\quad +q^{-2}e_1(c_3+q^2d_3)+q^{-2}e_1b_3)z_m\Omega_+ \\
&-(qa_1(e_3+q^{2N}f_3)+c_1e_2+q^{-2}e_1(qa_3+e_3+q^2f_3))z_m\Omega_-,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

für fast-freie Differentialkalküle hingegen in

$$\begin{aligned}
&(1-a_1a_3)\mathrm{d}z_m \\
&-(qa_1(b_3+c_3+q^{2N}d_3)+(-Qa_1+b_1)+c_1(-qa_2+b_2+c_2))z_m\Omega_+.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Der Koeffizientenvergleich für $\mathrm{d}z_m$ ergibt in beiden Fällen die Notwendigkeit der ersten Gleichung von (2.19). Die zweite ergibt sich analog aus der Auswertung von

$$\mathrm{d}z_m^* - \mathrm{d}z_m^*\left(\sum_{i=1}^{N} z_i z_i^*\right) = 0.$$

□

Wir führen aufgrund des Lemmas folgende Bezeichnungen ein:

$$\alpha = q^{-2}(b_1+1); \quad \beta = q^2(b_2+1). \tag{2.24}$$

Es ist dann also

$$\begin{aligned}
&a_1 = q\alpha; &&a_2 = q^{-1}\beta; &&a_3 = q^{-1}\alpha^{-1}; &&a_4 = q\beta^{-1}; \\
&b_1 = q^2\alpha - 1; &&b_2 = q^{-2}\beta - 1; &&b_3 = q^2\beta^{-1} - 1; &&b_4 = q^{-2}\alpha^{-1} - 1.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

2.2.6 Ein Gleichungssystem für die Koeffizienten freier Differentialkalküle

Wir wenden uns nun dem Fall freier Differentialkalküle zu und wollen für die Koeffizienten des Ansatzes (2.12) die Gruppen (ii) und (iii) von Bedingungen aus dem Abschnitt 2.2.4 auswerten.

Lemma 2.6: *Für einen freien kovarianten $*$-Differentialkalkül erster Ordnung müssen die Koeffizienten des Ansatzes (2.12) die folgenden Gleichungen erfüllen:*

$$qa_4 + c_3 + q^2\mathfrak{s}_+ d_3 = 0 \tag{2.26}$$
$$qa_3 + e_3 + q^2\mathfrak{s}_+ f_3 = 0 \tag{2.27}$$

$$b_4(b_3 + c_3) + q^{-2}b_1e_3 = 0 \tag{2.28}$$
$$(q^{-1}a_1 - qa_4 + b_1 + q^{-2}e_1)b_3 + b_2c_1 = 0 \tag{2.29}$$
$$q^{-2}e_2b_3 + b_2(Qa_2 + b_2 + c_2) = 0 \tag{2.30}$$
$$b_4c_1 + b_1(-Qa_1 + b_1 + q^{-2}e_1) = 0 \tag{2.31}$$
$$b_3(b_4 + q^{-2}e_4) + b_2c_4 = 0 \tag{2.32}$$
$$(qa_2 + b_2 + c_2 - q^{-1}a_3)b_4 + q^{-2}b_1e_2 = 0 \tag{2.33}$$
$$(-q^{-1}a_2 + b_2 + q^{-1}a_3 + q^{-2}e_3)b_3 + b_2c_3 = 0 \tag{2.34}$$
$$(-qa_1 + b_1 + qa_4 + c_4)b_4 + q^{-2}b_1e_4 = 0 \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}(q^{-1}a_3 + q^{-2}e_3 - qa_2 - c_2)c_1 - q^{-2}(c_3 + q^2d_3)e_1 \\ +b_3c_4 + (qa_4 + c_4 + d_4 - q^{-1}a_1 - b_1)c_3 = 0\end{aligned} \tag{2.36}$$
$$(b_3 + e_3)e_4 + c_3f_4 - b_1e_3 - c_1e_2 - e_1f_3 = 0 \tag{2.37}$$
$$b_4c_3 - b_2c_4 + q^{-2}(c_3 + q^2d_3)e_4 - d_4c_2 - q^{-2}c_1e_2 = 0 \tag{2.38}$$
$$\begin{aligned}(qa_4 + c_4 - q^{-1}a_1 - q^{-2}e_1)e_2 - c_2(e_4 + f_4) \\ +(q^{-1}a_3 + q^{-2}e_3 + f_3 - q^{-1}a_2 - b_2)e_4 = 0\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$(-q^{-1}a_1 + qa_4 + c_4 + d_4)d_3 + q^{-2}c_1f_3 = 0 \tag{2.40}$$
$$(e_4 + f_4)d_3 + q^{-2}e_1f_3 = 0 \tag{2.41}$$
$$c_2d_4 + q^{-2}(c_3 + q^2d_3)f_4 = 0 \tag{2.42}$$
$$e_2d_4 + q^{-2}(-q^3a_2 + qa_3 + e_3 + q^2f_3)f_4 = 0 \tag{2.43}$$
$$(Qa_4 + c_4 + d_4)d_4 + q^{-2}c_1f_4 = 0 \tag{2.44}$$
$$(e_4 + f_4)d_4 + q^{-2}(qa_1 + e_1 - qa_4)f_4 = 0 \tag{2.45}$$
$$(qa_2 + c_2 - qa_3)d_3 + q^{-2}(c_3 + q^2d_3)f_3 = 0 \tag{2.46}$$
$$e_2d_3 + q^{-2}(-q^2Qa_3 + e_3 + q^2f_3)f_3 = 0 \tag{2.47}$$

$$b_4d_3 + q^{-2}b_1f_3 = 0 \tag{2.48}$$
$$b_2d_4 + q^{-2}b_3f_4 = 0. \tag{2.49}$$

Beweis: Die Gleichungen (2.26) und (2.27) ergeben sich aus den Bedingungen (ii).

Zur Auswertung der Bedingungen (iii) werden die Ausdrücke $\mathrm{d}z_k^{(*)} \cdot z_l^{(*)} z_m^{(*)}$ durch iterierte Anwendung der Gleichungen des Ansatzes (2.12) in Linksmodulform gebracht (vgl. Anhang B.1). Setzt man anschließend die so erhaltenen Ausdrücke in die gemäß der Beschreibung unter Punkt (iii) aufgestellten Bedingungsgleichungen ein, so ergeben sich aus Koeffizientenvergleichen für Summanden der Form $z_t^{(*)} z_u^{(*)} \mathrm{d}z_v^{(*)}$ die Gleichungen (2.28)–(2.35), für Summanden der Form $z_t^{(*)} z_u^{(*)} z_v^{(*)} \Omega_\pm$ die Gleichungen (2.36)–(2.39) und schließlich für die Summanden der Gestalt $\delta_{uv} z_t^{(*)} \Omega_\pm$ die Gleichungen (2.40)–(2.49). □

Bemerkung: Für $\alpha = q^{-2}$ und $\beta = q^2$ (mit den Substitutionen (2.24)) sind die Gleichungen (2.28)–(2.35) sowie (2.48) und (2.49) trivial erfüllt. Gleichfalls sind, wenn $d_3 = d_4 = f_3 = f_4 = 0$ gilt, die Gleichungen (2.40)–(2.47) sowie (2.48) und (2.49) trivial erfüllt.

2.2.7 Die grundlegende Fallunterscheidung für freie Differentialkalküle

Die folgenden Aussagen beziehen sich durchgängig auf den Fall freier Differentialkalküle und damit auf die Koeffizienten des Ansatzes (2.12).

Lemma 2.7:

(i) Es gilt $b_1 = 0$ genau dann, wenn auch $b_2 = 0$ gilt.

(ii) Es gilt $d_3 = 0$ genau dann, wenn auch $f_3 = 0$ gilt.

Beweis: Zu (ii): Angenommen, es gilt $d_3 = 0$, jedoch $f_3 \neq 0$. Dann folgt aus den Gleichungen (2.40), (2.41) sofort $c_1 = e_1 = 0$ und mit (2.42) schließlich $c_3 = 0$. Wird dies in (2.26) eingesetzt, so entsteht $a_4 = 0$ im Widerspruch zu $a_2 a_4 = 1$. Also folgt aus $d_3 = 0$ stets $f_3 = 0$. Entsprechend schließt man aus $f_3 = 0$ auf $d_3 = 0$.

Zu (i): Durch Auswertung der $*$-Bedingungen

$$(\mathrm{d}z_k \cdot z_l^*)^* = z_l \mathrm{d}z_k^*$$
$$(\mathrm{d}z_k^* \cdot z_l)^* = z_l^* \mathrm{d}z_k$$

erhalten wir (vgl. Anhang B.2) durch Koeffizientenvergleiche die Gleichungen

$$\overline{a_3}a_4 + \mu_1 b_3 - \mu_2 b_2 - \mu_3 b_3 = 1 \tag{2.50}$$
$$\overline{a_3}b_4 + (\overline{b_3} - \overline{c_3}b_4 - q^{-2}\overline{e_3}b_1)a_3 = 0 \tag{2.51}$$
$$q^{-1}\overline{a_3}c_4 + \mu_1 c_3 - \mu_2(qa_2 + c_2) - \mu_3(c_3 + q^2 d_3) = 0 \tag{2.52}$$
$$q^{-1}\overline{a_3}e_4 + \mu_1 e_3 - \mu_2 e_2 - \mu_3(qa_3 + e_3 + q^2 f_3) = 0 \tag{2.53}$$
$$q^{-1}\overline{a_3}d_3 + \mu_1 d_3 - \overline{d_3} = 0 \tag{2.54}$$

bzw.

$$\overline{a_4}a_3 + \mu_4 b_4 - \mu_5 b_4 - \mu_6 b_1 = 1 \tag{2.55}$$
$$\overline{a_4}b_3 + \mu_4 a_4 = 0 \tag{2.56}$$
$$q\overline{a_4}c_3 + \mu_4 c_4 - \mu_5(qa_4 + c_4 + d_4) - \mu_6 c_1 = 0 \tag{2.57}$$
$$q\overline{a_4}e_3 + \mu_4(e_4 + f_4) - \mu_5 e_4 - \mu_6(qa_1 + e_1) = 0 \tag{2.58}$$
$$q\overline{a_4}d_4 + \mu_4 d_4 - \overline{d_4} = 0, \tag{2.59}$$

wobei zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
\mu_1 &:= \overline{b_3} - \overline{c_3}b_4 - q^{-2}\overline{e_3}b_1 \\
\mu_2 &:= \overline{c_3}(qa_4 + c_4 + d_4) + q^{-2}\overline{e_3}c_1 \\
\mu_3 &:= q^{-2}\overline{c_3}(e_4 + f_4) + q^{-4}\overline{e_3}(qa_1 + e_1) \\
\mu_4 &:= \overline{b_4} - \overline{c_4}b_2 - q^{-2}\overline{e_4}b_3 \\
\mu_5 &:= \overline{c_4}(qa_2 + c_2) + q^{-2}\overline{e_4}(c_3 + q^2 d_3) \\
\mu_6 &:= q^{-2}\overline{c_4}e_2 + q^{-4}\overline{e_4}(qa_3 + e_3 + q^2 f_3)
\end{aligned}$$

gesetzt wurde.

Falls $\alpha = q^{-2}$, so folgt $b_1 = b_4 = 0$ und mit Gleichung (2.51) $a_3\overline{b_3} = 0$, also $b_3 = 0$ und schließlich $\beta = q^2$. Umgekehrt folgt aus $\beta = q^2$ zunächst $b_2 = b_3 = 0$ und mit (2.56) dann $a_4\overline{b_4} = 0$, $b_4 = 0$ und somit $\alpha = q^{-2}$. □

Bemerkung: Obwohl die Koeffizienten b_1, b_2 einerseits und d_3, f_3 andererseits eine ähnliche Rolle spielen – sie parametrisieren die Anteile der R-Matrizen $\hat{R}$ und $\hat{R}^-$ an den ersten bzw. letzten zwei Bimodulstrukturgleichungen –, zeigt der Beweis des Lemmas, daß zwischen beiden Paaren von Koeffizienten eine Asymmetrie besteht, da nur Teilaussage (ii) ohne Ausnutzung der $*$-Kalkül-Eigenschaft bewiesen werden kann.

Hiernach sind für freie kovariante $*$-Differentialkalküle vier Fälle zu unterscheiden:

(i) Es gilt $\alpha \neq q^{-2}$, $\beta \neq q^2$ und $d_3 f_3 \neq 0$.

(ii) Es gilt $\alpha \neq q^{-2}$, $\beta \neq q^2$ und $d_3 = f_3 = 0$.

(iii) Es gilt $\alpha = \beta^{-1} = q^{-2}$ und $d_3 f_3 \neq 0$.

(iv) Es gilt $\alpha = \beta^{-1} = q^{-2}$ und $d_3 = f_3 = 0$.

In den folgenden Abschnitten wird sich herausstellen, daß zu jedem dieser Fälle eine der zweiparametrigen Scharen von Kalkülen aus dem Theorem 2.1 gehört.

Diese Fallunterscheidung ist in natürlicher Weise mit der blockartigen Struktur des Gleichungssystems (2.26)–(2.49) verknüpft, da für $d_3 = f_3 = 0$ oder $b_1 = b_2 = 0$ jeweils ganze Blöcke von Gleichungen trivial erfüllt werden, vgl. die Bemerkung am Schluß des vorigen Abschnitts. Nur im Fall (i) stellen alle Blöcke von Gleichungen einschränkende Bedingungen dar.

2.2.8 Der Fall $\alpha \neq q^{-2}$, $\beta \neq q^2$, $d_3 f_3 \neq 0$

Wir wenden uns zunächst dem allgemeinsten Fall (i) zu.

Lemma 2.8: *Gilt für die Koeffizienten des Ansatzes (2.12) $d_3 f_3 \neq 0$ und $b_1 b_2 \neq 0$, so sind alle Koeffizienten reell, und es gelten die Gleichungen*

$$\beta = \alpha^{-1} \tag{2.60}$$

$$c_1 = q^2\alpha^2 + \mathfrak{s}_+^{-1}\mathfrak{s}'_+\alpha^2 f_3 \tag{2.61}$$

$$e_1 = q^2 + \mathfrak{s}_+^{-1}\mathfrak{s}'_+\alpha f_3 \tag{2.62}$$

$$c_2 = 1 + q^{-2}\mathfrak{s}_+^{-1}\mathfrak{s}'_+ f_3 \tag{2.63}$$

$$e_2 = \alpha^{-2} + q^{-2}\mathfrak{s}_+^{-1}\mathfrak{s}'_+\alpha^{-1} f_3 \tag{2.64}$$

$$c_3 = c_4 = -q^2\alpha - q^2\mathfrak{s}_+\alpha f_3, \tag{2.65}$$

$$e_3 = e_4 = -\alpha^{-1} - q^2\mathfrak{s}_+ f_3. \tag{2.66}$$

Beweis: Unter den Voraussetzungen des Lemmas ist $\alpha \neq q^{-2}$, $\beta \neq q^2$ und daher $b_1/b_4 = (q^2\alpha - 1)/(q^{-2}\alpha^{-1} - 1)$; $b_3/b_2 = (q^2\beta^{-1} - 1)/(q^{-2}\beta - 1)$, also

$$\frac{b_1}{b_4} = -q^2\alpha; \qquad \frac{b_3}{b_2} = -q^2\beta^{-1}. \tag{2.67}$$

Mit dieser Substitution erhalten wir aus den Gleichungen (2.48) und (2.49) unmittelbar $d_3/f_3 = \alpha$ bzw. $d_3/f_3 = \beta^{-1}$, womit (2.60) bewiesen ist.

Aus den Gleichungen (2.26) und (2.27) ergeben sich unmittelbar die Beziehungen (2.65) und (2.66).

Indem wir diese Gleichungen sowie (2.24) und (2.60) benutzen, erhalten wir aus den Gleichungen (2.40)–(2.43) die Gültigkeit von (2.61), (2.62), (2.63) und (2.64).

Es bleibt die Reellwertigkeit von α und f_3 zu zeigen, welche sodann die Reellwertigkeit aller Koeffizienten impliziert. Hierzu sind erneut $*$-Bedingungen auszuwerten. Wir benutzen die im Beweis von Lemma 2.7 erhaltenen Gleichungen (2.56), (2.51) und (2.59). Mit (2.25) und (2.60)–(2.66) gehen die Gleichungen (2.56) und (2.51) über in

$$(\overline{\alpha}\alpha^{-1} - 1) + \mathfrak{s}_+\overline{f_3}(\overline{\alpha}\alpha^{-1} - 1 + q^2(\alpha - \overline{\alpha})) = 0 \tag{2.68}$$

$$(\alpha\overline{\alpha}^{-1} - 1) + \mathfrak{s}_+\overline{f_3}(\overline{\alpha}\alpha^{-1} - 1 + q^2(\alpha - \overline{\alpha})) = 0, \tag{2.69}$$

aus deren Subtraktion $\alpha\overline{\alpha}^{-1} - \overline{\alpha}\alpha^{-1} = 0$ bzw. $\alpha^2 = \overline{\alpha}^2$ folgt. Damit kann α nur noch reell oder rein imaginär sein.

Für reelles α vereinfacht sich (2.59) zu

$$f_3 - \overline{f_3} = 0,$$

woraus die Reellwertigkeit von f_3 folgt.

Ist dagegen α rein imaginär, so folgen aus (2.68) und (2.59) die Gleichungen

$$\overline{f_3} = \mathfrak{s}_+^{-1}(q^2\alpha - 1)^{-1} \tag{2.70}$$

$$-3f_3 + 2\mathfrak{s}_+f_3\overline{f_3}(q^2\alpha - 1) - \overline{f_3} = 0. \tag{2.71}$$

Einsetzen von (2.70) in (2.71) führt auf $-f_3 - \overline{f_3} = 0$, wonach f_3 rein imaginär sein muß, wohingegen die rechte Seite von (2.70) für rein imaginäres α wegen $\mathfrak{s}_+$ reell sicher nicht rein imaginär ist. Somit kann der Fall, daß α rein imaginär ist, nicht eintreten. □

Durch die Substitution $f_3 = -\tau$ entsteht aus den Gleichungen des Lemmas sowie (2.65) und (2.66) das Koeffizientensystem des Kalküls $(\Gamma_{\alpha\tau}, \mathrm{d})$ aus Theorem 2.1.

2.2.9 Der Fall $d_3 = f_3 = 0$ für freie Kalküle

Der zweite und vierte Fall der Aufzählung am Ende des vorigen Abschnittes können teilweise parallel behandelt werden. Das folgende Lemma bezieht sich auf beide Fälle.

Lemma 2.9: *Wenn für die Koeffizienten des Ansatzes (2.12) $d_3 = f_3 = 0$ gilt, so gelten die Gleichungen*

$$c_3 = c_4 = -q^2\beta^{-1} \tag{2.72}$$

$$e_3 = e_4 = -\alpha^{-1} \tag{2.73}$$

$$c_1 e_2 = q^2 \tag{2.74}$$

$$\beta = \overline{\alpha}^{-1} \tag{2.75}$$

$$e_1 = \alpha^{-1}c_1c_2 - q^2\alpha + (q^{-2}+1)\alpha^{-1}\overline{\alpha}^{-1}c_1 - q^{-2}\alpha^{-2}c_1. \tag{2.76}$$

Beweis: Zunächst vereinfachen sich durch die Voraussetzung $d_3 = f_3 = 0$ die Gleichungen (2.26) und (2.27) zu $qa_4 + c_3 = 0$ und $qa_3 + e_3 = 0$, woraus (2.72) und (2.73) folgen.

Außerdem ergibt ein Koeffizientenvergleich für Ω_- in dem Ausdruck (2.22) aus dem Beweis des Lemmas 2.5 in unserem Fall die weitere Gleichung

$$qa_1e_3 + c_1e_2 + q^{-2}e_1(qa_3 + e_3) = 0,$$

aus der wir mit (2.24), (2.72), (2.73) die Bedingung (2.74) gewinnen.

Ferner benutzen wir erneut die im Beweis von Lemma 2.7 hergeleiteten Gleichungen (2.55)–(2.59), die sich durch die Voraussetzung $d_3 = f_3 = 0$ zu

$$\overline{a_4}a_3 + \mu_4 b_4 - \mu_5 b_4 - \mu_6 b_1 = 1 \tag{2.77}$$

$$\overline{a_4}b_3 + \mu_4 a_4 = 0 \tag{2.78}$$

$$q\overline{a_4}c_3 + \mu_4 c_4 - \mu_5(qa_4 + c_4) - \mu_6 c_1 = 0 \tag{2.79}$$

$$q\overline{a_4}e_3 + \mu_4 e_4 - \mu_5 e_4 - \mu_6(qa_1 + e_1) = 0, \tag{2.80}$$

vereinfachen, wobei die Hilfsgrößen μ_4, μ_5 und μ_6 nunmehr durch

$$\mu_4 = \overline{b_4} - \overline{c_4}b_2 - q^{-2}\overline{e_4}b_3$$
$$\mu_5 = \overline{c_4}(qa_2 + c_2) + q^{-2}\overline{e_4}c_3$$
$$\mu_6 = q^{-2}\overline{c_4}e_2 + q^{-4}\overline{e_4}(qa_3 + e_3)$$

gegeben sind. Indem wir (2.25), (2.72) und (2.73) in (2.78) einsetzen, erhalten wir

$$0 = q\beta^{-1}(\overline{\alpha}^{-1}\beta^{-1} - 1)$$

und daher (2.75).

Durch Einsetzen der bisher gewonnenen Beziehungen in (2.80) erhalten wir schließlich (2.76). □

Wir nehmen die Gleichungen (2.74) und (2.76) zum Anlaß für die Substitutionen

$$c_1 = \omega; \qquad e_2 = q^2\omega^{-1}, \tag{2.81}$$

$$c_2 = \psi - \overline{\alpha}^{-1}; \qquad e_1 = -q^2\alpha + \alpha^{-1}\omega\psi + q^{-2}\alpha^{-1}\overline{\alpha}^{-1}\omega - q^{-2}\alpha^{-2}\omega. \tag{2.82}$$

wobei $\omega \neq 0$ und ψ zunächst komplexe Parameter sind.

Sofern nun $\alpha \neq q^{-2}$ gilt – der erste Fall aus dem vorigen Abschnitt –, unterliegen die Parameter weiteren Einschränkungen, die durch die nächsten zwei Lemmata genauer gefaßt werden.

Lemma 2.10: *Falls $d_3 = f_3 = 0$ und $\alpha \neq q^{-2}$ gilt, so ist*

$$\psi = q^2\overline{\alpha}\omega^{-1} + 1. \tag{2.83}$$

Beweis: Dies folgt durch Einsetzen der bisher erhaltenen Beziehungen in die Gleichung (2.30). □

Es ist damit also für $\alpha \neq q^{-2}$

$$c_2 = q^2\overline{\alpha}\omega^{-1} - \overline{\alpha}^{-1} + 1 \tag{2.84}$$

$$e_1 = -q^2\alpha + q^2\alpha^{-1}\overline{\alpha} + \alpha^{-1}\omega + q^{-2}\alpha^{-1}\overline{\alpha}^{-1}\omega - q^{-2}\alpha^{-2}\omega. \tag{2.85}$$

Lemma 2.11: *Für $d_3 = f_3 = 0$ ist ω stets reell. Falls α nicht reell ist, so gilt*

$$\omega = q^4\alpha\overline{\alpha}. \tag{2.86}$$

Beweis: Aus (2.29) und (2.31) folgen mit den bisherigen Substitutionen die Gleichungen

$$e_1 = \overline{\alpha}^{-1}\omega - q^2\alpha + q^2 + q^4(\overline{\alpha} - \alpha)$$

$$e_1 = \alpha^{-1}\omega - q^2\alpha + q^2, \tag{2.87}$$

deren Subtraktion auf

$$0 = (\overline{\alpha}^{-1} - \alpha^{-1})\omega + q^4(\overline{\alpha} - \alpha)$$

und damit im Falle nicht-reeller α zur behaupteten Gleichung (2.86) führt. In diesem Falle ist ω offensichtlich reell.

Es bleibt zu zeigen, daß ω auch für reelles α reell ist. Dazu ziehen wir eine weitere $*$-Bedingung der Gruppe (v) aus Abschnitt 2.2.4 heran, nämlich

$$(\Omega_- z_m)^* = -z_m^* \Omega_-. \tag{2.88}$$

Mit den bisher gewonnenen Koeffizienten ist (vgl. Anhang B.3)

$$(\Omega_- z_m)^* = -\overline{\omega}\omega^{-1} z_m^* \Omega_- + \alpha(1 - \overline{\omega}\omega^{-1}) z_m^* \Omega_+.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir also $\overline{\omega}\omega^{-1} = 1$ und daher die Behauptung. □

Wir bemerken, daß sich (2.85) in der Tat sowohl für reelles α (in welchem Falle die Summanden $-q^{-2}\alpha^{-2}\omega$ und $q^{-2}\alpha^{-1}\overline{\alpha}^{-1}\omega$ sich aufheben) als auch für $\omega = q^4\alpha\overline{\alpha}$ (dann heben sich $-q^{-2}\alpha^{-2}\omega$ und $q^2\alpha^{-1}\overline{\alpha}$ auf) auf die einfachere Form (2.87) reduziert.

Das damit erhaltene Koeffizientensystem für $\alpha \neq q^{-2}$ beschreibt den Differentialkalkül $(\Gamma'_{\alpha\omega}, \mathrm{d})$ des Theorems 2.1.

Wir wollen nun noch das Koeffizientensystem für den Fall $\alpha = q^{-2}$, für den die Einschränkungen der letzten beiden Lemmata nicht gelten, charakterisieren.

Lemma 2.12: *Falls $\alpha = q^{-2}$ gilt, so sind ω und ψ reell, und es gilt*

$$c_2 = \psi - q^2; \qquad\qquad e_1 = q^2\omega\psi - 1. \tag{2.89}$$

Beweis: Die Gleichungen (2.89) ergeben sich unmittelbar durch Einsetzen der Bedingung $\alpha = q^{-2}$ in die Gleichungen (2.82).

Weiterhin werten wir wie im Beweis des Lemmas 2.11 die $*$-Bedingung (2.88) aus. Es ist jetzt (vgl. Anhang B.4)

$$(\Omega_- z_m)^* = q^{-2}\overline{\omega}(\overline{\psi} - \psi) z_m^* \Omega_+ - \overline{\omega}\omega^{-1} z_m^* \Omega_-.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $\overline{\psi} = \psi$ und $\overline{\omega}\omega^{-1} = 1$; damit sind ω und ψ reell. □

Mit den Lemmata dieses Abschnittes ist insgesamt das Koeffizientensystem des Differentialkalküls $(\Gamma''_{\omega\psi}, \mathrm{d})$ aus Theorem 2.1 charakterisiert.

2.2.10 Der Fall $d_3 f_3 \neq 0$ für freie Kalküle

Es bleibt der zweite der drei Fälle aus Abschnitt 2.2.7 zu untersuchen, in dem d_3 und f_3 von 0 verschieden sind und gleichzeitig notwendig $\alpha = \beta^{-1} = q^{-2}$ gilt. Es ist also

$$\begin{aligned} a_1 &= q^{-1}; & a_2 &= q; & a_3 &= q; & a_4 &= q^{-1} \\ b_1 &= 0; & b_2 &= 0; & b_3 &= 0; & b_4 &= 0. \end{aligned}$$

Lemma 2.13: *Für einen freien kovarianten $*$-Differentialkalkül erster Ordnung mit $d_3 f_3 \neq 0$ gibt es reelle Zahlen $\varrho \neq 0$ und $\tau \neq 0$, so daß*

$$d_3 = -q^{-2}\varrho; \qquad f_3 = -\tau, \tag{2.90}$$
$$d_4 = -q^{2N-2}\varrho; \qquad f_4 = -q^{2N}\tau \tag{2.91}$$
$$c_3 = c_4 = \mathfrak{s}_+\varrho - 1; \qquad e_3 = e_4 = q^2(\mathfrak{s}_+\tau - 1). \tag{2.92}$$
$$c_1 = -q^{-2}\frac{\varrho}{\tau}(\mathfrak{s}'_+\varrho - 1), \qquad c_2 = -\frac{\tau}{\varrho}(\mathfrak{s}'_+\varrho - 1), \tag{2.93}$$
$$e_1 = -\frac{\varrho}{\tau}(\mathfrak{s}'_+\tau - q^2), \qquad e_2 = -q^2\frac{\tau}{\varrho}(\mathfrak{s}'_+\tau - q^2). \tag{2.94}$$

Beweis: Da d_3 und f_3 als von 0 verschieden vorausgesetzt werden, können zunächst komplexe Parameter $\varrho \neq 0$ und $\tau \neq 0$ so festgesetzt werden, daß die Gleichungen (2.90) erfüllt sind. Hieraus folgen sofort die Gleichungen (2.91) und unter Beachtung von (2.26) und (2.27) schließlich (2.92). Durch Einsetzen von (2.90), (2.91) und (2.92) in die vier Gleichungen (2.40)–(2.43) und Auflösen nach c_1, e_1, c_2 bzw. e_2 erhalten wir die Gleichungen (2.93) und (2.94).

Es bleibt zu zeigen, daß ϱ und τ reell sein müssen. Dazu berechnen wir mit den bis hierher gewonnenen Werten der Koeffizienten des Ansatzes (2.12) in Abhängigkeit von ϱ und τ den Ausdruck $(\Omega_+ z_m)^*$, der gleich $-z_m^*\Omega_+$ sein muß. Es ergibt sich (vgl. Anhang B.5)

$$\begin{aligned} (\Omega_+ z_m)^* = \big(\mathfrak{s}'_+(\varrho - \bar{\varrho} + q^{-2}(\varrho^{-1} - \mathfrak{s}_+ + 1)(\varrho\bar{\tau} - \bar{\varrho}\tau)) - 1\big) z_m \Omega_+ \\ + \mathfrak{s}'_+\frac{\tau}{\varrho}\big(q^2(\varrho - \bar{\varrho}) - \mathfrak{s}'_+(\varrho\bar{\tau} - \bar{\varrho}\tau)\big) z_m \Omega_-, \end{aligned}$$

nach Koeffizientenvergleich mit $-z_m^*\Omega_+$ also

$$\begin{aligned} (\varrho - \bar{\varrho}) - q^{-2}(\mathfrak{s}_+ - 1 - \varrho^{-1})(\varrho\bar{\tau} - \bar{\varrho}\tau) = 0 \\ (\varrho - \bar{\varrho}) - q^{-2}\mathfrak{s}'_+(\varrho\bar{\tau} - \bar{\varrho}\tau) = 0 \end{aligned}$$

und damit wegen $\varrho\tau \neq 0$ sofort $\varrho = \overline{\varrho}$ sowie $\tau = \overline{\tau}$. □

Mit den Gleichungen des Lemmas ist gerade das Koeffizientensystem des Differentialkalküls $(\Gamma'''_{\varrho\tau}, \mathrm{d})$ aus Theorem 2.1 beschrieben.

2.2.11 Zur Klassifikation der fast-freien Differentialkalküle

Wir wollen uns nun wieder der Klassifikation der fast-freien kovarianten Differentialkalküle zuwenden. Ausgangspunkt ist der Ansatz (2.14) mit einer zusätzlichen Relation der Form $\Omega_0 = \mu\Omega_+ + \lambda\Omega_- = 0$. Die Fälle $\mu = 0$ sowie $\lambda = 0$ behandeln wir später separat; hier setzen wir zunächst voraus, daß weder λ noch μ gleich Null ist, so daß o. B. d. A. $\mu = 1$ gesetzt werden kann. Demnach legen wir unseren Untersuchungen die Relation

$$\Omega_+ + \lambda\Omega_- = 0, \tag{2.95}$$

mit einer von Null verschiedenen komplexen Zahl zugrunde. In diesem Fall kann in (2.14) $\Omega_1 = \Omega_+$ gewählt werden.

Wir machen im folgenden wieder Gebrauch von den Substitutionen (2.25).

Lemma 2.14: *Für jeden fast-freien kovarianten Differentialkalkül mit der Relation $\Omega_+ + \lambda\Omega_- = 0$, $\lambda \neq 0$, müssen die Koeffizienten des Ansatzes (2.14) folgende Bedingungen erfüllen:*

$$(\alpha = \lambda^{-1} \text{ oder } \alpha = q^{-2}) \tag{2.96}$$

$$(\beta = \lambda \text{ oder } \beta = q^2). \tag{2.97}$$

$$c_1 = q^2\lambda^{-1}(\alpha - \alpha^{-1}\lambda^{-1} + \mathfrak{s}'_+ d_3) \tag{2.98}$$

$$c_2 = \lambda(\beta^{-1} - \beta\lambda^{-1} + \mathfrak{s}'_+ d_3) \tag{2.99}$$

$$c_3 = c_4 = \alpha^{-1}\lambda^{-1} - q^2\beta^{-1} - q^2\mathfrak{s}_+ d_3. \tag{2.100}$$

Beweis: Aus den Gleichungen des Ansatzes (2.14) und (2.95) erhalten wir unmittelbar

$$\begin{aligned}
\Omega_+ z_m &= (qa_4 + c_4 + d_4) z_m \Omega_+ + b_4 \mathrm{d} z_m \\
\Omega_- z_m &= q^{-2}(-q\lambda^{-1}a_1 + c_1) z_m \Omega_+ + q^{-2} b_1 \mathrm{d} z_m \\
\Omega_+ z^*_m &= (qa_2 + c_2) z^*_m \Omega_+ + b_2 \mathrm{d} z^*_m \\
\Omega_- z^*_m &= q^{-2}(-q\lambda^{-1}a_3 + c_3 + q^2 d_3) z^*_m \Omega_+ + q^{-2} b_3 \mathrm{d} z^*_m,
\end{aligned}$$

woraus vermittels (2.95) die vier Gleichungen

$$qa_4 + (c_4 + d_4) - q^{-1}a_1 + q^{-2}\lambda c_1 = 0 \tag{2.101}$$

$$-q^{-2}\lambda b_1 = b_4 \tag{2.102}$$

$$qa_2 + c_2 - q^{-1}a_3 + q^{-2}\lambda(c_3 + q^2 d_3) = 0 \tag{2.103}$$

$$-q^2\lambda^{-1}b_2 = b_3 \tag{2.104}$$

folgen.

Falls $\alpha \neq q^{-2}$ gilt, so ist $b_4 \neq 0$ und folglich $b_1/b_4 = -q^2\alpha$. Aus der Gleichung (2.102) des vorangegangenen Lemmas erhalten wir $b_1/b_4 = -q^2\lambda^{-1}$ und damit (2.96). Die Beziehung (2.97) wird analog unter Verwendung der Gleichung (2.104) gezeigt.

Ferner werten wir die erste der Bedingungen aus Punkt (ii) in Abschnitt 2.2.4 aus. Der Ausdruck

$$\sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}z_i \cdot z_i^* + \Omega_+ = (1 - q\lambda^{-1}a_3 + b_3 + c_3 + q^2\mathfrak{s}_+ d_3)\Omega_+$$

muß verschwinden, woraus sich zunächst

$$-q\lambda^{-1}a_3 + b_3 + c_3 + q^2\mathfrak{s}_+ d_3 = -1$$

ergibt. Werden hierin a_3 und b_3 durch α und β ausgedrückt, so entsteht unmittelbar die Gleichung (2.100).

Werden schließlich noch in den Gleichungen (2.103) und (2.101) die Koeffizienten a_ν durch α und β sowie c_3, c_4 und d_4 vermöge (2.100) und $d_4 = q^{2N}d_3$ durch d_3 ausgedrückt, so folgen (2.98) und (2.99). □

Lemma 2.15: *Falls für einen fast-freien Differentialkalkül erster Ordnung* $\alpha \neq q^{-2}$ *oder* $\beta \neq q^2$ *gilt, so ist* $d_3 = 0$. *Falls* $\alpha = q^{-2}$ *und* $\beta = q^2$ *gilt, so ist* $d_3 = 0$ *oder* $d_3 = -q^{-2}\mathfrak{s}'^{-1}_+(1 - q^4\lambda^{-1})$.

Beweis: Hierzu werten wir Bedingungen des Typs (iii) aus Abschnitt 2.2.4 aus. Die erste zu betrachtende Bedingung ist

$$\mathrm{d}z_k\left(\hat{R}^{st}_{lm} z_s z_t - q z_l z_m\right) = 0.$$

Zusätzlich zu den bisherigen Substitutionen setzen wir zur Abkürzung $\tau := d_3$. Dann ist (vgl. Anhang B.6)

$$\mathrm{d}z_k\left(\hat{R}^{st}_{lm} z_s z_t - q z_l z_m\right) = \lambda^{-1}(\alpha^{-1} - q^2)\mathfrak{s}'_+\tau\left(\hat{R}^{st}_{lm} z_k z_s \mathrm{d}z_t - q z_k z_l \mathrm{d}z_m\right)$$

und damit

$$\alpha = q^{-2} \text{ oder } \tau = 0.$$

Analog führt die Auswertung der Bedingung

$$\mathrm{d}z_k^* \left(\check{R}^{-\,st}_{\;\;lm} z_s^* z_t^* - q^{-1} z_l^* z_m^* \right) = 0$$

zu

$$\beta = q^2 \text{ oder } \tau = 0.$$

Schließlich werten wir für den Fall $\alpha = q^{-2}$, $\beta = q^2$ die Bedingung

$$\mathrm{d}z_k \left(\check{R}^{-\,st}_{\;\;lm} z_s^* z_t^* - q^{-1} z_l^* z_m^* \right) = 0$$

aus und erhalten (vgl. Anhang B.7)

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}z_k \left(\check{R}^{-\,st}_{\;\;lm} z_s^* z_t^* - q^{-1} z_l^* z_m^* \right) \\ &\qquad = (-q^2 + q^{-2}\lambda + \mathfrak{s}'_+ \lambda\tau)\tau \left(\grave{R}^{-\,st}_{\;\;kl} \delta_{tm} q^{2m} z_s^* \Omega_+ - q^{-1} \delta_{kl} q^{2l} z_m^* \Omega_+ \right), \end{aligned}$$

woraus

$$\tau = 0 \text{ oder } \tau = -q^{-2} \mathfrak{s}'^{\,-1}_+ (1 - q^4 \lambda^{-1})$$

folgt. □

Damit sind fünf Fälle zu unterscheiden, die zu den einzelnen Familien von Differentialkalkülen des Theorems 2.3 führen. Wir behalten die Bezeichnung $\tau = d_3$ bei.

1. Fall: $\lambda \neq q^2$, $\alpha = \lambda^{-1}$, $\beta = \lambda$, $\tau = 0$.
Es ergibt sich das Koeffizientensystem

$$\begin{array}{llll} a_1 = q\lambda^{-1}; & b_1 = q^2\lambda^{-1} - 1; & c_1 = q^2\lambda^{-1}(\lambda^{-1} - 1) & \\ a_2 = q^{-1}\lambda; & b_2 = q^{-2}\lambda - 1; & c_2 = \lambda - 1 & \\ a_3 = q^{-1}\lambda; & b_3 = q^2\lambda^{-1}; & c_3 = q^2\lambda^{-1} - 1; & d_3 = 0 \\ a_4 = q\lambda^{-1}; & b_4 = q^{-2}\lambda - 1; & c_4 = q^2\lambda^{-1} - 1; & d_4 = 0 \end{array}$$

und damit der Differentialkalkül $(\tilde{\Gamma}_\lambda, \mathrm{d})$.

2. Fall: $\lambda \neq q^2$, $\alpha = \lambda^{-1}$, $\beta = q^2$, $\tau = 0$.
Hier ergibt sich das Koeffizientensystem

$$\begin{array}{llll} a_1 = q\lambda^{-1}; & b_1 = q^2\lambda^{-1} - 1; & c_1 = q^2\lambda^{-1}(\lambda^{-1} - 1) & \\ a_2 = q; & b_2 = 0; & c_2 = q^{-2}\lambda - q^2 & \\ a_3 = q^{-1}\lambda; & b_3 = 0; & c_3 = 0; & d_3 = 0 \\ a_4 = q^{-1}; & b_4 = q^{-2}\lambda - 1; & c_4 = 0; & d_4 = 0, \end{array}$$

das den Differentialkalkül $(\tilde{\Gamma}^{\bullet}_{\lambda}, \mathrm{d})$ ergibt.

3. Fall: $\lambda \neq q^2$, $\alpha = q^{-2}$, $\beta = \lambda$, $\tau = 0$.
Hier ergibt sich das Koeffizientensystem

$$\begin{array}{llll} a_1 = q^{-1}; & b_1 = 0; & c_1 = \lambda^{-1}(1 - q^4\lambda^{-1}) & \\ a_2 = q^{-1}\lambda; & b_2 = q^{-2}\lambda - 1; & c_2 = 1 - \lambda & \\ a_3 = q; & b_3 = q^2\lambda^{-1} - 1; & c_3 = 0; & d_3 = 0 \\ a_4 = q\lambda^{-1}; & b_4 = 0; & c_4 = 0; & d_4 = 0, \end{array}$$

das den Differentialkalkül $(\tilde{\Gamma}^{\bullet\bullet}_{\lambda}, \mathrm{d})$ ergibt.

4. Fall: $\lambda \neq 0$ beliebig komplex, $\alpha = q^{-2}$, $\beta = q^2$, $\tau = 0$.
In diesem Falle nimmt das Koeffizientensystem die Gestalt

$$\begin{array}{llll} a_1 = q^{-1}; & b_1 = 0; & c_1 = \lambda^{-1}(1 - q^4\lambda^{-1}) & \\ a_2 = q; & b_2 = 0; & c_2 = q^{-2}\lambda(1 - q^4\lambda^{-1}) & \\ a_3 = q; & b_3 = 0; & c_3 = q^2\lambda^{-1} - 1; & d_3 = 0 \\ a_4 = q^{-1}; & b_4 = 0; & c_4 = q^2\lambda^{-1} - 1; & d_4 = 0 \end{array}$$

an und beschreibt damit den Differentialkalkül $(\tilde{\Gamma}'_{\lambda}, \mathrm{d})$.

5. Fall: $\lambda \neq 0$ beliebig komplex, $\alpha = q^{-2}$, $\beta = q^2$, $\tau = -q^{-2}\mathfrak{s}'^{\,-1}_{+}(1 - q^4\lambda^{-1})$.
Durch das sich in diesem Fall ergebende Koeffizientensystem

$$\begin{array}{lll} a_1 = q^{-1}; & b_1 = 0; & c_1 = 0 \\ a_2 = q; & b_2 = 0; & c_2 = 0 \\ a_3 = q; & b_3 = 0; & c_3 = \mathfrak{s}'^{\,-1}_{+}(1 - q^{2N+2}\lambda^{-1}) \\ & & d_3 = -q^{-2}\mathfrak{s}'^{\,-1}_{+}(1 - q^4\lambda^{-1}) \\ a_4 = q^{-1}; & b_4 = 0; & c_4 = \mathfrak{s}'^{\,-1}_{+}(1 - q^{2N+2}\lambda^{-1}) \\ & & d_4 = -q^{2N-2}\mathfrak{s}'^{\,-1}_{+}(1 - q^4\lambda^{-1}) \end{array}$$

wird der Differentialkalkül $(\tilde{\Gamma}''_\lambda, \mathrm{d})$ beschrieben.

Um untersuchen zu können, welche der gefundenen fast-freien Differentialkalküle $*$-Kalküle sind, werten wir ähnlich wie im Beweis des Lemmas 2.9 eine $*$-Bedingung aus, nämlich

$$(\mathrm{d}z_k \cdot z_l^*)^* = \mathrm{d}z_l \cdot z_k^*.$$

Wir erhalten daraus (vgl. Anhang B.8) durch Koeffizientenvergleich für $\grave{R}^{-}{}^{ts}_{lk} z_t^* \mathrm{d}z_s$ die Gleichung

$$\overline{a_3} b_4 + \overline{b_3} a_3 - \overline{c_3} b_4 a_3 = 0. \tag{2.105}$$

Lemma 2.16: *Die Differentialkalküle* $(\tilde{\Gamma}_\lambda, \mathrm{d})$, $(\tilde{\Gamma}'_\lambda, \mathrm{d})$ *und* $(\tilde{\Gamma}''_\lambda, \mathrm{d})$ *sind genau dann $*$-Kalküle, wenn λ reell ist.*
Die Differentialkalküle $(\tilde{\Gamma}^\bullet_\lambda, \mathrm{d})$ *und* $(\tilde{\Gamma}^{\bullet\bullet}_\lambda, \mathrm{d})$ *sind für kein* $\lambda \notin \{0; q^2\}$ *$*$-Kalküle.*

Beweis: Voraussetzungsgemäß sollen die genannten Kalküle fast-freie Differentialkalküle sein, d. h. es darf neben der Relation $\Omega_+ + \lambda\Omega_- = 0$ keine weitere Relation $\Omega_+ + \lambda'\Omega_- = 0$ mit $\lambda' \neq \lambda$ bestehen.

Für einen $*$-Differentialkalkül folgt aber wegen $\Omega_\pm^* = -\Omega_\pm$ aus $\Omega_+ + \lambda\Omega_- = 0$ sofort $\Omega_+ + \overline{\lambda}\Omega_- = 0$, was nur dann mit der Eigenschaft eines fast-freien Kalküls verträglich ist, wenn λ reell ist.

Umgekehrt kann durch direkte Rechnung gezeigt werden, daß die genannten Kalküle für reelles λ in der Tat sämtliche Eigenschaften von $*$-Kalkülen besitzen.

Für die Differentialkalküle $(\tilde{\Gamma}^\bullet_\lambda, \mathrm{d})$ und $(\tilde{\Gamma}^{\bullet\bullet}_\lambda, \mathrm{d})$ mit $\lambda \notin \{0; q^2\}$ ist wegen

$$\overline{a_3} b_4 + \overline{b_3} a_3 - \overline{c_3} b_4 a_3 = \begin{cases} q^{-1}\overline{\lambda}(q^{-2}\lambda - 1) + 0 - 0 & \text{für } (\tilde{\Gamma}^\bullet_\lambda, \mathrm{d}) \\ 0 + q(q^2\overline{\lambda}^{-1} - 1) - 0 & \text{für } (\tilde{\Gamma}^{\bullet\bullet}_\lambda, \mathrm{d}) \end{cases}$$

die Gleichung (2.105) verletzt, so daß dies keine $*$-Kalküle sein können. □

2.2.12 Die Sonderfälle $\mu = 0$ und $\lambda = 0$ für fast-freie Differentialkalküle

Durch die Untersuchungen des vorigen Abschnittes wurden fast-freie kovariante Differentialkalküle mit der Relation (2.95) vollständig erfaßt, so daß nur noch die Fälle $\lambda = 0$ und $\mu = 0$ nachzutragen sind.

Wir behandeln zuerst den Fall $\mu = 0$, d. h.

$$\Omega_- = 0. \tag{2.106}$$

Der Ansatz (2.14) bleibt unverändert, und es kann weiterhin $\Omega_1 = \Omega_+$ gewählt werden. Auch hier gelten die Gleichungen (2.17)–(2.20), und die Substitutionen (2.25) können beibehalten werden.

Lemma 2.17: *Für einen fast-freien Differentialkalkül erster Ordnung mit $\Omega_- = 0$ gilt für die Koeffizienten des Ansatzes (2.14)*

$$\alpha = q^{-2}; \qquad \beta = q^2; \tag{2.107}$$
$$c_1 = c_2 = 0; \tag{2.108}$$
$$c_3 = c_4 = {\mathfrak{s}'_+}^{-1}; \tag{2.109}$$
$$d_3 = -q^{-2}{\mathfrak{s}'_+}^{-1}; \qquad d_4 = -q^{2N-2}{\mathfrak{s}'_+}^{-1}. \tag{2.110}$$

Beweis: Analog zum Beweis des Lemmas 2.14 berechnen wir zunächst aus den Gleichungen des Ansatzes (2.14) und (2.106)

$$\Omega_- z_m = q^{-2}c_1 z_m \Omega_+ + q^{-2}b_1 \mathrm{d}z_m$$
$$\Omega_- z_m^* = q^{-2}(c_3 + q^2 d_3) z_m^* \Omega_+ + q^{-2} b_3 \mathrm{d}z_m^*$$

und erhalten daraus sofort

$$b_1 = 0; \qquad b_3 = 0; \tag{2.111}$$
$$c_1 = 0;$$
$$c_3 + q^2 d_3 = 0. \tag{2.112}$$

Aus (2.111) folgt bereits Gleichung (2.107). Ferner folgt aus

$$\sum_{i=1}^{N} q^{-2i}\mathrm{d}z_i^* \cdot z_i = a_4 \acute{R}^{st}_{ij}\delta_{ij}q^{-2i} + b_4\Omega_- + c_4\sum_{i=1}^{N} q^{-2i} z_i^* z_i \Omega_- + d_4 \sum_{i=1}^{N} q^{-2i}\Omega_+$$
$$= (q^{-1}a_4 + q^{-2}c_4 + q^{-2}d_4)$$

wegen $\sum\limits_{i=1}^{N} q^{-2i}\mathrm{d}z_i^* \cdot z_i = -\Omega_- = 0$ die Bedingung $c_4 + q^{-2N+2}\mathfrak{s}_+ d_4 = -1$, also

$$c_3 + q^2 \mathfrak{s}_+ d_3 = -1.$$

Nach Subtraktion von (2.112) und Division durch $\mathfrak{s}'_+$ erhalten wir (2.110) und durch nochmalige Anwendung von (2.112) auch (2.109).

Bis auf c_2 sind damit bereits alle Koeffizienten festgelegt. Wir berechnen nun noch (vgl. Anhang B.9)

$$\mathrm{d}z_m^* \cdot \sum_{i=1}^{N} z_i z_i^* - \mathrm{d}z_m^* = q^{-2} c_2 z_m^* \Omega_+;$$

da die linke Seite hierin gleich Null sein muß, folgt $c_2 = 0$. □

Die Behandlung des Falles $\lambda = 0$ mit der Relation

$$\Omega_+ = 0 \tag{2.113}$$

verläuft völlig analog, nur muß hier $\Omega_1 = \Omega_-$ angenommen werden.

Es gelten die Gleichungen (2.17)–(2.20); wir verwenden wiederum die Substitutionen (2.25).

Lemma 2.18: *Für einen fast-freien Differentialkalkül erster Ordnung mit $\Omega_+ = 0$ gilt für die Koeffizienten des Ansatzes (2.14) mit $\Omega_1 = \Omega_-$*

$$\alpha = q^{-2}; \qquad \beta = q^2; \tag{2.114}$$

$$c_1 = c_2 = 0; \tag{2.115}$$

$$c_3 = c_4 = q^2 \mathfrak{s}_+'^{-1}; \tag{2.116}$$

$$d_3 = -q^{-2N+2} \mathfrak{s}_+'^{-1}; \qquad d_4 = -q^2 \mathfrak{s}_+'^{-1}. \tag{2.117}$$

Beweis: Der Beweis ist vollständig analog dem des vorigen Lemmas. □

Man überzeugt sich davon, daß die Koeffizientensysteme der letzten beiden Lemmata tatsächlich fast-freie Differentialkalküle erster Ordnung beschreiben. Der durch Lemma 2.17 charakterisierte Kalkül ist $(\tilde{\Gamma}''_\infty, \mathrm{d})$, während Lemma 2.18 den Kalkül $(\tilde{\Gamma}''_0, \mathrm{d})$ beschreibt.

Lemma 2.19: $(\tilde{\Gamma}''_\infty, \mathrm{d})$ *und* $(\tilde{\Gamma}''_0, \mathrm{d})$ *sind $*$-Kalküle.*

Beweis: Die Behauptung folgt wie schon im allgemeineren Fall des Lemmas 2.16 durch direktes Nachrechnen der $*$-Bedingungen. □

Mit den Ergebnissen dieses und des vorangegangenen Abschnittes sind insgesamt alle Aussagen des Theorems 2.3 bewiesen.

2.3 Weitere Eigenschaften der klassifizierten Differentialkalküle

Zu Beginn des Abschnitts 2.2 wurde die Möglichkeit erwähnt, aus kovarianten Differentialkalkülen auf S_q^{2N-1} durch Faktorisierung nach Relationen der Form $\Omega_0 = 0$ mit einer invarianten 1-Form Ω_0 neue kovariante Differentialkalküle zu gewinnen. Wir wollen jetzt für die freien und fast-freien kovarianten $*$-Differentialkalküle aus den Theoremen 2.1 und 2.3 die Möglichkeiten solcher Faktorisierungen näher untersuchen. Sodann werden wir auf ausgewählte weitere Eigenschaften der betrachteten Kalküle eingehen und abschließend einige spezielle Kalküle kennzeichnen, die sich durch strukturelle Besonderheiten aus der Vielzahl der klassifizierten Kalküle herausheben und deswegen für weitergehende Untersuchungen besonders geeignet erscheinen.

2.3.1 Faktorisierungen freier und fast-freier $*$-Differentialkalküle erster Ordnung

Lemma 2.20: *Es sei $X = \mathrm{S}_q^{2N-1}$ und (Γ, d) ein kovarianter $*$-Differentialkalkül erster Ordnung auf X. Weiter sei Ω_0 eine (von 0 verschiedene) invariante 1-Form in Γ. Falls der von Ω_0 erzeugte Links-Untermodul $X \cdot \Omega_0$ mit dem von demselben Element erzeugten Rechts-Untermodul $\Omega_0 \cdot X$ übereinstimmt, so kann der Kalkül (Γ, d) nach der zusätzlichen Relation $\Omega_0 = 0$ faktorisiert werden, wobei ein kovarianter Differentialkalkül $(\tilde{\Gamma}, \mathrm{d})$ entsteht.*

Falls zudem der Untermodul $X \cdot \Omega_0$ invariant unter der $*$-Abbildung ist, so ist $(\tilde{\Gamma}, \mathrm{d})$ ein $*$-Kalkül.

Ist (Γ, d) ein freier kovarianter $*$-Differentialkalkül, so ist $(\tilde{\Gamma}, \mathrm{d})$ ein fast-freier kovarianter Differentialkalkül.

Beweis: Die Gleichheit der von Ω_0 erzeugten Links- und Rechtsuntermoduln bedeutet, daß Ω_0 einen Unterbimodul als Linksmodul erzeugt. Die Faktorisierung nach der Relation $\Omega_0 = 0$ ist als Faktorisierung nach diesem Unterbimodul offensichtlich möglich; die Differentiation d aus X in den faktorisierten Bimodul ist wohldefiniert und erfüllt die Leibnizregel, so daß wieder ein Differentialkalkül vorliegt. Dessen Kovarianz ist durch die Invarianz von Ω_0 sichergestellt.

Aus der Definition eines $*$-Kalküls folgt die zweite Behauptung. Die letzte Aussage ist unmittelbare Konsequenz unserer Definitionen freier und fast-freier Differentialkalküle. $\square$

Wir werden im folgenden eine invariante 1-Form Ω_0, für die die Identität von Untermoduln $\Omega_0 \cdot X \equiv X \cdot \Omega_0$ in Γ besteht, als **faktorisierende 1-Form** bezeichnen.

Gibt es in einem freien kovarianten $*$-Kalkül (Γ, d) keine faktorisierende 1-Form, so kann offenbar aus (Γ, d) kein fast-freier Kalkül durch Faktorisierung gewonnen werden.

Satz 2.21:

- *In jedem der Differentialkalküle* $(\Gamma_{\alpha\tau}, \mathrm{d})$, $(\Gamma'_{\alpha\omega}, \mathrm{d})$ *mit* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, q^{-2}\}$ *aus Theorem 2.1 existiert genau eine faktorisierende 1-Form. Diese ist* $(\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-)$, *und es gilt*

$$\Gamma_{\alpha\tau}/(\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-) = \Gamma'_{\alpha\omega}/(\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-) = \tilde{\Gamma}_{\alpha^{-1}}.$$

  In $(\Gamma'_{\alpha\omega}, \mathrm{d})$ *mit* $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ *existiert keine faktorisierende 1-Form.*

- *In jedem der Differentialkalküle* $(\Gamma''_{\omega\psi}, \mathrm{d})$ *mit* $\psi^2 \neq 4\omega^{-1}$ *existieren genau zwei faktorisierende 1-Formen, nämlich* $(\Omega_+ + \lambda_1\Omega_-)$ *und* $(\Omega_+ + \lambda_2\Omega_-)$, *wobei* λ_1 *und* λ_2 *die Lösungen der quadratischen Gleichung* $q^{-4}\omega\lambda^2 - q^{-2}\omega\psi\lambda + 1 = 0$ *sind. Für* $\psi^2 = 4\omega^{-1}$ *existiert genau eine faktorisierende 1-Form, nämlich* $(\Omega_+ + \lambda\Omega_-)$, *wobei* $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}q^2\psi$ *die (Doppel-) Lösung derselben quadratischen Gleichung ist. Es gilt*

$$\Gamma''_{\omega\psi}/(\Omega_+ + \lambda_1\Omega_-) = \tilde{\Gamma}'_{\lambda_1} \quad \textit{und} \quad \Gamma''_{\omega\psi}/(\Omega_+ + \lambda_2\Omega_-) = \tilde{\Gamma}'_{\lambda_2}.$$

  Dabei sind λ_1 *und* λ_2 *reell und folglich* $\tilde{\Gamma}'_{\lambda_1}$, $\tilde{\Gamma}'_{\lambda_2}$ $*$*-Kalküle genau dann, wenn* $\psi^2 \geq 4\omega^{-1}$.

- *In jedem der Differentialkalküle* $(\Gamma'''_{\varrho\tau}, \mathrm{d})$ *mit* $\varrho \in \mathbb{R} \setminus \{0, \mathfrak{s}'^{-1}_+\}$, $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *existieren genau zwei faktorisierende 1-Formen, falls* $\tau \neq q^2\varrho$, *bzw. genau eine faktorisierende 1-Form, falls* $\tau = q^2\varrho$. *Diese faktorisierende 1-Formen sind jeweils* $(\Omega_+ + \lambda_1\Omega_-)$ *und* $(\Omega_+ + \lambda_2\Omega_-)$, *wobei* $\lambda_1 = q^2\dfrac{\tau}{\varrho}$ *und* $\lambda_2 = q^2\dfrac{\mathfrak{s}'_+\tau - q^2}{\mathfrak{s}'_+\varrho - 1}$ *die Lösungen der quadratischen Gleichung*

$(\mathfrak{s}'_+\varrho - 1)\varrho\lambda^2 + q^2(q^2\varrho + \tau - 2\mathfrak{s}'_+\varrho\tau)\lambda + q^4(\mathfrak{s}'_+\tau - q^2)\tau = 0$ sind. (Für $\tau = q^2\varrho$ ist $\lambda_1 = \lambda_2 = q^4$.) Es gilt

$$\Gamma'''_{\varrho\tau}/(\Omega_+ + \lambda_1\Omega_-) = \tilde{\Gamma}'_{\lambda_1} \quad \text{und} \quad \Gamma'''_{\varrho\tau}/(\Omega_+ + \lambda_2\Omega_-) = \tilde{\Gamma}''_{\lambda}.$$

- *Jeder der Differentialkalküle $(\Gamma'''_{\varrho\tau}, \mathrm{d})$ mit $\varrho = {\mathfrak{s}'_+}^{-1}$ und $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0, q^2{\mathfrak{s}'_+}^{-1}\}$ besitzt genau zwei faktorisierende 1-Formen, nämlich $(\Omega_+ + \lambda_1\Omega_-)$ mit $\lambda_1 = q^2\mathfrak{s}'_+\tau$ sowie (Ω_-). In diesem Falle gilt*

$$\Gamma'''_{\varrho\tau}/(\Omega_+ + \lambda_1\Omega_-) = \tilde{\Gamma}'_{\lambda_1} \quad \text{und} \quad \Gamma'''_{\varrho\tau}/(\Omega_-) = \tilde{\Gamma}''_{\infty}.$$

- *In dem Differentialkalkül $(\Gamma'''_{\varrho\tau}, \mathrm{d})$ mit $\varrho = q^{-2}\tau = {\mathfrak{s}'_+}^{-1}$ ist jede invariante 1-Form eine faktorisierende 1-Form. Es gilt*

$$\Gamma'''_{\varrho\tau}/(\Omega_+ + \lambda\Omega_-) = \tilde{\Gamma}'_{\lambda} \quad \text{und} \quad \Gamma'''_{\varrho\tau}/(\Omega_-) = \tilde{\Gamma}''_{\infty}.$$

Beweis: Die erste Bedingung aus Lemma 2.20 für eine faktorisierende 1-Form Ω_0, nämlich daß $\Omega_0 \cdot X \equiv X \cdot \Omega_0$ ist, bedeutet im einzelnen, daß für jedes $x \in X$ ein $x' \in X$ existiert, so daß $\Omega_0 x = x'\Omega_0$ gilt, und umgekehrt. Da mit $\Omega_0 x = x'\Omega_0$ und $\Omega_0 y = y'\Omega_0$ für $x, x', y, y' \in X$ auch gilt $\Omega_0 xy = x'y'\Omega_0$, genügt es, die Gültigkeit dieser Bedingung für die Erzeugenden z_m und z_m^* der Algebra X zu prüfen.

Da jede invariante 1-Form in einem freien kovarianten $*$-Differentialkalkül auf S_q^{2N-1} eine Linearkombination von Ω_+ und Ω_- ist, werden zur Auffindung aller faktorisierenden 1-Formen für jeden der $*$-Kalküle aus Theorem 2.1 zunächst durch Einsetzen der jeweiligen Koeffizienten a_ν, b_ν, c_ν, $d_{\nu'}$, e_ν, $f_{\nu'}$ (vgl. Ansatz (2.12)) in die Gleichungen (2.13) die jeweiligen Linksmodulausdrücke für $\Omega_\pm z_m^{(*)}$ bestimmt. Anschließend kann in einfacher Weise untersucht werden, für welche Linearkombinationen Ω_0 von Ω_+ und Ω_- die Ausdrücke $\Omega_0 z_m^{(*)}$ Vielfache von $z_m^{(*)}\Omega_0$ sind.

Wegen $(X)^* \equiv X$ erfüllt eine invariante 1-Form Ω_0, für die $\Omega_0 \cdot X \equiv X \cdot \Omega_0$ gilt, genau dann die zweite Bedingung, nämlich daß der Untermodul $X \cdot \Omega_0$ invariant unter $*$ ist, wenn $(X \cdot \Omega_0)^* \equiv (\Omega_0)^* \cdot X = \Omega_0 \cdot X$ ist, wenn also $\Omega_0 = C \cdot \Omega_0$ mit $C \in \mathbb{C}$ gilt. Dies ist wegen $\Omega_\pm^* = -\Omega_\pm$ sicher für $\Omega_0 = \Omega_\pm$ der Fall und trifft für $\Omega_0 = \Omega_+ + \lambda\Omega_-$ genau dann zu, wenn λ reell ist.

- Für $(\Gamma_{\alpha\tau}, \mathrm{d})$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Omega_+ z_m &= \alpha\mathfrak{s}'_+\tau z_m\Omega_+ - \alpha^{-1}(1-\alpha\mathfrak{s}'_+\tau)z_m\Omega_- + (q^{-2}\alpha^{-1}-1)\mathrm{d}z_m\\
\Omega_- z_m &= \alpha^2(1-\mathfrak{s}'_+\tau)z_m\Omega_+ + (\alpha+1-\alpha\mathfrak{s}'_+\tau)z_m\Omega_- - \alpha(q^{-2}\alpha^{-1}-1)\mathrm{d}z_m\\
\Omega_+ z_m^* &= (\alpha^{-1}+1-\mathfrak{s}'_+\tau)z_m^*\Omega_+ + \alpha^{-1}(1-\alpha\mathfrak{s}'_+\tau)z_m^*\Omega_- + (q^{-2}\alpha^{-1}-1)\mathrm{d}z_m^*\\
\Omega_- z_m^* &= -\alpha(1-\mathfrak{s}'_+\tau)z_m^*\Omega_+ + \mathfrak{s}'_+\tau z_m^*\Omega_- - \alpha(q^{-2}\alpha^{-1}-1)\mathrm{d}z_m^*.
\end{aligned}$$

Daraus ist ersichtlich, daß Ω_+ und Ω_- keine faktorisierenden 1-Formen sein können; ferner kann $(\Omega_+ + \lambda\Omega_-)$ nur für $\lambda = \alpha^{-1}$ faktorisierende 1-Form sein, da in jedem anderen Falle die Summanden $\mathrm{d}z_m$ in der Linksmodulform von $(\Omega_+ + \lambda\Omega_-)z_m$ nicht verschwinden. In der Tat ist aber

$$\begin{aligned}
(\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-)z_m &= \alpha z_m(\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-)\\
(\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-)z_m^* &= \alpha^{-1}z_m^*(\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-),
\end{aligned}$$

woraus sofort die Inklusionen $(\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-)\cdot X \subseteq X\cdot(\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-)$ und $(\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-)\cdot X \supseteq X\cdot(\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-)$ folgen. Da λ reell ist, ist der Untermodul $X\cdot(\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-)$ zudem invariant unter der Abbildung $*$. Der durch die Faktorisierung entstehende Kalkül ist somit ein $*$-Kalkül.

Da durch Elimination von Ω_- vermittels der Relation $\Omega_- = -\alpha\Omega_+$ aus den Bimodulstrukturgleichungen für $\Gamma_{\alpha\tau}$ diejenigen des fast-freien Kalküls $\tilde{\Gamma}_{\alpha^{-1}}$ entstehen, ist dies der faktorisierte Kalkül.

- Für $(\Gamma'_{\alpha\omega}, \mathrm{d})$ entstehen

$$\begin{aligned}
\Omega_+ z_m &= -\alpha^{-1}z_m\Omega_- + (q^{-2}\alpha^{-1}-1)\mathrm{d}z_m\\
\Omega_- z_m &= q^{-2}\omega z_m\Omega_+ + (1+q^{-2}\alpha^{-1}\omega)z_m\Omega_- - \alpha(q^{-2}\alpha^{-1}-1)\mathrm{d}z_m\\
\Omega_+ z_m^* &= (1+q^2\overline{\alpha}\omega^{-1})z_m^*\Omega_+ + q^2\omega^{-1}z_m^*\Omega_- + (q^{-2}\overline{\alpha}^{-1}-1)\mathrm{d}z_m^*\\
\Omega_- z_m^* &= -\overline{\alpha}z_m^*\Omega_+ - \overline{\alpha}(q^{-2}\overline{\alpha}^{-1}-1)\mathrm{d}z_m^*.
\end{aligned}$$

Analog zum vorigen Fall ersieht man hieraus, daß Ω_+ und Ω_- keine faktorisierenden 1-Formen sind und daß in den Linksmodulausdrücken für $(\Omega_+ + \lambda\Omega_-)\mathrm{d}z_m$ und $(\Omega_+ + \lambda\Omega_-)\mathrm{d}z_m^*$ die Glieder $\mathrm{d}z_m$ bzw. $\mathrm{d}z_m^*$ nur dann verschwinden, wenn $\lambda = \alpha^{-1}$ bzw. $\lambda = \overline{\alpha}^{-1}$ ist. Insbesondere existiert also nur für reelles α überhaupt ein λ, das die Forderungen bezüglich z_m und

z_m^* zugleich erfüllt. Für reelles α erhalten wir aber in der Tat

$$(\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-)z_m = q^{-2}\omega z_m(\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-)$$
$$(\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-)z_m^* = q^2\overline{\alpha}\omega^{-1}z_m^*(\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-),$$

so daß die Inklusionen $(\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-)\cdot X \subseteq X\cdot(\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-)$ und $(\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-)\cdot X \supseteq X\cdot(\Omega_+ + \alpha^{-1}\Omega_-)$ gelten; die $*$-Invarianz ist wegen $\alpha^{-1}\in\mathbb{R}$ gewährleistet.

Die Übereinstimmung des faktorisierten Kalküls mit $\tilde{\Gamma}_{\alpha^{-1}}$ folgt wie im vorigen Fall.

- Für $(\Gamma''_{\omega\psi}, \mathrm{d})$ ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\Omega_+ z_m &= & &-q^2 z_m\Omega_-\\
\Omega_- z_m &= q^{-2}\omega z_m\Omega_+ + & &\omega\psi z_m\Omega_-\\
\Omega_+ z_m^* &= \psi z_m^*\Omega_+ + & &q^2\omega^{-1}z_m^*\Omega_-\\
\Omega_- z_m^* &= -q^{-2}z_m^*\Omega_+ .
\end{aligned}$$

Aus der ersten und letzten dieser Gleichungen ist ersichtlich, daß weder Ω_+ noch Ω_- als faktorisierende 1-Form in Frage kommt. Mit $\lambda\neq 0$ erhalten wir

$$(\Omega_+ + \lambda\Omega_-)z_m = z_m(q^{-2}\lambda\omega\Omega_+ + (\lambda\omega\psi - q^2)\Omega_-)$$
$$(\Omega_+ + \lambda\Omega_-)z_m^* = z_m^*((\psi - q^{-2}\lambda)\Omega_+ + q^2\omega^{-1}\Omega_-);$$

die Ausdrücke auf den rechten Seiten gehören genau dann zu $X\cdot(\Omega_+ + \lambda\Omega_-)$, wenn $q^{-2}\lambda^2\omega - \lambda\omega\psi + q^2 = 0$ gilt. Die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung in λ ist $\frac{1}{4}q^4(\psi^2 - 4\omega^{-1})$, so daß genau für $\psi^2 = 4\omega^{-1}$ eine Doppellösung vorliegt.

Wie in den vorigen Fällen folgen die Identitäten für die faktorisierten Kalküle durch Vergleich der Bimodulstrukturgleichungen; die faktorisierten Kalküle sind $*$-Kalküle genau für die Fälle, in denen die Lösungen der quadratischen Gleichung reell sind.

- Für $(\Gamma'''_{\varrho\tau}, \mathrm{d})$ gelangen wir schließlich zu

$$\begin{aligned}
\Omega_+ z_m &= q^{-2}\mathfrak{s}'_+\varrho z_m\Omega_+ - (q^2 - \mathfrak{s}'_+\tau)z_m\Omega_-\\
\Omega_- z_m &= q^{-4}\frac{\varrho}{\tau}(1 - \mathfrak{s}'_+\varrho)z_m\Omega_+ + \Big(\frac{\varrho}{\tau} + q^{-2}(1 - \mathfrak{s}'_+\varrho)\Big)z_m\Omega_-\\
\Omega_+ z_m^* &= \Big(\frac{\tau}{\varrho} + (q^2 - \mathfrak{s}'_+\tau)\Big)z_m^*\Omega_+ + q^2\frac{\tau}{\varrho}(q^2 - \mathfrak{s}'_+\tau)z_m^*\Omega_-\\
\Omega_- z_m^* &= -q^{-2}(1 - \mathfrak{s}'_+\varrho)z_m^*\Omega_+ + \mathfrak{s}'_+\tau z_m^*\Omega_-,
\end{aligned}$$

woraus zunächst folgt, daß Ω_+ und Ω_- genau dann faktorisierende 1-Formen sind, wenn $\mathfrak{s}'_+\tau = q^2$ bzw. $\mathfrak{s}'_+\varrho = 1$ gilt. Für 1-Formen $(\Omega_+ + \lambda\Omega_-)$ ergibt sich aus

$$\begin{aligned}(\Omega_+ + \lambda\Omega_-)z_m &= z_m\left(\left(q^{-2}\mathfrak{s}'_+\varrho - q^{-4}\lambda\frac{\varrho}{\tau}(\mathfrak{s}'_+\varrho - 1)\right)\Omega_+ \right.\\ &\qquad \left. + \left(\mathfrak{s}'_+\tau - q^2 + q^{-2}\lambda(1 - \mathfrak{s}'_+\varrho) + \lambda\frac{\varrho}{\tau}\right)\Omega_-\right)\\ (\Omega_+ + \lambda\Omega_-)z^*_m &= z^*_m\left(\left(q^2 - \mathfrak{s}'_+\tau + \frac{\tau}{\varrho} + q^{-2}\lambda(\mathfrak{s}'_+\varrho - 1)\right)\Omega_+ \right.\\ &\qquad \left. + \left(-q^2\frac{\tau}{\varrho}(\mathfrak{s}'_+\tau - q^2) + \lambda\mathfrak{s}'_+\tau\right)\Omega_-\right)\end{aligned}$$

als Bedingung dafür, daß die rechten Terme zu $X \cdot (\Omega_+ + \lambda\Omega_-)$ gehören, übereinstimmend

$$\varrho(\mathfrak{s}'_+\varrho - 1)\lambda^2 + (q^2\tau + q^4\varrho - 2q^2\mathfrak{s}'_+\varrho\tau)\lambda + q^4(\mathfrak{s}'_+\tau - q^2)\tau = 0.$$

Für $\varrho = q^{-2}\tau = {\mathfrak{s}'_+}^{-1}$ verschwindet die linke Seite, so daß in diesem Fall keine Einschränkung für λ besteht. Ansonsten liegt für $\varrho = {\mathfrak{s}'_+}^{-1}$ eine lineare Gleichung in λ mit der Lösung $\lambda = \lambda_1 = q^2\mathfrak{s}'_+\tau$ vor sowie in allen übrigen Fällen eine quadratische Gleichung mit den (reellen) Lösungen $\lambda_1 = q^2\frac{\tau}{\varrho}$ und $\lambda_2 = q^2\frac{\mathfrak{s}'_+\tau - q^2}{\mathfrak{s}'_+\varrho - 1}$. In allen Fällen bestätigt man leicht, daß für die gefundenen invarianten Elemente $(\Omega_+ + \lambda\Omega_-)$ tatsächlich $(\Omega_+ + \lambda\Omega_-) \cdot X \subseteq X \cdot (\Omega_+ + \lambda\Omega_-)$ und $(\Omega_+ + \lambda\Omega_-) \cdot X \supseteq X \cdot (\Omega_+ + \lambda\Omega_-)$ gilt, diese also faktorisierende 1-Formen sind.

Die Elimination von Ω_+ oder Ω_- aus den Bimodulstrukturgleichungen ergibt wiederum genau die im Satz angegebenen Identitäten der faktorisierten Kalküle. Diese sind sämtlich $*$-Kalküle, mit Ausnahme der aus $\Gamma'''_{{\mathfrak{s}'_+}^{-1}, q^2{\mathfrak{s}'_+}^{-1}}$ gewonnenen Kalküle $\tilde{\Gamma}''_\lambda$.

□

Satz 2.22: *In jedem der fast-freien kovarianten Differentialkalküle* $(\tilde{\Gamma}'_\lambda, \mathrm{d})$, $(\tilde{\Gamma}''_\lambda, \mathrm{d})$, $(\tilde{\Gamma}^\bullet_\lambda, \mathrm{d})$ *und* $(\tilde{\Gamma}^{\bullet\bullet}_\lambda, \mathrm{d})$ *ist die (bis auf Vielfache einzige) invariante 1-Form* $\Omega_{00} = \Omega_+$ *(*$\Omega_{00} = \Omega_-$ *im Falle von* $\tilde{\Gamma}''_\infty$*) eine faktorisierende 1-Form. Es gilt*

$$\tilde{\Gamma}'_\lambda/(\Omega_{00}) = \tilde{\Gamma}''_\lambda/(\Omega_{00}) = \tilde{\Gamma}^\bullet_\lambda/(\Omega_{00}) = \tilde{\Gamma}^{\bullet\bullet}_\lambda/(\Omega_{00}) = \tilde{\tilde{\Gamma}},$$

wobei $(\tilde{\tilde{\Gamma}}, \mathrm{d})$ *der durch die Bimodulstruktur*

$$\mathrm{d}z_k z_l = q^{-1} \hat{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t; \qquad \mathrm{d}z_k z_l^* = q \grave{R}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t;$$
$$\mathrm{d}z_k^* z_l^* = q \check{R}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t^*; \qquad \mathrm{d}z_k^* z_l = q^{-1} \acute{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t^*,$$

und die zusätzlichen Relationen $\Omega_+ = \Omega_- = 0$ *gegebene kovariante Differentialkalkül erster Ordnung auf* S_q^{2N-1} *ist.*

In den inneren fast-freien kovarianten $*$*-Differentialkalkülen* $(\tilde{\Gamma}_\lambda, \mathrm{d})$ *existieren keine faktorisierenden 1-Formen.*

Beweis: Bereits im Beweis der Folgerung 2.4 wurde erwähnt, daß in jedem der nicht-inneren fast-freien Differentialkalküle die invarianten 1-Formen mit allen z_k quasikommutieren, d. h. für jeden dieser Kalküle gibt es eine komplexe Zahl ν, mit der für $1 \leq k \leq N$ gilt $\Omega_{00} z_k = \nu z_k \Omega_{00}$. Man überzeugt sich ebenso leicht davon, daß Ω_{00} auch mit allen z_k^* und damit mit allen $x \in X$ quasikommutiert. Damit ist Ω_{00} eine faktorisierende 1-Form. Durch Nullsetzen der invarianten 1-Formen in den Bimodulstrukturgleichungen der Kalküle erhält man jedesmal die im Satz angegebene Bimodulstruktur für den faktorisierten Kalkül.

In den Kalkülen $(\tilde{\Gamma}_\lambda, \mathrm{d})$ gilt hingegen für die invariante 1-Form $\Omega = (q^{-2}\lambda - 1)^{-1}\Omega_+$ jeweils $\Omega x - x\Omega = \mathrm{d}x$ für alle $x \in X$, so daß weder Ω noch ein Vielfaches davon eine faktorisierende 1-Form sein kann. $\square$

2.3.2 Zum Zusammenhang mit Differentialkalkülen auf $\mathrm{SU}_q(N)$

In einem kürzlich als Preprint erschienenen Artikel [Sch] hat K. Schmüdgen ein Verfahren zur Konstruktion kovarianter Differentialkalküle erster Ordnung auf homogenen Quantenräumen aus kovarianten Differentialkalkülen auf den zugehörigen Quantengruppen vorgestellt und mittels dieser Methode unter anderem kovariante Differentialkalküle auf Quantensphären gewonnen. In dem Artikel wird mit linken Quantenräumen sowie linkskovarianten Differentialkalkülen gearbeitet, die Resultate lassen sich jedoch durch eine einfache Umrechnung von den dort betrachteten Links-Quantensphären auf die unserer Arbeit zugrundeliegenden Rechts-Quantensphären übertragen. Wir geben diese Umrechnungen im Detail im Anhang A. Allen auf diesem Wege erhaltenen Differentialkalkülen auf den Quantensphären S_q^{2N-1} ist gemeinsam, daß sie eine zusätzliche Relation zwischen invarianten 1-Formen aufweisen und somit fast-freie kovariante Differentialkalküle im Sinne unserer Terminologie sind. Der folgende Satz faßt die für uns wesentlichen Aussagen zusammen.

Satz 2.23: *Die fast-freien Differentialkalküle* $(\tilde{\Gamma}_\lambda, \mathrm{d})$, $\tilde{\Gamma}^{\bullet}_\lambda$ *und* $\tilde{\Gamma}^{\bullet\bullet}_\lambda$ *auf* S_q^{2N-1} *werden von rechtskovarianten Differentialkalkülen auf der Quantengruppe* $\mathrm{SU}_q(N)$ *induziert. Der fast-freie Differentialkalkül* $(\tilde{\Gamma}''_{q^{2N+2}}, \mathrm{d})$ *auf* S_q^{2N-1} *wird von einem bikovarianten Differentialkalkül auf* $\mathrm{SU}_q(N)$ *induziert.*

Beweis: siehe [Sch] und Anhang A. □

Bemerkung: Für die verbleibenden fast-freien Differentialkalküle, also die $*$-Kalküle der Serien $\tilde{\Gamma}'_\lambda$ und $\tilde{\Gamma}''_\lambda$ mit der einzigen Ausnahme $\tilde{\Gamma}''_{q^{2N+2}}$, bleibt die Frage offen, ob diese Kalküle ebenfalls von kovarianten Differentialkalkülen auf $\mathrm{SU}_q(N)$ induziert werden.

2.3.3 Klassischer Grenzwert

Wir betrachten nun den Deformationsparameter q der Quantensphäre S_q^{2N-1} als veränderlich. Geht nun q stetig gegen den Wert 1 (den wir ansonsten aus unseren Betrachtungen ausgeschlossen haben), so gehen die Relationen der Algebra S_q^{2N-1} in die der klassischen, also kommutativen, Koordinatenalgebra einer $(2N-1)$-dimensionalen Sphäre über. Dieser Grenzübergang kann für die definierenden Relationen von S_q^{2N-1} einfach durch Einsetzen von $q = 1$ vollzogen werden, da hierbei keine unbestimmten Werte auftreten.

Entsprechend gehen die definierenden Relationen, d. h. die Bimodulstrukturgleichungen sowie ggf. weitere Relationen zwischen 1-Formen, eines Differentialkalküls erster Ordnung auf S_q^{2N-1} in Relationen über, die einen Differentialkalkül erster Ordnung auf der kommutativen Koordinatenalgebra einer klassischen Sphäre beschreiben, wenn q gegen 1 geht. Die Gleichungen, die die in diesem Kapitel klassifizierten Differentialkalküle beschreiben, enthalten jedoch außer q noch jeweils ein bis zwei Parameter; da die Relationen der Quantensphäre selbst nur von q abhängen, sollten auch die Parameter der Differentialkalküle als Funktionen von q aufgefaßt werden, woraus sich als natürliche Konsequenz ergibt, daß beim Grenzübergang $q \to 1$ auch diese Parameter als veränderlich aufzufassen sind. Der Grenzübergang kann in allen Gleichungen wiederum durch Einsetzen von $q = 1$ erfolgen, ohne daß unbestimmte Werte für Koeffizienten entstehen.

Bereits bei den Definitionen für Differentialkalküle in Abschnitt 2.1 wurde darauf hingewiesen, daß ein Differentialkalkül gemäß dieser Definition auch dann nichtkommutativ sein kann, wenn die zugrundeliegende Algebra kommutativ ist.

In der Tat ergeben sich beim Einsetzen von $q = 1$ in die definierenden Gleichungen der hier betrachteten Differentialkalküle im allgemeinen nichtkommutative Differentialkalküle für die kommutative Koordinatenalgebra. Wir werden diese hier nicht weiter untersuchen; uns soll vielmehr interessieren, für welche Werte der jeweiligen Parameter außer q die Kalküle der Theoreme 2.1 und 2.3 in den klassischen, kommutativen Differentialkalkül auf der Koordinatenalgebra der Sphäre übergehen, sofern solche Werte existieren.

Durch Einsetzen überzeugt man sich leicht davon, daß das genau für folgende Parameterwerte der Fall ist:

- in $\Gamma_{\alpha\tau}$ und $\Gamma'_{\alpha\omega}$ für $\alpha = 1$ und beliebiges τ bzw. ω;
- in $\Gamma''_{\omega\psi}$ für beliebiges $\omega \neq 0$ und $\psi = 1 + \omega^{-1}$;
- in $\Gamma'''_{\varrho\tau}$ für beliebiges ϱ und $\tau = \varrho$;
- in den fast-freien Differentialkalkülen $\tilde{\Gamma}_\lambda$, $\tilde{\Gamma}'_\lambda$, $\tilde{\Gamma}''_\lambda$, $\tilde{\Gamma}^\bullet_\lambda$ und $\tilde{\Gamma}^{\bullet\bullet}_\lambda$ ausnahmslos für $\lambda = 1$.

Wir betonen, daß darin keine Auszeichnung der genannten Parameterwerte für den Fall der nichtkommutativen Algebra S_q^{2N-1} mit $q \neq 1$ begründet ist, da im Übergang $q \to 1$ alle Parameter als Funktionen von q anzusehen sind.

Die zusätzlichen Relationen $\Omega_+ + \lambda\Omega_- = 0$ der fast-freien Differentialkalküle gehen für $\lambda \to 1$ ebenfalls in die entsprechende Relation $\Omega_+ + \Omega_- = 0$ des klassischen Kalküls über; dieselbe Relation entsteht aber auch im Grenzfall $q = 1$ mit den oben angegebenen Werten der übrigen Parameter in sämtlichen freien Differentialkalkülen und stellt somit eine sprunghafte Änderung der Struktur dieser Kalküle im klassischen Grenzwert dar.

Die Eigenschaft von $\tilde{\Gamma}_\lambda$ als innerer Kalkül bleibt beim Übergang ebenfalls nicht erhalten – schließlich ist der kommutative Differentialkalkül der klassischen Sphären auch kein innerer Kalkül –, vielmehr geht für $q \to 1$ und $\lambda \to 1$ der Skalierungsfaktor der invarianten 1-Form $(q^{-2}\lambda^{-1} - 1)\Omega_+$, deren Kommutator die Differentiationsabbildung darstellt, gegen ∞, so daß gerade im Grenzfall keine invariante 1-Form mit dieser Eigenschaft mehr existiert.

2.3.4 Der spezielle $*$-Differentialkalkül $\tilde{\Gamma}_1$

Die Analogie der Relationen vom Typ $\Omega_0 = 0$ zu der im kommutativen Differentialkalkül auf der Koordinatenalgebra der klassischen Sphäre gültigen Relation $\Omega_+ + \Omega_- = 0$ sowie die im Abschnitt 2.3.2 zitierten Ergebnisse zur Induktion von Differentialkalkülen auf S_q^{2N-1} durch solche auf $\mathrm{SU}_q(N)$ sprechen dafür, daß als für den Aufbau der kovarianten Differentialrechnung und der Beschreibung der nichtkommutativen Geometrie der Quantensphären S_q^{2N-1} adäquate Differentialkalküle erster Ordnung fast-freie kovariante $*$-Differentialkalküle anzusehen sind. Aus diesem Grunde wollen wir zum Abschluß dieses Kapitels einige spezielle fast-freie kovariante $*$-Differentialkalküle kennzeichnen.

Von herausragender Bedeutung für unsere weiteren Betrachtungen ist der Kalkül $(\tilde{\Gamma}_1, \mathrm{d})$ mit der Relation

$$\Omega_+ + \Omega_- = 0,$$

dessen Bimodulstruktur durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z_k z_l &= q\hat{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t \\
\mathrm{d}z_k^* z_l^* &= q^{-1}\check{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t^* \\
\mathrm{d}z_k z_l^* &= q^{-1}\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t + qQ z_k \mathrm{d}z_l^* + Q^2 z_k z_l^* \Omega \\
\mathrm{d}z_k^* z_l &= q\acute{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t^* - q^{-1} Q z_k^* \mathrm{d}z_l + Q^2 z_k^* z_l \Omega
\end{aligned} \tag{2.118}$$

gegeben ist, wobei

$$\Omega := -qQ^{-1}\Omega_+ = qQ^{-1}\Omega_- \tag{2.119}$$

gesetzt wurde. Für diesen Kalkül wollen wir zur Erleichterung späterer Rechnungen zusätzlich zu den obigen Gleichungen für die Bimodulstruktur, die darauf gerichtet sind, beliebige 1-Formen in Linksmodulform zu überführen, dieselbe Bimodulstruktur mit Gleichungen charakterisieren, die auf die Herstellung von Rechtsmodulausdrücken gerichtet sind. Die Gleichwertigkeit beider Systeme von Gleichungen ist durch Einsetzen leicht zu zeigen.

$$\begin{aligned}
z_k \mathrm{d}z_l &= q^{-1}\hat{R}^{-}{}^{st}_{kl} \mathrm{d}z_s \cdot z_t \\
z_k^* \mathrm{d}z_l^* &= q\check{R}^{st}_{kl} \mathrm{d}z_s^* \cdot z_t^* \\
z_k \mathrm{d}z_l^* &= q^{-1}\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} \mathrm{d}z_s^* \cdot z_t + qQ \mathrm{d}z_k \cdot z_l^* - Q^2 \Omega z_k z_l^* \\
z_k^* \mathrm{d}z_l &= q\acute{R}^{st}_{kl} \mathrm{d}z_s \cdot z_t^* - q^{-1} Q \mathrm{d}z_k^* \cdot z_l - Q^2 \Omega z_k^* z_l
\end{aligned}$$

Wir werden diesen Kalkül unseren Untersuchungen zu Differentialkalkülen höherer Ordnung und Symmetrie sowie zu Metriken und Zusammenhängen zugrunde legen, da er als einziger unter allen beschriebenen $*$-Differentialkalkülen auf S_q^{2N-1} zwei spezielle Eigenschaften in sich vereinigt, die für unsere Betrachtungen wesentlich sind:

- Der Differentialkalkül $(\tilde{\Gamma}_1, \mathrm{d})$ ist ein innerer Kalkül mit
$$\mathrm{d}x = \Omega x - x\Omega \quad \text{für alle } x \in X. \tag{2.120}$$
- Die Einschränkung von $(\tilde{\Gamma}_1, \mathrm{d})$ auf den „holomorphen" und „antiholomorphen" Anteil von S_q^{2N-1}, d. h. die von $\{z_i \mid i = 1, \dots, N\}$ bzw. $\{z_i^* \mid i = 1, \dots, N\}$ erzeugten Unteralgebren, ergibt Differentialkalküle auf diesen beiden Unteralgebren.

Für die Wahl eines inneren Kalküls als Basis für den Aufbau der kovarianten Differentialrechnung höherer Ordnung und von Elementen der nichtkommutativen Differentialgeometrie auf den Quantensphären S_q^{2N-1} spricht zum einen, daß die für die bereits weiter entwickelte Theorie der bikovarianten Differentialrechnung und nichtkommutativen Geometrie auf Quantengruppen relevanten Differentialkalküle innere Kalküle sind. Damit besteht mit einem inneren Kalkül die Hoffnung, auf Quantensphären ähnliche Konstruktionsschritte vornehmen zu können. Zum anderen sind, wie in Abschnitt 2.3.2 ausgeführt, diese Kalküle von kovarianten Differentialkalkülen auf $\mathrm{SU}_q(N)$ induziert, was für eine Verbindung mit der kovarianten Differentialrechnung auf $\mathrm{SU}_q(N)$ von Bedeutung ist; dies liegt allerdings bereits jenseits des Rahmens der vorliegenden Arbeit.

Die zweite Eigenschaft, die Trennung der holomorphen und antiholomorphen Anteile der Algebra S_q^{2N-1} durch den Kalkül $\tilde{\Gamma}_1$, hat für uns zunächst eine technische Bedeutung, insofern viele der Rechnungen der nachfolgenden Kapitel nur aufgrund dieser Eigenschaft möglich sind. Für die anderen inneren Kalküle sind vergleichbare Rechnungen, wenn überhaupt, nur mit viel größerem Aufwand durchführbar. Auch diese Eigenschaft könnte aber eine weiterreichende Bedeutung erlangen, etwa bei Untersuchungen von Differentialgleichungen auf den Quantensphären. Jedoch muß dieses Problemfeld ebenfalls künftigen Untersuchungen vorbehalten bleiben, weil dafür zunächst eine konsistente Beschreibung von partiellen Ableitungen und allgemein von Differentialoperatoren vonnöten ist; dieser wiederum steht entgegen, daß in sämtlichen fast-freien Kalkülen die 1-Formen keinen frei erzeugten Linksmodul bilden.

2.3.5 Weitere spezielle fast-freie Differentialkalküle

Neben dem Differentialkalkül $(\tilde{\Gamma}_1, \mathrm{d})$ wollen wir drei weitere fast-freie $*$-Differentialkalküle erwähnen, die durch ihre besonders einfache Bimodulstruktur hervorstechen. Dies sind

- der Kalkül $(\tilde{\Gamma}''_{q^{2N+2}}, \mathrm{d})$, der als einziger der beschriebenen Kalküle eine rein lineare Bimodulstruktur besitzt, nämlich

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z_k z_l &= q^{-1} \hat{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t; & \mathrm{d}z_k z_l^* &= q \grave{R}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t; \\ \mathrm{d}z_k^* z_l^* &= q \check{R}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t^*; & \mathrm{d}z_k^* z_l &= q^{-1} \acute{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t^*, \end{aligned} \tag{2.121}$$

  und der (vgl. Abschnitt 2.3.2) von einem bikovarianten Differentialkalkül auf $\mathrm{SU}_q(N)$ induziert wird,

- der Kalkül $(\tilde{\Gamma}'_{q^4}, \mathrm{d}) = (\tilde{\Gamma}''_{q^4}, \mathrm{d})$ mit

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z_k z_l &= q^{-1} \hat{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t; & \mathrm{d}z_k z_l^* &= q \grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t - q^{-1} Q z_k z_l^* \Omega_+; \\ \mathrm{d}z_k^* z_l^* &= q \check{R}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t^*; & \mathrm{d}z_k^* z_l &= q^{-1} \acute{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t^* - q^{-1} Q z_k^* z_l \Omega_+, \end{aligned}$$

- der Kalkül $(\tilde{\Gamma}'_{q^2}, \mathrm{d})$, der zugleich im Grenzfall $\lambda \to q^2$ aus der Familie $(\tilde{\Gamma}_\lambda, \mathrm{d})$ entsteht, mit

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z_k z_l &= q^{-1} \hat{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t - q^{-1} Q z_k z_l \Omega_+; & \mathrm{d}z_k z_l^* &= q \grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t; \\ \mathrm{d}z_k^* z_l^* &= q \check{R}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t^* - q Q z_k^* z_l^* \Omega_+; & \mathrm{d}z_k^* z_l &= q^{-1} \acute{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t^*. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Kalküle, $(\tilde{\Gamma}''_{q^{2N+2}}, \mathrm{d})$ und $(\tilde{\Gamma}''_{q^4}, \mathrm{d})$, enthalten ebenso wie $(\tilde{\Gamma}_1, \mathrm{d})$ Differentialkalküle auf dem holomorphen und antiholomorphen Anteil von S_q^{2N-1}; jedoch ist keiner der letztgenannten drei Kalküle ein innerer Kalkül.

Wegen der besonders einfachen Bimodulstruktur von $(\tilde{\Gamma}''_{q^{2N+2}}, \mathrm{d})$ werden wir ihn in die Untersuchungen zu Symmetriehomomorphismen und Metriken mit einbeziehen.

Kapitel 3: Differentialkalküle höherer Ordnung

Bei der Entwicklung der kovarianten Differentialrechnung auf Quantenräumen haben wir das Ziel im Auge, damit die Grundlagen für eine Beschreibung der nichtkommutativen Geometrie dieser Quantenräume zu schaffen. Dafür ist es nicht ausreichend, lediglich Differentialkalküle erster Ordnung zu untersuchen, da bereits einfache Grundbegriffe der Differentialgeometrie zu ihrer Definition zumindest Differentialformen zweiter Ordnung erfordern. Aus diesem Grund wollen wir jetzt zur Untersuchung von Differentialkalkülen höherer Ordnung übergehen.

3.1 Definitionen für kovariante Differentialkalküle höherer Ordnung auf Quantenräumen

Wir beginnen mit der Zusammenstellung grundlegender Definitionen zu Differentialkalkülen höherer Ordnung auf Quantenräumen, bevor wir uns im folgenden Abschnitt dann wieder unserem Beispiel, den Quantensphären S_q^{2N-1}, zuwenden. Diese Definitionen sind analog zu denjenigen, die in [Wor2] für den Fall der bikovarianten Differentialrechnung auf Quantengruppen gegeben wurden, jedoch der Situation von Quantenräumen mit einseitiger (Rechts-) Kovarianz angepaßt. Entsprechende Definitionen finden sich auch in [KS].

Wir benutzen die Bezeichnung „Differentialkalkül höherer Ordnung“ zur deutlicheren Unterscheidung von einem Differentialkalkül erster Ordnung, obwohl ein solches Objekt Differentialformen nullter und erster Ordnung einschließt.

Definition 3.1: *Es sei X ein Quantenraum zur Quantengruppe $\mathcal{A}$ und (Γ, d) ein Differentialkalkül erster Ordnung auf X, der kovariant bezüglich $\mathcal{A}$ ist.*

*Ein **kovarianter Differentialkalkül höherer Ordnung** auf X ist dann ein Paar $(\Gamma^\wedge, \mathrm{d})$ aus einer $\mathbb{N}_0$-graduierten Algebra $\Gamma^\wedge$, deren Multiplikation mit $\wedge$ bezeichnet wird, und einer linearen Abbildung $\mathrm{d} : \Gamma^\wedge \to \Gamma^\wedge$, für die folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(i) Die Komponenten der Grade 0 und 1 in $\Gamma^\wedge$ sind isomorph zu X bzw. Γ. (Sie werden im folgenden mit diesen Objekten identifiziert.)

(ii) Die Abbildung d erhöht den Grad stets um 1, und die Einschränkung von d auf X ist identisch mit der Abbildung $\mathrm{d} : X \to \Gamma$ des Differentialkalküls erster Ordnung (Γ, d).

(iii) *Die Abbildung* d *ist eine graduierte Derivation, d. h. sie genügt der graduierten Leibnizregel*

$$\mathrm{d}(\vartheta_1 \wedge \vartheta_2) = \mathrm{d}\vartheta_1 \wedge \vartheta_2 + (-1)^d \vartheta_1 \wedge \mathrm{d}\vartheta_2$$

für beliebige $\vartheta_1, \vartheta_2 \in \Gamma^\wedge$, *wobei* d *der Grad von* ϑ_1 *ist. Ferner gilt für jedes* $\vartheta \in \Gamma^\wedge$ *die Beziehung* $\mathrm{d}(\mathrm{d}\vartheta) = 0$.

(iv) *Es gibt eine lineare Abbildung* $\Phi_{\mathrm{R}}^\wedge : \Gamma^\wedge \to \Gamma^\wedge \otimes \mathcal{A}$, *deren Einschränkungen auf* X *und* Γ *mit* Δ_{R} *bzw.* Φ_{R} *identisch sind und mit der* $(\Gamma^\wedge, \Phi_{\mathrm{R}})$ *ein kovarianter* X*-Bimodul ist.*

Die Elemente k*-ten Grades von* $\Gamma^\wedge$ *heißen* ***Differentialformen*** k***-ter Ordnung*** *oder kurz* k***-Formen.***

Der gebräuchlichen Konvention folgend soll das Operationszeichen $\wedge$ der Multiplikation in $\Gamma^\wedge$ i. d. R. vor und nach Faktoren des Grades 0 weggelassen werden, wobei es jedoch zwischen zwei Faktoren höheren Grades mindestens einmal stehen soll.

Ist (Γ, d) ein $*$-Kalkül, so kann in offensichtlicher Weise eine $*$-Struktur auf $\Gamma^\wedge$ definiert werden, für die $\mathrm{d}(\vartheta^*) = (\mathrm{d}\vartheta)^*$ für alle $\vartheta \in \Gamma^\wedge$ gilt. In diesem Fall spricht man von einem $*$-Differentialkalkül höherer Ordnung.

3.2 Differentialkalküle höherer Ordnung auf den Quantensphären S_q^{2N-1} mit $\Gamma = \tilde{\Gamma}_1$

Wir wollen diese Definitionen nun auf die Quantensphären $X = \mathrm{S}_q^{2N-1}$ mit dem Differentialkalkül erster Ordnung $(\Gamma, \mathrm{d}) = (\tilde{\Gamma}_1, \mathrm{d})$ anwenden. Die Bimodulstruktur von (Γ, d) ist durch die Gleichungen (2.118) gegeben; in (Γ, d) gilt die zusätzliche Relation $\Omega_+ + \Omega_- = 0$. Aus den Gleichungen des Differentialkalküls (Γ, d) ergibt sich bereits eine Reihe von Bedingungen an jeden darauf aufgebauten Differentialkalkül höherer Ordnung, die wir im nachfolgenden Satz zusammenstellen wollen.

Satz 3.1: *Für jeden kovarianten Differentialkalkül höherer Ordnung auf* $X = \mathrm{S}_q^{2N-1}$, *der* (Γ, d) *fortsetzt, gelten die Gleichungen*

$$\mathrm{d}\Omega = \Omega \wedge \Omega \tag{3.1}$$

sowie

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}z_l + q\hat{R}^{st}_{kl}\mathrm{d}z_s \wedge \mathrm{d}z_t \\
0 &= \mathrm{d}z_k^* \wedge \mathrm{d}z_l^* + q^{-1}\check{R}^{-}{}^{st}_{kl}\mathrm{d}z_s^* \wedge \mathrm{d}z_t^* \\
0 &= q^{-3}\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl}(\mathrm{d}z_s^* \wedge \mathrm{d}z_t + Q^2 z_s^* \mathrm{d}z_t \wedge \Omega) \\
&\quad + (\mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}z_l^* + Q^2 z_k \mathrm{d}z_l^* \wedge \Omega) + q^{-2}Q^2(Q^2+1)z_k z_l^* \mathrm{d}\Omega.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

$$
\sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}z_i^* + \sum_{i=1}^{N} q^{-2i}\mathrm{d}z_i^* \wedge \mathrm{d}z_i = 0. \tag{3.3}
$$

Bemerkung: Hierin ist Ω das durch (2.119) definierte invariante Element, mit dem Γ ein innerer Kalkül mit $\mathrm{d}x = \Omega x - x\Omega$ für alle $x \in X$ ist.

Beweis: Die Gleichungen (3.1) entstehen unmittelbar durch Anwendung von d auf die Bimodulstrukturgleichungen (2.118) unter Beachtung von $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} \equiv 0$. Wir bemerken, daß die aus der letzten der Gleichungen (2.118) durch Anwendung von d entstehende Gleichung

$$
\begin{aligned}
0 &= q^3 \acute{R}^{st}_{kl}(\mathrm{d}z_s \wedge \mathrm{d}z_t^* + Q^2 z_s \mathrm{d}z_t^* \wedge \Omega) \\
&\quad + (\mathrm{d}z_k^* \wedge \mathrm{d}z_l + Q^2 z_k^* \mathrm{d}z_l \wedge \Omega) + q^2 Q^2 (Q^2+1) z_k^* z_l \mathrm{d}\Omega
\end{aligned}
$$

keine zusätzliche Bedingung darstellt, da sie durch Multiplikation mit $q^{-3}\grave{R}^{-}$ in die letzte der Gleichungen (3.2) übergeht.

Die Gleichung (3.3) entsteht durch Anwendung von d auf die Relation $\Omega_+ + \Omega_- = 0$.

Aus (3.1) und den Relationen von S_q^{2N-1} folgt ferner

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} z_i z_j \mathrm{d}z_j^* \wedge \mathrm{d}z_i^* &= -q^{-1}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \check{R}^{-}{}^{st}_{ji} z_i z_j \mathrm{d}z_s^* \wedge \mathrm{d}z_t^* \\
&= -q^{-1}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N} \hat{R}^{-}{}^{ij}_{ts} z_i z_j \mathrm{d}z_s^* \wedge \mathrm{d}z_t^* = -q^{-2}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N} z_t z_s \mathrm{d}z_s^* \wedge \mathrm{d}z_t^*
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\sum_{i=1}^{N} z_i \Omega \wedge \mathrm{d}z_i^* = 0. \tag{3.4}
$$

Wegen der Eigenschaft von (Γ, d) als innerer Kalkül folgt hieraus

$$
0 = \sum_{i=1}^{N} \Omega \wedge z_i \mathrm{d}z_i^* - \sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}z_i^*
$$

und damit (3.1). □

Es existiert ein Differentialkalkül höherer Ordnung auf $X = \mathrm{S}_q^{2N-1}$, der (Γ, d) fortsetzt und als Algebra von den $4N$ Elementen z_i, z_i^*, $\mathrm{d}z_i$ und $\mathrm{d}z_i^*$ mit den Relationen (3.1) und (3.2) erzeugt wird. Aus diesem Differentialkalkül entsteht jeder kovariante Differentialkalkül höherer Ordnung, der (Γ, d) fortsetzt, durch eine Faktorisierung nach geeigneten zusätzlichen Relationen. Deshalb bezeichnen wir diesen, bezüglich aller (Γ, d) fortsetzenden Kalküle universellen, Differentialkalkül höherer Ordnung mit $(\Gamma_{\mathrm{u}}^{\wedge}, \mathrm{d})$.

Obwohl der Differentialkalkül erster Ordnung (Γ, d) ein innerer Kalkül ist, ist $(\Gamma_{\mathrm{u}}^{\wedge}, \mathrm{d})$ kein innerer Kalkül in dem Sinne, daß die graduierte Derivation d durch einen graduierten Kommutator mit einer festen invarianten 1-Form – das könnte wegen der entsprechenden Eigenschaft von (Γ, d) nur Ω sein – beschrieben würde. Fordern wir dies als zusätzliche Bedingung, also

$$\mathrm{d}\vartheta = \Omega \wedge \vartheta - (-1)^d \vartheta \wedge \Omega \tag{3.5}$$

für alle $\vartheta \in \Gamma^{\wedge}$, wobei d den Grad von ϑ bezeichnet, so resultiert daraus bereits eine Faktorisierung des Differentialkalküls. Wir bezeichnen den größten Differentialkalkül höherer Ordnung mit dieser Eigenschaft mit $(\Gamma_{\mathrm{i}}^{\wedge}, \mathrm{d})$.

Satz 3.2: *Ist* $(\Gamma^{\wedge}, \mathrm{d})$ *ein kovarianter Differentialkalkül höherer Ordnung, der* (Γ, d) *fortsetzt, so ist* $(\Gamma^{\wedge}, \mathrm{d})$ *ein innerer Kalkül genau dann, wenn* $\mathrm{d}\Omega = 0$ *gilt.*

Beweis: Aus (3.5) folgt sofort $\mathrm{d}\Omega = 2\Omega \wedge \Omega$ und damit wegen (3.1) das Verschwinden von $\mathrm{d}\Omega$.

Andererseits folgt aus $\Omega \wedge \Omega = 0$ und $\mathrm{d}x = \Omega x - x\Omega$ $(x \in X)$ sofort für jede Differentialform $\vartheta \in \Gamma^{\wedge}$ vom Grad d und jedes $x \in X$

$$\begin{aligned}
&\Omega \wedge \vartheta \wedge \mathrm{d}x - (-1)^{d+1} \vartheta \wedge \mathrm{d}x \wedge \Omega \\
&\quad = \Omega \wedge \vartheta \wedge \mathrm{d}x + (-1)^d \vartheta \wedge \Omega \wedge x\Omega - (-1)^d \vartheta \wedge x\Omega \wedge \Omega \\
&\quad = \Omega \wedge \vartheta \wedge \mathrm{d}x + (-1)^d \vartheta \wedge \Omega \wedge \Omega - (-1)^d \vartheta \wedge \Omega \wedge \mathrm{d}x \\
&\quad = (\Omega \wedge \vartheta - (-1)^d \vartheta \wedge \Omega) \wedge \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

und damit durch Induktion über d die Gültigkeit von (3.5) für alle $\vartheta \in \Gamma^{\wedge}$. □

In jedem inneren Differentialkalkül höherer Ordnung vereinfachen sich die Kommutatorrelationen (3.2) offensichtlich zu

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}z_l + q\hat{R}^{st}_{kl}\mathrm{d}z_s \wedge \mathrm{d}z_t \\
0 &= \mathrm{d}z^*_k \wedge \mathrm{d}z^*_l + q^{-1}\check{R}^{-}{}^{st}_{kl}\mathrm{d}z^*_s \wedge \mathrm{d}z^*_t \\
0 &= q^{-3}\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl}(\mathrm{d}z^*_s \wedge \mathrm{d}z_t + Q^2 z^*_s\mathrm{d}z_t \wedge \Omega) + (\mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}z^*_l + Q^2 z_k \mathrm{d}z^*_l \wedge \Omega).
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Die Beschreibung der Moduln der k-Formen in Differentialkalkülen höherer Ordnung über dem Differentialkalkül erster Ordnung Γ wird dadurch wesentlich erschwert, daß Γ aufgrund der Relation $\Omega_+ + \Omega_- = 0$ kein frei erzeugter Linksmodul ist. Die zusätzliche Relation $\mathrm{d}\Omega = 0$ für innere Kalküle stellt eine zusätzliche Erschwernis dar. Aus diesem Grunde beschränken wir uns hier auf einige allgemeine Aussagen zu diesen Moduln höherer Differentialformen, ohne sie erschöpfend charakterisieren zu können. Wir werden insbesondere nachweisen, daß es für den Grad nichtverschwindender Differentialformen in jedem solchen Differentialkalkül eine obere Schranke gibt.

Satz 3.3: *In jedem kovarianten Differentialkalkül höherer Ordnung* $(\Gamma^\wedge, \mathrm{d})$ *auf* $X = \mathrm{S}_q^{2N-1}$, *der* (Γ, d) *fortsetzt, wird der Modul* $\Gamma^{\wedge k}$ *der* k*-Formen* ($k \geq 1$) *als* X*-Linksmodul von Differentialformen* $\Theta^{(\mu,\nu)}$ *der Gestalt*

$$\Theta^{(\mu,\nu)} = \mathrm{d}z_{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_{i_\mu} \wedge \mathrm{d}z^*_{j_\nu} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z^*_{j_1}$$

mit $\mu + \nu = k$ *und* $1 \leq i_1 < \cdots < i_\mu \leq N$, $1 \leq j_1 < \cdots < j_\nu \leq N$ *erzeugt.*

Beweis: Für $k = 1$ gilt die Behauptung aufgrund der entsprechenden Eigenschaft von (Γ, d).

Für $k \geq 2$ sei $\Theta^{(k)}$ eine k-Form, die Produkt von genau k Faktoren der Formen $\mathrm{d}z_i$ und $\mathrm{d}z^*_j$ ist. Aufgrund der Bimodulstruktur von Γ wird $\Gamma^{\wedge k}$ von solchen k-Formen als Linksmodul erzeugt. Für $\Theta^{(k)}$ gibt es nichtnegative ganze Zahlen $r = r(\Theta^{(k)})$ und $\ell = \ell(\Theta^{(k)})$, für die gilt

$$\Theta^{(k)} = \vartheta^{(k-r-\ell)} \wedge \vartheta^{(\ell)}_\circ \wedge \vartheta^{(r)}_*;$$

dabei sei $\vartheta^{(k-r-\ell)}$ eine $(k-r-\ell)$-Form, deren letzter Faktor, falls $k - r - \ell > 0$ gilt, von der Form $\mathrm{d}z^*_j$ ist, während $\vartheta^{(\ell)}_\circ$ und $\vartheta^{(r)}_*$ eine ℓ-Form ausschließlich aus Faktoren der Form $\mathrm{d}z_i$ bzw. eine r-Form ausschließlich aus Faktoren der Form $\mathrm{d}z^*_j$ sind. Mit anderen Worten bezeichnet r die Anzahl der Faktoren der Gestalt $\mathrm{d}z^*_j$, die in ununterbrochener Folge am Ende des Produktes stehen, und ℓ die Anzahl der unmittelbar davor in ununterbrochener Folge stehenden Faktoren der

Form $\mathrm{d}z_i$. Für zwei Zahlenpaare (r_1, ℓ_1) und (r_2, ℓ_2) sei $(r_1, \ell_1) \succ (r_2, \ell_2)$ genau dann, wenn entweder $r_1 > r_2$ oder aber $r_1 = r_2$ und $\ell_1 < \ell_2$ gilt. Damit ist $\succ$ offensichtlich eine irreflexive Halbordnung auf diesen Zahlenpaaren.

Wir zeigen nun, daß sich $\Theta^{(k)}$, sofern $r + \ell < k$ gilt, als Summe

$$\Theta^{(k)} = \sum_p x_p \Theta_p^{(k)}$$

mit $x_p \in X$, $\big(r(\Theta^{(k)}), \ell(\Theta^{(k)})\big) \succ \big(r(\Theta_p^{(k)}), \ell(\Theta_p^{(k)})\big)$ für jedes p schreiben läßt.

Es gilt nämlich aufgrund der Gleichungen (3.2) und (3.4) für $1 \leq i, j \leq N$ stets

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z_i^* \wedge \mathrm{d}z_j = q^2 Q \sum_{m=1}^{N} \hat{R}_{jm}^{st} z_i^* z_s \mathrm{d}z_t \wedge \mathrm{d}z_m^* - q^3 \acute{R}_{ij}^{st} \mathrm{d}z_s \wedge \mathrm{d}z_t^* \\ + q^5 Q \sum_{m=1}^{N} \acute{R}_{ij}^{nt} \acute{R}_{tm}^{uv} z_n z_u \mathrm{d}z_v^* \wedge \mathrm{d}z_m^* - qQ \sum_{m=1}^{N} z_i^* z_j \mathrm{d}z_m \wedge \mathrm{d}z_m^*.\end{aligned}$$

Wir substituieren mittels dieser Gleichung das Paar aufeinanderfolgender Faktoren, das von dem letzten Faktor der $(k-r-\ell)$-Form $\vartheta^{(k-r-\ell)}$ und dem ersten Faktor der ℓ-Form $\vartheta_\circ^{(\ell)}$ gebildet wird. In jedem der entstehenden Summanden steht an Stelle des ersten Faktors $\mathrm{d}z_j$ aus $\vartheta_\circ^{(\ell)}$ ein Faktor der Gestalt $\mathrm{d}z_m^*$. Dies bleibt auch dann gültig, wenn alle Ausdrücke anschließend wieder in Linksmodulausdrücke $\Theta_p^{(k)}$ umgeformt werden. Im Falle $\ell(\Theta^{(k)}) > 1$ gilt damit $r(\Theta_p^{(k)}) = r(\Theta^{(k)})$ und $\ell(\Theta_p^{(k)}) = \ell(\Theta^{(k)}) - 1$ für alle p, während für $\ell(\Theta^{(k)}) = 1$ sicher $r(\Theta_p^{(k)}) \geq r(\Theta^{(k)}) + 1$ für alle p gilt.

Hierdurch ist sichergestellt, daß sich jede k-Form als X-Linearkombination solcher Ausdrücke der Gestalt $\Theta^{(k)}$ schreiben läßt, für die $r + \ell = k$ gilt.

Berücksichtigt man, daß entsprechend (3.6) zum einen $\mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}z_i = \mathrm{d}z_i^* \wedge \mathrm{d}z_i^* = 0$ gilt und zum anderen alle $\mathrm{d}z_i$ untereinander quasikommutieren (für $i \neq j$ ist stets $\mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}z_j = a_{ij} \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}z_i$ mit einer reellen Zahl a_{ij}), desgleichen alle $\mathrm{d}z_i^*$, so ergibt sich gerade die Behauptung des Satzes. □

Mit Hilfe dieses Satzes können nun Aussagen zu den Moduln der Differentialformen höherer Ordnung getroffen werden.

Folgerung 3.4: *In jedem kovarianten Differentialkalkül höherer Ordnung* $(\Gamma^\wedge, \mathrm{d})$ *auf* $X = \mathrm{S}_q^{2N-1}$, *der* (Γ, d) *fortsetzt, verschwinden alle Differentialformen der Ordnung* $2N+1$ *und höherer Ordnung.*

Der Modul der $2N$*-Formen wird als Linksmodul von höchstens einer* $2N$*-Form erzeugt.*

Beweis: Der Modul der $(2N+1)$-Formen wird gemäß dem vorangegangenen Satz von Formen der Gestalt $\Theta^{(\mu,\nu)}$ mit $\mu+\nu=2N+1$ erzeugt. Für diese gilt notwendig $\mu \geq N+1$ oder $\nu \geq N+1$. Jedoch ist für $\mu \geq N+1$ die Forderung $1 \leq i_1 < \cdots < i_\mu \leq N$ nicht erfüllbar, entsprechend im anderen Falle die Ungleichung für $j_1, \ldots, j_\nu$, also ist die Menge dieser Formen leer, so daß der Modul der $(2N+1)$-Formen gleich $\{0\}$ ist.

Da nun keine von Null verschiedenen Differentialformen des Typs $\Theta^{(\mu,\nu)}$ mit $\mu \geq N+1$ oder $\nu \geq N+1$ existieren, verbleibt als einzige möglicherweise von Null verschiedene Form $\Theta^{(\mu,\nu)}$ mit $\mu+\nu=2N$ die Form $\Theta^{(N,N)} = \mathrm{d}z_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_N \wedge \mathrm{d}z_N^* \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_1^*$, woraus die zweite Aussage folgt. □

Folgerung 3.5: *In jedem inneren kovarianten Differentialkalkül höherer Ordnung $(\Gamma^\wedge, \mathrm{d})$ auf $X = \mathrm{S}_q^{2N-1}$ verschwinden alle Differentialformen der Ordnung $2N-1$ und höherer Ordnung.*

Falls $N \geq 3$ ist, so verschwinden ebenfalls alle $(2N-2)$-Formen.

Lemma 3.6: *Ist $\Theta = \Theta^{(\mu,\nu)}$ eine Differentialform des in Satz 3.3 beschriebenen Typs aus einem inneren Differentialkalkül höherer Ordnung $\Gamma^\wedge$, und gelten für die Indexmengen $J := \{j_1, \ldots, j_\mu\}$ und $K := \{k_1, \ldots, k_\nu\}$ die Bedingungen $J \cup K = \{1, \ldots, N\}$ und $J \cap K \neq \emptyset$, so ist $\Theta = 0$.*

Beweis des Lemmas: Da die $\mathrm{d}z_i$ und die $\mathrm{d}z_j^*$ jeweils untereinander quasikommutieren (vgl. Beweis des Satzes 3.3), kann Θ wegen $J \cap K \neq \emptyset$ in der Form

$$\Theta = a\mathrm{d}z_{j_1'} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_{j_{\mu-1}'} \wedge \mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}z_k^* \wedge \mathrm{d}z_{k_1'}^* \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z_{k_{\nu-1}'}^*$$

geschrieben werden, wobei a eine reelle Zahl ist und für die Mengen $J' := \{j_1', \ldots, j_{\mu-1}'\}$ und $K' := \{k_1', \ldots, k_{\nu-1}'\}$ gilt $J' \cup K' = \{1, \ldots, N\} \setminus \{k\}$. In $\Gamma^\wedge$ gilt nach Satz 3.2 die Relation $\mathrm{d}\Omega_+ = 0$ und damit

$$\mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}z_k^* = -\sum_{i \neq k} \mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}z_i^*$$

Wir ersetzen nun das Produkt $\mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}z_k^*$ gemäß dieser Gleichung und drücken dadurch Θ als Summe von $(N-1)$ Differentialformen aus, deren jede sich durch erneute Umordnung der $\mathrm{d}z_j$ oder der $\mathrm{d}z_k^*$ in eine der Formen

$$a'\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}z_j \wedge \vartheta_2$$

oder

$$a''\vartheta_1 \wedge \mathrm{d}z_j^* \wedge \mathrm{d}z_j^* \wedge \vartheta_2$$

mit $a', a'' \in \mathbb{R}$ und $\vartheta_{1,2} \in \Gamma^\wedge$ bringen läßt, die wegen $\mathrm{d}z_j \wedge \mathrm{d}z_j = \mathrm{d}z_j^* \wedge \mathrm{d}z_j^* = 0$ verschwinden. □

Beweis der Folgerung 3.5: Jede $(2N-1)$-Form ist X-Linearkombination von Formen $\Theta^{(\mu,\nu)}$ der in Satz 3.3 beschriebenen Form mit $\mu + \nu = 2N - 1$. Dabei enthält sicher eine der beiden Indexmengen J und K alle Zahlen von 1 bis N, und die andere enthält $(N-1)$ Elemente und ist somit nicht leer. Damit genügen J und K den Voraussetzungen des Lemmas, so daß die erste Aussage des Satzes gezeigt ist.

Es sei nun $N \geq 3$ und Θ eine $(2N-2)$-Form der beschriebenen Art. Falls die Indexmengen J und K nicht den Voraussetzungen des Lemmas genügen, so ist notwendig $J = K = \{1, \ldots, N\} \setminus \{k\}$ mit einem einzelnen Index $k \in \{1, \ldots, N\}$. Damit sind noch N Differentialformen Θ möglich; wir bezeichnen diese mit $\Theta_1, \ldots, \Theta_N$, wobei für Θ_k gelte $J = K = \{1, \ldots, N\} \setminus \{k\}$. Mittels der Substitution aus dem Beweis des Lemmas erhalten wir unter Beachtung der Relationen (3.2)

$$\begin{aligned} \Theta_{N-2} &= -q^2 \Theta_N \\ \Theta_{N-2} &= -\Theta_{N-1} \\ \Theta_{N-1} &= -\Theta_N \end{aligned}$$

sowie für jedes $k \leq N - 3$

$$\Theta_k = -q^{2N-2k-2}\Theta_N$$

und damit $\Theta_k = 0$ für alle k. □

Bemerkung: Für $N = 4$ kann durch eine weitere Verschärfung des im Beweis der Folgerung benutzten Argumentes gezeigt werden, daß es in einem inneren Differentialkalkül höherer Ordnung keine nichtverschwindenden 5-Formen gibt. Dies legt zusammen mit den Schranken der Folgerung für $N = 2$ und $N = 3$ die Vermutung nahe, daß in inneren Kalkülen höherer Ordnung, die Γ fortsetzen, stets alle Differentialformen der Ordnung $N + 1$ und höherer Ordnung verschwinden. Mit Sicherheit gibt es aber bereits durch das Verschwinden der $(2N-2)$-Formen in $\Gamma_{\mathrm{i}}^\wedge$ für jedes $N \geq 2$ mehrere unabhängige Differentialformen höchster Ordnung, was diese Kalküle zur Beschreibung geometrischer Strukturen ungeeignet erscheinen läßt.

Kapitel 4: Ein Symmetriekonzept

4.1 Vorüberlegungen: Das Verfahren von Woronowicz

Für Quantengruppen gibt Woronowicz [Wor2] ein Verfahren zur Konstruktion eines Differentialkalküls höherer Ordnung $(\Gamma^\wedge, \mathrm{d})$ aus einem gegebenen bikovarianten Differentialkalkül erster Ordnung (Γ, d) an. Wesentlicher Bestandteil des Verfahrens ist eine Antisymmetrisierungsprozedur, für die ein Bimodulhomomorphismus $\sigma : \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma \to \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$ benötigt wird ($\mathcal{A}$ bezeichnet die zugrundeliegende Quantengruppe), der der Zopfrelation

$$(\sigma \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma)(\sigma \otimes \mathrm{id}) = (\mathrm{id} \otimes \sigma)(\sigma \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \sigma), \tag{4.1}$$

kürzer auch geschrieben als $\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12} = \sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}$, in $\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$ genügt. Hierbei bezeichnet $\sigma_{i,i+1}$ die Anwendung von σ auf die i-te und $(i+1)$-te Komponente eines mehrfachen Tensorprodukts.

Wir vereinbaren zur Vereinfachung der Notation bei den im folgenden häufig auftretenden Tensorprodukten, daß im weiteren Verlauf dieses Kapitels jedes Tensorprodukt von Differentialmoduln als Tensorprodukt über der dem Differentialkalkül zugrundeliegenden Algebra (Quantengruppe oder Quantenraum) zu verstehen ist, d. h. $\Gamma \otimes \Gamma$ steht für $\Gamma \otimes_{\mathcal{A}} \Gamma$ bzw. $\Gamma \otimes_X \Gamma$ usw.

Wir wollen die Antisymmetrisierungsprozedur nach [Wor2] kurz skizzieren. Für jede Permutation p von $\{1, 2, \ldots, k\}$ bezeichne $\ell = \ell(p)$ die Länge von p, also die Anzahl der Inversionen von p. Es gibt dann eine Zerlegung $p = t_{i_1} \circ t_{i_2} \circ \cdots \circ t_{i_\ell}$, $1 \le i_1, \ldots, i_\ell \le k-1$, von p in Transpositionen benachbarter Elemente; t_i bezeichnet jeweils eine solche Transposition, die die Elemente an i-ter und $(i+1)$-ter Stelle vertauscht. Es sei nun $\sigma^p = \sigma_{i_1,i_1+1} \circ \sigma_{i_2,i_2+1} \circ \cdots \circ \sigma_{i_\ell,i_\ell+1}$. Aufgrund der für σ erfüllten Zopfrelation (4.1) ist σ^p unabhängig von der Wahl der Zerlegung in Transpositionen und damit wohldefiniert. Auf dem Tensorprodukt $\Gamma^{\otimes k}$ wird nun durch

$$A_k := \sum_p (-1)^{\ell(p)} \sigma^p \tag{4.2}$$

ein Antisymmetrisator definiert. Durch

$$\Gamma^{\wedge k} := \Gamma^{\otimes k} / \ker A_k; \qquad \Gamma^\wedge := \sum_{k=0}^{\infty}{}^{\oplus}\, \Gamma^{\wedge k} \tag{4.3}$$

erhält man dann die Moduln der k-Formen und schließlich den Differentialkalkül höherer Ordnung.

Der Bimodulhomomorphismus σ beschreibt eine – deformierte – Symmetrie im Tensorprodukt $\Gamma^{\otimes}$; aufgrund der damit zusätzlich zur Verfügung gestellten, auch für den Aufbau einer nichtkommutativen Geometrie auf den Quantengruppen bedeutsamen, Information ist er auch von eigenständigem Interesse.

Dies veranlaßt uns zu dem Versuch, eine Prozedur analog der von Woronowicz auch für den uns interessierenden homogenen Quantenraum S_q^{2N-1} bereitzustellen. Wir stellen uns also das Ziel, für einen Differentialkalkül erster Ordnung (Γ, d) eine „deformierte Symmetrie" $\sigma : \Gamma \otimes \Gamma \to \Gamma \otimes \Gamma$ aufzufinden, die zur Gewinnung eines Differentialkalküls höherer Ordnung geeignet ist.

Von Woronowiczs Bedingungen an eine solche Abbildung lassen sich die ersten beiden problemlos auf die Quantenraum-Situation übertragen; wir fordern also:

- Die Abbildung σ soll ein Bimodulhomomorphismus sein.
- Die Abbildung σ soll in $\Gamma^{\otimes 3}$ der Zopfrelation $\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12} = \sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}$ genügen.

Die dritte Bedingung, die im Fall der Quantengruppen bei Woronowicz eine eindeutige Bestimmtheit von σ zur Folge hat, nämlich daß $\sigma(\xi \otimes \eta) = \eta \otimes \xi$ gilt, sofern ξ eine linksinvariante und η eine rechtsinvariante 1-Form ist, läßt sich nicht übertragen, da kein geeigneter Begriff von Linksinvarianz zur Verfügung steht. Außerdem beruht der Nutzen dieser Forderung wesentlich darauf, daß ein bikovarianter Differentialkalkül erster Ordnung auf einer Quantengruppe je eine Basis aus linksinvarianten und aus rechtsinvarianten Elementen zuläßt. In den hier zugrunde zu legenden Differentialkalkülen auf S_q^{2N-1} existiert aber nicht einmal eine Basis aus rechtsinvarianten Elementen.

Deshalb verzichten wir auf diese Forderung gänzlich und ziehen andere Bedingungen heran, um σ näher zu bestimmen. Dabei nehmen wir unmittelbar Bezug darauf, daß σ die Gewinnung eines Differentialkalküls höherer Ordnung ermöglichen soll.

Soll nämlich $(\Gamma^{\wedge}, \mathrm{d})$ ein Differentialkalkül höherer Ordnung zu einem gegebenen Differentialkalkül erster Ordnung (Γ, d) sein, so müssen in $\Gamma^{\wedge}$ zumindest die Relationen des universellen Differentialkalküls höherer Ordnung $\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{u}}$ über Γ aus Abschnitt 3.2 gelten. Diese Gleichungen beinhalten das Verschwinden gewisser 2-Formen; die diesen 2-Formen entsprechenden Ausdrücke im Tensorprodukt $\Gamma \otimes \Gamma$ müssen dann von $(\sigma - \mathrm{id})$ annulliert werden.

Zusätzlich kann gefordert werden, daß σ kovariant (ein Komodulhomomorphismus) sein soll.

Es wird sich herausstellen, daß die bis hierher beschriebenen Anforderungen an σ einer weiteren Abschwächung bedürfen. Diese betrifft die Auswahl des zugrundeliegenden Tensorprodukts. Für die allen folgenden Ausführungen zugrundeliegende Definition eines Symmetriehomomorphismus nehmen wir daher eine weitere Verallgemeinerung vor, indem wir zulassen, daß die Tensorprodukte $\Gamma^{\otimes 2} = \Gamma \otimes \Gamma$, $\Gamma^{\otimes 3} = \Gamma \otimes \Gamma \otimes \Gamma$ usw. nach gewissen Unterbimoduln faktorisiert werden.

Definition 4.1: *Es sei X ein Quantenraum zur Quantengruppe $\mathcal{A}$ und (Γ, d) ein bezüglich $\mathcal{A}$ kovarianter Differentialkalkül erster Ordnung auf X. Es sei $M = (M^{(2)}, M^{(3)}, \dots)$ eine Folge von Unterbimoduln $M^{(2)} \subset \Gamma^{\otimes 2}$, $M^{(3)} \subset \Gamma^{\otimes 3}$, $\dots$, $M^{(k)} \subset \Gamma^{\otimes k}$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $k \geq 2$ gilt*

$$M^{(k)} \otimes \Gamma + \Gamma \otimes M^{(k)} \subseteq M^{(k+1)}. \tag{4.4}$$

Weiter sei $\Gamma_M^{\otimes 1} := \Gamma$, $\Gamma_M^{\otimes k} := \Gamma^{\otimes k}/M^{(k)}$ für jedes $k \geq 2$ und $\Gamma^{\otimes} := \sum_{k=1}^{\infty}{}^{\oplus} \Gamma^{\otimes k}$. Dann sollen $\Gamma_M^{\otimes}$ als ***faktorisierte Tensoralgebra über*** *Γ und $\Gamma_M^{\otimes k}$ als* ***Komponente k-ter Ordnung von*** *$\Gamma_M^{\otimes}$ oder als* ***faktorisiertes Tensorprodukt k-ter Ordnung*** *bezeichnet werden.*

Durch die Bedingung (4.4) wird sichergestellt, daß die faktorisierte Tensoralgebra wohldefiniert ist; es ist dann offenbar

$$\Gamma_M^{\otimes} = \Gamma^{\otimes}/I,$$

wobei I das von $\bigcup_{k=2}^{\infty} M^{(k)}$ in $\Gamma^{\otimes}$ erzeugte zweiseitige Ideal ist.

Wir wählen diesen etwas aufwendigen Weg des sukzessiven Aufbaus der Algebra $\Gamma_M^{\otimes}$ aus ihren Komponenten $\Gamma_M^{\otimes k}$, da im allgemeinen keine endliche Gröbnerbasis für $\Gamma_M^{\otimes}$ existiert, die es ermöglichen würde, diese Algebra auf einfache Weise umfassend zu charakterisieren. Da aber die Anzahl der Tensorfaktoren von Elementen aus $\Gamma_M^{\otimes}$ in natürlicher Weise eine Graduierung der Algebra darstellt und in $\Gamma_M^{\otimes}$ keine Kürzungsregel gilt, ist gewährleistet, daß alle Relationen in $\Gamma_M^{\otimes k}$ tatsächlich erfaßt werden, wenn die Konstruktion nur bis zu diesem Grad ausgeführt wird. Insbesondere sind wir dadurch in der Lage, Berechnungen in $\Gamma_M^{\otimes 2}$ auszuführen, ohne die Struktur von $\Gamma_M^{\otimes 3}$ und höheren faktorisierten Tensorprodukten bereits genau zu kennen.

Definition 4.2: *Es sei X ein Quantenraum zur Quantengruppe $\mathcal{A}$ und (Γ, d) ein bezüglich $\mathcal{A}$ kovarianter Differentialkalkül erster Ordnung auf X. Ferner sei $\Gamma_M^{\otimes}$ eine faktorisierte Tensoralgebra über Γ.*

*Ein **Symmetriehomomorphismus für** $\Gamma_M^{\otimes}$ ist dann ein Bimodulhomomorphismus $\sigma : \Gamma_M^{\otimes 2} \to \Gamma_M^{\otimes 2}$, für den in $\Gamma_M^{\otimes 3}$ die Zopfrelation (4.1) gilt und für den jeder der Unterbimoduln $M^{(k)} \subset \Gamma^{\otimes k}$ der Bedingung $\sigma_{i,i+1}(M^{(k)}) \subseteq M^{(k)}$ für $i = 1, \ldots, k-1$ genügt.*

Es ist offensichtlich, daß die Abbildung $\Phi_{\mathrm{R}} \otimes \cdots \otimes \Phi_{\mathrm{R}} : \Gamma^{\otimes k} \to \Gamma^{\otimes k} \otimes \mathcal{A}$ immer dann (durch repräsentantenweise Anwendung) eine wohldefinierte Abbildung von $\Gamma_M^{\otimes k}$ in $\Gamma_M^{\otimes k} \otimes \mathcal{A}$ ergibt – die wir ebenfalls als $\Phi_{\mathrm{R}} \otimes \cdots \otimes \Phi_{\mathrm{R}}$ notieren –, wenn $M^{(k)}$ nur aus invarianten Elementen besteht, d. h. wenn $(\Phi_{\mathrm{R}} \otimes \cdots \otimes \Phi_{\mathrm{R}})(m) = m \otimes 1$ für jedes $m \in M^{(k)}$ gilt. In dieser Situation ist der Begriff der Kovarianz eines Symmetriehomomorphismus sinnvoll.

Definition 4.3: *Ein Symmetriehomomorphismus σ für $\Gamma_M^{\otimes}$ heißt **(rechts-) kovariant** (bezüglich $\mathcal{A}$), wenn M nur aus invarianten Elementen besteht und*

$$(\sigma \otimes \mathrm{id}) \circ (\Phi_{\mathrm{R}} \otimes \Phi_{\mathrm{R}}) \equiv (\Phi_{\mathrm{R}} \otimes \Phi_{\mathrm{R}}) \circ \sigma \tag{4.5}$$

gilt.

Auch wenn im Sinne der Entwicklung einer kovarianten Differentialrechnung auf Quantenräumen die Beschränkung auf kovariante Symmetriehomomorphismen eine natürliche Forderung darstellt, die die Auswahl an faktorisierten Tensoralgebren stark einschränkt, bedeutet diese Auswahl dennoch eine zusätzliche Unbestimmtheit im Aufbau der Differentialrechnung. Es bedarf gesonderter Überlegungen, welche faktorisierte Tensoralgebra gewählt werden soll, um nicht schon in diesem Schritt geometrische Information zu verlieren.

4.2 Versuch der Bestimmung eines Symmetriehomomorphismus auf $\Gamma^{\otimes 2}$ für $\Gamma = \tilde{\Gamma}_1$

Wir wollen nun versuchen, einen Symmetriehomomorphismus gemäß dieser Definition auf den Quantensphären zu finden, wobei wir den Differentialkalkül erster Ordnung $(\Gamma, \mathrm{d}) = (\tilde{\Gamma}_1, \mathrm{d})$ aus Kapitel 2 zugrunde legen. Ferner sei zunächst $M^{(k)} = (0)$ für alle k; damit sind $\Gamma_M^{\otimes 2}$ und $\Gamma_M^{\otimes 3}$ offensichtlich die unfaktorisierten Tensorprodukte.

Wir führen noch Bezeichnungen für zwei invariante Elemente des Tensorprodukts $\Gamma^{\otimes 2}$ ein:

$$\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ := \sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_i^*, \qquad \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- := \sum_{i=1}^{N} q^{-2i} \mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_i.$$

Diese beiden invarianten Elemente erzeugen zusammen mit $\Omega \otimes \Omega$ die Gesamtheit aller invarianten Elemente von $\Gamma^{\otimes 2}$ als Linksmodul.

Sofern mit Hilfe des Bimodulhomomorphismus σ ein Differentialkalkül höherer Ordnung beschrieben werden kann, ist es immer noch möglich, daß bereits Differentialformen niedriger Ordnung in diesem Kalkül verschwinden. Um diesen, für den Aufbau einer nichtkommutativen Differentialgeometrie uninteressanten, Fall auszuschließen, wollen wir im folgenden nur solche Homomorphismen σ untersuchen, die zu Differentialkalkülen höherer Ordnung führen, in denen zumindest alle 2-Formen der Gestalt $\mathrm{d}z_i \wedge \mathrm{d}z_j$ und $\mathrm{d}z_i^* \wedge \mathrm{d}z_j^*$ mit $i \neq j$ von Null verschieden sind. Derartige Kalküle sollen im weiteren als *nichttriviale Differentialkalküle höherer Ordnung* bezeichnet werden.

Satz 4.1: *Es gibt keinen kovarianten Symmetriehomomorphismus σ für $\Gamma^{\otimes}$, der einen nichttrivialen Differentialkalkül höherer Ordnung induziert.*

Der Beweis dieses Satzes bildet den Gegenstand der folgenden Abschnitte.

4.2.1 Berechnungen zu $\sigma(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l)$ und $\sigma(\mathrm{d}z_k^* \otimes \mathrm{d}z_l^*)$

In jedem Differentialkalkül höherer Ordnung $\Gamma^{\wedge}$, der den Differentialkalkül $(\Gamma, \mathrm{d}) = (\tilde{\Gamma}_1, \mathrm{d})$ fortsetzt, müssen die folgenden Relationen gelten, die sich aus den Bimodulstrukturgleichungen von Γ durch Differentiation ergeben:

$$\mathrm{d}\Omega = \Omega \wedge \Omega \tag{4.6}$$

$$0 = \mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}z_l + q\hat{R}^{st}_{kl} \mathrm{d}z_s \wedge \mathrm{d}z_t \tag{4.7}$$

$$0 = \mathrm{d}z_k^* \wedge \mathrm{d}z_l^* + q^{-1}\check{R}^{-\,st}_{\ kl} \mathrm{d}z_s^* \wedge \mathrm{d}z_t^* \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & (\mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}z_l^* + Q^2 z_k \mathrm{d}z_l^* \wedge \Omega) \\ & + q^{-3}\grave{R}^{-\,st}_{\ kl}(\mathrm{d}z_s^* \wedge \mathrm{d}z_t + Q^2 z_s^* \mathrm{d}z_t \wedge \Omega) + Q^2(Q^2+1) z_k z_l^* \mathrm{d}\Omega. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Hieraus ergeben sich Gleichungen für σ, die in den folgenden Beweisen benutzt werden.

Lemma 4.2: *Für einen kovarianten Symmetriehomomorphismus σ auf $\Gamma \otimes \Gamma$ muß gelten*

$$
\begin{aligned}
\sigma(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l) &= \mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l && \textbf{\textit{(A1)}} \\
\textit{oder}\ \sigma(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l) &= q^{-1}\hat{R}^{st}_{kl}\mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t && \textbf{\textit{(A2)}} \\
\textit{oder}\ \sigma(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l) &= q\hat{R}^{-}{}^{st}_{kl}\mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t && \textbf{\textit{(A3)}}
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
\sigma(\mathrm{d}z^*_k \otimes \mathrm{d}z^*_l) &= \mathrm{d}z^*_k \otimes \mathrm{d}z^*_l && \textbf{\textit{(B1)}} \\
\textit{oder}\ \sigma(\mathrm{d}z^*_k \otimes \mathrm{d}z^*_l) &= q\check{R}^{-}{}^{st}_{kl}\mathrm{d}z^*_s \otimes \mathrm{d}z^*_t && \textbf{\textit{(B2)}} \\
\textit{oder}\ \sigma(\mathrm{d}z^*_k \otimes \mathrm{d}z^*_l) &= q^{-1}\check{R}^{st}_{kl}\mathrm{d}z^*_s \otimes \mathrm{d}z^*_t && \textbf{\textit{(B3)}}.
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Beweis: Aus den Gleichungen (4.7) und (4.8) ergeben sich die folgenden beiden Forderungen an σ:

$$0 = (\sigma - \mathrm{id})(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l + q\hat{R}^{st}_{kl}\mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t) \tag{4.12}$$

$$0 = (\sigma - \mathrm{id})(\mathrm{d}z^*_k \otimes \mathrm{d}z^*_l + q^{-1}\check{R}^{-}{}^{st}_{kl}\mathrm{d}z^*_s \otimes \mathrm{d}z^*_t) \tag{4.13}$$

Aus der ersten Forderung (4.12) zusammen mit der geforderten Bimodulhomomorphie und Kovarianz ergibt sich

$$\sigma(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l) = \lambda \mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l + (1-\lambda)q^{-1}\hat{R}^{st}_{kl}\mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t \tag{4.14}$$

mit einem reellen Parameter λ. Dieser kann aufgrund der Zopfrelation näher bestimmt werden, die nur für $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$ oder $\lambda = -qQ$ erfüllt wird.

Analog führt die zweite Forderung (4.13) auf

$$\sigma(\mathrm{d}z^*_k \otimes \mathrm{d}z^*_l) = \mu \mathrm{d}z^*_k \otimes \mathrm{d}z^*_l + (1-\mu)q\check{R}^{-}{}^{st}_{kl}\mathrm{d}z^*_s \otimes \mathrm{d}z^*_t, \tag{4.15}$$

wobei die Zopfrelation nur für $\mu = 0$ oder $\mu = 1$ oder $\mu = q^{-1}Q$ erfüllt ist. □

Bemerkung: Grundsätzlich wäre es möglich, auch für einen kovarianten Symmetriehomomorphismus auf darstellungstheoretischem Wege zu einem allgemeinen Ansatz zu gelangen. Dafür müßten Morphismen $T \in \mathrm{Mor}(\pi(0) \otimes \pi(1) \otimes \pi(1), \pi(k) \otimes \pi(1) \otimes \pi(1))$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, gesucht werden. Jedoch ist die Anzahl dabei auftretender Morphismen sehr groß (12 für $k = 0$, mehr als 40 allein für $k = 2$, weitere für $k = 4$), so daß die Auswertung eines solchen Ansatzes wenig aussichtsreich ist.

Günstiger ist der hier gewählte Weg, bei dem die stark einschränkende Forderung der Bimodulhomomorphie von Anfang an ausgenutzt wird. Möglicherweise impliziert sogar diese Forderung allein, ohne Beachtung der Kovarianz, die Bedingungen (4.14) und (4.15). Dem soll hier aber nicht weiter nachgegangen werden.

4.2.2 Herleitung von Ausdrücken für $\sigma(\mathrm{d}z_i^{(*)} \otimes \Omega)$ und $\sigma(\Omega \otimes \Omega)$

Die Fälle (A1) und (B1) würden im zu berechnenden Differentialkalkül höherer Ordnung sofort zum Verschwinden aller 2-Formen der Form $\mathrm{d}z_k \wedge \mathrm{d}z_l$ bzw. $\mathrm{d}z_k^* \wedge \mathrm{d}z_l^*$ führen und sind daher nicht zu berücksichtigen.

In den verbleibenden Fällen können aus den bereits feststehenden Gleichungen aus (4.10) und (4.11) weitere Beziehungen gefolgert werden, die das folgende Lemma zusammenfaßt.

Lemma 4.3: *Im Falle (A2) gelten*

$$\sigma(\mathrm{d}z_i \otimes \Omega) = Q^2 z_i \Omega \otimes \Omega + q^{-2} \Omega \otimes \mathrm{d}z_i + q^2 z_i \mathrm{d}^{\otimes} \Omega_+; \tag{4.16}$$
$$\sigma(\Omega \otimes \Omega) = \Omega \otimes \Omega + q^{-1} Q^{-1} (q^2 \mathrm{d}^{\otimes} \Omega_+ - \mathrm{d}^{\otimes} \Omega_-). \tag{4.17}$$

Im Falle (A3) gelten

$$\sigma(\mathrm{d}z_i \otimes \Omega) = q^2 Q^2 z_i \Omega \otimes \Omega + \Omega \otimes \mathrm{d}z_i - qQ \mathrm{d}z_i \otimes \Omega + q^4 z_i \mathrm{d}^{\otimes} \Omega_+; \tag{4.18}$$
$$\sigma(\Omega \otimes \Omega) = \Omega \otimes \Omega + qQ^{-1} (q^2 \mathrm{d}^{\otimes} \Omega_+ - \mathrm{d}^{\otimes} \Omega_-). \tag{4.19}$$

Im Falle (B2) gelten

$$\sigma(\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega) = Q^2 z_i^* \Omega \otimes \Omega + q^2 \Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* + z_i \mathrm{d}^{\otimes} \Omega_-; \tag{4.20}$$
$$\sigma(\Omega \otimes \Omega) = \Omega \otimes \Omega + qQ^{-1} (q^2 \mathrm{d}^{\otimes} \Omega_+ - \mathrm{d}^{\otimes} \Omega_-). \tag{4.21}$$

Im Falle (B3) gelten

$$\sigma(\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega) = q^{-2} Q^2 z_i^* \Omega \otimes \Omega + \Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* + q^{-1} Q \mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega + q^{-2} z_i^* \mathrm{d}^{\otimes} \Omega_-; \tag{4.22}$$
$$\sigma(\Omega \otimes \Omega) = \Omega \otimes \Omega + q^{-1} Q^{-1} (q^2 \mathrm{d}^{\otimes} \Omega_+ - \mathrm{d}^{\otimes} \Omega_-). \tag{4.23}$$

Beweis: In Abhängigkeit von den Bedingungen (A2) bzw. (A3) gestattet die Beziehung

$$\sigma(\mathrm{d}z_i \otimes \Omega_+) = - \sum_{j=1}^{N} \sigma(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j) z_j^*$$

die Berechnung von $\sigma(\mathrm{d}z_i \otimes \Omega)$, woraus anschließend vermöge

$$\sigma(\Omega_- \otimes \Omega) = \sum_{i=1}^{N} q^{-2i} z_i^* \sigma(\mathrm{d}z_i \otimes \Omega)$$

ein Ausdruck für $\sigma(\Omega \otimes \Omega)$ gewonnen werden kann (vgl. Anhang B.10 für den Fall (A2), Anhang B.11 für den Fall (A3)).

In gleicher Weise ermöglicht in Abhängigkeit von den Bedingungen (B2) bzw. (B3) die Beziehung

$$\sigma(\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega_-) = \sum_{j=1}^{N} q^{-2j} \sigma(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j^*) z_j$$

die Berechnung von $\sigma(\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega)$, woraus mittels

$$\sigma(\Omega_+ \otimes \Omega) = \sum_{i=1}^{N} z_i \sigma(\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega)$$

wiederum Ausdrücke für $\sigma(\Omega \otimes \Omega)$ gewonnen werden können (vgl. Anhang B.12 für den Fall (B2), Anhang B.13 für den Fall (B3)). □

Eine unmittelbare Konsequenz aus diesem Lemma ist, daß für einen Symmetriehomomorphismus auf $\Gamma \otimes \Gamma$ die Bedingungen (A2) und (B2) oder (A3) und (B3) jeweils nicht gleichzeitig erfüllt werden können, da hierfür wegen (4.17), (4.19), (4.21) und (4.23) die Relation $\mathrm{d}^\otimes \Omega_- = q^2 \mathrm{d}^\otimes \Omega_+$ gelten müßte. Dies stellt eine zusätzliche Relation dar, welche im Tensorprodukt $\Gamma \otimes \Gamma$ nicht erfüllt ist.

4.2.3 Ausdrücke für $\sigma(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l^*)$ und $\sigma(\mathrm{d}z_k^* \otimes \mathrm{d}z_l)$ im Fall (A2)/(B3)

Die Aussagen des Lemmas 4.3 zusammen mit der Eigenschaft von (Γ, d) als innerer Kalkül ermöglichen es, für die verbleibenden Fälle (A2)/(B3) und (A3)/(B2) Ausdrücke für $\sigma(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l^*)$ und $\sigma(\mathrm{d}z_k^* \otimes \mathrm{d}z_l)$ zu gewinnen. Da sich beide Fälle vollständig analog zueinander verhalten, beschränken wir uns auf den Fall (A2)/(B3).

Lemma 4.4: *Im Falle (A2)/(B3) gilt*

$$\begin{aligned}
\sigma(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l^*) &= q^{-3} \grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} \mathrm{d}z_s^* \otimes \mathrm{d}z_t + q^{-1} Q \mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l^* + q^{-3} Q^2 \grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t \otimes \Omega \\
&\quad - Q^2 z_k \Omega \otimes \mathrm{d}z_l^* - qQ z_k z_l^* \mathrm{d}^\otimes \Omega_+ - q^{-2} Q_+ Q^3 z_k z_l^* \Omega \otimes \Omega, \qquad (4.24) \\
\sigma(\mathrm{d}z_k^* \otimes \mathrm{d}z_l) &= q \acute{R}^{st}_{kl} \mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t^* + qQ^2 \acute{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega - q^{-2} Q^2 z_k^* \Omega \otimes \mathrm{d}z_l \\
&\quad + q^{-1} Q z_k^* z_l \mathrm{d}^\otimes \Omega_- + Q_+ Q^3 z_k^* z_l \Omega \otimes \Omega. \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

Beweis: Aus $\mathrm{d}z_l^{(*)} = \Omega z_l^{(*)} - z_l^{(*)} \Omega$ ergeben sich

$$\begin{aligned}
\sigma(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l^*) &= \sigma(\mathrm{d}z_k \otimes \Omega z_l^*) - \sigma(\mathrm{d}z_k \cdot z_l^* \otimes \Omega) \\
\sigma(\mathrm{d}z_k^* \otimes \mathrm{d}z_l) &= \sigma(\mathrm{d}z_k^* \otimes \Omega z_l) - \sigma(\mathrm{d}z_k^* \cdot z_l \otimes \Omega)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\sigma(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l^*) &= \sigma(\mathrm{d}z_k \otimes \Omega)z_l^* - q^{-1}\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* \sigma(\mathrm{d}z_t \otimes \Omega) \\ &\quad - qQz_k\sigma(\mathrm{d}z_l^* \otimes \Omega) - Q^2 z_k z_l^* \sigma(\Omega \otimes \Omega) \qquad (4.26)\\ \sigma(\mathrm{d}z_k^* \otimes \mathrm{d}z_l) &= \sigma(\mathrm{d}z_k^* \otimes \Omega)z_l - q\acute{R}^{st}_{kl} z_s \sigma(\mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega) \\ &\quad + q^{-1}Qz_k^*\sigma(\mathrm{d}z_l \otimes \Omega) - Q^2 z_k^* z_l \sigma(\Omega \otimes \Omega). \qquad (4.27)\end{aligned}$$

Ferner benötigen wir die Gleichungen

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ z_i &= q^2 z_i \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + q^{-1}Q^3 z_i \Omega \otimes \Omega \\ &\quad - q^{-2}Q^2(\mathrm{d}z_i \otimes \Omega + \Omega \otimes \mathrm{d}z_i) \\ \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ z_i^* &= q^{-2} z_i^* \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - q^{-3}Q^3 z_i^* \Omega \otimes \Omega \\ &\quad - q^{-2}Q^2(\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega + \Omega \otimes \mathrm{d}z_i^*) \\ \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- z_i &= q^2 z_i \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + qQ^3 z_i \Omega \otimes \Omega \\ &\quad - Q^2(\mathrm{d}z_i \otimes \Omega + \Omega \otimes \mathrm{d}z_i) \\ \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- z_i^* &= q^{-2} z_i^* \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- - q^{-1}Q^3 z_i^* \Omega \otimes \Omega \\ &\quad - Q^2(\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega + \Omega \otimes \mathrm{d}z_i^*).\end{aligned} \qquad (4.28)$$

Aus (4.26), (4.16), (4.22), (4.28) berechnet man nun unter Berücksichtigung von (4.28) die Ausdrücke für $\sigma(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l^*)$ sowie $\sigma(\mathrm{d}z_k^* \otimes \mathrm{d}z_l)$ (vgl. Anhang B.14). □

4.2.4 Wohldefiniertheit von σ als Bimodulhomomorphismus

Die bis hierhin gewonnenen Gleichungen stellen notwendige Bedingungen für σ dar. Sofern diese Gleichungen einander nicht widersprechen, ist σ durch die Gleichungen (4.10):(A2), (4.11):(B3), (4.24) und (4.25) eindeutig bestimmt. Wir fassen in dem nachfolgenden Satz zur besseren Übersicht diese Gleichungen noch einmal zusammen.

Satz 4.5: *Durch die Gleichungen*

$$
\begin{aligned}
\sigma(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l) &= q^{-1}\hat{R}^{st}_{kl}\mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t \\
\sigma(\mathrm{d}z^*_k \otimes \mathrm{d}z^*_l) &= q^{-1}\check{R}^{st}_{kl}\mathrm{d}z^*_s \otimes \mathrm{d}z^*_t \\
\sigma(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z^*_l) &= q^{-3}\grave{R}^{-\,st}_{\ \ kl}(\mathrm{d}z^*_s \otimes \mathrm{d}z_t + Q^2 z^*_s \mathrm{d}z_t \otimes \Omega) + q^{-1}Q\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z^*_l \\
&\quad - Q^2 z_k \Omega \otimes \mathrm{d}z^*_l - qQz_k z^*_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - q^{-2}Q_+Q^3 z_k z^*_l \Omega \otimes \Omega, \\
\sigma(\mathrm{d}z^*_k \otimes \mathrm{d}z_l) &= q\acute{R}^{st}_{kl}(\mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z^*_t + Q^2 z_s \mathrm{d}z^*_t \otimes \Omega) - q^{-2}Q^2 z^*_k \Omega \otimes \mathrm{d}z_l \\
&\quad + q^{-1}Qz^*_k z_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + Q_+Q^3 z^*_k z_l \Omega \otimes \Omega
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

wird ein Bimodulhomomorphismus $\sigma : \Gamma^{\otimes 2} \to \Gamma^{\otimes 2}$ *definiert.*

Zum Beweis dieser Aussage betrachten wir zunächst den durch die Gleichungen (4.29) definierten Linksmodulhomomorphismus $\sigma_{\mathrm{L}} : \Gamma \otimes \Gamma \to \Gamma \otimes \Gamma$ sowie den durch dieselben Gleichungen definierten Rechtsmodulhomomorphismus $\sigma_{\mathrm{R}} : \Gamma \otimes \Gamma \to \Gamma \otimes \Gamma$. Diese Homomorphismen sind wohldefiniert, da mit den aus diesen Gleichungen berechneten Ausdrücken $\sigma_{\mathrm{L/R}}(\mathrm{d}z^{(*)}_k \otimes \Omega_\pm)$ und $\sigma_{\mathrm{L/R}}(\Omega_\pm \otimes \mathrm{d}z^{(*)}_k)$ die wegen $\Omega_+ + \Omega_- = 0$ notwendigen Gleichungen $\sigma_{\mathrm{L/R}}(\mathrm{d}z^{(*)}_k \otimes \Omega_+) + \sigma_{\mathrm{L/R}}(\mathrm{d}z^{(*)}_k \otimes \Omega_-) = 0$ und $\sigma_{\mathrm{L/R}}(\Omega_+ \otimes \mathrm{d}z^{(*)}_k) + \sigma_{\mathrm{L/R}}(\Omega_- \otimes \mathrm{d}z^{(*)}_k) = 0$ gelten.

Lemma 4.6: *Für jedes* $a \in \Gamma^{\otimes 2}$ *gilt* $\sigma_{\mathrm{L}}(a) = \sigma_{\mathrm{R}}(a)$.

Beweis: Es genügt, die Behauptung für Ausdrücke der Form $\mathrm{d}z^{(*)}_j \otimes \mathrm{d}z^{(*)}_k \cdot z^{(*)}_l$ nachzuweisen. Dies geschieht durch unmittelbares Nachrechnen (vgl. Anhang B.15). □

Beweis von Satz 4.5: Es ist zu zeigen, daß σ als Bimodulhomomorphismus wohldefiniert ist. Da σ_{L} und σ_{R} als Links- bzw. Rechtsmodulhomomorphismus wohldefiniert sind, folgt dies unmittelbar aus Lemma 4.6. □

Wir bemerken noch, daß der Bimodulhomomorphismus σ eine quadratische Relation erfüllt.

Folgerung 4.7: *Der durch die Gleichungen (4.10):(A2), (4.11):(B3), (4.24) und (4.25) bestimmte Bimodulhomomorphismus* $\sigma : \Gamma^{\otimes 2} \to \Gamma^{\otimes 2}$ *erfüllt die Gleichung*

$$\sigma^2(a) = q^{-2}a + q^{-1}Q\sigma(a) \quad \textit{für alle } a \in \Gamma^{\otimes 2}. \tag{4.30}$$

Beweis: Die Gültigkeit der Gleichung folgt für $a = \mathrm{d}z^{(*)}_k \otimes \mathrm{d}z^{(*)}_l$ und damit für alle a durch direkte Rechnung. □

4.2.5 Zopfrelationen

In Abschnitt 4.2.1 wurde die Zopfrelation $\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12} = \sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}$ für Ausdrücke der Formen $\mathrm{d}z_j \otimes \mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l \in \Gamma \otimes \Gamma \otimes \Gamma$ sowie $\mathrm{d}z_j^* \otimes \mathrm{d}z_k^* \otimes \mathrm{d}z_l^* \in \Gamma \otimes \Gamma \otimes \Gamma$ zur Gewinnung der Bedingungen (A1)–(B3) ausgewertet, so daß sie von jedem Bimodulhomomorphismus, der den Bedingungen des Lemmas 4.2 genügt, für diese Fälle automatisch erfüllt wird.

Schwieriger gestaltet es sich aufgrund der Vielzahl der in den Rechnungen auftretenden Terme, die Zopfrelation für solche Ausdrücke aus $\Gamma \otimes \Gamma \otimes \Gamma$ nachzuprüfen, in denen nicht nur Differentiale der Form $\mathrm{d}z_i$ oder nur solche der Form $\mathrm{d}z_i^*$, sondern beide Arten gemischt auftreten.

Es stellt sich heraus, daß es nicht möglich ist, die Zopfrelation auch in diesen Fällen zu erfüllen.

Lemma 4.8: *Unter den Bedingungen des Falles (A2)/(B3) gilt*

$$(\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12} - \sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23})(\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+) \neq 0.$$

Beweis: Wir benutzen die Gleichungen (4.28), (4.24) und (4.25), um die Zopfrelation für den Ausdruck

$$\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \in \Gamma \otimes \Gamma \otimes \Gamma$$

zu prüfen. Wir berechnen dazu zunächst (vgl. Anhang B.16)

$$\sigma(\Omega \otimes \mathrm{d}z_i) = \mathrm{d}z_i \otimes \Omega + q^{-1}Q\Omega \otimes \mathrm{d}z_i - Q^2 z_i\Omega \otimes \Omega - z_i\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-; \tag{4.31}$$

auf die gleiche Weise erhalten wir (vgl. Anhang B.17) die Gleichung

$$\sigma(\Omega \otimes \mathrm{d}z_i^*) = q^{-2}\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega - q^{-2}Q^2 z_i^*\Omega \otimes \Omega - z_i^*\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+. \tag{4.32}$$

Nun berechnen wir die Ausdrücke $\sigma_{23}\sigma_{12}(\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_\pm)$ (vgl. Anhang B.18) und erhalten

$$\begin{aligned}\sigma_{23}\sigma_{12}(\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+) &= q^{-2}(1+Q^2)\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \otimes \Omega - q^{-1}Q\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \\ &\quad + q^{-3}Q\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- - q^{-3}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} q^{-2j}\check{R}^{-}{}^{st}_{ij} z_i \mathrm{d}z_s^* \otimes \mathrm{d}z_t^* \otimes \mathrm{d}z_j\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{23}\sigma_{12}(\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-) &= q^{-2}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \otimes \Omega + q^{-3}Q\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- - Q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \otimes \Omega \\ &\quad - Q^2\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - 2q^{-2}Q^4\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega \\ &\quad + q^{-3}Q\sum_{i=1}^{N} q^{-2i}\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_i - qQ\sum_{j=1}^{N}\mathrm{d}z_j \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j^*.\end{aligned} \tag{4.34}$$

Damit gelangen wir weiterhin (vgl. Anhang B.19) zu

$$\begin{aligned}
\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}(\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+) = {} & (q^{-4} - q^{-2}Q^2)\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \otimes \Omega + (q^{-2} - 2)Q^2\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \\
& +(q^{-5}Q - q^{-4}Q^4)\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- - (q^{-2} + 2q^{-3}Q + q^{-6})Q^4\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega \\
& -(2q^{-1}Q^3 + q^{-1}Q)\sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}z_i \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* \\
& +(q^{-5}Q - q^{-4}Q^4)\sum_{j=1}^{N} q^{-2j}\mathrm{d}z_j^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j. \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

Da weiterhin gilt (vgl. Anhang B.20)

$$\sigma(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+) = q^{-2}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-, \qquad (4.36)$$

ist mit (4.34) und (4.35) schließlich (vgl. Anhang B.21)

$$\begin{aligned}
& \sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}(\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+) - \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}(\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+) \\
& \quad = q^{-2}Q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \otimes \Omega - q^{-2}Q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \otimes \Omega + 2q^{-1}Q^3\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \\
& \qquad q^{-4}Q^4\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + (q^{-6} - 4q^{-4} + 3q^{-2})Q^4\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega \\
& \qquad +q^{-4}Q^4\sum_{i=1}^{N} q^{-2i}\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_i + 2q^{-1}Q^3\sum_{j=1}^{N} \mathrm{d}z_j \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j^* \qquad (4.37)
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck verschwindet in $\Gamma \otimes \Gamma \otimes \Gamma$ nicht; daher ist die Zopfrelation nicht erfüllt. □

Aus dem Lemma ergibt sich, daß die Zopfrelation nicht allgemein erfüllt ist; damit ist Satz 4.1 gezeigt. □

4.3 Symmetriehomomorphismus für faktorisierte Tensoralgebren

Nachdem sich der erste Versuch, die Konstruktion von Woronowicz auf den Fall der Quantensphären zu übertragen, als nicht tragfähig erwiesen hat, weist eine genauere Betrachtung der zu diesem Ergebnis führenden Berechnungen des Abschnitts 4.2 einen möglichen Ausweg.

Wie bereits zu Beginn des Abschnitts 4.2 bemerkt, gibt es in $\Gamma \otimes \Gamma$ die drei linear unabhängigen invarianten Elemente

$$\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+, \qquad \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \quad \text{und} \quad \Omega \otimes \Omega.$$

Es zeigt sich, daß im wesentlichen immer die gleichen Linearkombinationen dieser drei invarianten Elemente als „Störglieder" in den Berechnungen auftreten. Wären diese Linearkombinationen gleich 0, so würden die rechten Seiten von (4.37) und ähnlichen aus der Zopfrelation abgeleiteten Gleichungen verschwinden. Obwohl in den Gleichungen in der Komponente zweiter Ordnung der Tensoralgebra auch ohne diese Relationen keine Widersprüche auftreten, würden sich auch dort wesentliche Vereinfachungen ergeben.

Dies ist der Grund für die allgemeine Fassung der oben gegebenen Definition eines Symmetriehomomorphismus für faktorisierte Tensoralgebren.

Wir werden also im folgenden $\Gamma^{\otimes}$ durch solche faktorisierte Tensoralgebren ersetzen und ziehen dafür solche Unterbimoduln heran, die von den erwähnten Linearkombinationen invarianter Elemente erzeugt werden.

Lemma 4.9: *Die durch die invarianten Elemente*

$$K_1 := (q^2 \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-) \quad \textit{und} \quad K_2 := (\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + Q^2 \Omega \otimes \Omega) \tag{4.38}$$

aus $\Gamma^{\otimes 2}$ *erzeugten Linksmoduln*

$$\begin{aligned} M_1^{(2)} &:= \{0\} \\ M_2^{(2)} &:= X \cdot K_1 \\ M_3^{(2)} &:= X \cdot K_1 + X \cdot K_2 \end{aligned}$$

sind Unterbimoduln in $\Gamma^{\otimes 2}$. *Der Linksmodul*

$$M_0^{(3)} := \Gamma \otimes M_3^{(2)} + M_3^{(2)} \otimes \Gamma$$

ist ein Unterbimodul in $\Gamma^{\otimes 3}$.

Beweis: Die Behauptungen folgen daraus, daß die Elemente K_1 und K_2 mit allen Elementen der Algebra X quasikommutieren. Im einzelnen gilt für $k = 1, \ldots, N$

$$\begin{aligned} K_1 z_k &= q^2 z_k K_1; & K_1 z_k^* &= q^{-2} z_k^* K_1; \\ K_2 z_k &= q^2 z_k K_2; & K_2 z_k^* &= q^{-2} z_k^* K_2. \end{aligned}$$

□

4.3.1 Symmetriehomomorphismus für faktorisierte Tensoralgebren (Ergebnis)

Theorem 4.10: *Über dem Differentialkalkül erster Ordnung* $(\Gamma, \mathrm{d}) = (\tilde{\Gamma}_1, \mathrm{d})$ *auf den Quantensphären* S_q^{2N-1} *existieren faktorisierte Tensoralgebren* $\Gamma_{M_i}^{\otimes}$, $i = 1, 2, 3$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

(i) Die Komponente 2. Ordnung von $\Gamma_{M_i}^{\otimes}$ *ist* $\Gamma^{\otimes 2}/M_i^{(2)}$.

(ii) Für $\Gamma_{M_i}^{\otimes}$ *existieren genau zwei kovariante Symmetriehomomorphismen* $\sigma = \sigma_i$ *und* $\sigma' = \sigma_i'$, *die zu nichttrivialen Differentialkalkülen höherer Ordnung führen, wobei* σ *durch die Gleichungen (4.29) definiert wird und* σ' *invers zu* σ *ist.*

(iii) Die Komponente 3. Ordnung aller drei faktorisierten Tensoralgebren $\Gamma_{M_i}^{\otimes}$ *ist gleich* $\Gamma^{\otimes 3}/M_1^{(3)}$, *wobei* $M_1^{(3)}$ *der kleinste Unterbimodul von* $\Gamma^{\otimes 3}$ *ist, der* $M_0^{(3)}$ *enthält und unter* σ_{12} *und* σ_{23} *invariant ist.*

(iv) Die Komponente k-ter Ordnung $\Gamma_{M_i}^{\otimes k}$, $k \geq 4$, *von* $\Gamma_{M_i}^{\otimes}$ *ist gleich dem kleinsten Unterbimodul von* $\Gamma^{\otimes k}$, *der* $\Gamma_{M_i}^{\otimes k-1} \otimes \Gamma + \Gamma \otimes \Gamma_{M_i}^{\otimes k-1}$ *enthält und unter den Abbildungen* $\sigma_{i,i+1}$ *mit* $1 \leq i \leq k-1$ *invariant ist.*

Der Beweis dieses Theorems ist Gegenstand der folgenden Abschnitte.

Wir weisen darauf hin, daß das Theorem keine erschöpfende Beschreibung aller möglichen faktorisierten Tensoralgebren $\Gamma_M^{\otimes}$ enthält, zu denen es kovariante Symmetriehomomorphismen gibt. Untersucht man die Zopfrelation außer für $(\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+)$ wie in Abschnitt 4.2.5 noch für weitere Ausdrücke aus $\Gamma^{\otimes 3}$ so wird ersichtlich, daß unter den Ausdrücken, die in $\Gamma_M^{\otimes 3}$ verschwinden müssen, damit die Zopfrelation erfüllt werden kann, sowohl (Tensor-) Produkte mit K_1 als auch solche mit K_2 sind. Andererseits ist es nicht zwingend notwendig, in $\Gamma^{\otimes 2}$ bereits eine Faktorisierung vorzunehmen; die Struktur der faktorisierten Tensoralgebra, des Symmetriehomomorphismus und der damit konstruierten Differentialkalküle höherer Ordnung kann sich aber vereinfachen, wenn bereits hier eine Faktorisierung erfolgt. Deshalb untersuchen wir neben der Algebra $\Gamma_{M_1}^{\otimes}$, in der die Komponente zweiter Ordnung keine Faktorisierung aufweist, noch $\Gamma_{M_3}^{\otimes}$, wo bereits in der Komponente 2. Ordnung die volle Faktorisierung stattfindet (in dem Sinne, daß in diesem Fall $M_1^{(3)}$ der kleinste Unterbimodul von $\Gamma^{\otimes 3}$ ist, der $(M_3^{(2)} \otimes \Gamma + \Gamma \otimes M_3^{(2)})$ enthält und unter σ_{12} und σ_{23} invariant ist), und $\Gamma_{M_2}^{\otimes}$, die zwischen diesen beiden Extremen steht.

4.3.2 Berechnungen zu $\sigma(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l)$, $\sigma(\mathrm{d}z_k^* \otimes \mathrm{d}z_l^*)$, $\sigma(\mathrm{d}z_i^{(*)} \otimes \Omega)$ und $\sigma(\Omega \otimes \Omega)$

Die Berechnungen aus Abschnitt 4.2.1 und damit Lemma 4.2 behalten ihre Gültigkeit auch für $\Gamma_{M_i}^{\otimes 2}$, $i = 1, 2, 3$. Die Fälle (A1) und (B1) sind aus denselben Gründen wie dort nicht zu beachten; in den Fällen (A2), (A3) sowie (B2), (B3) kann weiter geschlossen werden wie in Abschnitt 4.2.2.

Die Gleichungen des Lemmas 4.3 nehmen durch die in $\Gamma_{M_2}^{\otimes 2}$ und $\Gamma_{M_3}^{\otimes 2}$ gültigen zusätzlichen Relationen

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ &= q^{-2}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \quad \text{und} \\
\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- &= -Q^2 \Omega \otimes \Omega \quad (\text{nur in } \Gamma_{M_3}^{\otimes 2})
\end{aligned}$$

eine einfachere Gestalt an. Insbesondere gilt in diesen beiden faktorisierten Tensorprodukten

$$\sigma(\Omega \otimes \Omega) = \Omega \otimes \Omega. \tag{4.39}$$

4.3.3 Die Fälle (A3)/(B3) und (A2)/(B2) für faktorisierte Tensoralgebren

Aus Gleichung (4.39) wird ersichtlich, daß im Gegensatz zu Abschnitt 4.2.3 die Fallkombinationen (A2)/(B2) und (A3)/(B3) für die faktorisierten Tensoralgebren $\Gamma_{M_2}^{\otimes 2}$ und $\Gamma_{M_3}^{\otimes 2}$ nicht von vornherein ausgeschlossen werden können. Es zeigt sich jedoch, daß diese auch hier zu keinem Symmetriehomomorphismus führen.

Lemma 4.11: *Es gibt keinen kovarianten Symmetriehomomorphismus σ auf $\Gamma_M^{\otimes}$ für $M = M_2$ oder $M = M_3$, der den Bedingungen (A2) und (B2) oder den Bedingungen (A3) und (B3) zugleich genügt.*

Beweis: Beide Fallkombinationen verhalten sich analog; wir untersuchen hier den Fall (A3)/(B3). Außerdem können wir uns auf die Betrachtung von $M = M_3$ beschränken.

Wir berechnen zunächst (vgl. Anhang B.22)

$$\begin{aligned}
\sigma(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l^*) &= q^{-1}\grave{R}^{-\,st}_{\ \,kl}\mathrm{d}z_s^* \otimes \mathrm{d}z_t + q^{-1}Q^2\grave{R}^{-\,st}_{\ \,kl}z_s^*\mathrm{d}z_t \otimes \Omega - Q^2 z_k \mathrm{d}z_l^* \otimes \Omega \\
&\quad - 2q^{-1}Q^3 z_k z_l^* \Omega \otimes \Omega - q^{-1}Q z_k z_l^* \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-
\end{aligned} \tag{4.40}$$

$$\begin{aligned}
\sigma(\mathrm{d}z_k^* \otimes \mathrm{d}z_l) &= q\acute{R}^{st}_{kl}\mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t^* + qQ^2\acute{R}^{st}_{kl}z_s\mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega - Q^2 z_k^*\mathrm{d}z_l \otimes \Omega \\
&\quad + 2qQ^3 z_k^* z_l \Omega \otimes \Omega + qQ z_k^* z_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-.
\end{aligned} \tag{4.41}$$

Berechnen wir nun mittels der Gleichungen (4.41), (4.40), (4.18) und (4.22) den Ausdruck

$$(\sigma - \mathrm{id})(q\mathrm{d}z_l \otimes \mathrm{d}z_k^* + q^{-2}\mathrm{d}z_k^* \otimes \mathrm{d}z_l + qQ^2 z_l \mathrm{d}z_k^* \otimes \Omega + q^{-2}Q^2 z_k^* \mathrm{d}z_l \otimes \Omega)$$

für $k \neq l$, der für einen zur Gewinnung eines Differentialkalküls höherer Ordnung geeigneten Symmetriehomomorphismus σ verschwinden müßte, so ergibt sich (vgl. Anhang B.23)

$$\begin{aligned}
&(\sigma - \mathrm{id})(q\mathrm{d}z_l \otimes \mathrm{d}z_k^* + q^{-2}\mathrm{d}z_k^* \otimes \mathrm{d}z_l + qQ^2 z_l \mathrm{d}z_k^* \otimes \Omega + q^{-2}Q^2 z_k^* \mathrm{d}z_l \otimes \Omega)\\
&\quad = -Q\mathrm{d}z_l \otimes \mathrm{d}z_k^* + q^{-1}Q\mathrm{d}z_k^* \otimes \mathrm{d}z_l + Q^2 z_k^* z_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-\\
&\qquad\quad + qQ^2(z_l\Omega \otimes \mathrm{d}z_k^* - z_l \mathrm{d}z_k^* \otimes \Omega)\\
&\qquad\quad + q^{-2}Q^2(z_k^*\Omega \otimes \mathrm{d}z_l - z_k^* \mathrm{d}z_l \otimes \Omega)\\
&\quad \neq 0.
\end{aligned}$$

Dieser Widerspruch zeigt, daß die Kombination der Fälle (A3) und (B3) auch auf $\Gamma^{\otimes}_{M_i}$, $i = 2, 3$, nicht zu einem Bimodulhomomorphismus σ mit den geforderten Eigenschaften führt. □

4.3.4 Die Bimodulhomomorphismen σ auf $\Gamma^{\otimes}_{M_i}$, $i = 1, 2, 3$

Wie bei der Untersuchung für $\Gamma^{\otimes}$ bleiben also die beiden zueinander analogen Fälle (A2)/(B3) und (A3)/(B2) zu betrachten. Wir wählen für unsere Betrachtungen wiederum den Fall (A2)/(B3) aus. Da alle Rechnungen aus Abschnitt 4.2.3 ihre Gültigkeit behalten, müssen für Symmetriehomomorphismen $\sigma = \sigma_i$ zu faktorisierten Tensoralgebren mit den Komponenten zweiter Ordnung $\Gamma^{\otimes 2}_{M_i}$, $i = 1, 2, 3$, unverändert die Gleichungen (4.29) aus Satz 4.5 gelten, die σ im Falle seiner Existenz eindeutig bestimmen.

Durch die Aussage des folgenden Lemmas ist dann sichergestellt, daß durch diese Gleichungen tatsächlich für $i = 1, 2, 3$ Bimodulhomomorphismen $\sigma_i : \Gamma^{\otimes 2}_{M_i} \to \Gamma^{\otimes 2}_{M_i}$ gegeben werden. Hierin sind $\sigma_{\mathrm{L/R}} : \Gamma^{\otimes 2} \to \Gamma^{\otimes 2}$ die in Abschnitt 4.2.4 eingeführten Homomorphismen von Links- bzw. Rechtsmoduln.

Lemma 4.12: *Jeder der Unterbimoduln $M_1^{(2)}$, $M_2^{(2)}$, $M_3^{(2)}$ von $\Gamma^{\otimes 2}$ ist invariant unter σ_{L} und σ_{R}.*

Beweis: Für $M_1^{(2)}$ ist die Behauptung trivial. Wir berechnen (vgl. Anhang B.24)

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+) = \sigma_{\mathrm{R}}(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+) &= q^{-2}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + q^{-1}Q(q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + Q^2\Omega\otimes\Omega)\\
\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-) = \sigma_{\mathrm{R}}(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-) &= \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + q^{-1}Q\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- - q^{-3}Q(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + Q^2\Omega\otimes\Omega)\\
\sigma_{\mathrm{L}}(\Omega\otimes\Omega) &= \Omega\otimes\Omega + q^{-1}Q^{-1}(q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + Q^2\Omega\otimes\Omega) - q^{-1}Q^{-1}(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + Q^2\Omega\otimes\Omega)\\
\sigma_{\mathrm{R}}(\Omega\otimes\Omega) &= \Omega\otimes\Omega + q^{-1}Q^{-1}(q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + Q^2\Omega\otimes\Omega) - q^{-3}Q^{-1}(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + Q^2\Omega\otimes\Omega)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathrm{L}}(q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + Q^2\Omega\otimes\Omega) &= q^{-2}(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + Q^2\Omega\otimes\Omega)\\
&\quad + Q_+Q(q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + Q^2\Omega\otimes\Omega)\\
\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + Q^2\Omega\otimes\Omega) &= (q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + Q^2\Omega\otimes\Omega) - q^{-3}Q(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + Q^2\Omega\otimes\Omega)\\
\sigma_{\mathrm{R}}(q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + Q^2\Omega\otimes\Omega) &= (1 - q^{-3}Q)(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + Q^2\Omega\otimes\Omega)\\
&\quad + Q_+Q(q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + Q^2\Omega\otimes\Omega)\\
\sigma_{\mathrm{R}}(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + Q^2\Omega\otimes\Omega) &= (q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + Q^2\Omega\otimes\Omega) + q^{-1}Q(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + Q^2\Omega\otimes\Omega)
\end{aligned}$$

Hieraus folgen $\sigma_{\mathrm{L}}(M_2^{(2)}) \subseteq M_2^{(2)}$, $\sigma_{\mathrm{R}}(M_2^{(2)}) \subseteq M_2^{(2)}$, $\sigma_{\mathrm{L}}(M_3^{(2)}) \subseteq M_3^{(2)}$, $\sigma_{\mathrm{R}}(M_3^{(2)}) \subseteq M_3^{(2)}$. □

4.3.5 Zopfrelationen

Die bisherigen Berechnungen zu σ_i bezogen sich ausschließlich auf $\Gamma_{M_i}^{\otimes 2}$. Nachdem nun jedoch nachgewiesen ist, daß durch (4.29) tatsächlich Bimodulhomomorphismen auf $\Gamma_{M_i}^{\otimes 2}$ gegeben werden, ist die Existenz der Unterbimoduln $\Gamma_{M_i}^{\otimes k}$, $i = 1, 2, 3$, $k \geq 3$, entsprechend den Forderungen des Theorems sichergestellt, so daß nun insbesondere die Gültigkeit der Zopfrelation für σ_i überprüft werden kann.

Lemma 4.13: *Die durch die Gleichungen (4.29) definierten Bimodulhomomorphismen $\sigma = \sigma_i : \Gamma_{M_i}^{\otimes 2} \to \Gamma_{M_i}^{\otimes 2}$, $i = 1, 2, 3$, erfüllen in $\Gamma_{M_i}^{\otimes 3}$ die Zopfrelation (4.1).*

Beweis: Die drei Bimoduln $\Gamma_{M_i}^{\otimes 3}$ sind identisch. Wegen $\mathrm{d}x = \Omega x - x\Omega$ für alle $x \in \mathrm{S}_q^{2N-1}$ und der bereits nachgewiesenen Bimodulhomomorphie von σ genügt es zum Nachweis der Zopfrelation, diese für Ausdrücke aus $\Gamma_M^{\otimes 3}$ von der Form $\mathrm{d}z_i^{(*)} \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j^{(*)}$ nachzuweisen. Dies geschieht durch direkte Rechnung (vgl. Anhang B.25). □

Wir bemerken abschließend noch, daß man im Fall (A3)/(B2) in völlig analoger Weise ebenfalls zu Bimodulhomomorphismen auf $\Gamma_{M_i}^{\otimes 2}$ gelangt, die wir mit

$\sigma' = \sigma'_i$ bezeichnen wollen. Anhand der Gleichungen kann man dann unmittelbar nachprüfen, daß $\sigma'_i(a) = q^2\sigma_i(a) - qQa$ für alle $a \in \Gamma^{\otimes 2}_{M_i}$ gilt. Daraus folgt, daß mit σ'_i anstelle von σ_i exakt dieselben faktorisierten Tensoralgebren $\Gamma^{\otimes}_{M_i}$ entstehen. Ferner folgen $\sigma \not\equiv \sigma'$ und $\sigma \circ \sigma' \equiv \sigma' \circ \sigma \equiv \mathrm{id}$ sowie damit auch die Gültigkeit der Zopfrelation für σ'. Damit sind alle Aussagen des Theorems 4.10 nachgewiesen. □

4.3.6 Antisymmetrisierungsprozedur

Mit dem in Theorem 4.10 angegebenen Symmetriehomomorphismus σ ist es nun möglich, eine Antisymmetrisierungsprozedur analog derjenigen bei Woronowicz auszuführen.

Auf $\Gamma^{\otimes k}_M$ für $k \geq 2$ und $M = M_2, M_3$ wird der Antisymmetrisator A_k gemäß Gleichung (4.2) definiert. Durch Faktorisierung erhalten wir analog zu (4.3)

$$\Gamma^{\wedge k}_M := \Gamma^{\otimes k}_M / \ker\, A_k$$

und, wenn wir zusätzlich $\Gamma^{\wedge 0}_M := X$ und $\Gamma^{\wedge 1}_M = \Gamma$ setzen, mit

$$\Gamma^{\wedge}_M := \sum_{k=0}^{\infty}{}^{\oplus}\, \Gamma^{\wedge k}_M$$

einen Differentialkalkül höherer Ordnung, der (Γ, d) erweitert. Aus den Eigenschaften von $\Gamma^{\otimes k}_M$ und σ folgt unmittelbar, daß in $\Gamma^{\wedge}_M$ (sowohl für $M = M_2$ als auch für $M = M_3$) alle Relationen des Differentialkalküls $\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{i}}$ aus Kapitel 3 erfüllt sind. Damit ist $\Gamma^{\wedge M}$ entweder $\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{i}}$ oder eine Faktoralgebra hiervon.

Die gleiche Prozedur kann für $\Gamma^{\otimes}_{M_1}$ ausgeführt werden, wobei sich ein Differentialkalkül höherer Ordnung $\Gamma^{\wedge M_1}$ ergibt, der ebenfalls (Γ, d) erweitert. In $\Gamma^{\wedge M_1}$ gelten alle Relationen von $\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{u}}$, darüber hinaus jedoch zusätzliche Relationen wie etwa $\Omega \wedge \Omega \wedge \Omega = 0$, die in $\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{u}}$ nicht gelten. Die Relation $\Omega \wedge \Omega = 0$ von $\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{i}}$ ist in $\Gamma^{\wedge M_1}$ nicht erfüllt. Somit ist $\Gamma^{\wedge M_1}$ eine Faktoralgebra von $\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{u}}$, die kleiner als $\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{u}}$ und größer als $\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{i}}$ ist.

Bemerkung: In [Schü] wird für Quantengruppen mit der „Methode des zweiten Antisymmetrisators“ eine alternative Konstruktion für Differentialkalküle höherer Ordnung beschrieben, die auch hier angewendet werden könnte. Dabei wird die Tensoralgebra $\Gamma^{\otimes}$ lediglich nach dem von $\ker A_2 \equiv \ker(\sigma - \mathrm{id})$ erzeugten Ideal faktorisiert. Dabei ergeben sich in offensichtlicher Weise gerade die Relationen des Differentialkalküls $\Gamma^{\wedge}_{\mathrm{u}}$, jedoch ist dann für die Komponenten dritter und höherer

Ordnung der Tensoralgebra die Beziehung zwischen dem Symmetriehomomorphismus und dem Differentialkalkül höherer Ordnung nicht geklärt.

Unabhängig von diesen Erwägungen ist aber auch bei Benutzung des Differentialkalküls $\Gamma_{\mathrm{u}}^{\wedge}$ die Verträglichkeit mit σ für die Komponente zweiter Ordnung der Tensoralgebra gewährleistet.

4.4 Ein Symmetriehomomorphismus auf $\Gamma^{\otimes 2}$ für $\Gamma = \tilde{\Gamma}''_{q^{2N+2}}$

Wir geben nun noch einen kovarianten Symmetriehomomorphismus für den (nicht-inneren) Differentialkalkül $(\Gamma, \mathrm{d}) = (\tilde{\Gamma}''_{q^{2N+2}}, \mathrm{d})$ aus Kapitel 2 an. In diesem Fall ist eine Faktorisierung des Tensorproduktes nicht erforderlich, und der Symmetriehomomorphismus hat eine ähnlich einfache Struktur wie der Differentialkalkül.

Satz 4.14: *Durch die Gleichungen*

$$\begin{aligned} \sigma(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l) &= q^{-1}\hat{R}^{st}_{kl}\mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t; \\ \sigma(\mathrm{d}z_k^* \otimes \mathrm{d}z_l^*) &= q^{-1}\check{R}^{st}_{kl}\mathrm{d}z_s^* \otimes \mathrm{d}z_t^*; \\ \sigma(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l^*) &= q\grave{R}^{st}_{kl}\mathrm{d}z_s^* \otimes \mathrm{d}z_t + q^{-1}Q\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l^*; \\ \sigma(\mathrm{d}z_k^* \otimes \mathrm{d}z_l) &= q^{-3}\acute{R}^{-}{}^{st}_{kl}\mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t^* \end{aligned} \tag{4.42}$$

wird ein kovarianter Symmetriehomomorphismus auf $\Gamma^{\otimes 2}$ *für* $(\Gamma, \mathrm{d}) = (\tilde{\Gamma}''_{q^{2N+2}}, \mathrm{d})$ *gegeben.*

Beweis: Wohldefiniertheit und Zopfrelation werden direkt nachgerechnet, wobei die Rechnungen aufgrund der einfachen Struktur von Differentialkalkül Γ und Bimodulhomomorphismus σ deutlich einfacher ausfallen als im Falle $(\Gamma, \mathrm{d}) = (\tilde{\Gamma}_1, \mathrm{d})$. □

Kapitel 5: Metriken und Zusammenhänge

In diesem Kapitel wollen wir die in den vorausgegangenen Kapiteln entwickelte kovariante Differentialrechnung auf den Quantensphären anwenden, um einige Grundbegriffe einer nichtkommutativen Geometrie der Quantensphären zu geben. Wir werden invariante Metriken und kovariante Zusammenhänge auf den Quantensphären untersuchen. Den Abschluß dieses Kapitels werden Überlegungen zu Levi-Civita-Zusammenhängen bilden.

5.1 Metriken

5.1.1 Definitionen

Für Quantengruppen wurden in [HS] auf der Grundlage der bikovarianten Differentialrechnung invariante Metriken, Zusammenhänge und Levi-Civita-Zusammenhänge untersucht.

Wir wollen zunächst Definitionen für Metriken, die in [HS] gegeben wurden, auf homogene Quantenräume übertragen. Im Hinblick auf die Verhältnisse auf den Quantensphären geben wir den Definitionen wie schon im Falle der Symmetriehomomorphismen eine verallgemeinerte Form, indem wir anstelle des „freien" Tensorprodukts $\Gamma \otimes \Gamma$ auch hier zulassen, daß ein faktorisiertes Tensorprodukt $\Gamma_M^{\otimes 2}$ zugrunde gelegt wird. Tensorprodukte von Differentialmoduln sind auch in diesem Kapitel grundsätzlich als Tensorprodukte über der entsprechenden Algebra ($\mathcal{A}$ oder X) zu lesen; Ausnahmen sind gekennzeichnet.

Definition 5.1: *Es sei X ein homogener Quantenraum, Γ ein Differentialkalkül erster Ordnung auf X und M ein Unterbimodul von $\Gamma^{\otimes 2}$.*

Eine ***Metrik*** *auf $\Gamma^{\otimes 2}/M$ ist eine bilineare Abbildung*

$$g : \Gamma^{\otimes 2}/M \to X,$$

für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) g ist nichtausgeartet, d. h. falls für ein gegebenes $\xi \in \Gamma$ und jedes $\zeta \in \Gamma$ gilt $g(\xi \otimes \zeta) = 0$, so ist $\xi = 0$, und falls für ein gegebenes $\zeta \in \Gamma$ und jedes $\xi \in \Gamma$ gilt $g(\xi \otimes \zeta) = 0$, so ist $\zeta = 0$.

(ii) g ist rechts-X-linear, d. h. für beliebige $\xi, \zeta \in \Gamma$ und $x \in X$ gilt

$$g(\xi \otimes \zeta x) = g(\xi \otimes \zeta)x.$$

Bemerkung: Statt der Rechts-X-Linearität könnten wir auch Links-X-Linearität

$$g(x\xi \otimes \zeta) = xg(\xi \otimes \zeta)$$

wie in [HS] fordern. Jedoch bietet die Wahl rechts-X-linearer Metriken und, im nächsten Abschnitt, rechter Zusammenhänge eine bessere Grundlage für unsere Untersuchungen zu Levi-Civita-Zusammenhängen.

Die erste wichtige Eigenschaft, die von einer Metrik auf dem homogenen Quantenraum X zu fordern ist, ist die (Rechts-) Invarianz:

Definition 5.2: *Eine Metrik g auf X heißt (rechts-)* ***invariant,*** *wenn*

$$(\varepsilon g \otimes \mathrm{id})(\Phi_{\mathrm{R}}(\xi \otimes \zeta)) = g(\xi \otimes \zeta) \tag{5.1}$$

für alle $\xi, \zeta \in \Gamma$.

Bemerkung: In der Invarianzbedingung tritt eine Koeins ε auf. Da eine solche durch die Definition eines Quantenraums nicht zur Verfügung gestellt wird, erlangt die Voraussetzung, daß X ein *homogener* Quantenraum ist und damit in die zugehörige Quantengruppe eingebettet werden kann, wesentliche Bedeutung: vermöge dieser Einbettung kann eine Koeins als Einschränkung derjenigen der Quantengruppe gewonnen werden.

Sofern ein Symmetriehomomorphismus $\sigma : \Gamma^{\otimes 2}/M \to \Gamma^{\otimes 2}/M$ existiert, so kann die Symmetrie einer Metrik definiert werden.

Definition 5.3: *Eine Metrik g heißt* ***symmetrisch,*** *falls $g \circ \sigma \equiv g$ gilt.*

5.1.2 Bestimmung invarianter Metriken für freie Differentialkalküle

Wir wenden die gegebenen Definitionen nun auf die Quantensphären $X = \mathrm{S}_q^{2N-1}$ mit einem kovarianten Differentialkalkül erster Ordnung (Γ, d) an, für den $\{\mathrm{d}z_i, \mathrm{d}z_i^* \mid i = 1, \ldots, N\}$ eine freie Linksmodulbasis ist. Für (Γ, d) kann also insbesondere jeder der freien kovarianten $*$-Differentialkalküle aus Theorem 2.1 gewählt werden.

Durch Einschränkung der Koeins der Quantengruppe $\mathcal{A} = \mathrm{SU}_q(N)$ vermittels der Einbettung

$$\iota : z_i \mapsto u_i^1, \qquad z_i^* \mapsto S(u_1^i)$$

der Quantensphäre S_q^{2N-1} in die Quantengruppe $\mathcal{A}$ gewinnen wir eine Koeins auf S_q^{2N-1}. Diese ist der durch

$$\varepsilon(1) = 1; \qquad \varepsilon(z_i) = \delta_{1i}; \qquad \varepsilon(z_i^*) = \delta_{1i}$$

gegebene Algebrenhomomorphismus $\varepsilon : X \to \mathbb{C}$.

Satz 5.1: *Für beliebige komplexe Zahlen α, β_1, β_2, γ, δ_1 und δ_2 mit $\beta_2\delta_2 \neq 0$ durch*

$$\begin{aligned} g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j) &= \alpha z_i z_j \\ g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j^*) &= \gamma z_i^* z_j^* \\ g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j^*) &= \beta_1 z_i z_j^* + \beta_2 q^{2i} \delta_{ij} 1 \\ g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j) &= \delta_1 z_i^* z_j + \delta_2 \delta_{ij} 1 \end{aligned} \tag{5.2}$$

eine invariante Metrik $g : \Gamma \otimes \Gamma \to X$ definiert. Jede invariante Metrik auf $\Gamma \otimes \Gamma$ ist von dieser Gestalt.

Beweis:

Zunächst bemerken wir, daß aufgrund der Forderung der X-Linearität eine Metrik g auf $\Gamma \otimes \Gamma$ durch Angabe der Werte $g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j)$, $g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j^*)$, $g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j)$, $g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j^*)$ eindeutig bestimmt ist.

Im folgenden wird die Invarianzbedingung (5.1) für die Erzeugenden des Linksmoduls Γ ausgewertet.

1. Aus

   $$(\varepsilon g \otimes \mathrm{id})\Phi_{\mathrm{R}}(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j) = g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j)$$

   folgt

   $$\varepsilon(g(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l)) \otimes u_i^k u_j^l = g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j),$$

   damit insbesondere

   $$\varepsilon(g(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l)) \otimes u_i^k u_j^l \in X.$$

   Für $i \neq j$ ist $u_i^k u_j^l \in X$ genau dann, wenn $k = l = 1$; damit ist für beliebige k, l notwendig $\varepsilon(g(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l)) = \alpha\delta_{k1}\delta_{l1}$ mit einem von i und j unabhängigen Parameter $\alpha \in \mathbb{C}$.

   Daraus folgt für alle i, j

   $$g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j) = \alpha z_i z_j.$$

2. Aus

$$(\varepsilon g \otimes \mathrm{id})\Delta_{\mathrm{R}}(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j) = g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j)$$

ergibt sich

$$\varepsilon(g(\mathrm{d}z_k^* \otimes \mathrm{d}z_l)) \otimes S(u_k^i)u_j^l = g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j),$$

also

$$\varepsilon(g(\mathrm{d}z_k^* \otimes \mathrm{d}z_l)) \otimes S(u_k^i)u_j^l \in X.$$

Es ist $S(u_k^i)u_j^l \in X$ genau dann, wenn $k = l = 1$, und nach Definition der Antipodenabbildung S außerdem $\sum\limits_k S(u_k^i)u_j^k = \delta_{ij}1 \in X$.

Damit ergibt sich $\varepsilon(g(\mathrm{d}z_k^* \otimes \mathrm{d}z_l)) = \delta_1\delta_{k1}\delta_{l1} + \delta_2\delta_{kl}$ mit festen $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{C}$, also $g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j) = \delta_1\delta_{k1}\delta_{l1} \otimes S(u_k^i)u_j^l + \delta_2\delta_{kl} \otimes S(u_k^i)u_j^l$ und schließlich für alle i, j

$$g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j) = \delta_1 z_i^* z_j + \delta_2\delta_{ij}1.$$

3. Analog zu 1. erhalten wir aus

$$(\varepsilon g \otimes \mathrm{id})\Delta_{\mathrm{R}}(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j^*) = g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j^*)$$

die Bedingung

$$g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j^*) = \gamma z_i^* z_j^*$$

mit $\gamma \in \mathbb{C}$.

4. Aus

$$(\varepsilon g \otimes \mathrm{id})\Delta_{\mathrm{R}}(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j^*) = g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j^*)$$

erhält man analog zu 2., jedoch unter Verwendung der Antipodeneigenschaft $\sum\limits_{k=1}^{N} q^{2k}u_i^k S(u_k^j) = q^{2i}\delta_{ij}$,

$$g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j^*) = \beta_1 z_i z_j^* + \beta_2 q^{2i}\delta_{ij},$$

wobei $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ wiederum von i, j unabhängig sind.

Damit sind die Gleichungen (5.2) nachgewiesen. Da $\{\mathrm{d}z_i, \mathrm{d}z_i^* \mid i = 1, \ldots, N\}$ eine freie Rechtsmodulbasis des gegebenen Differentialkalküls ist, ist die durch diese Gleichungen sowie die rechte X-Linearität bestimmte Metrik g wohldefiniert.

Für die Nichtausgeartetheit ist notwendig und hinreichend, daß die Parameter β_2 und δ_2 von Null verschieden sind.

Für $\beta_2 = 0$ ist nämlich mit $\zeta = \mathrm{d}z_1^* \cdot z_2^* - q^{-1}\mathrm{d}z_2^* \cdot z_1^*$ und $\xi \in \Gamma$ stets $g(\xi \otimes \zeta) = 0$. Analog ist für $\delta_2 = 0$ mit $\zeta = \mathrm{d}z_1 \cdot z_2 - q\mathrm{d}z_2 \cdot z_1$ und $\xi \in \Gamma$ stets $g(\xi \otimes \zeta) = 0$.

Ist $\beta_2\delta_2 \neq 0$, so gilt für jede 1-Form $\zeta = \sum_i \mathrm{d}z_i \cdot x_i + \sum_i \mathrm{d}z_i^* \cdot y_i$ $(x_i, y_i \in X)$ stets

$$\begin{aligned} g(\mathrm{d}z_j \otimes \zeta) &= \alpha \sum_i z_j z_i x_i + \beta_1 \sum_i z_j z_i^* y_i + \beta_2 y_i \\ g(\mathrm{d}z_j^* \otimes \zeta) &= \delta_1 \sum_i z_j^* z_i x_i + \delta_2 x_i + \gamma \sum_i z_j^* z_i^* y_i. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke können nur dann alle zugleich verschwinden, wenn alle x_i und alle y_i gleich 0 sind. Analog zeigt man, daß unter der Voraussetzung $\beta_2\delta_2 \neq 0$ keine von 0 verschiedene 1-Form ξ existiert, für die $g(\xi \otimes \zeta) = 0$ für alle $\zeta \in \Gamma$ gilt. □

Bemerkung: Bis hierher wurde ausschließlich die Invarianz ausgewertet. Deshalb hängen die Gleichungen (5.2) weder von der Wahl des Differentialkalküls ab, noch sind sie auf rechts-X-lineare Metriken beschränkt. Auf den 1-Formen $\mathrm{d}z_i^{(*)}$, welche für die freien Differentialkalküle erster Ordnung eine Linksmodulbasis und für fast-freie ein Erzeugendensystem des Differentialmoduls bilden, unterscheiden sich links- und rechts-X-lineare Metriken nicht (wohl aber auf daraus durch Multiplikation mit Elementen aus X gebildeten 1-Formen). Auch hängt, falls ξ kein Basiselement ist, die Darstellung von $\xi \otimes \zeta$ in Rechtsmodulform und damit auch der Wert von $g(\xi \otimes \zeta)$ selbstverständlich von der Bimodulstruktur des Differentialkalküls Γ ab.

5.1.3 Übergang zum Kalkül $\Gamma = \tilde{\Gamma}_1$

Wir betrachten jetzt anstelle eines freien Differentialkalküls Γ den Kalkül $\Gamma = \tilde{\Gamma}_1$, in dem die zusätzliche Relation $\Omega_+ + \Omega_- = 0$ gilt.

Da für die faktorisierten Tensoralgebren $\Gamma^{\otimes}_{M_i}$, $i = 1, 2, 3$, aus Kapitel 4 Symmetriehomomorphismen $\sigma = \sigma_i$ existieren, können wir die gefundenen Metriken auch auf Symmetrie hin untersuchen.

Satz 5.2: *Es sei* $(\Gamma, \mathrm{d}) = (\tilde{\Gamma}_1, \mathrm{d})$. *Durch die Gleichungen*

$$\begin{aligned} g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j) &= \alpha z_i z_j \\ g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j^*) &= \gamma z_i^* z_j^* \\ g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j^*) &= -q^{2N}\frac{\alpha + q^{-2N-2}\nu}{q^{2N-2}-1} z_i z_j^* + \frac{\alpha + q^{-4}\nu}{q^{2N-2}-1} q^{2i}\delta_{ij}\mathbf{1} \\ g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j) &= q^{-2}\frac{\gamma + q^{2N+2}\nu}{q^{2N-2}-1} z_i^* z_j - q^{2N-4}\frac{\gamma + q^4\nu}{q^{2N-2}-1}\delta_{ij}\mathbf{1} \end{aligned} \tag{5.3}$$

wird für jedes Tripel (α, γ, ν) *komplexer Zahlen mit* $(\alpha + q^{-4}\nu)(\gamma + q^4\nu) \neq 0$ *eine invariante Metrik* $g = g_{\alpha\gamma\nu}$ *auf* $\Gamma_{M_1}^{\otimes 2} = \Gamma \otimes \Gamma$ *definiert. Jede invariante Metrik auf* $\Gamma \otimes \Gamma$ *ist von der Form* $g_{\alpha\gamma\nu}$ *für gewisse* α, γ, ν.

Für jedes Paar (α, ν) *komplexer Zahlen, für das* $\alpha + q^{-4}\nu \neq 0$ *gilt, wird durch die Gleichungen (5.3) mit* $\gamma := -q^6\alpha - q^3 Q_+ \nu$ *eine invariante Metrik* $g = g_{\alpha\nu}$ *auf* $\Gamma_{M_2}^{\otimes 2}$ *definiert. Jede invariante Metrik auf* $\Gamma_{M_2}^{\otimes 2}$ *ist von der Gestalt* $g_{\alpha\nu}$ *für gewisse* α, ν.

Auf $\Gamma_{M_3}^{\otimes 2}$ *existiert keine invariante Metrik.*

Die Metriken $g_{\alpha\gamma\nu}$ *auf* $\Gamma_{M_1}^{\otimes 2}$ *und* $g_{\alpha\nu}$ *auf* $\Gamma_{M_2}^{\otimes 2}$ *sind nicht symmetrisch.*

Bemerkung: Für $\alpha = -q^{-4}\nu$ und $\gamma = -q^4\nu$ gehen die Gleichungen (5.3) in

$$\begin{aligned} g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j) &= -q^{-4}\nu z_i z_j; \qquad & g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j^*) &= -q^4\nu z_i^* z_j^*; \\ g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j^*) &= q^{-2}\nu z_i z_j^*; & g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j) &= q^2\nu z_i^* z_j \end{aligned} \tag{5.4}$$

über und beschreiben dann eine ausgeartete bilineare, rechts-X-lineare Abbildung $g = g_\nu : \Gamma_M^{\otimes 2} \to X$ für $M = M_1, M_2, M_3$. Diese Abbildung ist symmetrisch, d. h. es gilt $g_\nu \circ \sigma \equiv g_\nu$.

Folgerung 5.3: *Für die Metriken* $g = g_{\alpha\gamma\nu}$ *auf* $\Gamma_{M_1}^{\otimes 2}$ *und* $g = g_{\alpha\nu}$ *auf* $\Gamma_{M_2}^{\otimes 2}$ *aus Satz 5.2 gelten die Gleichungen*

$$\begin{aligned} g(\mathrm{d}z_i \otimes \Omega) &= qQ^{-1}\alpha z_i; \qquad & g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega) &= -q^{-1}Q^{-1}\gamma z_i^*; \\ g(\Omega \otimes \mathrm{d}z_i) &= -q^{-1}Q^{-1}\nu z_i; & g(\Omega \otimes \mathrm{d}z_i^*) &= qQ^{-1}\nu z_i^*; \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$g(\Omega \otimes \Omega) = -Q^{-2}\nu. \tag{5.6}$$

Beweis des Satzes und der Folgerung: Wie im vorigen Abschnitt ist wegen der geforderten X-Linearität jede Metrik auf $\Gamma \otimes \Gamma$ durch die Angabe der Werte $g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j)$, $g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j^*)$, $g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j)$, $g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j^*)$ eindeutig bestimmt. Die

Auswertung der Invarianzbedingung führt auch hier auf die Gleichungen (5.2), jedoch ergeben sich aus der Auswertung der Relation $\Omega_+ + \Omega_- = 0$ unter Beachtung der geforderten Rechts-X-Linearität der Metrik zusätzliche Bedingungen an die Koeffizienten $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma, \delta_1, \delta_2$.

Wir erhalten aus

$$g(\mathrm{d}z_i \otimes (\Omega_+ + \Omega_-)) = 0; \qquad g(\mathrm{d}z_i^* \otimes (\Omega_+ + \Omega_-)) = 0 \tag{5.7}$$

die Gleichungen (vgl. Anhang B.26)

$$\alpha + q^{-2}\beta_1 + \beta_2 = 0 \tag{5.8}$$
$$q^{-2}\gamma + \delta_1 + \delta_2 = 0 \tag{5.9}$$

sowie

$$g(\mathrm{d}z_i \otimes \Omega) = qQ^{-1}\alpha z_i \tag{5.10}$$
$$g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega) = -q^{-1}Q^{-1}\gamma z_i^*. \tag{5.11}$$

Ferner ergeben sich aus

$$g((\Omega_+ + \Omega_-) \otimes \mathrm{d}z_i) = 0; \qquad g((\Omega_+ + \Omega_-) \otimes \mathrm{d}z_i^*) = 0 \tag{5.12}$$

die Gleichungen (vgl. Anhang B.27)

$$\begin{gathered}
\alpha - q^{-1}Q\beta_1 - qQ\mathfrak{s}_+\beta_2 + q^{-4}\delta_1 + q^{-2N-2}\delta_2 = 0 \\
q^{-2}\gamma + q^{-1}Q\delta_1 + qQ\mathfrak{s}_-\delta_2 + q^2\beta_2 + q^{2N+1}\beta_2 = 0,
\end{gathered}$$

die nach Subtraktion von (5.8) bzw. (5.9) übereinstimmend in

$$\beta_1 + q^{2N}\beta_2 - q^{-4}\delta_1 + q^{-2N-2}\delta_2 \tag{5.13}$$

übergehen.

Wir haben also drei lineare Gleichungen zwischen den Koeffizienten der invarianten Metrik im Falle $\Gamma = \tilde{\Gamma}_1$:

$$\begin{aligned}
-\alpha &= \quad q^{-2}\beta_1 + \beta_2 \\
-q^{-2}\gamma &= \qquad\qquad\qquad \delta_1 \quad + \delta_2 \\
0 &= -\beta_1 \quad - q^{2N}\beta_2 + q^{-4}\delta_1 + q^{-2N-2}\delta_2.
\end{aligned}$$

Weitere Restriktionen für die Koeffizienten treten nicht auf. Durch die Substitution $\nu := q^4(q^{2N-2}-1)\beta_2 - q^4\alpha$ erhalten wir

$$\beta_1 = -q^{2N}\frac{\alpha + q^{-2N-2}\nu}{q^{2N-2}-1} \qquad \beta_2 = \frac{\alpha + q^{-4}\nu}{q^{2N-2}-1}$$
$$\delta_1 = q^{-2}\frac{\gamma + q^{2N+2}\nu}{q^{2N-2}-1} \qquad \delta_2 = -q^{2N-4}\frac{\gamma + q^{4}\nu}{q^{2N-2}-1}$$

und damit die im Satz angegebene 3-Parameter-Familie rechts-X-linearer invarianter Metriken auf $\Gamma \otimes \Gamma$.

Durch die Erfüllung der Gleichungen (5.7) und (5.12) ist gewährleistet, daß die durch (5.3) und die rechte X-Linearität gegebene bilineare Abbildung wohldefiniert ist.

Als notwendige und hinreichende Bedingung für die Nichtausgeartetheit erhalten wir mit exakt denselben Argumenten wie im vorigen Abschnitt $\beta_2\delta_2 \neq 0$, also $(\alpha + q^{-4}\nu)(\gamma + q^4\nu) \neq 0$.

Es bleibt zu untersuchen, unter welchen Voraussetzungen die Symmetriebedingung $g \circ \sigma \equiv g$ erfüllt ist. Man prüft leicht nach, daß stets gilt

$$g(\sigma(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j)) = g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j); \qquad g(\sigma(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j^*)) = g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j^*).$$

Die Forderungen

$$g(\sigma(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j^*)) = g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j^*); \qquad g(\sigma(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j)) = g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j) \tag{5.14}$$

führen jedoch zu zusätzlichen Einschränkungen der Parameter. Wir berechnen zur Auswertung der ersten der Gleichungen (5.14) den Ausdruck $g(\sigma(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j^*))$ (vgl. Anhang B.28) und erhalten durch Vergleich mit $g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j^*)$ (aus (5.3)) die Bedingungen

$$\begin{aligned} q^3\alpha + q^{-3}\gamma + Q_+\nu &= 0 \\ (q^{2N} - 2q^2 + 1)\alpha + (q^{-6} - q^{-4})\gamma + (q^{2N-4} - 1 - q^{-2} + q^{-4})\nu &= 0 \end{aligned}$$

und damit

$$\alpha = -q^{-4}\nu; \qquad \gamma = -q^4\nu,$$

womit Symmetrie für keine der Metriken möglich ist, sondern nur für die ausgearteten Abbildungen g_ν aus der Bemerkung. Für diese prüft man leicht nach, daß die Gleichungen (5.14) gelten; aufgrund der Rechts-X-Linearität folgt die Symmetrie von g_ν.

Die Gleichungen der Folgerung ergeben sich nunmehr unmittelbar aus (5.3), der Rechts-X-Linearität und der Definition von $\Omega_\pm$.

Für Metriken auf $\Gamma_{M_2}^{\otimes 2}$ und $\Gamma_{M_3}^{\otimes 2}$ bleiben alle für den Fall $\Gamma_{M_1}^{\otimes 2}$ gewonnenen notwendigen Bedingungen an g gültig, so daß jede solche Metrik ebenfalls durch die Gleichungen (5.3) beschrieben werden muß. Die Faktorisierung von $\Gamma \otimes \Gamma$ nach den Unterbimoduln $M_2^{(2)}$ und $M_3^{(2)}$ aus Kapitel 4 führt zu den zusätzlichen Gleichungen

$$\begin{aligned} g((q^2 \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-)) &= 0 \quad \text{(für beide Fälle)} \\ g((\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + Q^2 \Omega \otimes \Omega)) &= 0 \quad (\text{nur für } \Gamma_{M_3}^{\otimes 2}), \end{aligned}$$

aus denen sich (vgl. Anhang B.29) für die Koeffizienten der Metrik die zusätzlichen Bedingungen

$$\begin{aligned} q^3\alpha + q^{-3}\gamma + Q_+\nu &= 0 \quad \text{(in beiden Fällen)} \\ \alpha + q^{-4}\nu &= 0 \quad (\text{nur für } \Gamma_{M_3}^{\otimes 2}) \end{aligned}$$

ergeben. Die Bedingungen für Nichtausgeartetheit und Symmetrie bleiben dieselben wie in den vorigen Fällen.

Beachtet man, daß der für $\Gamma_{M_3}^{\otimes 2}$ einzig verbleibende Fall $\nu = -q^4\alpha = -q^{-4}\gamma$, der auf die einparametrige Schar bilinearer Abbildungen $g = g_\nu$ mit den Gleichungen (5.4) führt, die Bedingung der Nichtausgeartetheit verletzt, so sind damit alle Behauptungen des Satzes gezeigt. □

Bezüglich einer Unteralgebra von $X = \mathrm{S}_q^{2N-1}$ besitzen die ausgearteten bilinearen Abbildungen g_ν auf $\Gamma_{M_3}^{\otimes 2}$ – nicht aber die Metriken $g_{\alpha\gamma\nu}$ auf $\Gamma_{M_1}^{\otimes 2}$ und $g_{\alpha\nu}$ auf $\Gamma_{M_2}^{\otimes 2}$ – die zusätzliche Eigenschaft der Links-X-Linearität.

Satz 5.4: *Die durch die Gleichungen (5.4) gegebene bilineare Abbildung $g_\nu : \Gamma_{M_3}^{\otimes 2} \to X$ erfüllt die Gleichung*

$$g_\nu(x_0\xi \otimes \zeta) = x_0 g_\nu(\xi \otimes \zeta) \tag{5.15}$$

für beliebige 1-Formen $\xi, \zeta \in \Gamma$ und für $x_0 \in X_1$, wobei $X_1 \subset X$ die von den Elementen $z_k z_l^*$, $1 \le k, l \le N$, erzeugte unitale Algebra ist.

Beweis: Es genügt, die Behauptung für $x_0 = z_k z_l^*$ nachzuweisen. Wir zeigen dazu

$$g_\nu(z_k\xi \otimes \zeta) = q^{-4} z_k g_\nu(\xi \otimes \zeta); \qquad g_\nu(z_k^*\xi \otimes \zeta) = q^4 z_k^* g_\nu(\xi \otimes \zeta).$$

Dies geschieht durch direkte Rechnung für $\xi, \zeta \in \{\mathrm{d}z_i, \mathrm{d}z_i^* \mid i = 1, \ldots, N\}$.
□

5.1.4 Invariante Metriken für $\Gamma = \tilde{\Gamma}''_{q^{2N+2}}$

Satz 5.5: *Es sei $\Gamma = \tilde{\Gamma}''_{q^{2N+2}}$. Dann existiert zu jedem Tripel (α, β, δ) komplexer Zahlen mit $\beta\delta \neq 0$ eine invariante Metrik $g = g_{\alpha\beta\delta}$ auf $\Gamma \otimes \Gamma$, die gegeben wird durch die Gleichungen*

$$\begin{aligned} g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j) &= \alpha z_i z_j \\ g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j^*) &= q^{-4N-4}\alpha z_i^* z_j^* \\ g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j^*) &= -(q^{-2N}\alpha + q^2\beta) z_i z_j^* + \beta\delta_{ij} q^{2i} \cdot 1 \\ g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j) &= -(q^{-2N-4}\alpha + \delta) z_i^* z_j + \delta\delta_{ij} \cdot 1. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Unter den Metriken $g_{\alpha\beta\delta}$ sind genau diejenigen symmetrisch bezüglich des Symmetriehomomorphismus σ aus Satz 4.14, zwischen deren Parametern die Beziehung $\beta = q^2\delta$ besteht.

Jede Metrik auf $\Gamma \otimes \Gamma$ ist von der Gestalt $g_{\alpha\beta\delta}$ für gewisse α, β, δ.

Beweis: Die Gleichungen (5.2) stellen auch hier notwendige Bedingungen an jede Metrik auf $\Gamma \otimes \Gamma$ dar. Aus der im Differentialkalkül $(\tilde{\Gamma}''_{q^{2N+2}}, \mathrm{d})$ bestehenden Relation

$$\Omega_+ + q^{2N+2}\Omega_- = 0$$

ergeben sich die zusätzlichen Forderungen

$$\begin{aligned} &g((\Omega_+ + q^{2N+2}\Omega_-) \otimes \mathrm{d}z_i) = 0; && g((\Omega_+ + q^{2N+2}\Omega_-) \otimes \mathrm{d}z_i^*) = 0; \\ &g(\mathrm{d}z_i \otimes (\Omega_+ + q^{2N+2}\Omega_-)) = 0; && g(\mathrm{d}z_i^* \otimes (\Omega_+ + q^{2N+2}\Omega_-)) = 0 \end{aligned}$$

für $i = 1, \ldots, N$, deren Auswertung auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + q^{2N+2}(q^{-2}\beta_1 + \beta_2) \\ 0 &= q^{2N}\gamma + (\delta_1 + \delta_2) \\ 0 &= q^{-2}\alpha + q^{2N+2}(\delta_1 + \delta_2) \\ 0 &= (q^{-2}\beta_1 + \beta_2) + q^{2N+2}\gamma \end{aligned}$$

führt. Die vierte dieser Gleichungen ist redundant; aus den übrigen ergeben sich mit den Substitutionen $\beta := \beta_2$, $\delta := \delta_2$ die Bedingungen $\gamma = q^{-4N-4}\alpha$;

$\beta_1 = -q^{-2N}\alpha - q^2\beta$ und $\delta_1 = -q^{-2N-4}\alpha - \delta$ und damit die im Satz angegebene Familie von Metriken. Für die Nichtausgeartetheit ist wieder notwendig und hinreichend, daß $\beta_2\delta_2 \neq 0$, also $\beta\delta \neq 0$.

Wir untersuchen nun die Symmetriebedingung $g \equiv g \circ \sigma$. Wie im Falle der Metriken auf $\tilde{\Gamma}_1$ ist anhand der Gleichungen (5.16) und (4.42) sofort ersichtlich, daß ohne Einschränkungen an die Parameter der Metrik

$$g(\sigma(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j)) = g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j); \qquad g(\sigma(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j^*)) = g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j^*)$$

gilt. Die Forderungen

$$g(\sigma(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j^*)) = g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j^*); \qquad g(\sigma(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j)) = g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j) \tag{5.17}$$

sind jetzt (vgl. Anhang B.30) äquivalent zu $\beta = q^2\delta$. Wegen der Rechts-X-Linearität sind diese Bedingungen hinreichend für die Symmetrie der Metrik. □

5.2 Zusammenhänge

5.2.1 Definitionen

Wie beginnen auch hier mit der Übertragung von Definitionen, wie sie in [HS] für Quantengruppen mit bikovarianten Differentialkalkülen gegeben wurden, auf den Fall von Quantenräumen mit (rechts-) kovarianten Differentialkalkülen. Im Gegensatz zu [HS], wo linke Zusammenhänge im Mittelpunkt der Untersuchung stehen, betrachten wir hier rechte Zusammenhänge.

Definition 5.4: *Es sei X ein Quantenraum zur Quantengruppe $\mathcal{A}$ mit der Kowirkung Δ_R und (Γ, d) ein kovarianter Differentialkalkül erster Ordnung. Es sei $\Gamma_M^\otimes$ eine faktorisierte Tensoralgebra über Γ.*

Ein ***(rechter) Zusammenhang auf*** Γ *ist eine lineare Abbildung $\nabla : \Gamma \to \Gamma_M^{\otimes 2}$ mit*

$$\nabla(\zeta x) = -\zeta \otimes \mathrm{d}x + \nabla(\zeta)x \tag{5.18}$$

für alle $\zeta \in \Gamma$, $x \in X$.

Ein Zusammenhang ∇ auf Γ heißt ***kovariant,*** *wenn für ihn gilt*

$$\Delta_\mathrm{R}\nabla = (\nabla \otimes \mathrm{id})\Delta_\mathrm{R}. \tag{5.19}$$

Von Bedeutung ist ferner die Torsion eines Zusammenhangs. Deren Definition setzt einen Differentialkalkül höherer Ordnung $(\Gamma^\wedge, \mathrm{d})$ über (Γ, d) sowie eine Multiplikationsabbildung $\mathrm{m} : \Gamma_M^{\otimes 2} \to \Gamma^{\wedge 2}$ voraus. Diese wird aus der natürlichen Multiplikationsabbildung $\mathrm{m} : \Gamma \otimes \Gamma \to \Gamma^{\wedge 2}$ durch repräsentantenweise Anwendung gewonnen und ist offenbar genau dann wohldefiniert, wenn $\mathrm{m}(M^{(2)}) = \{0\}$ gilt. Dies sei im folgenden vorausgesetzt.

Definition 5.5: *Es seien X, (Γ, d) und $\Gamma_M^{\otimes}$ wie zuvor und $\nabla : \Gamma \to \Gamma_M^{\otimes 2}$ ein Zusammenhang auf Γ. Ferner sei $(\Gamma^\wedge, \mathrm{d})$ ein Differentialkalkül höherer Ordnung, der (Γ, d) fortsetzt, und $\mathrm{m} : \Gamma_M^{\otimes 2} \to \Gamma^{\wedge 2}$ die Multiplikationsabbildung.*

*Die **Torsion des Zusammenhangs** ∇ ist die durch*

$$\mathrm{T}(\nabla) = (\mathrm{d} - \mathrm{m}\nabla) \tag{5.20}$$

definierte Abbildung $\mathrm{T}(\nabla) : \Gamma \to \Gamma^{\wedge 2}$.

Die Torsion ist eine rechts-X-lineare Abbildung, denn es gilt aufgrund der graduierten Leibnizregel, (5.18) und (5.20) für $\zeta \in \Gamma$ und $x \in X$

$$\mathrm{T}(\nabla)(\zeta x) = \mathrm{d}\zeta \cdot x - \zeta \wedge \mathrm{d}x + \zeta \wedge \mathrm{d}x - \mathrm{m}\nabla(\zeta) \cdot x = \mathrm{T}(\nabla)(\zeta) \cdot x.$$

Zusammenhänge, deren Torsion identisch gleich 0 ist, sind von besonderer Bedeutung.

5.2.2 Zusammenhänge auf der Quantensphäre

Wir betrachten nun wieder die Quantensphären $X = \mathrm{S}_q^{2N-1}$ mit dem Differentialkalkül erster Ordnung $(\Gamma, \mathrm{d}) = (\tilde{\Gamma}_1, \mathrm{d})$. Es sei zunächst $\Gamma_M^{\otimes 2} = \Gamma \otimes \Gamma$, also etwa $\Gamma_M^{\otimes} = \Gamma_{M_1}^{\otimes}$ (mit den Bezeichnungen aus Kapitel 4), und $\Gamma^{\wedge 2}$ der zugehörige Differentialkalkül höherer Ordnung (der in diesem Falle auf der Komponente der Ordnung 2 mit $\Gamma_{\mathrm{u}}^\wedge$ übereinstimmt). In diesem Fall finden wir eine Familie kovarianter Zusammenhänge mit 7 komplexen Parametern und darin eine Unterfamilie mit zwei Parametern von Zusammenhängen verschwindender Torsion.

Satz 5.6: *Für beliebige komplexe Zahlen D_0, D_+, D_-, B_1, C_1, B_2 und C_2 wird durch die Gleichungen*

$$\begin{aligned}
\nabla(\mathrm{d}z_k) &= A_1 z_k \Omega \otimes \Omega + E_1 z_k \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + F_1 z_k \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&\quad + B_1 \mathrm{d}z_k \otimes \Omega + C_1 \Omega \otimes \mathrm{d}z_k \\
\nabla(\mathrm{d}z_k^*) &= A_2 z_k^* \Omega \otimes \Omega + E_2 z_k^* \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + F_2 z_k^* \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&\quad + B_2 \mathrm{d}z_k^* \otimes \Omega + C_2 \Omega \otimes \mathrm{d}z_k^*
\end{aligned} \tag{5.21}$$

mit

$$\begin{aligned}
A_1 &:= -q^3Q^3 - q^3QB_1 - q^3Q(1+Q^2)C_1\\
&\qquad + q^3Q(1+Q^2)D_0 + q^3Q^3D_+ - q^5Q^3D_-\\
E_1 &:= -q^4(qQ-1) - q^4B_1 - q^5QC_1 + q^5QD_0 + q^4(qQ-1)D_+ - q^6Q^2D_-\\
F_1 &:= q^2D_-\\
A_2 &:= q^{-3}Q^3 + q^{-3}QB_2 + q^{-3}Q(1+Q^2)C_2\\
&\qquad - q^{-3}Q(1+Q^2)D_0 + q^{-5}Q^3D_+ - q^{-3}Q^3D_-\\
E_2 &:= D_+\\
F_2 &:= q^{-2}(q^{-1}Q+1) - q^{-2}B_2 + q^{-3}QC_2\\
&\qquad - q^{-3}QD_0 - q^{-4}Q^2D_+ - q^{-2}(q^{-1}Q+1)D_-
\end{aligned} \tag{5.22}$$

ein kovarianter Zusammenhang $\nabla \equiv \nabla_{D_0D_+D_-B_1C_1B_2C_2} : \Gamma \to \Gamma^{\otimes 2}$ *beschrieben. Für diesen gilt ferner die Gleichung*

$$\nabla(\Omega) = D_0\Omega \otimes \Omega - qQ^{-1}D_+\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + qQ^{-1}D_-\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-. \tag{5.23}$$

Die Torsion dieses Zusammenhangs verschwindet genau dann, wenn die Bedingungen

$$B_1 = C_1 = B_2 = C_2 = 0 \tag{5.24}$$

$$D_0 + D_+ + D_- - 1 = 0 \tag{5.25}$$

erfüllt sind.

Jeder kovariante Zusammenhang $\nabla : \Gamma \to \Gamma^{\otimes 2}$ *ist von der Gestalt* $\nabla_{D_0D_+D_-B_1C_1B_2C_2}$ *für geeignete* D_0, D_+, D_-, B_1, C_1, B_2, C_2.

Beweis: Wir bemerken zunächst, daß wegen (5.18) durch Angabe von $\nabla(\mathrm{d}z_k)$ und $\nabla(\mathrm{d}z_k^*)$ ein Zusammenhang ∇ vollständig festgelegt ist.

Die Forderung der Kovarianz erzwingt, daß $\nabla(\mathrm{d}z_k)$ eine Linearkombination von $\mathrm{d}z_k \otimes \Omega$, $\Omega \otimes \mathrm{d}z_k$, $z_k\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+$, $z_k\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-$ und $z_k\Omega \otimes \Omega$ ist; eine analoge Feststellung gilt für $\nabla(\mathrm{d}z_k^*)$. Als allgemeinen Ansatz erhalten wir also die Gleichungen (5.21) mit den unbestimmten Koeffizienten A_1, E_1, F_1, B_1, C_1, A_2, E_2, F_2, B_2, C_2. Aus der Relation $\Omega_+ + \Omega_- = 0$ des Differentialkalküls Γ folgt die Bedingung

$$\nabla(\Omega_+) + \nabla(\Omega_-) = 0, \tag{5.26}$$

deren Auswertung mittels der Gleichungen des Ansatzes und (5.18) (vgl. Anhang B.31)

$$
\begin{aligned}
\nabla(\Omega_+) = {}& \big(1 + A_1 - B_1 - q^{-2}(1+Q^2)E_1 - Q^2F_1\big)\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - q^{-2}F_1\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
& + \big((q^{-1}Q - q^{-2})A_1 - q^{-1}QB_1 - q^{-1}QC_1 \\
& \qquad - q^{-3}Q^3E_1 - q^{-1}Q^3F_1\big)\Omega\otimes\Omega \\
\nabla(\Omega_-) = {}& -E_2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + \big(1 + A_2 - B_2 - q^{-2}Q^2E_2 - (1+Q^2)F_2\big)\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
& - \big((q^{-1}Q + 1)A_2 - q^{-1}QB_2 - q^{-1}QC_2 \\
& \qquad - q^{-3}Q^3E_2 - q^{-1}Q^3F_2\big)\Omega\otimes\Omega
\end{aligned}
\tag{5.27}
$$

und damit durch Koeffizientenvergleich

$$
\begin{aligned}
\big(1 + A_1 - B_1 - q^{-2}(1+Q^2)E_1 - Q^2F_1\big) - E_2 &= 0 \\
-q^{-2}F_1 + \big(1 + A_2 - B_2 - q^{-2}Q^2E_2 - (1+Q^2)F_2\big) &= 0 \\
\big((q^{-1}Q - q^{-2})A_1 - q^{-1}QB_1 - q^{-1}QC_1 - q^{-3}Q^3E_1 - q^{-1}Q^3F_1\big) & \\
-\big((q^{-1}Q + 1)A_2 - q^{-1}QB_2 - q^{-1}QC_2 - q^{-3}Q^3E_2 - q^{-1}Q^3F_2\big) &= 0
\end{aligned}
$$

ergibt. Wir setzen nun

$$
\begin{aligned}
D_0 &:= -q^{-1}Q^{-1}(qQ-1)A_1 + B_1 + C_1 + q^{-2}Q^2E_1 + Q^2F_1 \\
D_+ &:= E_2 \\
D_- &:= q^{-2}F_1
\end{aligned}
$$

und erhalten damit offensichtlich (5.23) sowie die Gleichungen (5.22). Da alle Relationen zwischen 1-Formen im Rechtsmodul Γ von der Relation $\Omega_+ + \Omega_- = 0$ erzeugt werden und ∇ als rechts-X-linear vorausgesetzt wird, sind damit alle Bedingungen an einen kovarianten Zusammenhang $\nabla : \Gamma \to \Gamma^{\otimes 2}$ erschöpft, so daß durch (5.21) und (5.22) tatsächlich bereits ein wohldefinierter Zusammenhang gegeben ist.

Die Torsion des Zusammenhangs ∇ kann nur dann verschwinden, wenn $\mathrm{T}(\nabla)(\mathrm{d}z_k)$, $\mathrm{T}(\nabla)(\mathrm{d}z_k^*)$ und $\mathrm{T}(\nabla)(\Omega)$ gleich Null sind. Aus $\mathrm{T}(\nabla)(\Omega) = 0$ erhalten wir mit (5.23) und unter Berücksichtigung von $\mathrm{d}\Omega = \Omega\wedge\Omega$ die Forderung

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathrm{d}\Omega + D_0\mathrm{m}(\Omega\otimes\Omega) - qQ^{-1}D_+\mathrm{m}(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+) + qQ^{-1}D_-\mathrm{m}(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-) \\
&= (-1 + D_0 + D_+ + D_-)\mathrm{d}\Omega
\end{aligned}
$$

und somit die Bedingung (5.25).

Ferner gelten mit (5.21) wegen $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} \equiv 0$ die Beziehungen

$$\begin{aligned} \mathrm{T}(\nabla)(\mathrm{d}z_k) &= (A_1 - q^{-1}QE_1 + q^{-1}QF_1)z_k\mathrm{d}\Omega - B_1\mathrm{d}z_k \wedge \Omega - C_1\Omega \wedge \mathrm{d}z_k \\ \mathrm{T}(\nabla)(\mathrm{d}z_k^*) &= (A_2 - q^{-1}QE_2 + q^{-1}QF_2)z_k^*\mathrm{d}\Omega - B_2\mathrm{d}z_k^* \wedge \Omega - C_2\Omega \wedge \mathrm{d}z_k^*, \end{aligned}$$

woraus wegen der linearen Unabhängigkeit von $z_k\mathrm{d}\Omega$, $\mathrm{d}z_k \wedge \Omega$ und $\Omega \wedge \mathrm{d}z_k$ in $\Gamma \otimes \Gamma$ sofort (5.24) abgelesen werden kann. Durch Einsetzen von (5.22) folgt sofort, daß die Ausdrücke $(A_1 - q^{-1}QE_1 + q^{-1}QF_1)$ und $(A_2 - q^{-1}QE_2 + q^{-1}QF_2)$ unter den Bedingungen (5.24), (5.25) ebenfalls verschwinden.

Aufgrund der Rechts-X-Linearität von $\mathrm{T}(\nabla)$ ist aber $\mathrm{T}(\nabla)(\mathrm{d}z_k) = \mathrm{T}(\nabla)(\mathrm{d}z_k^*) = 0$ bereits hinreichend für das Verschwinden der Torsion. □

Wir wenden uns nun den faktorisierten Tensoralgebren $\Gamma^{\otimes}_{M_2}$ und $\Gamma^{\otimes}_{M_3}$ zu. Naturgemäß haben die Familien kovarianter rechter Zusammenhänge in diesen Fällen eine geringere Zahl von Parametern als diejenige auf $\Gamma^{\otimes 2}_{M_1}$ aus dem vorangegangenen Satz.

Die Komponenten des Grades 2 der zugehörigen Differentialkalküle höherer Ordnung entsprechen jedoch nunmehr $\Gamma_{\mathrm{i}}^{\wedge 2}$ mit der Relation $\mathrm{d}\Omega = 0$. Dies hat zur Konsequenz, daß wir nunmehr weniger strenge Bedingungen für das Verschwinden der Torsion finden, so daß sich die Zahl der Parameter für Zusammenhänge mit verschwindender Torsion auf $\Gamma^{\otimes 2}_{M_2}$ gegenüber $\Gamma^{\otimes 2}_{M_1}$ sogar erhöht.

Die kovarianten Zusammenhänge auf $\Gamma^{\otimes 2}_{M_2}$ bilden, wie der folgende Satz zeigt, eine Familie mit 6 komplexen Parametern; für eine Unterfamilie mit vier Parametern ist die Torsion identisch Null.

Satz 5.7: *Für beliebige komplexe Zahlen D_0, D_-, B_1, C_1, B_2 und C_2 wird durch die Gleichungen*

$$\begin{aligned} \nabla(\mathrm{d}z_k) &= A_1z_k\Omega \otimes \Omega + F_1z_k\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + B_1\mathrm{d}z_k \otimes \Omega + C_1\Omega \otimes \mathrm{d}z_k \\ \nabla(\mathrm{d}z_k^*) &= A_2z_k^*\Omega \otimes \Omega + F_2z_k^*\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + B_2\mathrm{d}z_k^* \otimes \Omega + C_2\Omega \otimes \mathrm{d}z_k^* \end{aligned} \tag{5.28}$$

mit

$$\begin{aligned} A_1 &:= -q^3Q^3 - q^3QB_1 - q^3Q(1+Q^2)C_1 + q^3Q(1+Q^2)D_0 - q^5Q^3D_- \\ F_1 &:= -q^2(qQ-1) - q^2B_1 - q^3C_1 + q^3QD_0 - q^4(qQ-1)D_- \\ A_2 &:= q^3Q^3 + q^3QB_2 + q^3Q(1+Q^2)C_2 - q^3Q(1+Q^2)D_0 - q^3Q^3D_- \\ F_2 &:= q^{-2}(q^{-1}Q+1) - q^{-2}B_2 + q^{-3}QC_2 - q^{-3}QD_0 - q^{-2}(q^{-1}Q+1)D_- \end{aligned} \tag{5.29}$$

ein kovarianter Zusammenhang $\nabla \equiv \nabla_{D_0 D_- B_1 C_1 B_2 C_2} : \Gamma \to \Gamma^{\otimes 2}_{M_2}$ *beschrieben. Für diesen gilt ferner die Gleichung*

$$\nabla(\Omega) = qQ^{-1} D_0 \Omega \otimes \Omega + D_- \mathrm{d}^{\otimes} \Omega_- . \tag{5.30}$$

Die Torsion dieses Zusammenhangs verschwindet genau dann, wenn die Bedingungen

$$B_1 = C_1; \qquad B_2 = C_2 \tag{5.31}$$

erfüllt sind.

Jeder kovariante Zusammenhang $\nabla : \Gamma \to \Gamma^{\otimes 2}_{M_2}$ *ist von der Gestalt* $\nabla_{D_0 D_- B_1 C_1 B_2 C_2}$ *für geeignete* D_0, D_-, B_1, C_1, B_2, C_2.

Auf $\Gamma^{\otimes 2}_{M_3}$ reduziert sich die Anzahl der Parameter der Familie aller kovarianten Zusammenhänge auf 5, die der Unterfamilie mit verschwindender Torsion auf 3.

Satz 5.8: *Für beliebige komplexe Zahlen* D_0, B_1, C_1, B_2 *und* C_2 *wird durch die Gleichungen*

$$\begin{aligned} \nabla(\mathrm{d}z_k) &= A_1 z_k \Omega \otimes \Omega + B_1 \mathrm{d}z_k \otimes \Omega + C_1 \Omega \otimes \mathrm{d}z_k \\ \nabla(\mathrm{d}z_k^*) &= A_2 z_k^* \Omega \otimes \Omega + B_2 \mathrm{d}z_k^* \otimes \Omega + C_2 \Omega \otimes \mathrm{d}z_k^* \end{aligned} \tag{5.32}$$

mit

$$\begin{aligned} A_1 &:= -q^2 Q^2 - qQB_1 - q^3 QC_1 + q^3 D_0 \\ A_2 &:= -q^{-2} Q^2 + q^{-1} QB_2 + q^{-3} QC_2 - q^{-3} QD_0 \end{aligned} \tag{5.33}$$

ein kovarianter Zusammenhang $\nabla \equiv \nabla_{D_0 B_1 C_1 B_2 C_2} : \Gamma \to \Gamma^{\otimes 2}_{M_3}$ *beschrieben. Für diesen gilt die Gleichung*

$$\nabla(\Omega) = qQ^{-1} D_0 \Omega \otimes \Omega. \tag{5.34}$$

Die Torsion dieses Zusammenhangs verschwindet genau dann, wenn die Bedingungen

$$B_1 = C_1; \qquad B_2 = C_2 \tag{5.35}$$

erfüllt sind.

Jeder kovariante Zusammenhang $\nabla : \Gamma \to \Gamma^{\otimes 3}_{M_2}$ *ist von der Gestalt* $\nabla_{D_0 B_1 C_1 B_2 C_2}$ *für geeignete* D_0, B_1, C_1, B_2, C_2.

Beweis der Sätze 5.7 und 5.8: Der Beweis verläuft analog dem des Satzes 5.6. Aufgrund der in $\Gamma_{M_2}^{\otimes 2}$ und $\Gamma_{M_3}^{\otimes 2}$ gültigen Relation $\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ = q^{-2}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-$ und der in $\Gamma_{M_3}^{\otimes 2}$ gültigen weiteren Gleichheit $\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- = -Q^2\Omega\otimes\Omega$ vereinfacht sich der Ansatz (5.21) für diese beiden faktorisierten Tensorprodukte zu (5.28) bzw. (5.32). Wir berechnen daraus wiederum $\nabla(\Omega_+)$ und $\nabla(\Omega_-)$ und erhalten für den Fall $\Gamma_{M_2}^{\otimes 2}$ die Ausdrücke

$$\begin{aligned}\nabla(\Omega_+) &= \big(1 + A_1 - B_1 - (1+Q^2)F_1\big)\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\ &\qquad + \big((q^{-1}Q - q^{-2})A_1 - q^{-1}QB_1 - q^{-1}QC_1 - q^{-1}Q^3F_1\big)\Omega\otimes\Omega \\ \nabla(\Omega_-) &= \big(1 + A_2 - B_2 - (1+Q^2)F_2\big)\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\ &\qquad - \big((q^{-1}Q + 1)A_2 - q^{-1}QB_2 - q^{-1}QC_2 - q^{-1}Q^3F_2\big)\Omega\otimes\Omega,\end{aligned} \tag{5.36}$$

für $\Gamma_{M_3}^{\otimes 2}$ dagegen

$$\begin{aligned}\nabla(\Omega_+) &= (-q^{-2}Q^2 - q^{-4}A_1 - q^{-3}QB_1 - q^{-1}QC_1)\Omega\otimes\Omega \\ \nabla(\Omega_-) &= (-Q^2 - q^2A_2 + qQB_2 + q^{-1}QC_2)\Omega\otimes\Omega.\end{aligned} \tag{5.37}$$

Mit Hilfe dieser Beziehungen wird wiederum die Forderung (5.26) ausgewertet. Dies führt für $\Gamma_{M_2}^{\otimes 2}$ auf die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned}&q^{-2}(1 + A_1 - B_1 - (1+Q^2)F_1) + (1 + A_2 - B_2 - (1+Q^2)F_2) = 0 \\ &\big((q^{-1}Q - q^{-2})A_1 - q^{-1}QB_1 - q^{-1}QC_1 - q^{-1}Q^3F_1\big) \\ &\qquad - \big((q^{-1}Q + 1)A_2 - q^{-1}QB_2 - q^{-1}QC_2 - q^{-1}Q^3F_2\big) = 0,\end{aligned}$$

woraus mit den Setzungen

$$\begin{aligned}D_0 &:= -q^{-1}Q^{-1}(qQ-1)A_1 + B_1 + C_1 + q^{-1}Q^3F_1 \\ D_- &:= q^{-2}(-1 - A_1 + B_1 + (1+Q^2)F_1)\end{aligned}$$

die Gleichungen (5.29) und (5.30) folgen. Analog entsteht für $\Gamma_{M_3}^{\otimes 2}$ die Gleichung

$$(-q^{-2}Q^2 - q^{-4}A_1 - q^{-3}QB_1 - q^{-1}QC_1) + (-Q^2 - q^2A_2 + qQB_2 + q^{-1}QC_2) = 0,$$

aus der mit

$$D_0 = q^{-1}Q + q^{-3}Q^{-1}A_1 + q^{-2}B_1 + C_1$$

die entsprechenden Aussagen (5.33) und (5.34) des Satzes 5.8 folgen.

Für das Verschwinden der Torsion sind dieselben Bedingungen zu prüfen wie zuvor, jedoch ist in beiden jetzt zu betrachtenden Fällen $\mathrm{T}(\nabla)(\Omega) = 0$ wegen $\Omega \wedge \Omega = \mathrm{d}\Omega = 0$ für beliebige Parameter erfüllt. Zudem gilt in $\Gamma^{\wedge 2}$

$$\mathrm{d}x \wedge \Omega + \Omega \wedge \mathrm{d}x = \Omega x \wedge \Omega - x\Omega \wedge \Omega + \Omega \wedge \Omega x - \Omega \wedge x\Omega = 0$$

für jedes $x \in X$, so daß wir erhalten

$$\mathrm{T}(\nabla)(\mathrm{d}z_k) = (B_1 - C_1)\Omega \wedge \mathrm{d}z_k; \qquad \mathrm{T}(\nabla)(\mathrm{d}z_k^*) = (B_2 - C_2)\Omega \wedge \mathrm{d}z_k^*$$

und damit $B_1 = C_1$ und $B_2 = C_2$ in beiden Fällen als notwendige und hinreichende Forderungen für das Verschwinden der Torsion. □

5.3 Levi-Civita-Zusammenhänge

Mit den Untersuchungen über invariante Metriken und Zusammenhänge haben wir die Voraussetzungen geschaffen, um uns der Frage nach Levi-Civita-Zusammenhängen zuzuwenden. Wir werden auch hier versuchen, die entsprechenden Begriffsbildungen für Quantengruppen mit bikovarianter Differentialrechnung auf Quantenräumen nachzubilden. Allerdings gelangen wir nicht zu einer befriedigenden Definition, so daß die Frage nach Levi-Civita-Zusammenhängen auf den Quantensphären noch nicht abschließend beantwortet werden kann.

In [HS] wird ein Levi-Civita-Zusammenhang als bikovarianter Zusammenhang ∇ mit verschwindender Torsion charakterisiert, der mit einer gegebenen invarianten Metrik verträglich ist. Die dort für linke Zusammenhänge und links-X-lineare Metriken formulierte Verträglichkeitsbedingung nimmt, im Hinblick auf unsere Situation für einen rechten Zusammenhang ∇ und eine rechts-X-lineare Metrik g auf der Quantengruppe $\mathcal{A}$ mit dem bikovarianten Differentialkalkül Γ umgeschrieben, die Form

$$(g \otimes \mathrm{id})(\xi \otimes \nabla(\zeta)) + (\mathrm{id} \otimes g)(\sigma \otimes \mathrm{id})(\nabla(\xi) \otimes \zeta) - \mathrm{d}g(\xi \otimes \zeta) = 0$$

für $\zeta \in \Gamma$ und $\xi \in \Gamma_{\mathrm{inv}}$ an. Hierbei ist Γ_{inv} der Vektorraum der rechtsinvarianten 1-Formen.

Die Verträglichkeitsbedingung weist im Vergleich zur klassischen (kommutativen) Situation zwei Besonderheiten auf, durch die die Konsistenz der Formel im nichtkommutativen Fall erreicht wird.

Zum einen tritt in der Verträglichkeitsbedingung ein Symmetriehomomorphismus σ auf, mit dem der in der nichtkommutativen Situation gebrochenen Symmetrie zwischen den Tensorfaktoren von $\nabla(\zeta)$ Rechnung getragen wird.

Zum anderen wird die 1-Form ξ im ersten Faktor des Tensorprodukts als invariant vorausgesetzt. Dies liegt daran, daß die Metrik g nur rechts-, nicht aber links-X-linear ist, so daß die Abbildung $(\mathrm{id} \otimes g) : \Gamma \otimes \Gamma \otimes \Gamma \to \Gamma$ nicht wohldefiniert ist – das Ergebnis der Anwendung von g auf die letzten beiden Faktoren des Tensorprodukts kann sich ändern, wenn ein Element von X aus einem Tensorfaktor in einen anderen wechselt. Durch die Einschränkung $\xi \in \Gamma_{\mathrm{inv}}$ wird diese Unbestimmtheit beseitigt und die Gleichung damit konsistent.

Im Falle der Quantengruppen stellt diese Voraussetzung keine wesentliche Einschränkung dar, weil sowohl aus rechts- als auch aus linksinvarianten 1-Formen eine Basis des Differentialmoduls Γ gebildet werden kann, so daß für beliebige 1-Formen $\xi, \zeta \in \Gamma$ das Tensorprodukt $\xi \otimes \zeta$ in eine Summe von Ausdrücken der Form $\xi' \otimes \zeta'$ mit $\zeta' \in \Gamma$ und $\xi' \in \Gamma_{\mathrm{inv}}$ umgeformt werden kann, d. h. es gilt $\Gamma_{\mathrm{inv}} \otimes_{\mathbb{C}} \Gamma \otimes_X \Gamma \cong \Gamma \otimes_X \Gamma \otimes_X \Gamma$; auf $\Gamma_{\mathrm{inv}} \otimes_{\mathbb{C}} \Gamma \otimes_X \Gamma$ aber ist $(\mathrm{id} \otimes g)$ wohldefiniert.

Um diese Verträglichkeitsbedingung auf den Fall eines Quantenraums X mit einem Differentialkalkül erster Ordnung (Γ, d) zu übertragen, in dem die (rechts-) invarianten 1-Formen nicht ganz Γ erzeugen, bedürfte es einer geeigneten Methode, $(\mathrm{id} \otimes g)$ auf $\Gamma \otimes \Gamma \otimes \Gamma$ bzw. allgemeiner auf $\Gamma_M^{\otimes 3}$ konsistent zu definieren.

Das folgende Lemma stellt einen Ansatz dazu dar, der sich jedoch als noch nicht ausreichend erweisen wird.

Lemma 5.9: *Es sei X ein homogener Quantenraum zur Quantengruppe $\mathcal{A}$, (Γ, d) ein kovarianter Differentialkalkül erster Ordnung auf X und $\Gamma_M^{\otimes}$ eine faktorisierte Tensoralgebra über Γ Für $\Gamma_M^{\otimes}$ sei ein Symmetriehomomorphismus σ sowie eine bilineare, rechts-X-lineare Abbildung $g : \Gamma_M^{\otimes 2} \to X$ gegeben.*

Ferner sei X_1 eine Unteralgebra von X und $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ ein X_1-Bimodul mit den folgenden Eigenschaften:

(i) Es gilt $\Gamma_1 \cdot X = \Gamma$.

(ii) Für $\zeta \in \Gamma_1$ und $x \in X$ gilt $\zeta x \in \Gamma_1$ genau dann, wenn $x \in X_1$.

(iii) Die (rechts-X-lineare) Metrik g ist bezüglich X_1 links-X-linear, d. h. für $\xi, \zeta \in \Gamma$ und $x \in X_1$ gilt $g(x\xi \otimes \zeta) = xg(\xi \otimes \zeta)$.

Dann sind $\Gamma_1 \otimes_{X_1} \Gamma$ und $\Gamma_1 \otimes_{X_1} \Gamma \otimes_X \Gamma$ als Rechtsmoduln isomorph zu $\Gamma \otimes_X \Gamma$ bzw. $\Gamma \otimes_X \Gamma \otimes_X \Gamma$ mit der jeweiligen natürlichen Abbildung $\xi \otimes \zeta \mapsto \xi \otimes \zeta$ bzw. $\xi \otimes \zeta_1 \otimes \zeta_2 \mapsto \xi \otimes \zeta_1 \otimes \zeta_2$ als Isomorphismus.

Sind $M^{(2)'}$ und $M^{(3)'}$ die Urbilder von $M^{(2)}$ und $M^{(3)}$ bei diesen Isomorphismen, so sind $\Gamma_{M'}^{\otimes 2} := (\Gamma_1 \otimes_{X_1} \Gamma)/M^{(2)'}$ und $\Gamma_{M'}^{\otimes 3} := (\Gamma_1 \otimes_{X_1} \Gamma \otimes_X \Gamma)/M^{(3)'}$ als Rechtsmoduln isomorph zu $\Gamma_M^{\otimes 2}$ bzw. $\Gamma_M^{\otimes 3}$, wobei die jeweilige natürliche Abbildung ein Isomorphismus ist.

Beweis: Die Aussagen sind offensichtlich. □

Definition 5.6: *Es seien X, (Γ, d), $\Gamma_M^{\otimes}$, σ und g wie in Lemma 5.9 vorausgesetzt. Für g seien weiterhin eine Unteralgebra $X_1 \subseteq X$ sowie ein X_1-Bimodul $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$ derart gegeben, daß die Voraussetzungen (i)–(iii) des Lemmas erfüllt sind, und $\iota_3 : \Gamma_{M'}^{\otimes 3} \to \Gamma_M^{\otimes 3}$ sei der natürliche Isomorphismus.*

Dann ist $(\mathrm{id} \otimes g) : \Gamma_{M'}^{\otimes 3} \to \Gamma$ eine wohldefinierte Abbildung, und durch $g_{23} := \iota_3 \circ (\mathrm{id} \otimes g) \circ \iota_3^{-1}$ wird eine Abbildung $g_{23} : \Gamma_M^{\otimes 3} \to \Gamma$ definiert. Wir setzen außerdem $g_{12} := (g \otimes \mathrm{id})$.

Dann heiße ein Zusammenhang $\nabla : \Gamma \to \Gamma_M^{\otimes 2}$ ***verträglich mit g,*** *wenn für alle $\xi, \zeta \in \Gamma$ gilt*

$$g_{12}(\xi \otimes \nabla(\zeta)) + g_{23}\sigma_{12}(\nabla(\xi) \otimes \zeta) - \mathrm{d}g(\xi \otimes \zeta) = 0. \tag{5.38}$$

Erfüllen X_1 und Γ_1 nur die Voraussetzungen (ii) und (iii) des Lemmas, so heiße ein Zusammenhang $\nabla : \Gamma \to \Gamma_M^{\otimes 2}$ ***verträglich mit g über $\Gamma_1 \otimes_{X_1} \Gamma$,*** *wenn er die Bedingung*

$$\nabla(\xi) \in \Gamma_1 \otimes_{X_1} \Gamma \tag{5.39}$$

für alle $\xi \in \Gamma_1$ erfüllt und wenn (5.38) für alle $\xi \in \Gamma_1$, $\zeta \in \Gamma$ gilt.

Gelänge es nun, zu einer der Metriken $g = g_{\alpha\gamma\nu}$ auf $\Gamma_{M_1}^{\otimes 2}$ oder $g = g_{\alpha\nu}$ auf $\Gamma_{M_2}^{\otimes 2}$ aus Abschnitt 5.1 eine Unteralgebra X_1 und einen X_1-Bimodul Γ_1 aufzufinden, die die Bedingungen des Lemmas 5.9 (einschließlich der Bedingung (i)) erfüllen, so könnte ein Levi-Civita-Zusammenhang als ein kovarianter Zusammenhang verschwindender Torsion definiert werden, der mit der Metrik g gemäß Gleichung (5.38) über $\Gamma_1 \otimes_{X_1} \Gamma \cong \Gamma \otimes_X \Gamma$ verträglich ist.

Solche Objekte X_1 und Γ_1 können wir jedoch nur für die durch (5.4) gegebene ausgeartete Abbildung $g = g_\nu$ angeben. Dies ist bereits in Satz 5.4 geschehen. Für die Metriken ist daher die Frage nach einer geeigneten Verträglichkeitsbedingung über ganz $\Gamma \otimes \Gamma$ noch offen.

Für die betrachteten Metriken erfüllt jedoch trivialerweise die Unteralgebra $X_1 := \mathbb{C}$ von X mit dem nur von Ω erzeugten X_1-Bimodul der invarianten 1-Formen in Γ die Bedingungen (ii) und (iii) des Lemmas. Somit kann die Verträglichkeit von Zusammenhängen mit den Metriken zumindest über $\Omega \otimes_{\mathbb{C}} \Gamma$ und für solche Zusammenhänge geprüft werden, die der (für die Wohldefiniertheit der linken Seite von (5.38) notwendigen) Bedingung (5.39) genügen. Da davon auszugehen ist, daß eine umfassendere Verträglichkeitsbedingung bei Einschränkung auf diesen Untermodul von $\Gamma \otimes \Gamma$ zu (5.38) äquivalent sein sollte, beschreibt der nachfolgende Satz einen möglichen Levi-Civita-Zusammenhang auf Γ (für das faktorisierte Tensorprodukt $\Gamma_{M_2}^{\otimes 2}$).

Satz 5.10: *Der durch die Gleichungen*

$$\begin{aligned}
\nabla(\mathrm{d}z_k) &= -qQ_+Q^2 z_k \Omega \otimes \Omega - q^2 z_k \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + q^{-1}Q(\mathrm{d}z_k \otimes \Omega + \Omega \otimes \mathrm{d}z_k) \\
\nabla(\mathrm{d}z_k^*) &= -q^{-1}Q_+Q^2 z_k^* \Omega \otimes \Omega - q^{-2} z_k^* \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- - qQ(\mathrm{d}z_k^* \otimes \Omega + \Omega \otimes \mathrm{d}z_k^*)
\end{aligned}$$

beschriebene Zusammenhang $\nabla : \Gamma \to \Gamma_{M_2}^{\otimes 2}$ ist von verschwindender Torsion und über $\Omega \otimes_{\mathbb{C}} \Gamma$ mit jeder der Metriken $g_{\alpha\nu} : \Gamma_{M_2}^{\otimes 2} \to X$ verträglich. Er ist ferner mit den ausgearteten Abbildungen $g_\nu : \Gamma_{M_2}^{\otimes 2} \to X$ über $\Gamma_{M_2}^{\otimes 2}$ verträglich.

Bemerkung: Für diesen Zusammenhang gilt $\nabla(\Omega) = 0$.

Beweis: Die Behauptungen können unmittelbar nachgerechnet werden. □

Anhang A: Verschiedene Versionen der Quantensphären

In der Literatur finden sich Quantensphären des von uns untersuchten Typs in mehreren grundsätzlich gleichwertigen Formen, die sich durch ihre Relationen und durch ihre Einbettung in die Quantengruppe $\mathrm{SU}_q(N)$ unterscheiden. So werden in [VS, NYM] wie in der vorliegenden Arbeit Quantensphären als rechte homogene Quantenräume betrachtet, in [RTF, Sch] dagegen als linke homogene Quantenräume. Wir wollen hier zur Erleichterung des Vergleichs mit der Literatur einige dieser Versionen zusammenstellen, legen allerdings einheitlich die Quantengruppe $\mathrm{SU}_q(N)$ in der in Kapitel 1 eingeführten Notation zugrunde (während z. B. in [VS] der Indexbereich $0, \ldots, N-1$ anstelle von $1, \ldots, N$ benutzt wird – dies erfordert allerdings nur einfache Umrechnungen). Insbesondere können wir abschließend explizit einen Isomorphismus zwischen der von uns benutzten rechten Quantensphäre und der linken Quantensphäre aus [Sch] angeben, Differentialkalküle erster Ordnung aus der Klassifikation des Theorems 2.3 auf diese linke Quantensphäre übertragen und mit den dort gefundenen Differentialkalkülen vergleichen.

A.1 Verschiedene Varianten der Quantensphären

A.1.1 Die rechten Quantensphären ${}^1\mathrm{S}_q^{2N-1}$

Die unseren Untersuchungen zugrundeliegenden Quantensphären $\mathrm{S}_q^{2N-1} = {}^1\mathrm{S}_q^{2N-1}$ sind rechte homogene Quantenräume für die zugehörigen Quantengruppen $\mathcal{A} = \mathrm{SU}_q(N)$, d. h. die Kowirkung hat die Gestalt $\Delta_\mathrm{R} : X \to X \otimes \mathcal{A}$. Die Algebra ${}^1\mathrm{S}_q^{2N-1}$ wird durch die folgenden Relationen zwischen den Erzeugenden z_i, z_i^*, $i = 1, \ldots, N$, charakterisiert:

$$\begin{aligned} z_i z_j &= q z_j z_i && (1 \leq i < j \leq N), \\ z_i^* z_j^* &= q^{-1} z_j^* z_i^* && (1 \leq i < j \leq N), \\ z_i z_j^* &= q z_j^* z_i && (1 \leq i, j \leq N, i \neq j), \end{aligned}$$

$$z_i^* z_i - z_i z_i^* = q^{-1} Q \sum_{k=i+1}^{N} z_k z_k^* = qQ \sum_{k=i+1}^{N} q^{2i-2k} z_k^* z_k,$$

$$\sum_{i=1}^{N} z_i z_i^* = \sum_{i=1}^{N} q^{2-2i} z_i^* z_i = 1.$$

Mit R-Matrizen lauten die Kommutatorrelationen

$$\hat{R}^{st}_{kl} z_s z_t = q z_k z_l, \qquad \check{R}^{-\,st}_{\;\;kl} z^*_s z^*_t = q^{-1} z^*_k z^*_l,$$
$$\grave{R}^{-\,st}_{\;\;kl} z^*_s z_t = q^{-1} z_k z^*_l, \qquad \acute{R}^{st}_{kl} z_s z^*_t = q z^*_k z_l.$$

Die Einbettung dieser Quantensphären in die Quantengruppe $\mathrm{SU}_q(N)$ mit den Erzeugenden u^i_j, $1 \leq i, j \leq N$, wird gegeben durch

$$z_i \mapsto u^1_i, \qquad z^*_i \mapsto S(u^i_1).$$

Die Kowirkung wird dementsprechend beschrieben durch

$$\Delta_{\mathrm{R}}(z_i) = \sum_j z_j \otimes u^j_i, \qquad \Delta_{\mathrm{R}}(z^*_j) = \sum_j z^*_j \otimes S(u^i_j)$$

Die Erzeugenden z_i der Quantensphäre werden hierdurch mit den Elementen der ersten Zeile der Fundamentalmatrix von $\mathrm{SU}_q(N)$ identifiziert.

Die Quantensphären in [VS] entsprechen im wesentlichen ${}^1\mathrm{S}^{2N-1}_q$, nur daß dort die Indizes ab 0 gezählt werden, was aber nur einfache Umrechnungen erfordert.

A.1.2 Die rechten Quantensphären ${}^N\mathrm{S}^{2N-1}_q$

Alternativ kann man rechte Quantensphären ${}^N\mathrm{S}^{2N-1}_q$ mit den Erzeugenden w_i, w^*_i, $i = 1, \ldots, N$, und der Einbettung

$$w_i \mapsto u^N_i, \qquad w^*_i \mapsto S(u^i_N)$$

definieren, aus der sich zunächst die Kowirkung gemäß

$$\Delta_{\mathrm{R}}(w_i) = \sum_j w_j \otimes u^j_i, \qquad \Delta_{\mathrm{R}}(w^*_j) = \sum_j w^*_j \otimes S(u^i_j)$$

völlig analog zum Fall ${}^1\mathrm{S}^{2N-1}_q$ ergibt. In diesem Falle werden die Erzeugenden w_i mit den Elementen der N-ten Zeile der Fundamentalmatrix von $\mathrm{SU}_q(N)$ identifiziert.

Die algebraischen Relationen für ${}^N\mathrm{S}_q^{2N-1}$ unterscheiden sich von denjenigen für ${}^1\mathrm{S}_q^{2N-1}$ und lauten

$$\begin{aligned} w_i w_j &= q w_j w_i && (1 \leq i < j \leq N), \\ w_i^* w_j^* &= q^{-1} w_j^* w_i^* && (1 \leq i < j \leq N), \\ z_i z_j^* &= q^{-1} z_j^* z_i && (1 \leq i, j \leq N, i \neq j), \end{aligned}$$

$$w_i^* w_i - w_i w_i^* = -qQ \sum_{k=1}^{i-1} w_k w_k^* = -q^{-1} Q \sum_{k=1}^{i-1} q^{2i-2k} w_k^* w_k,$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i w_i^* = \sum_{i=1}^{N} q^{2N-2i} w_i^* w_i = 1.$$

Mit R-Matrizen lauten die Kommutatorrelationen

$$\hat{R}^{st}_{kl} w_s w_t = q w_k w_l, \qquad \check{R}^{-}{}^{st}_{kl} w_s^* w_t^* = q^{-1} w_k^* w_l^*,$$
$$\grave{R}^{st}_{kl} w_s^* w_t = q w_k w_l^*, \qquad \acute{R}^{-}{}^{st}_{kl} w_s w_t^* = q^{-1} w_k^* w_l.$$

Die Quantensphären ${}^N\mathrm{S}_q^{2N-1}$ sind identisch mit den in [NYM] untersuchten Quantenräumen $\mathrm{U}_q(n-1)\backslash\mathrm{U}_q(n)$ $(n = N)$.

A.1.3 Die linken Quantensphären ${}_N\mathrm{S}_q^{2N-1}$

Als eine Version von Quantensphären als linken homogenen Quantenräumen, d. h. mit einer linken Kowirkung $\Delta_\mathrm{L} : X \to \mathcal{A} \otimes X$, betrachten wir die Algebra ${}_N\mathrm{S}_q^{2N-1}$ mit den Erzeugenden x_i, x_i^*, $i = 1, \ldots, N$, und der Einbettung

$$x_i \mapsto u^i_N, \qquad x_i^* \mapsto S(u^N_i),$$

aus der sich die Kowirkung

$$\Delta_\mathrm{L}(x_i) = \sum_j u^i_j \otimes x_j, \qquad \Delta_\mathrm{L}(x_i^*) = \sum_j S(u^j_i) \otimes x_j^*$$

ergibt. Die Erzeugenden x_i werden also mit den Elementen der N-ten Spalte der Fundamentalmatrix von $\mathrm{SU}_q(N)$ identifiziert.

Die Relationen dieser Quantensphäre lauten

$$\begin{aligned} x_i x_j &= q x_j x_i && (1 \le i < j \le N), \\ x_i^* x_j^* &= q^{-1} x_j^* x_i^* && (1 \le i < j \le N), \\ x_i x_j^* &= q^{-1} x_j^* x_i && (1 \le i, j \le N, i \ne j), \end{aligned}$$

$$x_i^* x_i - x_i x_i^* = -qQ \sum_{k=1}^{i-1} q^{2k-2i} x_k x_k^* = -q^{-1} Q \sum_{k=1}^{i-1} x_k^* x_k,$$

$$\sum_{i=1}^{N} q^{2i-2N} x_i x_i^* = \sum_{i=1}^{N} x_i^* x_i = 1.$$

Mit R-Matrizen lauten die Kommutatorrelationen

$$\hat{R}^{kl}_{st} x_s x_t = q x_k x_l, \qquad \check{R}^{-kl}_{\ \ st} x_s^* x_t^* = q^{-1} x_k^* x_l^*,$$

$$\acute{R}^{kl}_{st} x_s^* x_t = q x_k x_l^*, \qquad \grave{R}^{-kl}_{\ \ st} x_s x_t^* = q^{-1} x_k^* x_l.$$

Diese Quantensphären werden in [Sch] benutzt.

A.2 Homomorphismen und Antihomomorphismen

Ein Homomorphismus $\tau_1 : {}^1\mathrm{S}_q^{2N-1} \to {}^N\mathrm{S}_q^{2N-1}$ ist gegeben durch

$$z_i \mapsto (-q)^{N-i'} w_{i'}^*, \qquad z_i^* \mapsto (-q)^{N-i'} w_{i'},$$

wobei zur Abkürzung $i' = N + 1 - i$ für $i = 1, \dots, N$ gesetzt wurde.

Ein Antihomomorphismus $\tau_2 : {}^N\mathrm{S}_q^{2N-1} \to {}_N\mathrm{S}_q^{2N-1}$ ist gegeben durch

$$w_i \mapsto x_i^*, \qquad w_i^* \mapsto q^{2i-2N} x_i.$$

Darüber hinaus steht auf jeder Quantensphäre die Involution $*$ als Antihomomorphismus zur Verfügung.

Alle diese Homomorphismen und Antihomomorphismen sind umkehrbar, daher eigentlich Isomorphismen bzw. Antiisomorphismen. Durch Zusammensetzung kann man hieraus Isomorphismen und Antiisomorphismen zwischen allen aufgeführten Versionen $(2N-1)$-dimensionaler Quantensphären herstellen. Wir benutzen im folgenden insbesondere den Isomorphismus $* \circ \tau_2 \circ \tau_1 : {}^1\mathrm{S}_q^{2N-1} \to {}_N\mathrm{S}_q^{2N-1}$, der gegeben ist durch

$$z_i \mapsto (-q)^{N-i'} x_{i'}^*, \qquad z_i^* \mapsto (-q)^{i'-N} x_{i'}.$$

A.3 Kovariante Differentialkalküle erster Ordnung für die Quantensphären ${}_N\mathrm{S}_q^{2N-1}$

Mit Hilfe des im vorigen Abschnitt angegebenen Isomorphismus $* \circ \tau_2 \circ \tau_1 : {}^1\mathrm{S}_q^{2N-1} \to {}_N\mathrm{S}_q^{2N-1}$ rechnen wir die fast-freien kovarianten Differentialkalküle erster Ordnung von ${}^1\mathrm{S}_q^{2N-1}$ auf ${}_N\mathrm{S}_q^{2N-1}$ um.

Aus $(\tilde{\Gamma}_\lambda, \mathrm{d})$ erhalten wir so den kovarianten $*$-Differentialkalkül erster Ordnung $({}_N\tilde{\Gamma}_\lambda, \mathrm{d})$ auf ${}_N\mathrm{S}_q^{2N-1}$ mit der Bimodulstruktur

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x_i \cdot x_j &= q^{-1}\lambda \hat{R}^{-}{}^{ij}_{km} x_k \mathrm{d}x_m + (\lambda - 1)x_i \mathrm{d}x_j - (\lambda - 1)x_i x_j \Xi_+ \\
\mathrm{d}x_i^* \cdot x_j^* &= q\lambda^{-1} \check{R}^{ij}_{km} x_k^* \mathrm{d}x_m^* + (\lambda^{-1} - 1)x_i^* \mathrm{d}x_j^* + q^2\lambda^{-1}(\lambda^{-1} - 1)x_k^* x_m^* \Xi_+ \\
\mathrm{d}x_i \cdot x_j^* &= q\lambda^{-1} \acute{R}^{ij}_{km} x_k^* \mathrm{d}x_m + (q^{-2}\lambda - 1)x_i \mathrm{d}x_j^* - (q^2\lambda^{-1} - 1)x_i x_j^* \Xi_+ \\
\mathrm{d}x_i^* \cdot x_j &= q^{-1}\lambda \grave{R}^{-}{}^{ij}_{km} x_k \mathrm{d}x_m^* + (q^2\lambda^{-1} - 1)x_i^* \mathrm{d}x_j - (q^2\lambda^{-1} - 1)x_i^* x_j \Xi_+
\end{aligned}$$

mit der invarianten 1-Form

$$\Xi_+ = \sum_{i=1}^{N} x_i^* \mathrm{d}x_i.$$

Aus $(\tilde{\Gamma}'_\lambda, \mathrm{d})$ erhalten wir den Kalkül $({}_N\tilde{\Gamma}'_\lambda, \mathrm{d})$ mit $\mu = q^2\lambda^{-1}$ und

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x_i \cdot x_j &= q\hat{R}^{ij}_{km} x_k \mathrm{d}x_m + (\mu^{-1} - q^2)x_i x_j \Xi_+ \\
\mathrm{d}x_i^* \cdot x_j^* &= q^{-1}\check{R}^{-}{}^{ij}_{km} x_k^* \mathrm{d}x_m^* + q^{-2}\mu(1 - q^2\mu)x_i^* x_j^* \Xi_+ \\
\mathrm{d}x_i \cdot x_j^* &= q^{-1}\acute{R}^{ij}_{km} x_k^* \mathrm{d}x_m - (1 - \mu)x_i x_j^* \Xi_+ \\
\mathrm{d}x_i^* \cdot x_j &= q\grave{R}^{-}{}^{ij}_{km} x_k \mathrm{d}x_m^* - (1 - \mu)x_i^* x_j \Xi_+.
\end{aligned}$$

Aus dem Kalkül $(\tilde{\Gamma}''_\lambda, \mathrm{d})$ entsteht der Kalkül $({}_N\tilde{\Gamma}''_\lambda, \mathrm{d})$ mit

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x_i \cdot x_j &= q\hat{R}^{ij}_{km} x_k \mathrm{d}x_m \\
\mathrm{d}x_i^* \cdot x_j^* &= q^{-1}\check{R}^{-}{}^{ij}_{km} x_k^* \mathrm{d}x_m^* \\
\mathrm{d}x_i \cdot x_j^* &= q^{-1}(\nu\acute{R}^{ij}_{km} + (1 - \nu)\acute{R}^{-}{}^{ij}_{km}) x_k^* \mathrm{d}x_m - q^{-1}Q\nu x_i x_j^* \Xi_+ \\
\mathrm{d}x_i^* \cdot x_j &= q(\mu\grave{R}^{-}{}^{ij}_{km} + (1 - \mu)\grave{R}^{ij}_{km}) x_k \mathrm{d}x_m^* - q^{-1}Q\nu x_i^* x_j \Xi_+.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
\mu &= (q^{2N-2} - 1)^{-1}\big(q^{2N-2} - q^{-4}\lambda\big), \\
\nu &= (q^{2N-2} - 1)^{-1}\big(q^{2N+2}\lambda^{-1} - 1\big)
\end{aligned}$$

gesetzt. Man beachte, daß μ und ν den Wert 0 gleichzeitig annehmen, nämlich genau für $\lambda = q^{2N+2}$; gleichfalls wird sowohl μ als auch ν gleich 1 dann und nur dann, wenn $\lambda = q^4$.

Der letztere Fall entspricht dem Schnitt der Serien $({}_N\tilde{\Gamma}'_\lambda, \mathrm{d})$ und $({}_N\tilde{\Gamma}''_\lambda, \mathrm{d})$ von Kalkülen; der erstere Fall ergibt den Kalkül $({}_N\tilde{\Gamma}''_{q^{2N+2}}, \mathrm{d})$ mit der Bimodulstruktur

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x_i \cdot x_j &= q\hat{R}^{ij}_{km} x_k \mathrm{d}x_m, & \mathrm{d}x_i^* \cdot x_j^* &= q^{-1}\check{R}^{-ij}_{\ km} x_k^* \mathrm{d}x_m^*, \\ \mathrm{d}x_i \cdot x_j^* &= q^{-1}\acute{R}^{-ij}_{\ km} x_k^* \mathrm{d}x_m, & \mathrm{d}x_i^* \cdot x_j &= q\grave{R}^{ij}_{km} x_k \mathrm{d}x_m^*. \end{aligned}$$

Die Umrechnung des Kalküls $(\tilde{\Gamma}^\bullet_\lambda, \mathrm{d})$ ergibt den Kalkül $({}_N\tilde{\Gamma}^\bullet_\lambda, \mathrm{d})$ mit den Strukturgleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x_i \cdot x_j &= q\hat{R}^{-ij}_{\ km} x_k \mathrm{d}x_m + (q^{-2}\lambda - q^2) x_i x_j \Xi_+ \\ \mathrm{d}x_i^* \cdot x_j^* &= q\lambda^{-1}\check{R}^{ij}_{km} x_k^* \mathrm{d}x_m^* + (\lambda^{-1} - 1) x_i^* \mathrm{d}x_j^* + q^2\lambda^{-1}(\lambda^{-1} - 1) x_k^* x_m^* \Xi_+ \\ \mathrm{d}x_i \cdot x_j^* &= q^{-1}\acute{R}^{ij}_{km} x_k^* \mathrm{d}x_m + (q^{-2}\lambda - 1) x_i \mathrm{d}x_j^* \\ \mathrm{d}x_i^* \cdot x_j &= q^{-1}\lambda\grave{R}^{-ij}_{\ km} x_k \mathrm{d}x_m^*, \end{aligned}$$

während aus $(\tilde{\Gamma}^{\bullet\bullet}_\lambda, \mathrm{d})$ der Kalkül $({}_N\tilde{\Gamma}^{\bullet\bullet}_\lambda, \mathrm{d})$ mit

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x_i \cdot x_j &= q^{-1}\lambda\hat{R}^{-ij}_{\ km} x_k \mathrm{d}x_m + (\lambda - 1) x_i \mathrm{d}x_j - (\lambda - 1) x_i x_j \Xi_+ \\ \mathrm{d}x_i^* \cdot x_j^* &= q^{-1}\check{R}^{ij}_{km} x_k^* \mathrm{d}x_m^* + \lambda^{-1}(1 - q^4\lambda^{-1}) x_k^* x_m^* \Xi_+ \\ \mathrm{d}x_i \cdot x_j^* &= q\lambda^{-1}\acute{R}^{ij}_{km} x_k^* \mathrm{d}x_m \\ \mathrm{d}x_i^* \cdot x_j &= q\grave{R}^{-ij}_{\ km} x_k \mathrm{d}x_m^* + (q^2\lambda^{-1} - 1) x_i^* \mathrm{d}x_j \end{aligned}$$

entsteht.

Es ist unmittelbar ersichtlich, daß die Differentialkalküle $({}_N\tilde{\Gamma}_\lambda, \mathrm{d})$ mit $\Gamma_1^{\mathcal{Z}}$ aus [Sch] identisch sind, ferner $({}_N\tilde{\Gamma}^\bullet_\lambda, \mathrm{d})$ mit $\Gamma_3^{\mathcal{Z}}$, $({}_N\tilde{\Gamma}^{\bullet\bullet}_\lambda, \mathrm{d})$ mit $\Gamma_2^{\mathcal{Z}}$ und $({}_N\tilde{\Gamma}''_{q^{2N+2}}, \mathrm{d})$ mit $\Gamma^{\mathcal{Z}}$.

Da in [Sch] gezeigt wurde, daß $\Gamma_1^{\mathcal{Z}}$ und $\Gamma^{\mathcal{Z}}$ von linkskovarianten Differentialkalkülen (letzterer sogar von einem bikovarianten Kalkül) auf $\mathrm{SU}_q(N)$ induziert werden, werden die entsprechenden Differentialkalküle $(\tilde{\Gamma}_\lambda, \mathrm{d})$ und $(\tilde{\Gamma}''_{q^{2N+2}}, \mathrm{d})$ auf ${}^1\mathrm{S}_q^{2N-1}$ von rechtskovarianten Differentialkalkülen auf $\mathrm{SU}_q(N)$ induziert.

Anhang B: Ergänzende Rechnungen

Dieser Anhang stellt ausführlichere Rechnungen zu einzelnen Beweisschritten aus den Kapiteln 2–5 zusammen. Auf diese Rechnungen wird aus dem Haupttext einzeln verwiesen. Bezeichnungen werden in diesem Anhang nicht erläutert, sondern sind dem jeweiligen Kontext zu entnehmen.

B.1 (zu Abschnitt 2.2.6, Seite 37)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}z_k \cdot z_l z_m &= a_1 \hat{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t \cdot z_m + (-Qa_1 + b_1) z_k \mathrm{d}z_l \cdot z_m + c_1 z_k z_l \Omega_+ z_m + e_1 z_k z_l \Omega_- z_m \\
&= {a_1}^2 \hat{R}^{uv}_{tl} \hat{R}^{st}_{kl} z_s z_u \mathrm{d}z_v + a_1(-Qa_1 + b_1) \hat{R}^{uv}_{lm} z_k z_u \mathrm{d}z_v \\
&\qquad + (q^{-1} a_1 b_1 + {b_1}^2 + c_1 b_4 + q^{-2} e_1 b_1) z_k z_l \mathrm{d}z_m \\
&\qquad + (q^{-1} a_1 c_1 + b_1 c_1 + c_1(q a_4 + c_4 + d_4) + q^{-2} e_1 c_1) z_k z_l z_m \Omega_+ \\
&\qquad + (q^{-1} a_1 e_1 + b_1 e_1 + c_1(e_4 + f_4) + q^{-2} e_1(q a_1 + e_1)) z_k z_l z_m \Omega_-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}z_k \cdot z_l z^*_m &= a_1 \hat{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t \cdot z^*_m + (-Qa_1 + b_1) z_k \mathrm{d}z_l \cdot z^*_m + c_1 z_k z_l \Omega_+ z^*_m + e_1 z_k z_l \Omega_- z^*_m \\
&= a_1 a_3 \grave{R}^{-\,uv}_{\;\;tl} \hat{R}^{st}_{kl} z_s z^*_u \mathrm{d}z_v + (-Qa_1 + b_1) a_3 \grave{R}^{-\,uv}_{\;\;lm} z_k z^*_u \mathrm{d}z_v \\
&\qquad + (q^{-1} a_1 b_3 + b_1 b_3 + c_1 b_2 + q^{-2} e_1 b_3) z_k z_l \mathrm{d}z^*_m \\
&\qquad + (q^{-1} a_1 c_3 + b_1 c_3 + c_1(q a_2 + c_2) + q^{-2} e_1(c_3 + q^2 d_3)) z_k z_l z^*_m \Omega_+ \\
&\qquad + (q^{-1} a_1 e_3 + b_1 e_3 + c_1 e_2 + q^{-2} e_1(q a_3 + e_3 + q^2 f_3)) z_k z_l z^*_m \Omega_- \\
&\qquad + (-Qa_1 + b_1) d_3 q^{2l} \delta_{lm} z_k \Omega_+ + (-Qa_1 + b_1) f_3 q^{2l} \delta_{lm} z_k \Omega_- \\
&\qquad + a_1 d_3 q^{2t} \delta_{tm} \hat{R}^{st}_{kl} z_s \Omega_+ + a_1 f_3 q^{2t} \delta_{tm} \hat{R}^{st}_{kl} z_s \Omega_-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}z_k \cdot z^*_l z_m &= a_3 \grave{R}^{-\,st}_{\;\;kl} z^*_s \mathrm{d}z_t \cdot z_m + b_3 z_k \mathrm{d}z^*_l \cdot z_m + c_3 z_k z^*_l \Omega_+ z_m + d_3 q^{2k} \delta_{kl} \Omega_+ z_m \\
&\qquad + e_3 z_k z^*_l \Omega_- z_m + f_3 q^{2k} \delta_{kl} \Omega_- z_m \\
&= a_3 a_1 \hat{R}^{uv}_{tm} \grave{R}^{-\,st}_{\;\;kl} z^*_s z_u \mathrm{d}z_v + b_3 a_4 \acute{R}^{uv}_{lm} z_k z_u \mathrm{d}z^*_v \\
&\qquad + (q^{-1} a_3(-Qa_1 + b_1) + b_3 b_4 + c_3 b_4 + q^{-2} e_3 b_1) z_k z^*_l \mathrm{d}z_m \\
&\qquad + (q^{-1} a_3 c_1 + b_3 c_4 + c_3(q a_4 + c_4 + d_4) + q^{-2} e_3 c_1) z_k z^*_l z_m \Omega_+ \\
&\qquad + (q^{-1} a_3 e_1 + b_3 e_4 + c_3(e_4 + f_4) + q^{-2} e_3(q a_1 + e_1)) z_k z^*_l z_m \Omega_- \\
&\qquad + (d_3 b_4 + q^{-2} f_3 b_1) q^{2k} \delta_{kl} \mathrm{d}z_m \\
&\qquad + b_3 d_4 \delta_{lm} z_k \Omega_+ + b_3 f_4 \delta_{lm} z_k \Omega_- \\
&\qquad + (d_3(q a_4 + c_4 + d_4) + q^{-2} f_3 c_1) q^{2k} \delta_{kl} z_m \Omega_+ \\
&\qquad + (d_3(e_4 + f_4) + q^{-2} f_3(q a_1 + e_1)) q^{2k} \delta_{kl} z_m \Omega_-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}z_k \cdot z_l^* z_m^* &= a_3 \grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t \cdot z_m^* + b_3 z_k \mathrm{d}z_l^* \cdot z_m^* + c_3 z_k z_l^* \Omega_+ z_m^* + q^{2k}\delta_{kl}\Omega_+ z_m^* \\
&\quad + e_3 z_k z_l^* \Omega_- z_m^* + q^{2k}\delta_{kl}\Omega_- z_m^* \\
&= {a_3}^2 \grave{R}^{-}{}^{uv}_{tm} \grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* z_u^* \mathrm{d}z_v + b_3 a_2 \check{R}^{-}{}^{uv}_{lm} z_k z_u^* \mathrm{d}z_v^* \\
&\quad + (q^{-1}a_3 b_3 + b_3(Qa_2 + b_2) + c_3 b_2 + q^{-2} e_3 b_3) z_k z_l^* \mathrm{d}z_m^* \\
&\quad + (d_3 b_2 + q^{-2} f_3 b_3) q^{2k} \delta_{kl} \mathrm{d}z_m^* \\
&\quad + (q^{-1}a_3 c_3 + b_3 c_2 + c_3(qa_2 + c_2) + q^{-2} e_3(c_3 + q^2 d_3)) z_k z_l^* z_m^* \Omega_+ \\
&\quad + (q^{-1}a_3 e_3 + b_3 e_2 + c_3 e_2 + q^{-2} e_3(qa_3 + e_3 + q^2 f_3)) z_k z_l^* z_m^* \Omega_- \\
&\quad + (d_3(qa_2 + c_2) + q^{-2} f_3(c_3 + q^2 d_3)) q^{2k} \delta_{kl} z_m^* \Omega_+ \\
&\quad + (d_3 e_2 + q^{-2} f_3(qa_3 + e_3 + f_3)) q^{2k} \delta_{kl} z_m^* \Omega_- \\
&\quad + a_3 d_3 q^{2t} \delta_{tm} \grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* \Omega_+ + a_3 f_3 q^{2t} \delta_{tm} \grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* \Omega_-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}z_k^* \cdot z_l z_m &= a_4 \acute{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t^* \cdot z_m + b_4 z_k^* \mathrm{d}z_l \cdot z_m + c_4 z_k^* z_l \Omega_+ z_m + d_4 \delta_{kl} \Omega_+ z_m \\
&\quad + e_4 z_k^* z_l \Omega_- z_m + f_4 \delta_{kl} \Omega_- z_m \\
&= {a_4}^2 \acute{R}^{uv}_{tm} \acute{R}^{st}_{kl} z_s z_u \mathrm{d}z_v^* + b_4 a_1 \hat{R}^{uv}_{lm} z_k^* z_u \mathrm{d}z_v \\
&\quad + (qa_4 b_4 + b_4(-Qa_1 + b_1) + c_4 b_4 + q^{-2} e_4 b_1) z_k^* z_l \mathrm{d}z_m \\
&\quad + (d_4 b_4 + q^{-2} f_4 b_1) \delta_{kl} \mathrm{d}z_m \\
&\quad + (qa_4 c_4 + b_4 c_1 + c_4(qa_4 + c_4 + d_4) + q^{-2} e_4 c_1) z_k^* z_l z_m \Omega_+ \\
&\quad + (qa_4 e_4 + b_4 e_1 + c_4(e_4 + f_4) + q^{-2} e_4(qa_1 + e_1)) z_k^* z_l z_m \Omega_- \\
&\quad + (d_4(qa_4 + c_4 + d_4) + q^{-2} f_4 c_1) \delta_{kl} z_m \Omega_+ \\
&\quad + (d_4(e_4 + f_4) + q^{-2} f_4(qa_1 + e_1)) \delta_{kl} z_m \Omega_- \\
&\quad + a_4 d_4 \delta_{tm} \acute{R}^{st}_{kl} z_s \Omega_+ + a_4 f_4 \delta_{tm} \acute{R}^{st}_{kl} z_s \Omega_-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}z_k^* \cdot z_l z_m^* &= a_4 \acute{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t^* \cdot z_m^* + b_4 z_k^* \mathrm{d}z_l \cdot z_m^* + c_4 z_k^* z_l \Omega_+ z_m^* + d_4 \delta_{kl} \Omega_+ z_m^* \\
&\quad + e_4 z_k^* z_l \Omega_- z_m^* + f_4 \delta_{kl} \Omega_- z_m^* \\
&= a_4 a_2 \check{R}^{-}{}^{uv}_{tm} \acute{R}^{st}_{kl} z_s z_u^* \mathrm{d}z_v^* + b_4 a_3 \grave{R}^{-}{}^{uv}_{lm} z_k^* z_u^* \mathrm{d}z_v \\
&\quad + (qa_4(Qa_2 + b_2) + b_4 b_3 + c_4 b_2 + q^{-2} e_4 b_3) z_k^* z_l \mathrm{d}z_m^* \\
&\quad + (d_4 b_2 + q^{-2} f_4 b_3) \delta_{kl} \mathrm{d}z_m^* \\
&\quad + (qa_4 c_2 + b_4 c_3 + c_4(qa_2 + c_2) + q^{-2} e_4(c_3 + q^2 d_3)) z_k^* z_l z_m^* \Omega_+ \\
&\quad + (qa_4 e_2 + b_4 e_3 + c_4 e_2 + q^{-2} e_4(qa_3 + e_3 + q^2 f_3)) z_k^* z_l z_m^* \Omega_- \\
&\quad + b_4 d_3 q^{2l} \delta_{lm} z_k^* \Omega_+ + b_4 f_3 q^{2l} \delta_{lm} z_k^* \Omega_- \\
&\quad + (d_4(qa_2 + c_2) + q^{-2} f_4(c_3 + q^2 d_3)) \delta_{kl} z_m^* \Omega_+ \\
&\quad + (d_4 e_2 + q^{-2} f_4(qa_3 + e_3 + q^2 f_3)) \delta_{kl} z_m^* \Omega_-
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z_k^* \cdot z_l^* z_m &= a_2 \check{R}^{-\,st}_{\;kl} z_s^* \mathrm{d}z_t^* \cdot z_m + (Qa_2 + b_2) z_k^* \mathrm{d}z_l^* \cdot z_m + c_2 z_k^* z_l^* \Omega_+ z_m + e_2 z_k^* z_l^* \Omega_- z_m \\
&= a_2 a_4 \acute{R}^{uv}_{tm} \check{R}^{-\,st}_{\;kl} z_s^* z_u \mathrm{d}z_v^* + (Qa_2 + b_2) a_4 \acute{R}^{uv}_{lm} z_k^* z_u \mathrm{d}z_v^* \\
&\quad + (qa_2 b_4 + b_2 b_4 + c_2 b_4 + q^{-2} e_2 b_1) z_k^* z_l^* \mathrm{d}z_m \\
&\quad + (qa_2 c_4 + b_2 c_4 + c_2(qa_4 + c_4 + d_4) + q^{-2} e_2 c_1) z_k^* z_l^* z_m \Omega_+ \\
&\quad + (qa_2 e_4 + b_2 e_4 + c_2(e_4 + f_4) + q^{-2} e_2(qa_1 + e_1)) z_k^* z_l^* z_m \Omega_- \\
&\quad + (Qa_2 + b_2) d_4 \delta_{lm} z_k^* \Omega_+ + (Qa_2 + b_2) f_4 \delta_{lm} z_k^* \Omega_- \\
&\quad + a_2 d_4 \delta_{tm} \check{R}^{-\,st}_{\;kl} z_s^* \Omega_+ + a_2 f_4 \delta_{tm} \check{R}^{-\,st}_{\;kl} z_s^* \Omega_-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z_k^* \cdot z_l^* z_m^* &= a_2 \check{R}^{-\,st}_{\;kl} z_s^* \mathrm{d}z_t^* \cdot z_m^* + (Qa_2 + b_2) z_k^* \mathrm{d}z_l^* \cdot z_m^* + c_2 z_k^* z_l^* \Omega_+ z_m^* + e_2 z_k^* z_l^* \Omega_- z_m^* \\
&= {a_2}^2 \check{R}^{-\,uv}_{\;tm} \check{R}^{-\,st}_{\;kl} z_s^* z_u^* \mathrm{d}z_v^* + (Qa_2 + b_2) a_2 \check{R}^{-\,uv}_{\;lm} z_k^* z_u^* \mathrm{d}z_v^* \\
&\quad + (qa_2 b_2 + {b_2}^2 + c_2 b_2 + q^{-2} e_2 b_3) z_k^* z_l^* \mathrm{d}z_m^* \\
&\quad + (qa_2 c_2 + b_2 c_2 + c_2(qa_2 + c_2) + q^{-2} e_2(c_3 + q^2 d_3)) z_k^* z_l^* z_m^* \Omega_+ \\
&\quad + (qa_2 e_2 + b_2 e_2 + c_2 e_2 + q^{-2} e_2(qa_3 + e_3 + q^2 f_3)) z_k^* z_l^* z_m^* \Omega_-
\end{aligned}$$

B.2 (zu Abschnitt 2.2.7, Seite 38)

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}z_k \cdot z_l^*)^* &= \big(a_3 \grave{R}^{-\,st}_{\;kl} z_s^* \mathrm{d}z_t + b_3 z_k \mathrm{d}z_l^* + c_3 z_k z_l^* \Omega_+ + d_3 q^{2l} \delta_{kl} \Omega_+ \\
&\quad + e_3 z_k z_l^* \Omega_- + f_3 q^{2l} \delta_{kl} \Omega_-\big)^* \\
&= \overline{a_3} \grave{R}^{-\,ts}_{\;lk} \mathrm{d}z_t^* \cdot z_s + \overline{b_3} \mathrm{d}z_l \cdot z_k^* - \overline{c_3} \Omega_+ z_l z_k^* - \overline{d_3} q^{2l} \delta_{kl} \Omega_+ \\
&\quad - \overline{e_3} \Omega_- z_l z_k^* - \overline{f_3} q^{2l} \delta_{kl} \Omega_- \\
&= \overline{a_3} a_4 z_l \mathrm{d}z_k^* + \overline{a_3} b_4 \grave{R}^{-\,ts}_{\;lk} z_t^* \mathrm{d}z_s + \overline{a_3} c_4 \grave{R}^{-\,ts}_{\;lk} z_t^* z_s \Omega_+ + \overline{a_3} d_4 \grave{R}^{-\,ts}_{\;lk} \delta_{ts} \Omega_+ \\
&\quad + \overline{a_3} e_4 \grave{R}^{-\,ts}_{\;lk} z_t^* z_s \Omega_- + \overline{a_3} f_4 \grave{R}^{-\,ts}_{\;lk} \delta_{ts} \Omega_- \\
&\quad + \overline{b_3} \mathrm{d}z_l \cdot z_k^* - \overline{c_3}(qa_4 + c_4 + d_4) z_l \Omega_+ z_k^* - \overline{c_3}(e_4 + f_4) z_l \Omega_- z_k^* \\
&\quad - \overline{c_3} b_4 \mathrm{d}z_l \cdot z_k^* - \overline{d_3} q^{2l} \delta_{kl} \Omega_+ - q^{-2} \overline{e_3} c_1 z_l \Omega_+ z_k^* \\
&\quad - q^{-2} \overline{e_3}(qa_1 + e_1) z_l \Omega_- z_k^* - q^{-2} \overline{e_3} b_1 \mathrm{d}z_l \cdot z_k^* - \overline{f_3} q^{2l} \delta_{kl} \Omega_-
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{a_3}a_4 z_l \mathrm{d}z_k^* + \overline{a_3}b_4 \grave{R}^{-}{}^{ts}_{lk} z_t^* \mathrm{d}z_s + \overline{a_3}c_4 \grave{R}^{-}{}^{ts}_{lk} z_t^* z_s \Omega_+ + \overline{a_3}d_4 \grave{R}^{-}{}^{ts}_{lk} \delta_{ts}\Omega_+ \\
&\quad + \overline{a_3}e_4 \grave{R}^{-}{}^{ts}_{lk} z_t^* z_s \Omega_- + \overline{a_3}f_4 \grave{R}^{-}{}^{ts}_{lk} \delta_{ts}\Omega_- \\
&\quad + \underbrace{(\overline{b_3} - \overline{c_3}b_4 - q^{-2}\overline{e_3}b_1)}_{=:\mu_1} \Big(a_3 \grave{R}^{-}{}^{ts}_{lk} z_t^* \mathrm{d}z_s + b_3 z_l \mathrm{d}z_k^* + c_3 z_l z_k^* \Omega_+ \\
&\qquad\qquad + d_3 q^{2l}\delta_{kl}\Omega_+ + e_3 z_l z_k^* \Omega_- + f_3 q^{2l}\delta_{kl}\Omega_- \Big) \\
&\quad - \underbrace{(\overline{c_3}(qa_4 + c_4 + d_4) + q^{-2}\overline{e_3}c_1)}_{=:\mu_2} \cdot \\
&\qquad \cdot \Big((qa_2 + c_2) z_l z_k^* \Omega_+ + e_2 z_l z_k^* \Omega_- + b_2 z_l \mathrm{d}z_k^* \Big) \\
&\quad - \underbrace{(q^{-2}\overline{c_3}(e_4 + f_4) + q^{-4}\overline{e_3}(qa_1 + e_1))}_{=:\mu_3} \cdot \Big((c_3 + q^2 d_3) z_l z_k^* \Omega_+ \\
&\qquad\qquad + (qa_3 + e_3 + q^2 f_3) z_l z_k^* \Omega_- + b_3 z_l \mathrm{d}z_k^* \Big) \\
&\quad - \overline{d_3} q^{2l}\delta_{kl}\Omega_+ - \overline{f_3} q^{2l}\delta_{kl}\Omega_- \\
&= (\overline{a_3}a_4 + \mu_1 b_3 - \mu_2 b_2 - \mu_3 b_3) z_l \mathrm{d}z_k^* \\
&\quad + (\overline{a_3}b_4 + \mu_1 a_3) \grave{R}^{-}{}^{ts}_{lk} z_t^* \mathrm{d}z_s \\
&\quad + (q^{-1}\overline{a_3}c_4 + \mu_1 c_3 - \mu_2(qa_2 + c_2) - \mu_3(c_3 + q^2 d_3)) z_l z_k^* \Omega_+ \\
&\quad + (q^{-1}\overline{a_3}e_4 + \mu_1 e_3 - \mu_2 e_2 - \mu_3(qa_3 + e_3 + q^2 f_3)) z_l^* z_k \Omega_- \\
&\quad + (q^{-2N-1}\overline{a_3}d_4 + \mu_1 d_3 - \overline{d_3}) q^{2l}\delta_{kl}\Omega_+ \\
&\quad + (q^{-2N-1}\overline{a_3}f_4 + \mu_1 f_3 - \overline{f_3}) q^{2l}\delta_{kl}\Omega_-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}z_k^* \cdot z_l)^* &= \big(a_4 \acute{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t^* + b_4 z_k^* \mathrm{d}z_l + c_4 z_k^* z_l \Omega_+ + d_4 \delta_{kl}\Omega_+ \\
&\quad + e_4 z_k^* z_l \Omega_- + f_4 \delta_{kl}\Omega_-)^* \\
&= \overline{a_4} \acute{R}^{ts}_{lk} \mathrm{d}z_t \cdot z_s^* + \overline{b_4} \mathrm{d}z_l^* \cdot z_k - \overline{c_4}\Omega_+ z_l^* z_k - \overline{d_4}\delta_{kl}\Omega_+ \\
&\quad - \overline{e_4}\Omega_- z_l^* z_k - \overline{f_4}\delta_{kl}\Omega_- \\
&= \overline{a_4}a_3 z_l^* \mathrm{d}z_k + \overline{a_4}b_3 \acute{R}^{ts}_{lk} z_t \mathrm{d}z_s^* + \overline{a_4}c_3 \acute{R}^{ts}_{lk} z_t z_s^* \Omega_+ + \overline{a_4}d_3 \acute{R}^{ts}_{lk} q^{2t}\delta_{ts}\Omega_+ \\
&\quad + \overline{a_4}e_3 \acute{R}^{ts}_{lk} z_t z_s^* \Omega_- + \overline{a_4}f_3 \acute{R}^{ts}_{lk} q^{2t}\delta_{ts}\Omega_- \\
&\quad + \overline{b_4} \mathrm{d}z_l^* \cdot z_k - \overline{c_4}(qa_2 + c_2) z_l^* \Omega_+ z_k - \overline{c_4}e_2 z_l^* \Omega_- z_k \\
&\quad - \overline{c_4}b_2 \mathrm{d}z_l^* \cdot z_k - \overline{d_4}\delta_{kl}\Omega_+ - q^{-2}\overline{e_4}(c_3 + q^2 d_3) z_l^* \Omega_+ z_k \\
&\quad - q^{-2}\overline{e_4}(qa_3 + e_3 + q^2 f_3) z_l^* \Omega_- z_k - q^{-2}\overline{e_4}b_3 \mathrm{d}z_l^* \cdot z_k - \overline{f_4}\delta_{kl}\Omega_-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \overline{a_4} a_3 z_l^* \mathrm{d}z_k + \overline{a_4} b_3 \acute{R}^{ts}_{lk} z_t \mathrm{d}z_s^* + \overline{a_4} c_3 \acute{R}^{ts}_{lk} z_t z_s^* \Omega_+ + \overline{a_4} d_3 \acute{R}^{ts}_{lk} q^{2t} \delta_{ts} \Omega_+ \\
&\quad + \overline{a_4} e_3 \acute{R}^{ts}_{lk} z_t z_s^* \Omega_- + \overline{a_4} f_3 \acute{R}^{ts}_{lk} q^{2t} \delta_{ts} \Omega_- \\
&\quad + \underbrace{(\overline{b_4} - \overline{c_4} b_2 - q^{-2} \overline{e_4} b_3)}_{=:\mu_4} \Big(a_4 \acute{R}^{ts}_{lk} z_t \mathrm{d}z_s^* + b_4 z_l^* \mathrm{d}z_k + c_4 z_l^* z_k \Omega_+ \\
&\qquad\qquad + d_4 \delta_{kl} \Omega_+ + e_4 z_l^* z_k \Omega_- + f_4 \delta_{kl} \Omega_- \Big) \\
&\quad - \underbrace{(\overline{c_4}(q a_2 + c_2) + q^{-2} \overline{e_4}(c_3 + q^2 d_3))}_{=:\mu_5} \cdot \\
&\qquad \cdot \Big((q a_4 + c_4 + d_4) z_l^* z_k \Omega_+ + (e_4 + f_4) z_l^* z_k \Omega_- + b_4 z_l^* \mathrm{d}z_k \Big) \\
&\quad - \underbrace{(q^{-2} \overline{c_4} e_2 + q^{-4} \overline{e_4}(q a_3 + e_3 + q^2 f_3))}_{=:\mu_6} \cdot \Big(c_1 z_l^* z_k \Omega_+ \\
&\qquad + (q a_1 + e_1) z_l^* z_k \Omega_- + b_1 z_l^* \mathrm{d}z_k \Big) \\
&\quad - \overline{d_4} \delta_{kl} \Omega_+ - \overline{f_4} \delta_{kl} \Omega_- \\
&= (\overline{a_4} a_3 + \mu_4 b_4 - \mu_5 b_4 - \mu_6 b_1) z_l^* \mathrm{d}z_k \\
&\quad + (\overline{a_4} b_3 + \mu_4 a_4) \acute{R}^{ts}_{lk} z_t \mathrm{d}z_s^* \\
&\quad + (q \overline{a_4} c_3 + \mu_4 c_4 - \mu_5 (q a_4 + c_4 + d_4) - \mu_6 c_1) z_l^* z_k \Omega_+ \\
&\quad + (q \overline{a_4} e_3 + \mu_4 (e_4 + f_4) - \mu_5 e_4 - \mu_6 (q a_1 + e_1)) z_l^* z_k \Omega_- \\
&\quad + (q^{2N+1} \overline{a_4} d_3 + \mu_4 d_4 - \overline{d_4}) \delta_{kl} \Omega_+ \\
&\quad + (q^{2N+1} \overline{a_4} f_3 + \mu_4 f_4 - \overline{f_4}) \delta_{kl} \Omega_-
\end{aligned}
$$

B.3 (zu Abschnitt 2.2.9, Seite 43)

$$
\begin{aligned}
(\Omega_- z_m)^* &= (q^{-2} \omega z_m \Omega_+ + (q^{-2} \alpha^{-1} \omega + 1) z_m \Omega_- - \alpha (q^{-2} \alpha^{-1} - 1) \mathrm{d}z_m)^* \\
&= -q^{-2} \overline{\omega} \Omega_+ z_m^* - (q^{-2} \alpha^{-1} \overline{\omega} + 1) \Omega_- z_m^* - \alpha (q^{-2} \alpha^{-1} - 1) \mathrm{d}z_m^* \\
&= -q^{-2} \overline{\omega} (q^2 \alpha \omega^{-1} + 1) z_m^* \Omega_+ - \overline{\omega} \omega^{-1} z_m^* \Omega_- - q^{-2} \overline{\omega} (q^{-2} \alpha^{-1} - 1) \mathrm{d}z_m^* \\
&\quad + \alpha (q^{-2} \alpha^{-1} \overline{\omega} + 1) z_m^* \Omega_+ + \alpha (q^{-2} \alpha^{-1} - 1)(q^{-2} \alpha^{-1} \overline{\omega} + 1) \mathrm{d}z_m^* \\
&\quad - \alpha (q^{-2} \alpha^{-1} - 1) \mathrm{d}z_m^* \\
&= -\overline{\omega} \omega^{-1} z_m^* \Omega_- + \alpha (1 - \overline{\omega} \omega^{-1}) z_m^* \Omega_+
\end{aligned}
$$

B.4 (zu Abschnitt 2.2.9, Seite 43)

$$\begin{aligned}
(\Omega_- z_m)^* &= (q^{-2}\omega z_m \Omega_+ + \omega\psi z_m \Omega_-)^* \\
&= -q^{-2}\overline{\omega}\Omega_+ z_m^* - \overline{\omega}\overline{\psi}\Omega_- z_m^* \\
&= -q^{-2}\overline{\omega}\psi z_m^* \Omega_+ - \overline{\omega}\omega^{-1} z_m^* \Omega_- + q^{-2}\overline{\omega}\overline{\psi} z_m^* \Omega_+ \\
&= q^{-2}\overline{\omega}(\overline{\psi} - \psi) z_m^* \Omega_+ - \overline{\omega}\omega^{-1} z_m^* \Omega_-
\end{aligned}$$

B.5 (zu Abschnitt 2.2.10, Seite 44)

$$\begin{aligned}
\Omega_+ z_m &= \sum_i z_i \mathrm{d}z_i^* \cdot z_m \\
&= q^{-1}\sum_i \acute{R}^{kl}_{im} z_i z_k \mathrm{d}z_l^* - q^{2N-2}\varrho z_m \Omega_+ - q^{2N}\tau z_m \Omega_- \\
&\qquad + (\mathfrak{s}_+\varrho - 1)\sum_i z_i z_i^* z_m \Omega_+ + q^2(\mathfrak{s}_+\tau - 1)\sum_i z_i z_i^* z_m \Omega_- \\
&= q^{-2}(\mathfrak{s}_+ - 1)\varrho z_m \Omega_+ + ((\mathfrak{s}_+ - 1)\tau - q^2) z_m \Omega_-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_- z_m &= \sum_i q^{-2i} z_i^* \mathrm{d}z_i \cdot z_m \\
&= q^{-1}\sum_i q^{-2i}\hat{R}^{-}{}^{kl}_{im} z_i^* z_k \mathrm{d}z_l - q^{-2}(\varrho/\tau)((\mathfrak{s}_+ - 1)\varrho - 1)\sum_i q^{-2i} z_i^* z_i z_m \Omega_+ \\
&\qquad - (\varrho/\tau)((\mathfrak{s}_+ - 1)\tau - q^2)\sum_i q^{-2i} z_i^* z_i z_m \Omega_- \\
&= -q^{-4}(\varrho/\tau)((\mathfrak{s}_+ - 1)\varrho - 1) z_m \Omega_+ + q^{-2}(1 - (\mathfrak{s}_+ - 1)\varrho + q^2\varrho/\tau) z_m \Omega_-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_+ z_m^* &= \sum_i z_i \mathrm{d}z_i^* \cdot z_m^* \\
&= q\sum_i \check{R}^{kl}_{im} z_i z_k^* \mathrm{d}z_l^* - (\tau/\varrho)((\mathfrak{s}_+ - 1)\varrho - 1)\sum_i z_i z_i^* z_m^* \Omega_+ \\
&\qquad - q^2(\tau/\varrho)((\mathfrak{s}_+ - 1)\tau - q^2)\sum_i z_i z_i^* z_m^* \Omega_- \\
&= (q^2 - (\mathfrak{s}_+ - 1)\tau + \tau/\varrho) z_m^* \Omega_+ - q^2(\tau/\varrho)((\mathfrak{s}_+ - 1)\tau - q^2) z_m^* \Omega_-
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_- z_m^* &= \sum_i q^{-2i} z_i^* \mathrm{d}z_i \cdot z_m^* \\
&= q\sum_i q^{-2i}\grave{R}^{-}{}^{kl}_{im} z_i^* z_k^* \mathrm{d}z_l - q^{-2}\varrho z_m^* \Omega_+ - \tau z_m^* \Omega_- \\
&\qquad + (\mathfrak{s}_+\varrho - 1)\sum_i q^{-2i} z_i^* z_i z_m^* \Omega_+ + q^2(\mathfrak{s}_+\tau - 1)\sum_i q^{-2i} z_i^* z_i z_m^* \Omega_-
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= q^{-2}((\mathfrak{s}_+ - 1)\varrho - 1)z_m^*\Omega_+ + (\mathfrak{s}_+ - 1)\tau z_m^*\Omega_- \\
(\Omega_+ z_m)^* &= (q^{-2}(\mathfrak{s}_+ - 1)\varrho z_m\Omega_+ + ((\mathfrak{s}_+ - 1)\tau - q^2)z_m\Omega_-)^* \\
&= -q^{-2}(\mathfrak{s}_+ - 1)\bar{\varrho}\Omega_+ z_m^* - ((\mathfrak{s}_+ - 1)\bar{\tau} - q^2)\Omega_- z_m^* \\
&= -q^{-2}(\mathfrak{s}_+ - 1)\bar{\varrho}(q^2 + \tau/\varrho - (\mathfrak{s}_+ - 1)\tau)z_m^*\Omega_+ \\
&\quad + (\mathfrak{s}_+ - 1)\bar{\varrho}(\tau/\varrho)((\mathfrak{s}_+ - 1)\tau - q^2)z_m^*\Omega_- \\
&\quad - q^{-2}((\mathfrak{s}_+ - 1)\bar{\tau} - q^2)((\mathfrak{s}_+ - 1)\varrho - 1)z_m^*\Omega_+ \\
&\quad - (\mathfrak{s}_+ - 1)\tau((\mathfrak{s}_+ - 1)\bar{\tau} - q^2)z_m^*\Omega_- \\
&= \big(-(\mathfrak{s}_+ - 1)\bar{\varrho} - q^{-2}(\mathfrak{s}_+ - 1)\tau\bar{\varrho}/\varrho \\
&\qquad + q^{-2}(\mathfrak{s}_+ - 1)^2\varrho\bar{\tau} + (\mathfrak{s}_+ - 1)\varrho + q^{-2}(\mathfrak{s}_+ - 1)\bar{\tau} - 1\big)z_m^*\Omega_+ \\
&\quad + \big((\mathfrak{s}_+ - 1)^2\tau^2\bar{\varrho}/\varrho - q^2(\mathfrak{s}_+ - 1)\tau\bar{\varrho}/\varrho \\
&\qquad - (\mathfrak{s}_+ - 1)^2\tau\bar{\tau} + q^2(\mathfrak{s}_+ - 1)\tau\big)z_m^*\Omega_-
\end{aligned}
$$

B.6 (zu Abschnitt 2.2.11, Seite 46)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}z_k \cdot z_l z_m &= q\alpha\hat{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t \cdot z_m + (q^2\alpha - 1)z_k\mathrm{d}z_l \cdot z_m \\
&\quad + q^2\lambda^{-1}(\alpha - \alpha^{-1}\lambda^{-1} + \mathfrak{s}'_+\tau)z_k z_l\Omega_+ z_m \\
&= q^2\alpha^2\hat{R}^{uv}_{tm}\hat{R}^{st}_{kl} z_s z_u\mathrm{d}z_v + q\alpha(q^2\alpha - 1)\hat{R}^{uv}_{lm} z_k z_u \mathrm{d}z_v \\
&\quad + (q^2\alpha - 1)\big(\alpha + q^2\alpha - 1 - \alpha^{-1}\lambda^{-1}(\alpha - \alpha^{-1}\lambda^{-1} + \mathfrak{s}'_+\tau)\big)z_k z_l \mathrm{d}z_m \\
&\quad + (\alpha - \alpha^{-1}\lambda^{-1} + \mathfrak{s}'_+\tau)\big(q^2\alpha\lambda^{-1} + q^2\lambda^{-1}(q^2\alpha - 1 + \alpha^{-1}\lambda^{-1} - \mathfrak{s}'_+\tau)\big) \cdot \\
&\qquad\quad \cdot z_k z_l z_m \Omega_+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}z_k\big(\hat{R}^{ij}_{lm} z_i z_j - q z_l z_m\big) \\
&\quad = q^2\alpha^2\hat{R}^{uv}_{tm}\hat{R}^{st}_{kl}\big(\hat{R}^{ab}_{su} z_a z_b - q z_s z_u\big)\mathrm{d}z_v \\
&\qquad + (\alpha - \alpha^{-1}\lambda^{-1} + \mathfrak{s}'_+\tau)\big(q^2\alpha\lambda^{-1} + q^2\lambda^{-1}(q^2\alpha - 1 + \alpha^{-1}\lambda^{-1} - \mathfrak{s}'_+\tau)\big) \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot z_k\big(\hat{R}^{ij}_{lm} z_i z_j - q z_l z_m\big)\Omega_+ \\
&\qquad + \Big(-q^4\alpha^2 + q^2\alpha + q^4\alpha^2 + q^2\alpha^2 - 2q^2\alpha - \alpha + 1 + \lambda^{-1} - \alpha^{-2}\lambda^{-2} \\
&\qquad\qquad - q^2\alpha\lambda^{-1} + q^2\alpha^{-1}\lambda^{-2} + \lambda^{-1}(\alpha^{-1} - q^2)\mathfrak{s}'_+\tau\Big) \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot z_k\big(\hat{R}^{ij}_{lm} z_i \mathrm{d}z_j - q z_l \mathrm{d}z_m\big) \\
&\quad = \lambda^{-1}(\alpha^{-1} - q^2)\mathfrak{s}'_+\tau z_k\big(\hat{R}^{ij}_{lm} z_i \mathrm{d}z_j - q z_l \mathrm{d}z_m\big)
\end{aligned}
$$

B.7 (zu Abschnitt 2.2.11, Seite 47)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}z_k \cdot z_l^* z_m^* &= q\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t \cdot z_m^* + (q^2\lambda^{-1} - 1 - q^2\mathfrak{s}_+\tau) z_k z_l^* \Omega_+ z_m^* + \tau q^{2k}\delta_{kl}\Omega_+ z_m^* \\
&= q^2 \grave{R}^{-}{}^{uv}_{tm} \grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* z_u^* \mathrm{d}z_v + q\tau \grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} \delta_{tm} q^{2m} z_s^* \Omega_+ \\
&\quad + \lambda\tau(q^{-2} + \mathfrak{s}'_+\tau)\delta_{kl} q^{2l} z_m^* \Omega_+ \\
&\quad + (q^2\lambda^{-1} - 1 - q^2\mathfrak{s}_+\tau)(1 + q^{-2}\lambda + \mathfrak{s}'_+\lambda\tau) z_k z_l^* z_m^* \Omega_+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}z_k \big(\check{R}^{-}{}^{ij}_{lm} z_i^* z_j^* - q^{-1} z_l^* z_m^*\big) \\
&\quad = q^2 \grave{R}^{-}{}^{uv}_{tm} \grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} (\check{R}^{-}{}^{ab}_{su} z_a^* z_b^* - q^{-1} z_s^* z_u^*) \mathrm{d}z_v \\
&\qquad + (q^2\lambda^{-1} - 1 - q^2\mathfrak{s}_+\tau)(1 + q^{-2}\lambda + \mathfrak{s}'_+\lambda\tau) \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot z_k (\check{R}^{-}{}^{ij}_{lm} z_i^* z_j^* - q^{-1} z_l^* z_m^*)\Omega_+ \\
&\qquad + q\tau \grave{R}^{-}{}^{st}_{ki} \check{R}^{-}{}^{ij}_{lm} \delta_{tj} q^{2j} z_s^* \Omega_+ - \tau \grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} \delta_{tm} q^{2m} z_s^* \Omega_+ \\
&\qquad + \lambda\tau(q^{-2} + \mathfrak{s}'_+\tau) \check{R}^{-}{}^{ij}_{lm} \delta_{ki} q^{2k} z_j^* \Omega_+ - q^{-1}\lambda\tau(q^{-2} + \mathfrak{s}'_+\tau)\delta_{kl} q^{2k} z_m^* \Omega_+ \\
&\quad = (-q^2 + q^{-2}\lambda + \mathfrak{s}'_+\lambda\tau)\tau(\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} \delta_{tm} q^{2m} z_s^* \Omega_+ - q^{-1}\delta_{kl} q^{2k} z_m^* \Omega_+)
\end{aligned}
$$

B.8 (zu Abschnitt 2.2.11, Seite 49)

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}z_k \cdot z_l^*)^* &= (a_3 \grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* \mathrm{d}z_t + b_3 z_k \mathrm{d}z_l^* + c_3 z_k z_l^* \Omega_+ + d_3 q^{2k} \delta_{kl} \Omega_+) \\
&= \overline{a_3} \grave{R}^{-}{}^{ts}_{lk} \mathrm{d}z_t^* \cdot z_s + \overline{b_3} \mathrm{d}z_l \cdot z_k^* - \overline{c_3} \Omega_+ z_l z_k^* - \overline{d_3} q^{2k} \delta_{lk} \Omega_+ \\
&= \overline{a_3}(a_4 z_l \mathrm{d}z_k^* + b_4 \grave{R}^{-}{}^{ts}_{lk} z_t^* \mathrm{d}z_s + q^{-1} c_4 z_l z_k^* \Omega_+ + q^{-2N-1} d_4 q^{2k} \delta_{lk} \Omega_+) \\
&\quad + \overline{b_3}(a_3 \grave{R}^{-}{}^{ts}_{lk} z_t^* \mathrm{d}z_s + b_3 b_3 z_l \mathrm{d}z_k^* + c_3 z_l z_k^* \Omega_+ + d_4 q^{2k} \delta_{lk} \Omega_+) \\
&\quad - \overline{c_3}(q a_4 + c_4 + d_4)(q a_2 + c_2) z_l z_k^* \Omega_+ \\
&\quad - \overline{c_3}(q a_4 + c_4 + d_4) b_2 z_l \mathrm{d}z_k^* \\
&\quad - \overline{c_3} b_4 (a_3 \grave{R}^{-}{}^{ts}_{lk} z_t^* \mathrm{d}z_s + b_3 z_l \mathrm{d}z_k^* + c_3 z_l z_k^* \Omega_+ + d_3 q^{2k} \delta_{lk} \Omega_+) \\
&\quad - \overline{d_3} q^{2k} \delta_{lk} \Omega_+ \\
&= (\overline{a_3} a_4 + \overline{b_3} b_3 - \overline{c_3}((q a_4 + c_4 + d_4) b_2 + b_4 b_3)) z_l \mathrm{d}z_k^* \\
&\quad + (\overline{a_3} b_4 + \overline{b_3} a_3 - \overline{c_3} b_4 a_3) \grave{R}^{-}{}^{ts}_{lk} z_t^* \mathrm{d}z_s \\
&\quad + (q^{-1} \overline{a_3} c_4 + \overline{b_3} c_3 - \overline{c_3}((q a_4 + c_4 + d_4)(q a_2 + c_2) + b_4 c_3)) z_l z_k^* \Omega_+ \\
&\quad + ((q^{-2N-1} \overline{a_3} + \overline{b_3} - q^{-2N} \overline{c_3} b_4) d_4 - \overline{d_3}) q^{2k} \delta_{lk} \Omega_+
\end{aligned}
$$

B.9 (zu Abschnitt 2.2.12, Seite 51)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}z_m^* \cdot \sum_i z_i z_i^* &= q^{-1}\sum_i \acute{R}_{ki}^{st} z_s \mathrm{d}z_t^* \cdot z_i^* + {\mathfrak{s}'_+}^{-1}\sum_i z_m^* z_i \Omega_+ z_i^* - q^{2N-2}\Omega_+ z_m^* \\
&= \sum_i z_i z_i^* \mathrm{d}z_m^* + qQ z_m^* \Omega_+ + c_2 \sum_i z_m^* z_i z_i^* \Omega_+ \\
&\qquad + {\mathfrak{s}'_+}^{-1}(q^2 + c_2)\sum_i z_m^* z_i z_i^* \Omega_+ - {\mathfrak{s}'_+}^{-1} q^{2N-2}(q^2 + c_2) z_m^* \Omega_+ \\
&= \mathrm{d}z_m^* + \big(qQ + c_2 + {\mathfrak{s}'_+}^{-1}(1 - q^{2N-2})(q^2 + c_2)\big) z_m^* \Omega_+ \\
&= \mathrm{d}z_m^* + \big(qQ + c_2 - qQ - q^{-1}Qc_2\big) z_m^* \Omega_+
\end{aligned}
$$

B.10 (zu Abschnitt 4.2.2, Seite 79)

$$
\begin{aligned}
\sigma(\mathrm{d}z_i \otimes \Omega_+) &= -q^{-1}\sum_j \hat{R}_{ij}^{st} \mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t \cdot z_j^* \\
&= -q^{-2}\sum_j \hat{R}_{ij}^{st} \grave{R}^{-}{}_{tj}^{uv} \mathrm{d}z_s \cdot z_u^* \otimes \mathrm{d}z_v - Q\sum_j \hat{R}_{ij}^{st} \mathrm{d}z_s \cdot z_t \otimes \mathrm{d}z_j^* \\
&\qquad - q^{-1}Q^2 \sum_j \hat{R}_{ij}^{st} \mathrm{d}z_s \cdot z_t z_j^* \otimes \Omega \\
&= -q^{-2}\sum_s \mathrm{d}z_s \cdot z_s^* \otimes \mathrm{d}z_i - qQ z_i \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \\
&\qquad - qQ^2 \sum_j \hat{R}_{ij}^{st} z_s \mathrm{d}z_t \otimes \mathrm{d}z_j^* - Q^2 \sum_s \mathrm{d}z_s \cdot z_s^* z_i \otimes \Omega \\
&= -q^{-3}Q\Omega \otimes \mathrm{d}z_i - qQ z_i \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \\
&\qquad - Q^2 \sum_j \mathrm{d}z_i \otimes z_j \mathrm{d}z_j^* - q^{-1}Q^3 \Omega z_i \otimes \Omega \\
&= -q^{-3}Q\Omega \otimes \mathrm{d}z_i - qQ z_i \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \\
&\qquad + q^{-1}Q^3 \mathrm{d}z_i \otimes \Omega - q^{-1}Q^3 z_i \Omega \otimes \Omega - q^{-1}Q^3 \mathrm{d}z_i \otimes \Omega,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma(\Omega_- \otimes \Omega) &= Q^2 \sum_i q^{-2i} z_i^* z_i \Omega \otimes \Omega + q^{-2}\sum_i q^{-2i} z_i^* \Omega \otimes \mathrm{d}z_i \\
&\qquad + q^2 \sum_i q^{-2i} z_i^* z_i \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \\
&= q^{-2}Q^2 \Omega \otimes \Omega + q^{-2}\sum_i q^{-2i}\Omega \otimes z_i^* \mathrm{d}z_i - q^{-2}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \\
&= q^{-1}Q\Omega \otimes \Omega - q^{-2}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+,
\end{aligned}
$$

B.11 (zu Abschnitt 4.2.2, Seite 79)

$$
\begin{aligned}
\sigma(\mathrm{d}z_i \otimes \Omega_+) &= -q\sum_j \hat{R}^{-}{}^{st}_{ij}\mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t \cdot z_j^* \\
&= -\sum_j \hat{R}^{-}{}^{st}_{ij}\grave{R}^{-}{}^{uv}_{tj}\mathrm{d}z_s \cdot z_u^* \otimes \mathrm{d}z_v - q^2Q\sum_j \hat{R}^{-}{}^{st}_{ij}\mathrm{d}z_s \cdot z_t \otimes \mathrm{d}z_j^* \\
&\quad - qQ^2\sum_j \hat{R}^{-}{}^{st}_{ij}\mathrm{d}z_s \cdot z_t z_j^* \otimes \Omega \\
&= -\sum_s \mathrm{d}z_s \cdot z_s^* \otimes \mathrm{d}z_i + qQ\sum_t q^{-2t}\mathrm{d}z_i \otimes z_t^*\mathrm{d}z_t \\
&\quad - q^3Qz_i\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - q^2Q^2\sum_s z_i\mathrm{d}z_s \cdot z_s^* \otimes \Omega \\
&= -qQ^3z_i\Omega \otimes \Omega - q^3Qz_i\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - q^{-1}Q\Omega \otimes \mathrm{d}z_i + Q^2\mathrm{d}z_i \otimes \Omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma(\Omega_- \otimes \Omega) &= q^2Q^2\sum_i q^{-2i}z_i^*z_i\Omega \otimes \Omega + q^4\sum_i q^{-2i}z_i^*z_i\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \\
&\quad + \sum_i q^{-2i}z_i^*\Omega \otimes \mathrm{d}z_i - qQ\sum_i q^{-2i}z_i^*\mathrm{d}z_i \otimes \Omega \\
&= Q^2\Omega \otimes \Omega + q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + \sum_i q^{-2i}\Omega \otimes z_i^*\mathrm{d}z_i - \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- - Q^2\Omega \otimes \Omega \\
&= q^{-1}Q\Omega \otimes \Omega - \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+
\end{aligned}
$$

B.12 (zu Abschnitt 4.2.2, Seite 79)

$$
\begin{aligned}
\sigma(\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega_-) &= -q\sum_j q^{-2j}\check{R}^{-}{}^{st}_{ij}\mathrm{d}z_s^* \otimes \mathrm{d}z_t^* \cdot z_j \\
&= -q^2\sum_j q^{-2j}\check{R}^{-}{}^{st}_{ij}\acute{R}^{uv}_{tj}\mathrm{d}z_s^* \cdot z_u \otimes \mathrm{d}z_v^* + Q\sum_j q^{-2j}\check{R}^{-}{}^{st}_{ij}\mathrm{d}z_s^* \cdot z_t^* \otimes \mathrm{d}z_j \\
&\quad - qQ^2\sum_j q^{-2j}\check{R}^{-}{}^{st}_{ij}\mathrm{d}z_s^* \cdot z_t^* z_j \otimes \Omega \\
&= -q^2\sum_s q^{-2s}\mathrm{d}z_s^* \cdot z_s \otimes \mathrm{d}z_i^* + q^{-1}Qz_i^*\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&\quad - q^{-1}Q^2\sum_j q^{-2j}\check{R}^{-}{}^{st}_{ij}z_s^*\mathrm{d}z_t^* \otimes \mathrm{d}z_j - Q^2\sum_s q^{-2s}\mathrm{d}z_s^* \cdot z_s z_t^* \otimes \Omega \\
&= qQ\Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* + q^{-1}Qz_i^*\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- - Q^2\sum_j q^{-2j}\mathrm{d}z_i^* \otimes z_j^*\mathrm{d}z_j + q^{-1}Q^3\Omega z_i^* \otimes \Omega \\
&= q^{-1}Q^3z_i^*\Omega \otimes \Omega + q^{-1}Q^3\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \\
&\quad - q^{-1}Q^3\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega + qQ\Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* + q^{-1}Qz_i\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma(\Omega_+ \otimes \Omega) &= Q^2 \sum_i z_i z_i^* \Omega \otimes \Omega + q^2 \sum_i z_i \Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* + \sum_i z_i z_i^* \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&= Q^2 \Omega \otimes \Omega + q^2 \sum_i \Omega \otimes z_i \mathrm{d}z_i \\
&\quad - q^2 \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ q \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&= -q^{-1} Q \Omega \otimes \Omega - q^2 \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-
\end{aligned}
$$

B.13 (zu Abschnitt 4.2.2, Seite 79)

$$
\begin{aligned}
\sigma(\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega_-) &= -q^{-1} \sum_j q^{-2j} \check{R}^{-}{}^{st}_{ij} \mathrm{d}z_s^* \otimes \mathrm{d}z_t^* \cdot z_j \\
&= -\sum_j q^{-2j} \check{R}^{-}{}^{st}_{ij} \acute{R}^{uv}_{tj} \mathrm{d}z_s^* \cdot z_u \otimes \mathrm{d}z_v^* + q^{-2} Q \sum_j q^{-2j} \check{R}^{-}{}^{st}_{ij} \mathrm{d}z_s^* \cdot z_t^* \otimes \mathrm{d}z_j \\
&\quad - q^{-1} Q^2 \sum_j q^{-2j} \check{R}^{-}{}^{st}_{ij} \mathrm{d}z_s^* \cdot z_t^* z_j \otimes \Omega \\
&= -\sum_s q^{-2s} \mathrm{d}z_s^* \cdot z_s \otimes \mathrm{d}z_i^* - q^{-1} Q \sum_t \mathrm{d}z_i^* \otimes z_t \mathrm{d}z_t^* \\
&\quad + q^{-3} Q^3 z_i^* \Omega \otimes \Omega + q^{-3} Q z_i^* \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&= q^{-1} Q \Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* + q^{-2} Q^2 \mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \\
&\quad + q^{-3} Q^3 z_i^* \Omega \otimes \Omega + q^{-3} Q z_i^* \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma(\Omega_+ \otimes \Omega) &= q^{-2} Q^2 \sum_i z_i z_i^* \Omega \otimes \Omega + \sum_i z_i \Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* + q^{-1} Q \sum_i z_i \mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \\
&\quad + q^{-2} \sum_i z_i z_i^* \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&= q^{-2} Q^2 \Omega \otimes \Omega + \sum_i \Omega \otimes z_i \mathrm{d}z_i^* - \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - q^{-2} Q^2 \Omega \otimes \Omega + q^{-2} \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&= -q^{-1} Q \Omega \otimes \Omega - \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + q^{-2} \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-
\end{aligned}
$$

B.14 (zu Abschnitt 4.2.3, Seite 80)

$$
\begin{aligned}
\sigma(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l^*) &= q^{-2} \Omega \otimes \mathrm{d}z_k \cdot z_l^* + Q^2 z_k \Omega \otimes \Omega z_l^* + q^2 z_k \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ z_l^* \\
&\quad - q^{-3} \grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* \Omega \otimes \mathrm{d}z_t - q^{-1} Q^2 \grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* z_t \Omega \otimes \Omega - q \grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* z_t \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \\
&\quad - Q^2 z_k \mathrm{d}z_l^* \otimes \Omega - q Q z_k \Omega \otimes \mathrm{d}z_l^* - q^{-1} Q^3 z_k z_l^* \Omega \otimes \Omega \\
&\quad - q^{-1} Q z_k z_l^* \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- - Q^2 z_k z_l^* \Omega \otimes \Omega - q Q z_k z_l^* \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \\
&\quad + q^{-1} Q z_k z_l^* \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= q^{-3}\grave{R}^{-\,st}_{\ kl}\Omega z^*_s \otimes \mathrm{d}z_t + q^{-1}Q\Omega z_k \otimes \mathrm{d}z^*_l + q^{-2}Q^2\Omega z_k z^*_l \otimes \Omega \\
&\quad + Q^2 z_k z^*_l \Omega \otimes \Omega + Q^2 z_k \mathrm{d}z^*_l \otimes \Omega + Q^2 z_k \Omega \otimes \mathrm{d}z^*_l \\
&\quad + q^2 z_k \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ z^*_l - q^{-3}\grave{R}^{-\,st}_{\ kl} z^*_s \Omega \otimes \mathrm{d}z_t - q^{-2}Q^2 z_k z^*_l \Omega \otimes \Omega \\
&\quad - z_k z^*_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - Q^2 z_k \mathrm{d}z^*_l \otimes \Omega - qQ z_k \Omega \otimes \mathrm{d}z^*_l \\
&\quad - q^{-1}Q^3 z_k z^*_l \Omega \otimes \Omega - q^{-1}Q z_k z^*_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- - Q^2 z_k z^*_l \Omega \otimes \Omega \\
&\quad - qQ z_k z^*_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + q^{-1}Q z_k z^*_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&= q^{-3}\grave{R}^{-\,st}_{\ kl}\mathrm{d}z^*_s \otimes \mathrm{d}z_t + q^{-3}\grave{R}^{-\,st}_{\ kl} z^*_s \Omega \otimes \mathrm{d}z_t + q^{-1}Q\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z^*_l \\
&\quad + q^{-1}Q z_k \Omega \otimes \mathrm{d}z^*_l + q^{-2}Q^2 z_k z^*_l \Omega \otimes \Omega + q^{-2}Q^2 z_k \mathrm{d}z^*_l \otimes \Omega \\
&\quad + q^{-2}Q^2 \mathrm{d}z_k \cdot z^*_l \otimes \Omega + q^2 z_k \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ z^*_l - q^{-3}\grave{R}^{-\,st}_{\ kl} z^*_s \Omega \otimes \mathrm{d}z_t \\
&\quad - z_k z^*_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - q^{-1}Q\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - q^{-1}Q z_k z^*_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&\quad - qQ z_k z^*_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + q^{-1}Q z_k z^*_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- - q^{-1}Q z_k \Omega \otimes \mathrm{d}z^*_l \\
&\quad - Q^2 z_k z^*_l \Omega \otimes \Omega \\
&= q^{-3}\grave{R}^{-\,st}_{\ kl}\mathrm{d}z^*_s \otimes \mathrm{d}z_t + q^{-1}Q\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z^*_l + q^{-2}Q^2 z_k \mathrm{d}z^*_l \otimes \Omega \\
&\quad + q^{-3}Q^2\grave{R}^{-\,st}_{\ kl} z^*_s \mathrm{d}z_t \otimes \Omega + q^{-1}Q^3 z_k \mathrm{d}z^*_l \otimes \Omega + q^{-2}Q^4 z_k z^*_l \Omega \otimes \Omega \\
&\quad + q^2 z_k \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ z^*_l - q^2 z_k z^*_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - q^{-1}Q^3 z_k z^*_l \Omega \otimes \Omega \\
&= q^{-3}\grave{R}^{-\,st}_{\ kl}\mathrm{d}z^*_s \otimes \mathrm{d}z_t + q^{-1}Q\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z^*_l + q^{-3}Q^2\grave{R}^{-\,st}_{\ kl} z^*_s \mathrm{d}z_t \otimes \Omega \\
&\quad + z_k z^*_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - q^{-1}Q^3 z_k z^*_l \Omega \otimes \Omega - Q^2 z_k \mathrm{d}z^*_l \otimes \Omega \\
&\quad - Q^2 z_k \Omega \otimes \mathrm{d}z^*_l - q^2 z_k z^*_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - q^{-3}Q^3 z_k z^*_l \Omega \otimes \Omega \\
&\quad + Q^2 z_k \mathrm{d}z^*_l \otimes \Omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma(\mathrm{d}z^*_k \otimes \mathrm{d}z_l) &= q^{-1}Q\mathrm{d}z^*_k \otimes \Omega z_l + \Omega \otimes \mathrm{d}z^*_k \cdot z_l + q^{-2}Q^2 z^*_k \Omega \otimes \Omega z_l \\
&\quad + q^{-2} z^*_k \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- z_l - Q\acute{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z^*_t \otimes \Omega - q\acute{R}^{st}_{kl} z_s \Omega \otimes \mathrm{d}z^*_t \\
&\quad - q^{-1}Q^2\acute{R}^{st}_{kl} z_s z^*_t \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + q^{-3}Q z^*_k \Omega \otimes \mathrm{d}z_l + q^{-1}Q^3 z^*_k z_l \Omega \otimes \Omega \\
&\quad + qQ z^*_k z_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - Q^2 z^*_k z_l \Omega \otimes \Omega - qQ z^*_k z_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + q^{-1}Q z^*_k z_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&= q^{-1}Q\mathrm{d}z^*_k \otimes \mathrm{d}z_l + q^{-1}Q\mathrm{d}z^*_k \cdot z_l \otimes \Omega + q\acute{R}^{st}_{kl}\Omega z_s \otimes \mathrm{d}z^*_t \\
&\quad - q^{-1}Q\Omega z^*_k \otimes \mathrm{d}z_l + Q^2\Omega z^*_k z_l \otimes \Omega + q^{-2}Q^2 z^*_k z_l \Omega \otimes \Omega \\
&\quad + q^{-2}Q^2 z^*_k \mathrm{d}z_l \otimes \Omega + q^{-2}Q^2 z^*_k \Omega \otimes \mathrm{d}z_l + z^*_k z_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&\quad + q^{-1}Q^3 z^*_k z_l \Omega \otimes \Omega - q^{-2}Q^2 z^*_k \mathrm{d}z_l \otimes \Omega - q^{-2}Q^2 z^*_k \Omega \otimes \mathrm{d}z_l \\
&\quad - Q\acute{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z^*_t \otimes \Omega - q\acute{R}^{st}_{kl} z_s \Omega \otimes \mathrm{d}z^*_t - Q^2 z^*_k z_l \Omega \otimes \Omega - z^*_k z_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&\quad + q^{-3}Q z^*_k \Omega \otimes \mathrm{d}z_l + q^{-1}Q^3 z^*_k z_l \Omega \otimes \Omega + qQ z^*_k z_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \\
&\quad - Q^2 z^*_k z_l \Omega \otimes \Omega - qQ z^*_k z_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + q^{-1}Q z^*_k z_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= q^{-1} Q z_k^* z_l \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + qQ^2 \acute{R}^{st}_{kl} z_s \mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega + q\acute{R}^{st}_{kl} \mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t^* \\
&\quad - q^{-2} Q^2 z_k^* \Omega \otimes \mathrm{d}z_l + Q_+ Q^3 z_k^* z_l \Omega \otimes \Omega
\end{aligned}
$$

B.15 (zu Abschnitt 4.2.4, Seite 81)

$$
\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j \cdot z_k) = q^2 \hat{R}^{uv}_{is} \hat{R}^{st}_{jk} z_u \sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_v \otimes \mathrm{d}z_t) = q \hat{R}^{ab}_{vt} \hat{R}^{uv}_{is} \hat{R}^{st}_{jk} z_u \mathrm{d}z_a \otimes \mathrm{d}z_b
$$

$$
\sigma_{\mathrm{R}}(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j \cdot z_k) = q^{-1} \hat{R}^{st}_{ij} \mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t \cdot z_k = q \hat{R}^{ua}_{sv} \hat{R}^{vb}_{tk} \hat{R}^{st}_{ij} z_u \mathrm{d}z_a \otimes \mathrm{d}z_b
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j \cdot z_k^*) \\
&\quad = q^{-2} \grave{R}^{-\,uv}_{\;\;\,is} \grave{R}^{-\,st}_{\;\;\,jk} z_u^* \sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_v \otimes \mathrm{d}z_t) + Q \grave{R}^{-\,st}_{\;\;\,jk} z_i \sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_s^* \otimes \mathrm{d}z_t) \\
&\qquad + q^{-1} Q^2 \grave{R}^{-\,st}_{\;\;\,jk} z_i z_s^* \sigma_{\mathrm{L}}(\Omega \otimes \mathrm{d}z_t) + q^2 Q \hat{R}^{st}_{ij} z_i \sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_j \otimes \mathrm{d}z_k^*) \\
&\qquad + Q^2 \grave{R}^{-\,uv}_{\;\;\,tk} \hat{R}^{st}_{ij} z_s z_u^* \sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_v \otimes \Omega) + q^3 Q^3 z_i z_j \sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_k^* \otimes \Omega) \\
&\qquad + q^2 Q^4 z_i z_j z_k^* \sigma_{\mathrm{L}}(\Omega \otimes \Omega) \\
&\quad = q^{-3} \hat{R}^{ab}_{vt} \grave{R}^{-\,uv}_{\;\;\,is} \grave{R}^{-\,st}_{\;\;\,jk} z_u^* \mathrm{d}z_a \otimes \mathrm{d}z_b + q^{-1} Q \grave{R}^{-\,uv}_{\;\;\,tk} \hat{R}^{st}_{ij} z_s \mathrm{d}z_u^* \otimes \mathrm{d}z_v \\
&\qquad + qQ^2 \hat{R}^{st}_{ij} z_s \mathrm{d}z_t \otimes \mathrm{d}z_k^* + qQ z_i \mathrm{d}z_j \otimes \mathrm{d}z_k^* \\
&\qquad + q^{-1} Q^3 \grave{R}^{-\,uv}_{\;\;\,tk} \hat{R}^{st}_{ij} z_s z_u^* \mathrm{d}z_v \otimes \Omega + q^{-1} Q^2 \grave{R}^{-\,st}_{\;\;\,jk} z_i z_s^* \mathrm{d}z_t \otimes \Omega \\
&\qquad + q^3 Q^3 z_i z_j \mathrm{d}z_k^* \otimes \Omega + q^{-2} Q^2 \grave{R}^{-\,uv}_{\;\;\,tk} \hat{R}^{st}_{ij} z_s z_u^* \Omega \otimes \mathrm{d}z_v \\
&\qquad + q^2 Q^4 z_i z_j z_k^* \Omega \otimes \Omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\mathrm{R}}(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j \cdot z_k^*) &= q^{-1} \hat{R}^{st}_{ij} \mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_t \cdot z_k^* \\
&= q^{-3} \grave{R}^{-\,ua}_{\;\;\,sv} \grave{R}^{-\,vb}_{\;\;\,tk} \hat{R}^{st}_{ij} z_u^* \mathrm{d}z_a \otimes \mathrm{d}z_b + q^{-1} Q \grave{R}^{-\,uv}_{\;\;\,tk} \hat{R}^{st}_{ij} z_s \mathrm{d}z_u^* \otimes \mathrm{d}z_v \\
&\quad + q^{-2} Q^2 \grave{R}^{-\,uv}_{\;\;\,tk} \hat{R}^{st}_{ij} z_s z_u^* \Omega \otimes \mathrm{d}z_v + qQ z_i \mathrm{d}z_j \otimes \mathrm{d}z_k^* \\
&\quad + qQ^2 \hat{R}^{st}_{ij} z_s \mathrm{d}z_t \otimes \mathrm{d}z_k^* + q^{-1} Q^2 \grave{R}^{-\,st}_{\;\;\,jk} z_i z_s^* \mathrm{d}z_t \otimes \Omega \\
&\quad + q^{-1} Q^3 \grave{R}^{-\,uv}_{\;\;\,tk} \hat{R}^{st}_{ij} z_s z_u^* \mathrm{d}z_v \otimes \Omega + q^2 Q^4 z_i z_j z_k^* \Omega \otimes \Omega \\
&\quad + q^3 Q^3 z_i z_j \mathrm{d}z_k^* \otimes \Omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j^* \cdot z_k) \\
&\quad = q^2 \hat{R}^{uv}_{is} \acute{R}^{st}_{jk} z_u \sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_v \otimes \mathrm{d}z_t^*) - q^{-2} Q \grave{R}^{-\,st}_{\;\;\,ij} z_s^* \sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_t \otimes \mathrm{d}z_k) \\
&\qquad - Q^2 z_i \sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_j^* \otimes \mathrm{d}z_k) - q^{-1} Q^3 z_i z_j^* \sigma_{\mathrm{L}}(\Omega \otimes \mathrm{d}z_k) \\
&\qquad + Q^2 \hat{R}^{uv}_{tk} \grave{R}^{-\,st}_{\;\;\,ij} z_s^* z_u \sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_v \otimes \Omega) + q^2 Q^3 \acute{R}^{st}_{jk} z_i z_s \sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega) \\
&\qquad + q^2 Q^4 z_i z_j^* z_k \sigma_{\mathrm{L}}(\Omega \otimes \Omega)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= q^{-1}\grave{R}^{-}{}^{ab}_{vt}\hat{R}^{uv}_{is}\acute{R}^{st}_{jk}z_u\mathrm{d}z_a^*\otimes\mathrm{d}z_b + qQ\hat{R}^{uv}_{is}\acute{R}^{st}_{jk}z_u\mathrm{d}z_v\otimes\mathrm{d}z_t^*\\
&\quad - q^{-3}Q\hat{R}^{uv}_{tk}\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}z_s^*\mathrm{d}z_u\otimes\mathrm{d}z_v - qQ^2\acute{R}^{st}_{jk}z_i\mathrm{d}z_s\otimes\mathrm{d}z_t^*\\
&\quad + Q^2\hat{R}^{uv}_{tk}\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}z_s^*z_u\mathrm{d}z_v\otimes\Omega + q^{-2}Q^2\hat{R}^{uv}_{tk}\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}z_s^*z_u\Omega\otimes\mathrm{d}z_v\\
&\quad - qQ^2\acute{R}^{st}_{jk}z_iz_s\Omega\otimes\mathrm{d}z_t^* - q^{-1}Q^3z_iz_j^*\mathrm{d}z_k\otimes\Omega\\
&\quad - q^{-1}Q^3z_iz_j^*z_k\Omega\otimes\Omega - qQz_iz_j^*z_k(q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + Q^2\Omega\otimes\Omega)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\mathrm{R}}(\mathrm{d}z_i\otimes\mathrm{d}z_j^*\cdot z_k)\\
&= q^{-3}\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}\mathrm{d}z_s^*\otimes\mathrm{d}z_t\cdot z_k + q^{-3}Q^2\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}z_s^*\mathrm{d}z_t\otimes\Omega z_k\\
&\quad + q^{-1}Q\mathrm{d}z_i\otimes\mathrm{d}z_j^*\cdot z_k - Q^2z_i\Omega\otimes\mathrm{d}z_j^*\cdot z_k\\
&\quad - q^{-3}Q^3z_iz_j^*\Omega\otimes\Omega z_k - q^{-1}Qz_iz_j^*(q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + Q^2\Omega\otimes\Omega)z_k\\
&= q^{-1}\acute{R}^{ua}_{sv}\hat{R}^{vb}_{tk}\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}z_u\mathrm{d}z_a^*\otimes\mathrm{d}z_b - q^{-3}Q\hat{R}^{uv}_{tk}\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}z_s^*\mathrm{d}z_u\otimes\mathrm{d}z_v\\
&\quad + qQ\hat{R}^{uv}_{is}\acute{R}^{st}_{jk}z_u\mathrm{d}z_v\otimes\mathrm{d}z_t^* - qQ^2\acute{R}^{st}_{jk}z_i\mathrm{d}z_s\otimes\mathrm{d}z_t^*\\
&\quad + Q^2\hat{R}^{uv}_{tk}\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}z_s^*z_u\mathrm{d}z_v\otimes\Omega + q^{-2}Q^2\hat{R}^{uv}_{tk}\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}z_s^*z_u\Omega\otimes\mathrm{d}z_v\\
&\quad - qQ^2\acute{R}^{st}_{jk}z_iz_j\Omega\otimes\mathrm{d}z_k^* - q^{-1}Q^3z_iz_j^*\mathrm{d}z_k\otimes\Omega\\
&\quad - q^{-1}Q^3z_iz_j^*z_k\Omega\otimes\Omega - qQz_iz_j^*z_k(q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + Q^2\Omega\otimes\Omega)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_i\otimes\mathrm{d}z_j^*\cdot z_k^*)\\
&= q^{-2}\acute{R}^{uv}_{is}\check{R}^{-}{}^{st}_{jk}z_u^*\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_v\otimes\mathrm{d}z_t^*) + Q\check{R}^{-}{}^{st}_{jk}z_i\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_s^*\otimes\mathrm{d}z_t^*)\\
&\quad + q^{-1}Q^2\check{R}^{-}{}^{st}_{jk}z_iz_s^*\sigma_{\mathrm{L}}(\Omega\otimes\mathrm{d}z_t^*)\\
&= q^{-5}\grave{R}^{-}{}^{ab}_{vt}\grave{R}^{-}{}^{uv}_{is}\check{R}^{-}{}^{st}_{jk}z_u^*\mathrm{d}z_a^*\otimes\mathrm{d}z_b + q^{-3}Q\grave{R}^{-}{}^{uv}_{is}\check{R}^{-}{}^{st}_{jk}z_u^*\mathrm{d}z_v\otimes\mathrm{d}z_t^*\\
&\quad + q^{-1}Qz_i\mathrm{d}z_j^*\otimes\mathrm{d}z_k^* + q^{-6}Q^2\grave{R}^{-}{}^{uv}_{tk}\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}z_s^*z_u^*\mathrm{d}z_v\otimes\Omega\\
&\quad + q^{-3}Q^2\check{R}^{-}{}^{st}_{jk}z_iz_s^*\mathrm{d}z_t^*\otimes\Omega - q^{-3}Q^2\check{R}^{-}{}^{st}_{jk}z_iz_s^*\Omega\otimes\mathrm{d}z_t^*\\
&\quad - q^{-7}Q^3z_iz_j^*z_k^*\Omega\otimes\Omega - q^{-3}Qz_iz_j^*z_k^*(q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + Q^2\Omega\otimes\Omega)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\mathrm{R}}(\mathrm{d}z_i\otimes\mathrm{d}z_j^*\cdot z_k^*)\\
&= q^{-3}\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}\mathrm{d}z_s^*\otimes\mathrm{d}z_t\cdot z_k^* + q^{-3}Q^2\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}z_s^*\mathrm{d}z_t\otimes\Omega z_k^*\\
&\quad + q^{-1}Q\mathrm{d}z_i\otimes\mathrm{d}z_j^*\cdot z_k^* - Q^2z_i\Omega\otimes\mathrm{d}z_j^*\cdot z_k^*\\
&\quad - q^{-3}Q^3z_iz_j^*\Omega\otimes\Omega z_k^* - q^{-1}Qz_iz_j^*(q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + Q^2\Omega\otimes\Omega)z_k^*\\
&= q^{-5}\check{R}^{-}{}^{ua}_{sv}\grave{R}^{-}{}^{vb}_{tk}\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}z_u^*\mathrm{d}z_a^*\otimes\mathrm{d}z_b + q^{-1}Qz_i\mathrm{d}z_j^*\otimes\mathrm{d}z_k^*\\
&\quad + q^{-3}Q\grave{R}^{-}{}^{uv}_{is}\check{R}^{-}{}^{st}_{jk}z_u^*\mathrm{d}z_v\otimes\mathrm{d}z_t^* + q^{-3}Q^2\check{R}^{-}{}^{st}_{jk}z_iz_s^*\mathrm{d}z_t^*\otimes\Omega\\
&\quad + q^{-6}Q^2\grave{R}^{-}{}^{uv}_{tk}\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}z_s^*z_u^*\mathrm{d}z_v\otimes\Omega - q^{-3}Q^2\check{R}^{-}{}^{st}_{jk}z_iz_s^*\Omega\otimes\mathrm{d}z_t^*\\
&\quad - q^{-7}Q^3z_iz_j^*z_k^*\Omega\otimes\Omega - q^{-3}Qz_iz_j^*z_k^*(q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + Q^2\Omega\otimes\Omega)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j \cdot z_k) \\
&\qquad = q^2 \acute{R}^{uv}_{is} \hat{R}^{st}_{jk} z_u \sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_v^* \otimes \mathrm{d}z_t) - Q \hat{R}^{st}_{jk} z_i^* \sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t) \\
&\qquad\quad + qQ^2 \hat{R}^{st}_{jk} z_i^* z_s \sigma_{\mathrm{L}}(\Omega \otimes \mathrm{d}z_t) \\
&\qquad = q^3 \acute{R}^{ab}_{vt} \acute{R}^{uv}_{is} \hat{R}^{st}_{jk} z_u \mathrm{d}z_a \otimes \mathrm{d}z_b^* - q^{-1} Q^2 \hat{R}^{st}_{jk} z_i^* \mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_b \\
&\qquad\quad - q^{-1} Q z_i^* \mathrm{d}z_j \otimes \mathrm{d}z_k + q^4 Q^2 \acute{R}^{uv}_{tk} \acute{R}^{st}_{ij} z_s z_u \mathrm{d}z_v^* \otimes \Omega \\
&\qquad\quad + qQ^2 \hat{R}^{st}_{jk} z_i^* z_s \mathrm{d}z_t \otimes \Omega + q^{-1} Q^2 \hat{R}^{st}_{jk} z_i^* z_s \Omega \otimes \mathrm{d}z_t \\
&\qquad\quad + q^5 Q^3 z_i^* z_j z_k \Omega \otimes \Omega + qQ z_i^* z_j z_k (\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + Q^2 \Omega \otimes \Omega)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\mathrm{R}}(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j \cdot z_k) \\
&\qquad = q \acute{R}^{st}_{ij} \mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t^* \cdot z_k + qQ^2 \acute{R}^{st}_{ij} z_s \mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega z_k \\
&\qquad\quad - q^{-2} Q^2 z_i^* \Omega \otimes \mathrm{d}z_j \cdot z_k + qQ^3 z_i^* z_j \Omega \otimes \Omega z_k \\
&\qquad\quad + q^{-1} Q z_i^* z_j (\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + Q^2 \Omega \otimes \Omega) z_k \\
&\qquad = q^3 \hat{R}^{ua}_{sv} \acute{R}^{vb}_{tk} \acute{R}^{st}_{ij} z_u \mathrm{d}z_a \otimes \mathrm{d}z_b^* - q^{-1} Q z_i^* \mathrm{d}z_j \otimes \mathrm{d}z_k \\
&\qquad\quad - q^{-1} Q^2 \hat{R}^{st}_{jk} z_i^* \mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t - q^{-1} Q^2 \hat{R}^{st}_{jk} z_i^* z_s \Omega \otimes \mathrm{d}z_t \\
&\qquad\quad + qQ^2 \hat{R}^{st}_{jk} z_i^* z_s \mathrm{d}z_t \otimes \Omega + q^4 Q^2 \acute{R}^{uv}_{tk} \acute{R}^{st}_{ij} z_s z_u \mathrm{d}z_v^* \otimes \Omega \\
&\qquad\quad + q^5 Q^3 z_i^* z_j z_k \Omega \otimes \Omega + qQ z_i^* z_j z_k (\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + Q^2 \Omega \otimes \Omega)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j \cdot z_k^*) \\
&\qquad = q^{-2} \check{R}^{-}{}^{uv}_{is} \grave{R}^{-}{}^{st}_{jk} z_u^* \sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_v^* \otimes \mathrm{d}z_t) + q^2 Q \acute{R}^{st}_{ij} z_s \sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_t^* \otimes \mathrm{d}z_k^*) \\
&\qquad\quad - Q^2 z_i^* \sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_j \otimes \mathrm{d}z_k^*) + qQ^3 z_i^* z_j \sigma_{\mathrm{L}}(\Omega \otimes \mathrm{d}z_k^*) \\
&\qquad\quad + Q^2 \check{R}^{-}{}^{uv}_{tk} \acute{R}^{st}_{ij} z_s z_u^* \sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_v^* \otimes \Omega) - q^{-2} Q^3 \grave{R}^{-}{}^{st}_{jk} z_i^* z_s^* \sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_v \otimes \Omega) \\
&\qquad\quad + q^{-2} Q^4 z_i^* z_j z_k^* \sigma_{\mathrm{L}}(\Omega \otimes \Omega) \\
&\qquad = q^{-1} \acute{R}^{ab}_{vt} \check{R}^{-}{}^{uv}_{is} \grave{R}^{-}{}^{st}_{jk} z_u^* \mathrm{d}z_a \otimes \mathrm{d}z_b^* + qQ \check{R}^{uv}_{tk} \acute{R}^{st}_{ij} z_s \mathrm{d}z_u^* \otimes \mathrm{d}z_v^* \\
&\qquad\quad - q^{-3} Q^2 \grave{R}^{-}{}^{st}_{jk} z_i^* \mathrm{d}z_s^* \otimes \mathrm{d}z_t - q^{-1} Q^3 z_i^* \mathrm{d}z_j \otimes \mathrm{d}z_k^* \\
&\qquad\quad + Q^2 \check{R}^{-}{}^{uv}_{tk} \acute{R}^{st}_{ij} z_s z_u^* \mathrm{d}z_v^* \otimes \Omega - q^{-3} Q^4 \grave{R}^{-}{}^{st}_{jk} z_i^* z_s^* \mathrm{d}z_t \otimes \Omega \\
&\qquad\quad + q^{-1} Q^3 z_i^* z_j \mathrm{d}z_k^* \otimes \Omega + Q^2 \check{R}^{-}{}^{uv}_{tk} \acute{R}^{st}_{ij} z_s z_u^* \Omega \otimes \mathrm{d}z_v^* \\
&\qquad\quad - q^{-3} Q^2 \grave{R}^{-}{}^{st}_{jk} z_i^* z_s^* \Omega \otimes \mathrm{d}z_t + Q^4 z_i^* z_j \Omega \otimes \mathrm{d}z_k^* \\
&\qquad\quad + (2q^{-1} - 2q^{-3} + q^{-5}) Q^3 z_i^* z_j z_k^* \Omega \otimes \Omega \\
&\qquad\quad + q^{-3} Q z_i^* z_j z_k^* (\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + Q^2 \Omega \otimes \Omega)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\mathrm{R}}(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j \cdot z_k^*) \\
&\qquad = q\acute{R}^{st}_{ij}\mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t^* \cdot z_k^* + qQ^2\acute{R}^{st}_{ij}z_s\mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega z_k^* \\
&\qquad\qquad - q^{-2}Q^2 z_i^*\Omega \otimes \mathrm{d}z_j \cdot z_k^* + qQ^3 z_i^* z_j\Omega \otimes \Omega z_k^* \\
&\qquad\qquad + q^{-1}Q z_i^* z_j(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + Q^2\Omega \otimes \Omega)z_k^* \\
&\qquad = q^{-1}\grave{R}^{-\,ua}_{\;\;sv}\check{R}^{-\,vb}_{\;\;tk}\acute{R}^{st}_{ij}z_u^*\mathrm{d}z_a \otimes \mathrm{d}z_b^* + Q^2\check{R}^{-\,uv}_{\;\;tk}\acute{R}^{st}_{ij}z_s z_u^*\Omega \otimes \mathrm{d}z_v^* \\
&\qquad\qquad + Q^2\check{R}^{-\,uv}_{\;\;tk}\acute{R}^{st}_{ij}z_s z_u^*\mathrm{d}z_v^* \otimes \Omega - q^{-3}Q^2\grave{R}^{-\,st}_{\;\;jk}z_i^*\mathrm{d}z_s^* \otimes \mathrm{d}z_t \\
&\qquad\qquad - q^{-3}Q^2\grave{R}^{-\,st}_{\;\;jk}z_i^* z_s^*\Omega \otimes \mathrm{d}z_t - q^{-1}Q^3 z_i^*\mathrm{d}z_j \otimes \mathrm{d}z_k^* \\
&\qquad\qquad - q^{-3}Q^4\grave{R}^{-\,st}_{\;\;jk}z_i^* z_s^*\mathrm{d}z_t \otimes \Omega + qQ\check{R}^{uv}_{tk}\acute{R}^{st}_{ij}z_s\mathrm{d}z_u^* \otimes \mathrm{d}z_v^* \\
&\qquad\qquad + q^{-1}Q^3 z_i^* z_j\mathrm{d}z_k^* \otimes \Omega + Q^4 z_i^* z_j\Omega \otimes \mathrm{d}z_k^* \\
&\qquad\qquad + (2q^{-1} - 2q^{-3} + q^{-5})Q^3 z_i^* z_j z_k^*\Omega \otimes \Omega \\
&\qquad\qquad + q^{-3}Q z_i^* z_j z_k^*(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + Q^2\Omega \otimes \Omega)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j^* \cdot z_k) \\
&\qquad = q^2\acute{R}^{uv}_{is}\acute{R}^{st}_{jk}z_u\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_v^* \otimes \mathrm{d}z_t^*) - Q\acute{R}^{st}_{jk}z_i^*\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t^*) \\
&\qquad\qquad + qQ^2\acute{R}^{st}_{jk}z_i^* z_s\sigma_{\mathrm{L}}(\Omega \otimes \mathrm{d}z_t^*) - q^{-2}Q\check{R}^{-\,st}_{\;\;ij}z_s^*\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_t^* \otimes \mathrm{d}z_k) \\
&\qquad\qquad + Q^2\acute{R}^{uv}_{tk}\check{R}^{-\,st}_{\;\;ij}z_s^* z_u\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_v^* \otimes \Omega) - q^{-3}Q^3 z_i^* z_j^*\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_k \otimes \Omega) \\
&\qquad\qquad + q^{-2}Q^4 z_i^* z_j^* z_k\sigma_{\mathrm{L}}(\Omega \otimes \Omega) \\
&\qquad = q\check{R}^{-\,ab}_{\;\;vt}\acute{R}^{uv}_{is}\acute{R}^{st}_{jk}z_u\mathrm{d}z_a^* \otimes \mathrm{d}z_b^* - q^{-1}Q\acute{R}^{uv}_{tk}\check{R}^{-\,st}_{\;\;ij}z_s^*\mathrm{d}z_u \otimes \mathrm{d}z_v^* \\
&\qquad\qquad - q^{-1}Q^2\acute{R}^{st}_{jk}z_i^*\mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t^* - q^{-3}Q z_i^*\mathrm{d}z_j^* \otimes \mathrm{d}z_k \\
&\qquad\qquad + Q^2\acute{R}^{uv}_{tk}\check{R}^{-\,st}_{\;\;ij}z_s^* z_u\Omega \otimes \mathrm{d}z_t^* + q^{-1}Q^2\acute{R}^{st}_{jk}z_i^* z_s\mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega \\
&\qquad\qquad + Q^3\acute{R}^{st}_{jk}z_i^* z_s\Omega \otimes \mathrm{d}z_t^* - q^{-3}Q^3 z_i^* z_j^*\mathrm{d}z_k \otimes \Omega \\
&\qquad\qquad + q^{-2}Q^4 z_i^* z_j^* z_k\Omega \otimes \Omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\mathrm{R}}(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j^* \cdot z_k) = q^{-1}\check{R}^{-\,st}_{\;\;ij}\mathrm{d}z_s^* \otimes \mathrm{d}z_t^* \cdot z_k \\
&\qquad = q\acute{R}^{ua}_{sv}\acute{R}^{vb}_{tk}\check{R}^{st}_{ij}z_u\mathrm{d}z_a^* \otimes \mathrm{d}z_b^* - q^{-1}Q\acute{R}^{uv}_{tk}\check{R}^{st}_{ij}z_s^*\mathrm{d}z_u \otimes \mathrm{d}z_v^* \\
&\qquad\qquad + Q^2\acute{R}^{uv}_{tk}\check{R}^{st}_{ij}z_s^* z_u\Omega \otimes \mathrm{d}z_v^* - q^{-3}Q z_i^*\mathrm{d}z_j^* \otimes \mathrm{d}z_k \\
&\qquad\qquad + q^{-1}Q^2\acute{R}^{st}_{jk}z_i^* z_s\mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega - q^{-3}Q^3 z_i^* z_j^*\mathrm{d}z_k \otimes \Omega \\
&\qquad\qquad + q^{-2}Q^4 z_i^* z_j^* z_k\Omega \otimes \Omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j^* \cdot z_k^*) = q^{-2}\check{R}^{-\,uv}_{\;\;is}\check{R}^{-\,st}_{\;\;jk}z_u^*\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}z_v^* \otimes \mathrm{d}z_t^*) \\
&\qquad = q^{-3}\check{R}^{ab}_{vt}\check{R}^{-\,uv}_{\;\;is}\check{R}^{-\,st}_{\;\;jk}z_u^*\mathrm{d}z_a^* \otimes \mathrm{d}z_b^*
\end{aligned}
$$

$$
\sigma_{\mathrm{R}}(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j^* \cdot z_k^*) = q^{-1}\check{R}^{st}_{ij}\mathrm{d}z_s^* \otimes \mathrm{d}z_t^* \cdot z_k^* = q^{-3}\check{R}^{-\,ua}_{\;\;sv}\check{R}^{-\,vb}_{\;\;tk}\check{R}^{st}_{ij}z_u^*\mathrm{d}z_a^* \otimes \mathrm{d}z_b^*
$$

B.16 (zu Abschnitt 4.2.5, Seite 82)

$$
\begin{aligned}
\sigma(\Omega \otimes \mathrm{d}z_i) &= qQ^{-1}\sum_k q^{-2k} z_k^* \sigma(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_i) = Q^{-1}\sum_k q^{-2k}\hat{R}^{st}_{ki} z_i^* \mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t \\
&= Q^{-1}\sum_k q^{-2k}\hat{R}^{st}_{ki}\Omega z_i^* z_s \otimes \mathrm{d}z_t - Q^{-1}\sum_k q^{-2k}\hat{R}^{st}_{ki}\mathrm{d}z_i^* \cdot z_s \otimes \mathrm{d}z_t \\
&\quad - Q^{-1}\sum_k q^{-2k}\hat{R}^{st}_{ki} z_i^* z_s \Omega \otimes \mathrm{d}z_t \\
&= q^{-1}Q^{-1}\sum_j q^{-2j}\acute{R}^{uv}_{st}\grave{R}^{st}_{ij}\Omega z_u z_v^* \otimes \mathrm{d}z_j - q^{-1}Q^{-1}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- z_i \\
&\quad - q^{-1}Q^{-1}\sum_j q^{-2j}\acute{R}^{uv}_{st}\grave{R}^{st}_{ij} z_u z_v^* \Omega \otimes \mathrm{d}z_j \\
&= q^{-1}Q^{-1}\sum_j q^{-2j}\Omega z_i \otimes z_j^* \mathrm{d}z_j + q^{-2}\sum_u \Omega z_u z_u^* \otimes \mathrm{d}z_i - qQ^{-1} z_i \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&\quad - Q^2 z_i \Omega \otimes \Omega + q^{-1}Q\mathrm{d}z_i \otimes \Omega + q^{-1}Q\Omega \otimes \mathrm{d}z_i \\
&\quad - q^{-1}Q^{-1}\sum_j q^{-2j} z_i z_j^* \Omega \otimes \mathrm{d}z_j - q^{-2}\sum_u z_u z_u^* \Omega \otimes \mathrm{d}z_i \\
&= q^{-2} z_i \Omega \otimes \Omega + q^{-2}\mathrm{d}z_i \otimes \Omega - Q^2 z_i \Omega \otimes \Omega \\
&\quad + q^{-1}Q\mathrm{d}z_i \otimes \Omega + q^{-1}Q\Omega \otimes \mathrm{d}z_i - q^{-2} z_i \Omega \otimes \Omega \\
&\quad - z_i \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-
\end{aligned}
$$

B.17 (zu Abschnitt 4.2.5, Seite 82)

$$
\begin{aligned}
\sigma(\Omega \otimes \mathrm{d}z_i^*) &= -qQ^{-1}\sum_k z_k \sigma(\mathrm{d}z_k^* \otimes \mathrm{d}z_i^*) = -Q^{-1}\sum_k \check{R}^{st}_{ki} z_k \mathrm{d}z_s^* \otimes \mathrm{d}z_t^* \\
&= -Q^{-1}\sum_j \acute{R}^{uv}_{ij}\Omega z_u z_v^* \otimes \mathrm{d}z_j^* + Q^{-1}\sum_k \check{R}^{st}_{ki}\mathrm{d}z_k \cdot z_s^* \otimes \mathrm{d}z_t^* \\
&\quad + Q^{-1}\sum_j \acute{R}^{uv}_{ij} z_u z_v^* \Omega \otimes \mathrm{d}z_j^* \\
&= -qQ^{-1}\sum_j \Omega z_i^* \otimes z_j \mathrm{d}z_j^* + qQ^{-1}\sum_k \check{R}^{uv}_{st}\check{R}^{st}_{ki}\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_u^* \cdot z_v^* \\
&\quad + qQ^{-1}\sum_j z_i^* z_j \Omega \otimes \mathrm{d}z_j^* \\
&= z_i^* \Omega \otimes \Omega - \mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega + qQ^{-1}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ z_i^* \\
&\quad + \sum_k \mathrm{d}z_k \cdot z_k^* \otimes \mathrm{d}z_i^* + qQ^{-1}\sum_k z_i^* \Omega \otimes z_k \mathrm{d}z_k^* - qQ^{-1} z_i^* \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= z_i^*\Omega\otimes\Omega + \mathrm{d}z_i^*\otimes\Omega + q^{-1}Q^{-1}z_i^*\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+\\
&\quad - q^{-2}Q^2 z_i^*\Omega\otimes\Omega - q^{-1}Q\Omega\otimes\mathrm{d}z_i^* - q^{-1}Q\mathrm{d}z_i^*\otimes\Omega\\
&\quad + q^{-1}Q\Omega\otimes\mathrm{d}z_i^* - z_i^*\Omega\otimes\Omega - qQ^{-1}z_i^*\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+
\end{aligned}
$$

B.18 (zu Abschnitt 4.2.5, Seite 82)

$\sigma_{23}\sigma_{12}(\Omega\otimes\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+)$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_i \mathrm{d}z_i\otimes\sigma(\Omega\otimes\mathrm{d}z_i^*) + q^{-1}Q\Omega\otimes\sigma(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+) - Q^2\sum_i z_i\Omega\otimes\sigma(\Omega\otimes\mathrm{d}z_i^*)\\
&\quad - \sum_i\sum_j q^{-2j} z_i\mathrm{d}z_j^*\otimes\sigma(\mathrm{d}z_j\otimes\mathrm{d}z_i^*)\\
&= q^{-2}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+\otimes\Omega - q^{-2}Q^2\sum_i \mathrm{d}z_i\cdot z_i^*\otimes\Omega\otimes\Omega - \sum_i \mathrm{d}z_i\cdot z_i^*\otimes\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+\\
&\quad + q^{-3}Q\Omega\otimes\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- - q^{-2}Q^2\sum_i z_i\Omega\otimes\mathrm{d}z_i^*\otimes\Omega\\
&\quad + q^{-2}Q^4\sum_i z_i\Omega z_i^*\otimes\Omega\otimes\Omega + Q^2\sum_i z_i\Omega z_i^*\otimes\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+\\
&\quad - q^{-3}\sum_i\sum_j q^{-2j}\check{R}^{-}{}^{st}_{ij} z_i\mathrm{d}z_s^*\otimes\mathrm{d}z_t^*\otimes\mathrm{d}z_j - q^{-1}Q\sum_i z_i\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-\otimes\mathrm{d}z_i^*\\
&\quad - q^{-3}Q^2\sum_i\sum_j q^{-2j}\check{R}^{-}{}^{st}_{ij} z_i\mathrm{d}z_s^*\cdot z_t^*\otimes\mathrm{d}z_j\otimes\Omega\\
&\quad + Q^2\sum_i\sum_j q^{-2j} z_i\mathrm{d}z_j^*\cdot z_j\otimes\Omega\otimes\mathrm{d}z_i^* + qQ\sum_i\sum_j q^{-2j} z_i\mathrm{d}z_j^*\cdot z_j z_i^*\otimes\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+\\
&\quad + q^{-2}Q_+Q^3\sum_i\sum_j q^{-2j} z_i\mathrm{d}z_j^*\cdot z_j z_i^*\otimes\Omega\otimes\Omega\\
&= q^{-2}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+\otimes\Omega - q^{-3}Q^3\Omega\otimes\Omega\otimes\Omega - q^{-1}Q\Omega\otimes\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+\\
&\quad + q^{-3}Q\Omega\otimes\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + q^{-3}Q^3\Omega\otimes\Omega\otimes\Omega + q^{-2}Q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+\otimes\Omega\\
&\quad - q^{-3}Q^5\Omega\otimes\Omega\otimes\Omega + q^{-2}Q^4\Omega\otimes\Omega\otimes\Omega\\
&\quad + Q^2\sum_i z_i\Omega z_i^*\otimes\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - q^{-3}\sum_i\sum_j q^{-2j}\check{R}^{-}{}^{st}_{ij} z_i\mathrm{d}z_s^*\otimes\mathrm{d}z_t^*\otimes\mathrm{d}z_j\\
&\quad - q^{-1}Q\sum_i z_i\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-\otimes\mathrm{d}z_i^* - q^{-4}Q^2\sum_i z_i z_i^*\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-\otimes\Omega\\
&\quad + q^{-3}Q^3\sum_i\sum_j q^{-2j} z_i\mathrm{d}z_i^*\otimes z_j^*\mathrm{d}z_j\otimes\Omega\\
&\quad - q^{-1}Q^3\sum_i z_i\Omega\otimes\Omega\otimes\mathrm{d}z_i^* - Q^2\sum_i z_i\Omega z_i^*\otimes\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+\\
&\quad - q^{-4}Q^4\sum_i z_i\Omega z_i^*\otimes\Omega\otimes\Omega - q^{-2}Q^4\sum_i z_i\Omega z_i^*\otimes\Omega\otimes\Omega
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= q^{-2}(1+Q^2)\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \otimes \Omega - q^{-1}Q\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + q^{-3}Q\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&\quad - q^{-3}\sum_i\sum_j q^{-2j}\check{R}^{-\,st}_{\;ij} z_i \mathrm{d}z_s^* \otimes \mathrm{d}z_t^* \otimes \mathrm{d}z_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{23}\sigma_{12}(\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-) \\
&= q^{-2}\sum_i q^{-2i}\mathrm{d}z_i^* \otimes \sigma(\Omega \otimes \mathrm{d}z_i) - q^{-2}Q^2\sum_i q^{-2i}z_i^*\Omega \otimes \sigma(\Omega \otimes \mathrm{d}z_i) \\
&\quad - \sum_i q^{-2i}\sum_j z_i^*\mathrm{d}z_j \otimes \sigma(\mathrm{d}z_j^* \otimes \mathrm{d}z_i) \\
&= q^{-2}\sum_i q^{-2i}\mathrm{d}z_i^* \otimes \sigma(\Omega \otimes \mathrm{d}z_i) - q^{-2}Q^2\sum_i q^{-2i}z_i^*\Omega \otimes \sigma(\Omega \otimes \mathrm{d}z_i) \\
&\quad - qQ\sum_j \mathrm{d}z_j \otimes \sigma(\mathrm{d}z_j^* \otimes \Omega) - q^{-2}Q^4\Omega \otimes \sigma(\Omega \otimes \Omega) \\
&\quad + q^{-1}Q^3\sum_i q^{-2i}\mathrm{d}z_i^* \otimes \sigma(\Omega \otimes \mathrm{d}z_i) + q^{-1}Q^3\Omega \otimes \sigma(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-) \\
&\quad - Q^2\sum_i q^{-2i}\mathrm{d}z_i^* \otimes \sigma(\Omega \otimes \mathrm{d}z_i) - Q^2\Omega \otimes \sigma(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-) \\
&= q^{-2}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \otimes \Omega + q^{-3}Q\sum_i q^{-2i}\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_i + q^{-3}Q^3\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega \\
&\quad + q^{-3}Q\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- - q^{-3}Q^3\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega + q^{-2}Q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \otimes \Omega \\
&\quad - q^{-4}Q^4\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega + q^{-3}Q^3\sum_i q^{-2i}\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_i \\
&\quad + q^{-3}Q^3\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + q^{-3}Q^5\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega + q^{-4}Q^4\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega \\
&\quad + q^{-3}Q^3\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + q^{-4}Q^2\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- - Q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \otimes \Omega \\
&\quad - qQ\sum_j \mathrm{d}z_j \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j^* - q^{-2}Q^4\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega - q^{-2}Q^2\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&\quad - q^{-2}Q^4\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega - q^{-1}Q^3\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + q^{-3}Q^3\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&\quad + q^{-1}Q^3\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \otimes \Omega + q^{-2}Q^4\sum_i q^{-2i}\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_i \\
&\quad + q^{-2}Q^6\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega + q^{-2}Q^4\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + q^{-1}Q^3\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \\
&\quad + q^{-2}Q^4\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- - Q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \otimes \Omega \\
&\quad - q^{-1}Q^3\sum_i q^{-2i}\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_i - q^{-1}Q^5\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega \\
&\quad - q^{-1}Q^3\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- - Q^2\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - q^{-1}Q^3\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-
\end{aligned}
$$

B.19 (zu Abschnitt 4.2.5, Seite 83)

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}(\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+) \\
&\quad = q^{-2}(1+Q^2)\sigma(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+) \otimes \Omega - q^{-1}Q\sum_i \sigma(\Omega \otimes \mathrm{d}z_i) \otimes \mathrm{d}z_i^* \\
&\qquad + q^{-3}Q\sum_j q^{-2j}\sigma(\Omega \otimes \mathrm{d}z_j^*) \otimes \mathrm{d}z_j \\
&\qquad - q^{-3}\sum_i\sum_j q^{-2j}\check{R}^{-}{}^{st}_{ij} z_i \sigma(\mathrm{d}z_s^* \otimes \mathrm{d}z_t^*) \otimes \mathrm{d}z_j \\
&\quad = q^{-4}(1+Q^2)\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \otimes \Omega - q^{-1}Q\sum_i \mathrm{d}z_i \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* \\
&\qquad - q^{-2}Q^2\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + q^{-1}Q^3\sum_i z_i\Omega \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* \\
&\qquad + q^{-1}Q\sum_i z_i \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \otimes \mathrm{d}z_i^* + q^{-5}Q\sum_j q^{-2j}\mathrm{d}z_j^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j \\
&\qquad - q^{-5}Q^3\sum_j q^{-2j}z_j^*\Omega \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j - q^{-3}Q\sum_j q^{-2j}z_j^*\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \otimes \mathrm{d}z_j \\
&\qquad - q^{-4}\sum_i z_i \mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&\quad = q^{-4}(1+Q^2)\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \otimes \Omega - q^{-1}Q\sum_i \mathrm{d}z_i \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* \\
&\qquad - q^{-2}Q^2\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - q^{-1}Q^3\sum_i \mathrm{d}z_i \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* - q^{-1}Q^3\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \\
&\qquad - q^{-2}Q^4\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega + q^{-3}Q\sum_i \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \otimes z_i\mathrm{d}z_i^* \\
&\qquad + q^{-2}Q^4\sum_i z_i\Omega \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* - q^{-3}Q^3\sum_i \mathrm{d}z_i \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* \\
&\qquad - q^{-3}Q^3\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + q^{-5}Q\sum_j q^{-2j}\mathrm{d}z_j^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j \\
&\qquad + q^{-5}Q^3\sum_j q^{-2j}\mathrm{d}z_j^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j + q^{-5}Q^3\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&\qquad - q^{-6}Q^4\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega - q^{-1}Q\sum_j q^{-2j}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \otimes z_j^*\mathrm{d}z_j \\
&\qquad - q^{-2}Q^4\sum_j q^{-2j}z_j^*\Omega \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j - q^{-1}Q^3\sum_j q^{-2j}\mathrm{d}z_j^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j \\
&\qquad - q^{-1}Q^3\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + q^{-5}Q\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= q^{-4}(1+Q^2)\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \otimes \Omega - q^{-1}Q\sum_i \mathrm{d}z_i \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* \\
&\quad - q^{-2}Q^2\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - q^{-1}Q^3\sum_i \mathrm{d}z_i \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* - q^{-1}Q^3\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \\
&\quad - q^{-2}Q^4\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega + q^{-3}Q\sum_i \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \otimes z_i \mathrm{d}z_i^* \\
&\quad - q^{-2}Q^4\sum_i \mathrm{d}z_i \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* - q^{-2}Q^4\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \\
&\quad - q^{-3}Q^5\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega - q^{-3}Q^3\sum_i \mathrm{d}z_i \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* \\
&\quad - q^{-3}Q^3\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + q^{-5}Q\sum_j q^{-2j}\mathrm{d}z_j^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j \\
&\quad + q^{-5}Q^3\sum_j q^{-2j}\mathrm{d}z_j^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j + q^{-5}Q^3\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&\quad - q^{-6}Q^4\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega - q^{-2}Q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \otimes \Omega \\
&\quad + q^{-2}Q^4\sum_j q^{-2j}\mathrm{d}z_j^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j + q^{-2}Q^4\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&\quad - q^{-3}Q^5\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega - q^{-1}Q^3\sum_j q^{-2j}\mathrm{d}z_j^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j \\
&\quad - q^{-1}Q^3\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + q^{-5}Q\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&= (q^{-4} - q^{-2}Q^2)\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \otimes \Omega + (q^{-2}-2)Q^2\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \\
&\quad + (q^{-5}Q - q^{-4}Q^4)\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&\quad - (q^{-2} + 2q^{-3}Q + q^{-6})Q^4\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega \\
&\quad - (2q^{-1}Q^3 + q^{-1}Q)\sum_i \mathrm{d}z_i \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* \\
&\quad + (q^{-5}Q - q^{-4}Q^4)\sum_j q^{-2j}\mathrm{d}z_j^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j
\end{aligned}
$$

B.20 (zu Abschnitt 4.2.5, Seite 83)

$$
\begin{aligned}
\sigma(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+) &= q^{-3}\sum_i \grave{R}^{-}{}^{st}_{ii}\mathrm{d}z_s^* \otimes \mathrm{d}z_t + q^{-1}Q\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + q^{-3}Q^2\sum_i \grave{R}^{-}{}^{st}_{ii} z_s^*\mathrm{d}z_t \otimes \Omega \\
&\quad - Q^2\sum_i z_i\Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* - qQ\sum_i z_i z_i^*\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - q^{-2}Q_+Q^3\sum_i z_i z_i^*\Omega \otimes \Omega \\
&= q^{-2}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + q^{-1}Q\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + q^{-2}Q^2\sum_j q^{-2j}z_j^*\mathrm{d}z_j \otimes \Omega \\
&\quad - Q^2\sum_i \Omega \otimes z_i\mathrm{d}z_i^* + Q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - qQ\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \\
&\quad - q^{-2}Q_+Q^3\Omega \otimes \Omega \\
&= q^{-2}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-
\end{aligned}
$$

B.21 (zu Abschnitt 4.2.5, Seite 83)

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}(\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+) - \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}(\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+) \\
&\quad = q^{-2}\sigma_{23}\sigma_{12}(\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-) - \sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}(\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+) \\
&\quad = q^{-4}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \otimes \Omega + q^{-5}Q\sum_i q^{-2i}\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_i + q^{-5}Q\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&\qquad - q^{-2}Q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \otimes \Omega - q^{-1}Q\sum_j \mathrm{d}z_j \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j^* - q^{-2}Q^2\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \\
&\qquad - 2q^{-4}Q^4\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega + 2q^{-1}Q^3\sum_j \mathrm{d}z_j \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j^* \\
&\qquad + q^{-1}Q\sum_j \mathrm{d}z_j \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j^* - q^{-5}Q\sum_i q^{-2i}\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_i \\
&\qquad + q^{-4}Q^4\sum_i q^{-2i}\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_i - q^{-4}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \otimes \Omega \\
&\qquad + q^{-2}Q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \otimes \Omega + q^{-1}Q^3\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + Q^2\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \\
&\qquad + q^{-1}Q^4\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + q^{-2}Q^4\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega + 2q^{-3}Q^5\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega \\
&\qquad + q^{-6}Q^4\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega - q^{-5}Q\Omega \otimes \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-
\end{aligned}
$$

B.22 (zu Abschnitt 4.3.3, Seite 86)

$$
\begin{aligned}
\sigma(\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l^*) &= -qQ\mathrm{d}z_k \otimes \Omega z_l^* + \Omega \otimes \mathrm{d}z_k \cdot z_l^* + q^2 z_k \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- z_l^* \\
&\quad + q^2Q^2 z_k\Omega \otimes \Omega z_l^* + Q\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^*\mathrm{d}z_t \otimes \Omega - q^{-1}\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^*\Omega \otimes \mathrm{d}z_t \\
&\quad - q\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* z_t \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- - qQ^2\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* z_t\Omega \otimes \Omega - Q^2 z_k \mathrm{d}z_l^* \\
&\quad - qQz_k\Omega \otimes \mathrm{d}z_l^* - q^{-1}Qz_k z_l^*\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- - q^{-1}Q^3 z_k z_l^*\Omega \otimes \Omega \\
&\quad - Q^2 z_k z_l^*\Omega \otimes \Omega \\
&= -qQ\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l^* - qQ\mathrm{d}z_k \cdot z_l^* \otimes \Omega + q^{-1}\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl}\Omega z_s^* \otimes \mathrm{d}z_t \\
&\quad + qQ\Omega z_k \otimes \mathrm{d}z_l^* + Q^2\Omega z_k z_l^* \otimes \Omega + q^2 z_k \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- z_l^* \\
&\quad + q^2Q^2 z_k\Omega \otimes \mathrm{d}z_l^* + q^2Q^2 z_k\Omega z_l^* \otimes \Omega + Q\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^*\mathrm{d}z_t \otimes \Omega \\
&\quad - q^{-1}\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^*\Omega \otimes \mathrm{d}z_k - (2q - q^{-1})\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* z_t \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&\quad - Q_+Q^2\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl} z_s^* z_t\Omega \otimes \Omega - Q^2 z_k \mathrm{d}z_l^* \otimes \Omega - qQz_k\Omega \otimes \mathrm{d}z_l^*
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= q^{-1}Q^2\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl}z^*_s\mathrm{d}z_t\otimes\Omega + qQ^3z_k\mathrm{d}z^*_l\otimes\Omega + q^2Q^2z_k\Omega\otimes\mathrm{d}z^*_l\\
&\quad + (q-2q^{-1})Q^3z_kz^*_l\Omega\otimes\Omega + q^{-1}\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl}\mathrm{d}z^*_s\otimes\mathrm{d}z_t + q^2z_k\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-z^*_l\\
&\quad - (2q-q^{-1})\grave{R}^{-}{}^{st}_{kl}z^*_sz_t\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma(\mathrm{d}z^*_k\otimes\mathrm{d}z_l) &= q^{-1}Q\mathrm{d}z^*_k\otimes\Omega z_l + \Omega\otimes\mathrm{d}z^*_k\cdot z_l + q^{-2}z^*_k\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-\cdot z_l\\
&\quad + q^{-2}Q^2z^*_k\Omega\otimes\Omega z_l - Q\acute{R}^{st}_{kl}z_s\mathrm{d}z^*_t\otimes\Omega - q\acute{R}^{st}_{kl}z_s\Omega\otimes\mathrm{d}z^*_t\\
&\quad - q^{-1}\acute{R}^{st}_{kl}z_sz^*_t\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- - q^{-1}Q^2\acute{R}^{st}_{kl}z_sz^*_t\Omega\otimes\Omega - Q^2z^*_k\mathrm{d}z_l\otimes\Omega\\
&\quad + q^{-1}Qz^*_k\Omega\otimes\mathrm{d}z_l + qQz^*_kz_l\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + qQ^3z^*_kz_l\Omega\otimes\Omega\\
&\quad - Q^2z^*_kz_l\Omega\otimes\Omega\\
&= q^{-1}Q\mathrm{d}z^*_k\otimes\mathrm{d}z_l + q^{-1}Q\mathrm{d}z^*_k\cdot z_l\otimes\Omega + q\acute{R}^{st}_{kl}\Omega z_s\otimes\mathrm{d}z^*_t\\
&\quad - q^{-1}Q\Omega z^*_k\otimes\mathrm{d}z_l + Q^2\Omega z^*_kz_l\otimes\Omega + q^{-2}z^*_k\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-z_l\\
&\quad + q^{-2}Q^2z^*_k\Omega\otimes\mathrm{d}z_l + q^{-2}Q^2z^*_k\Omega z_l\otimes\Omega - Q\acute{R}^{st}_{kl}z_s\mathrm{d}z^*_t\otimes\Omega\\
&\quad - q\acute{R}^{st}_{kl}z_s\Omega\otimes\mathrm{d}z^*_t - q^{-1}\acute{R}^{st}_{kl}z_sz^*_t\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- - q^{-1}Q^2\acute{R}^{st}_{kl}z_sz^*_t\Omega\otimes\Omega\\
&\quad - Q^2z^*_k\mathrm{d}z_l\otimes\Omega + q^{-1}Qz^*_k\Omega\otimes\mathrm{d}z_l + qQz^*_kz_l\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-\\
&\quad + qQ^3z^*_kz_l\Omega\otimes\Omega - Q^2z^*_kz_l\Omega\otimes\Omega\\
&= q^{-1}Q\mathrm{d}z^*_k\otimes\mathrm{d}z_l + Q\acute{R}^{st}_{kl}z_s\mathrm{d}z^*_s\otimes\Omega - q^{-2}Q^2z^*_k\mathrm{d}z_l\otimes\Omega\\
&\quad + q^{-1}Q^3z^*_kz_l\Omega\otimes\Omega + q\acute{R}^{st}_{kl}\mathrm{d}z_s\otimes\mathrm{d}z^*_t + q\acute{R}^{st}_{kl}z_s\Omega\otimes\mathrm{d}z^*_t\\
&\quad - q^{-1}Q\mathrm{d}z^*_k\otimes\mathrm{d}z_l - q^{-1}Qz^*_k\Omega\otimes\mathrm{d}z_l + qQ^2\acute{R}^{st}_{kl}z_s\mathrm{d}z^*_t\otimes\Omega\\
&\quad - q^{-1}Q^3z^*_k\mathrm{d}z_l\otimes\Omega + Q^4z^*_kz_l\Omega\otimes\Omega + Q^2z^*_k\mathrm{d}z_l\otimes\Omega\\
&\quad + Q^2z^*_kz_l\Omega\otimes\Omega + q^{-2}z^*_k\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-z_l + q^{-2}Q^2z^*_k\Omega\otimes\mathrm{d}z_l\\
&\quad + q^{-2}Q^2z^*_k\mathrm{d}z_l\otimes\Omega + q^{-2}Q^2z^*_kz_l\Omega\otimes\Omega - Q\acute{R}^{st}_{kl}z_s\mathrm{d}z^*_t\otimes\Omega\\
&\quad - q\acute{R}^{st}_{kl}z_s\Omega\otimes\mathrm{d}z^*_t - q^{-1}\acute{R}^{st}_{kl}z_sz^*_t\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- - q^{-1}Q^2\acute{R}^{st}_{kl}z_sz^*_t\Omega\otimes\Omega\\
&\quad - Q^2z^*_k\mathrm{d}z_l\otimes\Omega + q^{-1}Qz^*_k\Omega\otimes\mathrm{d}z_l + qQz^*_kz_l\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-\\
&\quad + qQ^3z^*_kz_l\Omega\otimes\Omega - Q^2z^*_kz_l\Omega\otimes\Omega
\end{aligned}
$$

B.23 (zu Abschnitt 4.3.3, Seite 87)

$$
\begin{aligned}
&\sigma(q\mathrm{d}z_l\otimes\mathrm{d}z^*_k + q^{-2}\mathrm{d}z^*_k\otimes\mathrm{d}z_l + qQ^2z_l\mathrm{d}z^*_k\otimes\Omega + q^{-2}Q^2z^*_k\mathrm{d}z_l\otimes\Omega)\\
&\qquad = \mathrm{d}z^*_k\otimes\mathrm{d}z_l + q^{-1}\mathrm{d}z_l\otimes\mathrm{d}z^*_k + qQ^2z_l\Omega\otimes\mathrm{d}z^*_k\\
&\qquad\quad + q^{-2}Q^2z^*_k\Omega\otimes\mathrm{d}z_l + Q^2z^*_kz_l\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-
\end{aligned}
$$

B.24 (zu Abschnitt 4.3.4, Seite 88)

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_{+}) &= \sigma_{\mathrm{L}}\Big(\sum_i \mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_i^*\Big)\\
&= q^{-3}\sum_i \delta_{ij}\grave{R}^{-kl}_{\ \ ij}\mathrm{d}z_k^* \otimes \mathrm{d}z_l + q^{-3}Q^2\sum_i \delta_{ij}\grave{R}^{-kl}_{\ \ ij} z_k^*\mathrm{d}z_l \otimes \Omega\\
&\quad + q^{-1}Q\sum_i \mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_i^* - Q^2\sum_i z_i\Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* - q^{-3}Q^3\Omega\otimes\Omega\\
&= q^{-2}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_{-} + q^{-3}Q^3\Omega\otimes\Omega + q^{-1}Q\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_{+} + Q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_{+}\\
&\quad + q^{-1}Q^3\Omega\otimes\Omega - q^{-3}Q^3\Omega\otimes\Omega
\end{aligned}$$

$$\sigma_{\mathrm{R}}(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_{+}) = \sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_{+})$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_{-}) &= \sigma_{\mathrm{L}}\Big(\sum_i q^{-2i}\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_i\Big)\\
&= q\sum_i q^{-2i}\delta_{ij}\acute{R}^{kl}_{ij}\mathrm{d}z_k \otimes \mathrm{d}z_l^* + qQ^2\sum_i q^{-2i}\delta_{ij}\acute{R}^{kl}_{ij} z_k\mathrm{d}z_l^* \otimes \Omega\\
&\quad - q^{-2}Q^2\sum_i q^{-2i} z_i^*\Omega \otimes \mathrm{d}z_i + q^{-1}Q^3\Omega\otimes\Omega\\
&= \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_{+} - q^{-1}Q^3\Omega\otimes\Omega + q^{-2}Q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_{-} - q^{-3}Q^3\Omega\otimes\Omega + q^{-1}Q^3\Omega\otimes\Omega
\end{aligned}$$

$$\sigma_{\mathrm{R}}(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_{-}) = \sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_{-})$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathrm{L}}(\Omega\otimes\Omega) &= -qQ^{-1}\sigma_{\mathrm{L}}\Big(\sum_i \Omega z_i \otimes \mathrm{d}z_i^*\Big)\\
&= -qQ^{-1}\sigma_{\mathrm{L}}(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_{+}) + q^2Q^{-2}\sigma_{\mathrm{L}}\Big(\sum_i\sum_j z_iz_j\mathrm{d}z_j^* \otimes \mathrm{d}z_i^*\Big)\\
&= -q^{-1}Q^{-1}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_{-} - (q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_{+} + Q^2\Omega\otimes\Omega)\\
&\quad + qQ^{-2}\sum_i\sum_j \check{R}^{kl}_{ij} z_iz_j\mathrm{d}z_k^* \otimes \mathrm{d}z_l^*\\
&= -q^{-1}Q^{-1}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_{-} - (q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_{+} + Q^2\Omega\otimes\Omega)\\
&\quad + qQ^{-1}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_{+} + \Omega\otimes\Omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\mathrm{R}}(\Omega\otimes\Omega) &= -qQ^{-1}\sigma_{\mathrm{R}}\Big(\sum_i q^{-2i}\mathrm{d}z_i^* \otimes z_i\Omega\Big)\\
&= q^2Q^{-2}\sigma_{\mathrm{R}}\Big(\sum_i q^{-2i}\sum_j q^{-2j}\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j^* \cdot z_jz_i\Big) + qQ^{-1}\sigma_{\mathrm{R}}(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_{-})\\
&= q^2Q^{-2}\sum_i q^{-2i}\sum_j q^{-2j}\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j^* \cdot z_jz_i + qQ^{-1}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_{+}\\
&\quad + \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_{-} - q^{-2}(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_{-} + Q^2\Omega\otimes\Omega)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -qQ^{-1}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + \Omega\otimes\Omega + qQ^{-1}\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ \\
&\quad + \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- - q^{-2}(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + Q^2\Omega\otimes\Omega)
\end{aligned}
$$

B.25 (zu Abschnitt 4.3.5, Seite 88)

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}(\mathrm{d}z_i\otimes\Omega\otimes\mathrm{d}z_j) = q^{-2}\sigma_{12}\sigma_{23}(\Omega\otimes\mathrm{d}z_i\otimes\mathrm{d}z_j) \\
&\qquad = q^{-3}\hat{R}^{st}_{ij}\sigma_{12}(\Omega\otimes\mathrm{d}z_s\otimes\mathrm{d}z_t) \\
&\qquad = q^{-4}Q\hat{R}^{st}_{ij}\Omega\otimes\mathrm{d}z_s\otimes\mathrm{d}z_t + q^{-3}\hat{R}^{st}_{ij}\mathrm{d}z_s\otimes\Omega\otimes\mathrm{d}z_t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}(\mathrm{d}z_i\otimes\Omega\otimes\mathrm{d}z_j) \\
&\qquad = q^{-1}Q\sigma_{23}\sigma_{12}(\mathrm{d}z_i\otimes\Omega\otimes\mathrm{d}z_j) + \sigma_{23}\sigma_{12}(\mathrm{d}z_i\otimes\mathrm{d}z_j\otimes\Omega) \\
&\qquad = q^{-3}Q\sigma_{23}(\Omega\otimes\mathrm{d}z_i\otimes\mathrm{d}z_j) + q^{-1}\hat{R}^{st}_{ij}\sigma_{23}(\mathrm{d}z_s\otimes\mathrm{d}z_t\otimes\Omega) \\
&\qquad = q^{-4}Q\hat{R}^{st}_{ij}\Omega\otimes\mathrm{d}z_s\otimes\mathrm{d}z_t + q^{-3}\hat{R}^{st}_{ij}\mathrm{d}z_s\otimes\Omega\otimes\mathrm{d}z_t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}(\mathrm{d}z^*_i\otimes\Omega\otimes\mathrm{d}z^*_j) \\
&\qquad = q^{-1}Q\sigma_{12}\sigma_{23}(\mathrm{d}z^*_i\otimes\mathrm{d}z^*_j\otimes\Omega) + q^{-1}\check{R}^{st}_{ij}\sigma_{12}\sigma_{23}(\Omega\otimes\mathrm{d}z^*_s\otimes\mathrm{d}z^*_t) \\
&\qquad = q^{-3}Q\sigma_{12}(\mathrm{d}z^*_i\otimes\mathrm{d}z^*_j\otimes\Omega) + q^{-1}\check{R}^{st}_{ij}\sigma_{12}(\Omega\otimes\mathrm{d}z^*_s\otimes\mathrm{d}z^*_t) \\
&\qquad = q^{-4}Q\check{R}^{st}_{ij}\mathrm{d}z^*_s\otimes\mathrm{d}z^*_t\otimes\Omega + q^{-3}\check{R}^{st}_{ij}\mathrm{d}z^*_s\otimes\Omega\otimes\mathrm{d}z^*_t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}(\mathrm{d}z^*_i\otimes\Omega\otimes\mathrm{d}z^*_j) = q^{-2}\sigma_{23}\sigma_{12}(\mathrm{d}z^*_i\otimes\mathrm{d}z^*_j\otimes\Omega) \\
&\qquad = q^{-3}\check{R}^{st}_{ij}\sigma_{23}(\mathrm{d}z^*_s\otimes\mathrm{d}z^*_t\otimes\Omega) \\
&\qquad = q^{-4}Q\check{R}^{st}_{ij}\mathrm{d}z^*_s\otimes\mathrm{d}z^*_t\otimes\Omega + q^{-3}\check{R}^{st}_{ij}\mathrm{d}z^*_s\otimes\Omega\otimes\mathrm{d}z^*_t
\end{aligned}
$$

$$
\sigma_{12}(\mathrm{d}z_i\otimes\Omega\otimes\mathrm{d}z^*_j) = q^{-2}\Omega\otimes\mathrm{d}z_i\otimes\mathrm{d}z^*_j
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{23}\sigma_{12}(\mathrm{d}z_i\otimes\Omega\otimes\mathrm{d}z^*_j) \\
&\qquad = q^{-5}\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}\Omega\otimes\mathrm{d}z^*_s\otimes\mathrm{d}z_t + q^{-5}Q^2\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}\Omega z^*_s\otimes\mathrm{d}z_t\otimes\Omega \\
&\qquad\quad + q^{-3}Q\Omega\otimes\mathrm{d}z_i\otimes\mathrm{d}z^*_j - q^{-2}Q^2\Omega z_i\otimes\Omega\otimes\mathrm{d}z^*_j \\
&\qquad\quad - q^{-5}Q^3\Omega z_i z^*_j\otimes\Omega\otimes\Omega \\
&\qquad = q^{-5}\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}\Omega\otimes\mathrm{d}z^*_s\otimes\mathrm{d}z_t + q^{-5}Q^2\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}z^*_s\Omega\otimes\mathrm{d}z_t\otimes\Omega \\
&\qquad\quad + q^{-5}Q^2\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}\mathrm{d}z^*_s\otimes\mathrm{d}z_t\otimes\Omega + q^{-3}Q\Omega\otimes\mathrm{d}z_i\otimes\mathrm{d}z^*_j \\
&\qquad\quad - q^{-2}Q^2 z_i\Omega\otimes\Omega\otimes\mathrm{d}z^*_j - q^{-2}Q^2\mathrm{d}z_i\otimes\Omega\otimes\mathrm{d}z^*_j \\
&\qquad\quad - q^{-5}Q^3(Q^2+1)z_i z^*_j\Omega\otimes\Omega\otimes\Omega - q^{-3}Q^3 z_i\mathrm{d}z^*_j\otimes\Omega\otimes\Omega \\
&\qquad\quad - q^{-6}Q^3\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}z^*_s\mathrm{d}z_t\otimes\Omega\otimes\Omega
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{12}(\mathrm{d}z_i \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j^*)\\
&\qquad = q^{-7}\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}\mathrm{d}z_s^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_t + q^{-4}Q^2\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j^* \otimes \Omega\\
&\qquad\qquad + q^{-3}Q\mathrm{d}z_i \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j^* + q^{-5}Q^2\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}z_s^*\mathrm{d}z_t \otimes \Omega \otimes \Omega\\
&\qquad\qquad - q^{-2}Q^2 z_i\Omega \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j^* - q^{-3}Q^3 z_i\Omega \otimes \mathrm{d}z_j^* \otimes \Omega\\
&\qquad\qquad - q^{-5}Q^3 z_i z_j^*\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega
\end{aligned}$$

$$\sigma_{23}(\mathrm{d}z_i \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j^*) = q^{-2}\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j^* \otimes \Omega$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{12}\sigma_{23}(\mathrm{d}z_i \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j^*) &= q^{-5}\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}\mathrm{d}z_s^* \otimes \mathrm{d}z_t \otimes \Omega + q^{-5}Q^2\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}z_s^*\mathrm{d}z_t \otimes \Omega \otimes \Omega\\
&\quad + q^{-3}Q\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j^* \otimes \Omega - q^{-2}Q^2 z_i\Omega \otimes \mathrm{d}z_j^* \otimes \Omega\\
&\quad - q^{-5}Q^3 z_i z_j^*\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}(\mathrm{d}z_i \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j^*)\\
&\qquad = q^{-7}\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}\mathrm{d}z_s^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_t + q^{-5}Q^2\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}z_s^*\mathrm{d}z_t \otimes \Omega \otimes \Omega\\
&\qquad\qquad + q^{-3}Q\mathrm{d}z_i \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j^* + q^{-4}Q^2\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j^* \otimes \Omega\\
&\qquad\qquad - q^{-2}Q^2 z_i\Omega \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j^* - q^{-3}Q^3 z_i\Omega \otimes \mathrm{d}z_j^* \otimes \Omega\\
&\qquad\qquad - q^{-5}Q^3 z_i z_j^*\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega
\end{aligned}$$

$$\sigma_{12}(\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j) = \Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j + q^{-1}Q\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j$$

$$\begin{aligned}
&\sigma_{23}\sigma_{12}(\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j)\\
&\qquad = q\acute{R}^{st}_{ij}\Omega \otimes \mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t^* + qQ^2\acute{R}^{st}_{ij}\Omega z_s \otimes \mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega\\
&\qquad\qquad - q^{-2}Q^2\Omega z_i^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j + qQ^3\Omega z_i^* z_j \otimes \Omega \otimes \Omega\\
&\qquad\qquad + q^{-1}Q\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j \otimes \Omega + q^{-2}Q^2\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j\\
&\qquad = q\acute{R}^{st}_{ij}\Omega \otimes \mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t^* + qQ^2\acute{R}^{st}_{ij}\mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega\\
&\qquad\qquad + qQ^2\acute{R}^{st}_{ij}z_s\Omega \otimes \mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega - q^{-2}Q^2 z_i^*\Omega \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j\\
&\qquad\qquad + qQ^3(Q^2+1)z_i^* z_j\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega + q^{-1}Q\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j \otimes \Omega\\
&\qquad\qquad + q^2Q^3\acute{R}^{st}_{ij}z_s\mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega \otimes \Omega + q^{-1}Q^3 z_i^*\mathrm{d}z_j \otimes \Omega \otimes \Omega
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{23}\sigma_{12}(\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j)\\
&\qquad = q\acute{R}_{ij}^{st}\mathrm{d}z_s \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_t^* + Q\acute{R}_{ij}^{st}\Omega \otimes \mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t^*\\
&\qquad\quad + q^{-2}Q^2\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j \otimes \Omega + q^{-2}Q^4 z_i^*\mathrm{d}z_j \otimes \Omega \otimes \Omega\\
&\qquad\quad + Q^3\acute{R}_{ij}^{st}\mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega - qQ^4\acute{R}_{ij}^{st}z_s\Omega \otimes \mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega\\
&\qquad\quad - q^{-1}Q^5 z_i^* z_j\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega + q^{-1}Q^2\acute{R}_{ij}^{st}z_s\mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega \otimes \Omega\\
&\qquad\quad - q^{-2}Q^2 z_i^*\Omega \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j + qQ^3 z_i^* z_j\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega\\
&\qquad\quad + Q\acute{R}_{ij}^{st}\mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega + Q^3\acute{R}_{ij}^{st}z_s\mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega \otimes \Omega\\
&\qquad\quad - q^{-3}Q^3 z_i^*\Omega \otimes \mathrm{d}z_j \otimes \Omega + Q^4 z_i^* z_j\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega\\
&\qquad\quad + q^2Q^3\acute{R}_{ij}^{st}z_s\Omega \otimes \mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega + qQ^4\acute{R}_{ij}^{st}z_s\mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega \otimes \Omega\\
&\qquad\quad + qQ^5 z_i^* z_j\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega + q^{-3}Q^3 z_i^*\Omega \otimes \mathrm{d}z_j \otimes \Omega\\
&\qquad = q\acute{R}_{ij}^{st}\mathrm{d}z_s \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_t^* + Q(Q^2+1)\acute{R}_{ij}^{st}\mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega\\
&\qquad\quad + q^{-2}Q^2\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j \otimes \Omega + Q\acute{R}_{ij}^{st}\Omega \otimes \mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t^*\\
&\qquad\quad + q^{-2}Q^4 z_i^*\mathrm{d}z_j \otimes \Omega \otimes \Omega - q^{-2}Q^2 z_i^*\Omega \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j\\
&\qquad\quad + qQ^2(Q^2+1)\acute{R}_{ij}^{st}z_s\mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega \otimes \Omega + Q^3\acute{R}_{ij}^{st}z_s\Omega \otimes \mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega\\
&\qquad\quad + Q^3(q^3 - q^{-1}Q^2)z_i^* z_j\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega
\end{aligned}
$$

$$
\sigma_{23}(\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j) = \mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j \otimes \Omega + q^{-1}Q\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{12}\sigma_{23}(\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j)\\
&\qquad = q\acute{R}_{ij}^{st}\mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega + qQ^2\acute{R}_{ij}^{st}z_s\mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega \otimes \Omega\\
&\qquad\quad - q^{-2}Q^2 z_i^*\Omega \otimes \mathrm{d}z_j \otimes \Omega + qQ^3 z_i^* z_j\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega\\
&\qquad\quad + q^{-1}Q\Omega \otimes \mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j + q^{-2}Q^2\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{23}\sigma_{12}\sigma_{23}(\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j)\\
&\qquad = q\acute{R}_{ij}^{st}\mathrm{d}z_s \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_t^* + Q\acute{R}_{ij}^{st}\mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega\\
&\qquad\quad + qQ^2\acute{R}_{ij}^{st}z_s\mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega \otimes \Omega - q^{-4}Q^2 z_i^*\Omega \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j\\
&\qquad\quad + qQ^3 z_i^* z_j\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega + Q\acute{R}_{ij}^{st}\Omega \otimes \mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t^*\\
&\qquad\quad + Q^3\acute{R}_{ij}^{st}\Omega z_s \otimes \mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega - q^{-3}Q^3\Omega z_i^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j\\
&\qquad\quad + Q^4\Omega z_i^* z_j \otimes \Omega \otimes \Omega + q^{-2}Q^2\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j \otimes \Omega\\
&\qquad\quad + q^{-3}Q^3\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= q\acute{R}^{st}_{ij}\mathrm{d}z_s \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_t^* + Q\acute{R}^{st}_{ij}\mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega \\
&\quad + qQ^2\acute{R}^{st}_{ij}z_s\mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega \otimes \Omega + Q\acute{R}^{st}_{ij}\Omega \otimes \mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t^* \\
&\quad + Q^3\acute{R}^{st}_{ij}z_s\Omega \otimes \mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega + Q^3\acute{R}^{st}_{ij}\mathrm{d}z_s \otimes \mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega \\
&\quad + q^{-2}Q^2\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j \otimes \Omega + qQ^4\acute{R}^{st}_{ij}z_s\mathrm{d}z_t^* \otimes \Omega \otimes \Omega \\
&\quad + q^3Q^3z_i^*z_j\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega - q^{-1}Q^5z_i^*z_j\Omega \otimes \Omega \otimes \Omega \\
&\quad - q^{-2}Q^2z_i^*\Omega \otimes \Omega \otimes \mathrm{d}z_j + q^{-2}Q^4z_i^*\mathrm{d}z_j \otimes \Omega \otimes \Omega
\end{aligned}
$$

B.26 (zu Abschnitt 5.1.3, Seite 97)

$$-g(\mathrm{d}z_i \otimes \Omega_+) = \sum_j g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j)z_j^* = \sum_j \alpha z_i z_j z_j^* = \alpha z_i$$

$$
\begin{aligned}
-g(\mathrm{d}z_i \otimes \Omega_-) &= \sum_j q^{-2j} g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_j^*)z_j \\
&= \sum_j q^{-2j}\beta_1 z_i z_j^* z_j + \sum_j q^{-2j}q^{2i}\beta_2 z_j \delta_{ij}\mathbf{1} = q^{-2}\beta_1 z_i + \beta_2 z_i
\end{aligned}
$$

$$-g(\mathrm{d}z_i \otimes (\Omega_+ + \Omega_-)) = (\alpha + q^{-2}\beta_1 + \beta_2)z_i$$

$$-g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega_-) = \sum_j q^{-2j}g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j^*)z_j = \sum_j q^{-2j}\gamma z_i^* z_j^* z_j = q^{-2}\gamma z_i^*$$

$$
\begin{aligned}
-g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \Omega_+) &= \sum_j g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j)z_j^* \\
&= \sum_j \delta_1 z_i^* z_j z_j^* + \sum_j \delta_2 z_i^* \delta_{ij}\mathbf{1} \\
&= (\delta_1 + \delta_2)z_i^*
\end{aligned}
$$

$$-g(\mathrm{d}z_i^* \otimes (\Omega_+ + \Omega_-)) = (q^{-2}\gamma + \delta_1 + \delta_2)z_i^*$$

B.27 (zu Abschnitt 5.1.3, Seite 97)

$$
\begin{aligned}
-g(\Omega_- \otimes \mathrm{d}z_i) &= \sum_j q^{-2j}g(\mathrm{d}z_j^* \otimes z_j\mathrm{d}z_i) = \sum_j q^{-2j}q^{-1}\hat{R}^{-lk}_{\ \ ji}g(\mathrm{d}z_j^* \otimes \mathrm{d}z_l)z_k \\
&= \sum_j q^{-2j}q^{-1}\hat{R}^{-lk}_{\ \ ji}(\delta_1 z_j^* z_l z_k + \delta_2\delta_{jl}z_k) = q^{-4}\delta_1 z_i + q^{-2N-2}\delta_2 z_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\,g(\Omega_+\otimes \mathrm{d}z_i) &= \sum_j g(\mathrm{d}z_j\otimes z_j^*\mathrm{d}z_i)\\
&= \sum_j (q\acute{R}^{lk}_{ji}g(\mathrm{d}z_j\otimes \mathrm{d}z_l)z_k^* - q^{-1}Qg(\mathrm{d}z_j\otimes \mathrm{d}z_j^*)z_i - Q^2g(\mathrm{d}z_j\otimes\Omega)z_j^*z_i)\\
&= \sum_j (g\acute{R}^{lk}_{ji}\alpha z_jz_lz_k^* - q^{-1}Q\beta_1z_jz_j^*z_i - q^{-1}Q\beta_2q^{2j}z_i - qQ\alpha z_jz_j^*z_i)\\
&= (q^2\alpha - q^{-1}Q\beta_1 - qQ\mathfrak{s}_+\beta_2 - qQ\alpha)z_i\\
&= (\alpha - q^{-1}Q\beta_1 - qQ\mathfrak{s}_+\beta_2)z_i
\end{aligned}
$$

$$
-\,g((\Omega_+ + \Omega_-)\otimes \mathrm{d}z_i) = (\alpha - q^{-1}Q\beta_1 - qQ\mathfrak{s}_+\beta_2 + q^{-4}\delta_1 + q^{-2N-2}\delta_2)z_i
$$

$$
\begin{aligned}
-\,g(\Omega_+\otimes \mathrm{d}z_i^*) &= \sum_j g(\mathrm{d}z_j\otimes z_j^*\mathrm{d}z_i^*) = \sum_j q\check{R}^{kl}_{ji}g(\mathrm{d}z_j\otimes \mathrm{d}z_l^*)z_k^*\\
&= \sum_j q\beta_1\check{R}^{lk}_{ji}z_jz_l^*z_k^* + \sum_j q\beta_2\check{R}^{lk}_{ji}q^{2l}\delta_{jl}z_k^*\\
&= q^2\beta_1\sum_j z_jz_j^*z_i^* + q^{2N+2}\beta_2z_i^* = (q^2\beta_1 + q^{2N+2}\beta_2)z_i^*
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\,g(\Omega_-\otimes \mathrm{d}z_i^*) &= \sum_j q^{-2j}g(\mathrm{d}z_j^*\otimes z_j\mathrm{d}z_i^*)\\
&= \sum_j q^{-2j}(q^{-1}\grave{R}^{-}{}^{lk}_{ji}g(\mathrm{d}z_j^*\otimes \mathrm{d}z_l^*)z_k\\
&\qquad + qQg(\mathrm{d}z_j^*\otimes \mathrm{d}z_j)z_i^* - Q^2g(\mathrm{d}z_j^*\otimes\Omega)z_jz_i^*)\\
&= \sum_j q^{-2j}(q^{-1}\grave{R}^{-}{}^{lk}_{ji}\gamma z_j^*z_l^*z_k + qQ\delta_1z_j^*z_jz_i^* + qQ\delta_2z_i^* + q^{-1}Q\gamma z_j^*z_jz_i^*)\\
&= \sum_j q^{-2j}(q^{-2}\gamma z_j^*z_jz_i^* + qQ\delta_1z_j^*z_jz_i^* + qQ\delta_2z_i^* + q^{-1}Q\gamma z_j^*z_jz_i^*)\\
&= (q^{-4}\gamma + q^{-1}Q\delta_1 + q^{-1}Q\mathfrak{s}_-\delta_2 + q^{-3}Q\gamma)z_i^*\\
&= (q^{-2}\gamma + q^{-1}Q\delta_1 + q^{-1}Q\mathfrak{s}_-\delta_2)z_i^*
\end{aligned}
$$

$$
-\,g((\Omega_+ + \Omega_-)\otimes \mathrm{d}z_i^*) = (q^{-2}\gamma + q^{-1}Q\delta_1 + q^{-1}Q\mathfrak{s}_-\delta_2 + q^2\beta_1 + q^{2N+2}\beta_2)z_i^*
$$

B.28 (zu Abschnitt 5.1.3, Seite 98)

$$
\begin{aligned}
(g\circ\sigma)(\mathrm{d}z_i\otimes \mathrm{d}z_j^*) = {}& q^{-3}\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}g(\mathrm{d}z_s^*\otimes \mathrm{d}z_t) + q^{-1}Qg(\mathrm{d}z_i\otimes \mathrm{d}z_j^*)\\
&- q^{-3}Q^2\grave{R}^{-}{}^{st}_{ij}g(\Omega\otimes \mathrm{d}z_s^*)z_t + Q^2g(\mathrm{d}z_i\otimes\Omega)z_j^*\\
&- (1+q^{-2}-q^{-4})Q^2g(\Omega\otimes\Omega)z_iz_j^* - q^2g(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+)z_iz_j^*
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= q^{-4}\delta_1 z_i z_j^* + q^{-2N-4}\delta_2 q^{2i}\delta_{ij} + q^{-1}Q\beta_1 z_i z_j^* \\
&\quad + q^{-1}Q\beta_2 q^{2i}\delta_{ij} - q^{-3}Q\nu z_i z_j^* + qQ\alpha z_i z_j^* \\
&\quad + (1 + q^{-2} - q^{-4})\nu z_i z_j^* - q^2\beta_1 z_i z_j^* - q^4\mathfrak{s}_+\beta_2 z_i z_j^* \\
&= \frac{1}{(q^{2N-2}-1)(1-q^2)}\Big((q^{-6} - q^{-4})\gamma + (q^{2N-4} - 2q^{-2} + q^{-4})\nu \\
&\qquad\qquad + (q^{2N+2} - 2q^2 + 1)\alpha\Big) z_i z_j^* \\
&\quad + \frac{1}{q^{2N-2}-1}(-q^{-8}\gamma + q^{-1}Q\alpha - q^{-6}\nu)q^{2i}\delta_{ij}
\end{aligned}
$$

B.29 (zu Abschnitt 5.1.3, Seite 99)

$$
\begin{aligned}
g(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+) &= \sum_i g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_i^*) \\
&= -q^{2N}\frac{\alpha + q^{-2N-2}\nu}{q^{2N-2}-1}\sum_i z_i z_i^* + \frac{\alpha + q^{-4}\nu}{q^{-2N-2}-1}q^2\mathfrak{s}_+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-) &= \sum_i q^{-2i} g(\mathrm{d}z_i^* \otimes \mathrm{d}z_i) \\
&= q^{-2}\frac{\gamma + q^{2N+2}\nu}{q^{2N-2}-1}\sum_i q^{-2i} z_i^* z_i - q^{2N-4}\frac{\gamma + q^4\nu}{q^{2N-2}-1}q^{-2}\mathfrak{s}_-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(\Omega\otimes\Omega) &= g\Big(q^2 Q^{-2}\sum_i\sum_j \mathrm{d}z_i\cdot z_i^* \otimes \mathrm{d}z_j \cdot z_j^*\Big) \\
&= q^3 Q^{-2}\sum_i\sum_j \delta_{ik}\delta_{jl}\acute{R}^{st}_{kl} g(\mathrm{d}z_i \otimes \mathrm{d}z_s) z_t^* z_j^* - qQ^{-1}\sum_i\sum_j g(\mathrm{d}z_i\otimes \mathrm{d}z_i^*) z_j z_j^* \\
&\quad - q^2\sum_i\sum_j g(\mathrm{d}z_i \otimes \Omega) z_i^* z_j z_j^* \\
&= q^2 Q^{-2}\sum_i\sum_j g(\mathrm{d}z_i\otimes \mathrm{d}z_j) z_j^* z_i^* - qQ^{-1} g(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+) \\
&= q^2 Q^{-2}\alpha\cdot 1 - qQ^{-1}g(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+)
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
&g(q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ - \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-) \\
&\quad = -q^{2N+2}\frac{\alpha + q^{-2N-2}\nu}{q^{2N-2}-1} + q^4\frac{(\alpha + q^{-4}\nu)(q^{2N}-1)}{(q^{-2N-2}-1)(q^2-1)} \\
&\qquad - q^{-4}\frac{\gamma + q^{2N+2}\nu}{q^{2N-2}-1} + q^{2N-4}\frac{(\gamma + q^4\nu)(1-q^{-2N})}{(q^{2N-2}-1)(q^2-1)} \\
&\quad = Q^{-1}\big(q^3\alpha + q^{-3}\gamma + Q_+\nu\big)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
g(q^2\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + Q^2\Omega\otimes\Omega) &= g(\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+) + q^2\alpha\cdot 1\\
&= -q^{2N}\frac{\alpha+q^{-2N-2}\nu}{q^{2N-2}-1} + q^2\frac{(\alpha+q^{-4}\nu)(q^{2N}-1)}{(q^{-2N-2}-1)(q^2-1)} + q^2\alpha\\
&= qQ^{-1}(q^4\alpha+\nu)
\end{aligned}$$

B.30 (zu Abschnitt 5.1.4, Seite 101)

$$\begin{aligned}
(g\circ\sigma)(\mathrm{d}z_i\otimes\mathrm{d}z_j^*) &= q\grave{R}^{st}_{ij}g(\mathrm{d}z_s^*\otimes\mathrm{d}z_t) + q^{-1}Qg(\mathrm{d}z_i\otimes\mathrm{d}z_j^*)\\
&= -(q^{-2N}\alpha + q^2\delta + qQ\beta)z_iz_j^* + (\delta + q^{-1}Q\beta)q^{2i}\delta_{ij}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(g\circ\sigma)(\mathrm{d}z_k^*\otimes\mathrm{d}z_l^*) &= q^{-3}\acute{R}^{-\,st}_{\;ij}g(\mathrm{d}z_s\otimes\mathrm{d}z_t^*)\\
&= -(q^{-2N-4}\alpha + q^{-2}\beta)z_i^*z_j + q^{-2}\beta\delta_{ij}
\end{aligned}$$

B.31 (zu Abschnitt 5.2.2, Seite 104)

$$\begin{aligned}
\nabla(-\Omega_+) &= \nabla\Big(\sum_i \mathrm{d}z_i\cdot z_i^*\Big) = -\sum_i \mathrm{d}z_i\otimes\mathrm{d}z_i^* + \sum_i \nabla(\mathrm{d}z_i)\cdot z_i^*\\
&= -\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + A_1\sum_i z_i\Omega\otimes\Omega z_i^* + E_1\sum_i z_i\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ z_i^*\\
&\qquad + F_1\sum_i z_i\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- z_i^* + B_1\sum_i \mathrm{d}z_i\otimes\Omega z_i^* + C_1\sum_i \Omega\otimes\mathrm{d}z_i\cdot z_i^*\\
&= (-1 + B_1 + q^{-2}E_1)\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + q^{-2}F_1\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-\\
&\qquad + (A_1 - q^{-2}Q^2E_1 - Q^2F_1)\sum_i z_i\Omega\otimes\mathrm{d}z_i^*\\
&\qquad + (q^{-2}A_1 + q^{-1}QB_1 + q^{-1}QC_1)\Omega\otimes\Omega\\
&= (-1 - A_1 + B_1 + q^{-2}(1+Q^2)E_1 + Q^2F_1)\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + q^{-2}F_1\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_-\\
&\qquad + \big((-q^{-1}Q + q^{-2})A_1 + q^{-1}QB_1 + q^{-1}QC_1\\
&\qquad\qquad + q^{-3}Q^3E_1 + q^{-1}Q^3F_1\big)\Omega\otimes\Omega
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla(-\Omega_-) &= \nabla\Big(\sum_i q^{-2i}\mathrm{d}z_i^*\cdot z_i\Big) = -\sum_i q^{-2i}\mathrm{d}z_i^*\otimes\mathrm{d}z_i + \sum_i q^{-2i}\nabla(\mathrm{d}z_i^*)\cdot z_i\\
&= -\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- + A_2\sum_i q^{-2i}z_i^*\Omega\otimes\Omega z_i + E_2\sum_i q^{-2i}z_i^*\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ z_i\\
&\qquad + F_2\sum_i q^{-2i}z_i^*\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- z_i + B_2\sum_i q^{-2i}\mathrm{d}z_i^*\otimes\Omega z_i + C_2\sum_i q^{-2i}\Omega\otimes\mathrm{d}z_i^*\cdot z_i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= E_2 \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + (-1 + B_2 + F_2)\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&\qquad + (A_2 - q^{-2}Q^2E_2 - Q^2F_2)\sum_i q^{-2i} z_i^* \Omega \otimes \mathrm{d}z_i \\
&\qquad + (A_2 - q^{-1}QB_2 - q^{-1}QC_2)\Omega \otimes \Omega \\
&= E_2 \mathrm{d}^{\otimes}\Omega_+ + (-1 - A_2 + B_2 + q^{-2}Q^2E_2 + (1 + Q^2)F_2)\mathrm{d}^{\otimes}\Omega_- \\
&\qquad + \big((q^{-1}Q + 1)A_2 - q^{-1}QB_2 - q^{-1}QC_2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - q^{-3}Q^3E_2 - q^{-1}Q^3F_2\big)\Omega \otimes \Omega
\end{aligned}
$$

Literaturverzeichnis

[AC] Aschieri, P.; Castellani, L.: An introduction to noncommutative differential geometry on quantum groups. – Intern. J. Mod. Phys. A **8** (1993), 1667–1706.

[AS] Apel, J.; Schmüdgen, K.: Classification of Three Dimensional Covariant Differential Calculi on Podleś' Quantum Spheres and on Related Spaces. – Lett. Math. Phys. **32** (1994), 25–36.

[BR] Barut, A. O.; Rączka, R.: Theory of group representations and applications. – PWN, Warszawa 1977.

[Con] Connes, A.: Non-Commutative Geometry. – Academic Press, San Diego 1995.

[CSWW] Carow-Watamura, U.; Schlieker, M.; Watamura, S.; Weich, W.: Bicovariant differential calculus on quantum groups $\mathrm{SU}_q(N)$ and $\mathrm{SO}_q(N)$. – Commun. Math. Phys. **142** (1991), 605–641.

[Dij1] Dijkhuizen, M. S.: Some Remarks on the Construction of Quantum Symmetric Spaces. – Proc. Conf. Repr. Theory of Lie Groups, Lie Algebras and Their Quantum Analogues, Twente (NL) 1994, Act. Appl. Math.

[DN] Dijkhuizen, M. S.; Noumi, M.: A Family of Quantum Projective Spaces and Related q-Hypergeometric Orthogonal Polynomials. – Preprint, q-alg/9605017.

[Hay] Hayashi, T.: Quantum deformations of classical groups. – Publ. RIMS Kyoto Univ. **28** (1992), 57–81.

[HS] Heckenberger, I.; Schmüdgen, K.: Levi-Civita Connections on the Quantum Groups $\mathrm{SL}_q(N)$, $\mathrm{O}_q(N)$ and $\mathrm{Sp}_q(N)$. – Commun. Math. Phys. **185** (1997), 177–196.

[Jur] Jurčo, B.: Differential calculus on quantized simple Lie groups. – Lett. Math. Phys. **22** (1991), 177–186.

[KS] Klimyk, A. U.; Schmüdgen, K.: Quantum Groups and Their Representations. – Texts and Monographs in Physics. Springer, Berlin 1997.

[KV] Korogodsky, L. I.; Vaksman, L. L.: Quantum G-Spaces and Heisenberg Algebra. – In: Kulish (ed.), Springer Lecture Notes 1510.

[KVD] Kustermans; Van Daele: C^*-algebraic quantum groups arising from algebraic quantum groups. – Preprint, q-alg/9611023.

[NM] Noumi, M.; Mimachi, K.: Quantum 2-spheres and big q-Jacobi polynomials. – Commun. Math. Phys. **128** (1990), 521–531.

[NYM] Noumi, M.; Yamada, H.; Mimachi, K.: Finite-dimensional representations of the quantum group $\mathrm{GL}_q(n, \mathbb{C})$ and the zonal spherical functions on $\mathrm{U}_q(n)/\mathrm{U}_q(n-1)$. – Jap. J. Math. **19** (1993), 31–80.

[Pod1] Podleś, P.: Quantum Spheres. – Lett. Math. Phys. **14** (1987), 193–202.

[Pod2] Podleś, P.: Differential Calculus on Quantum Spheres. – Lett. Math. Phys. **18** (1989), 107–119.

[Pod3] Podleś, P.: The classification of differential structures on quantum 2-spheres. – Commun. Math. Phys. **150** (1992), 167–179.

[RTF] Reshetikhin, N. Yu.; Takhtajan, L. A.; Faddeev, L. D.: Kvantovanie grupp Li i algebr Li. – Algebra i analiz **1** (1987), 178–206. (engl. Übers.: Leningrad J. Math. **1** (1990), 193–225.)

[Sch] Schmüdgen, K.: On the Construction of Covariant Differential Calculi on Quantum Homogeneous Spaces. – Preprint, math.QA/9804143.

[Schü] Schüler, A.: Differential Hopf Algebras on Quantum Groups of Type A. – Preprint, math.QA/9805139.

[SS1] Schmüdgen, K.; Schüler, A.: Classification of Bicovariant Differential Calculi on Quantum Groups of Type A, B, C and D. – Commun. Math. Phys. **167** (1995), 635–670.

[SS2] Schmüdgen, K.; Schüler, A.: Classification of Bicovariant Differential Calculi on Quantum Groups. – Commun. Math. Phys. **170** (1995), 315–335.

[VS] Vaksman, L. L.; Soibelman, Ja. S.: Algebra funkcij na kvantovoj gruppe $\mathrm{SU}(n+1)$ i nečetnomernye kvantovye sfery. – Algebra i analiz **2** n. 5 (1990), 101–120. (engl. Übers.: Leningrad J. Math. **2** (1991), 1023–1042.)

[Wor1] Woronowicz, S. L.: Compact matrix pseudogroups. – Commun. Math. Phys. **111** (1987), 613–665.

[Wor2] Woronowicz, S. L.: Differential Calculus on Quantum Matrix Pseudogroups (Quantum Groups). – Commun. Math. Phys. **122** (1989), 125–170.

[WZ] Wess, J.; Zumino, B.: Covariant differential calculus on the quantum hyperplane. – Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **18** (1990), 302–312.

Zusammenfassung der wissenschaftlichen Ergebnisse zur Dissertation

Kovariante Differentialrechnung auf Quantensphären ungerader Dimension. Ein Beitrag zur nichtkommutativen Geometrie homogener Quantenräume

der Fakultät für Mathematik und Informatik
der Universität Leipzig

eingereicht von
Dipl.-Math. Martin Welk

angefertigt an der
Universität Leipzig, Mathematisches Institut

Juli 1998

---

1. Quantengruppen, Quantenräume zu Quantengruppen und speziell homogene Quantenräume zu Quantengruppen sind wichtige Beispiele nichtkommutativer geometrischer Räume [RTF]. Die Untersuchung der kovarianten Differentialrechnung auf Quantengruppen und Quantenräumen bildet die Grundlage für eine Beschreibung ihrer geometrischen Struktur.

Während der neunziger Jahre wurde die Untersuchung der kovarianten, insbesondere der bikovarianten, Differentialrechnung auf Quantengruppen wesentlich vorangetrieben [Wor2]. Klassifikationsresultate für bikovariante Differentialkalküle erster Ordnung wurden erzielt [SS1, SS2], Differentialkalküle erster Ordnung mit einseitiger Kovarianz wurden untersucht, Differentialkalküle höherer Ordnung konnten konstruiert und beschrieben werden [Schü]. Grundlegende Begriffe der Differentialgeometrie wurden auf der Basis der entwickelten bikovarianten Differentialrechnung auf Quantengruppen formuliert [HS].

Homogene Quantenräume stellen aufgrund ihrer engen Verbindung zu Quantengruppen ein naheliegendes Objekt für daran anschließende Untersuchungen dar. Sie besitzen eine reichhaltige algebraische Struktur, und die Theorie der Quantengruppen kann benutzt werden, um Differentialrechnung und nichtkommutative Geometrie auf diesen Quantenräumen zu untersuchen.

Bisher lagen Ergebnisse zur kovarianten Differentialrechnung nur für verhältnismäßig einfache homogene Quantenräume vor wie etwa quantisierte Vektorräume, quantisierte projektive Räume und die Quantensphären S^2_{qc} nach Podleś [AS].

2. Gegenstand der vorliegenden Arbeit sind die von Vaksman und Soibelman [VS] eingeführten Quantensphären ungerader Dimension S_q^{2N-1}. Ziel der Arbeit ist es, auf dieser weiteren Klasse homogener Quantenräume, deren Struktur komplizierter als die der bisher untersuchten Beispiele ist, eine kovariante Differentialrechnung bereitzustellen und damit die Voraussetzungen für die Untersuchung ihrer nichtkommutativen Geometrie zu schaffen.

3. Die Grundlage einer kovarianten Differentialrechnung auf Quantenräumen bilden kovariante Differentialkalküle erster Ordnung. Im Unterschied zur klassischen, kommutativen Differentialrechnung existiert auf Quantenräumen i. d. R. kein „kanonischer“ Differentialkalkül, sondern eine Vielzahl möglicher Differentialkalküle. Da aber die Beschreibung der geometrischen Struktur eines Quantenraums wesentlich von dem zugrundeliegenden Differentialkalkül abhängt, kommt Klassifikationen von Differentialkalkülen erster Ordnung auf Quantenräumen unter geeigneten Nebenbedingungen besonderes Gewicht zu. Als Klassifikationsbedingungen gebräuchlich sind Einschränkungen bezüglich der Dimensionalität und der freien Erzeugtheit des Bimoduls der 1-Formen [SS1, SS2, AS].

In der Arbeit werden kovariante Differentialkalküle erster Ordnung auf den Quantensphären S_q^{2N-1} mit zwei verschiedenen Szenarien solcher Nebenbedingungen klassifiziert.

Beide Klassifikationen sind gültig für die Quantensphären S_q^{2N-1} mit $N \geq 4$. Alle beschriebenen Differentialkalküle existieren auch für $N = 2$ und $N = 3$, jedoch kann die Vollständigkeit der Klassifikationen für diese Fälle nicht gewährleistet werden.

4. Erstes Klassifikationsergebnis: Auf S_q^{2N-1} für $N \geq 4$ existieren genau vier jeweils zweiparametrige Familien $\Gamma_{\alpha\tau}$, $\Gamma'_{\alpha\omega}$, $\Gamma''_{\omega\psi}$ und $\Gamma'''_{\varrho\tau}$ kovarianter $*$-Differentialkalküle erster Ordnung, deren 1-Formen-Bimoduln von

den Differentialen der Erzeugenden von S_q^{2N-1} als freie Linksmoduln erzeugt werden. (Theorem 2.1)

Die Parameter sind dabei (wegen der geforderten $*$-Kalkül-Eigenschaft) reell, mit der Ausnahme, daß in der Familie $\Gamma_{\alpha\tau}$ gewisse nichtreelle Parameterwerte zulässig sind.

5. Zweites Klassifikationsergebnis: Auf S_q^{2N-1} für $N \geq 4$ existieren genau fünf Familien $\tilde{\Gamma}_\lambda$, $\tilde{\Gamma}'_\lambda$, $\tilde{\Gamma}''_\lambda$, $\tilde{\Gamma}^\bullet_\lambda$, $\tilde{\Gamma}^{\bullet\bullet}_\lambda$ kovarianter Differentialkalküle erster Ordnung mit jeweils einem (komplexen) Parameter, deren 1-Formen-Bimoduln von den Differentialen der Erzeugenden von S_q^{2N-1} als Linksmoduln erzeugt werden und in denen alle Relationen im Linksmodul der 1-Formen von genau einer linearen Relation zwischen invarianten 1-Formen erzeugt werden. Unter diesen sind genau die Kalküle der drei Familien $\tilde{\Gamma}_\lambda$, $\tilde{\Gamma}'_\lambda$, $\tilde{\Gamma}''_\lambda$ mit reellem λ $*$-Kalküle. (Theorem 2.3)

6. Während die relevanten bikovarianten Differentialkalküle erster Ordnung auf den wichtigsten Matrix-Quantengruppen innere Kalküle sind, trifft dies hier für keinen der Kalküle aus der ersten Klassifikation und nur für eine Familie von $*$-Kalkülen, $\tilde{\Gamma}_\lambda$, aus der zweiten Klassifikation zu.

Alle $*$-Differentialkalküle der zweiten Klassifikation können aus solchen der ersten Klassifikation durch Faktorisierung nach der jeweiligen zusätzlichen Relation zwischen invarianten 1-Formen gewonnen werden.

Mit Ausnahme der inneren Differentialkalküle $\tilde{\Gamma}_\lambda$ können die Differentialkalküle der zweiten Klassifikation nach einer weiteren invarianten 1-Form faktorisiert werden; dabei entsteht in allen Fällen derselbe Differentialkalkül erster Ordnung, in dem es keine von 0 verschiedene invariante 1-Form gibt.

Durch Untersuchungen von K. Schmüdgen [Sch] wurde jüngst gezeigt, daß die inneren $*$-Differentialkalküle $\tilde{\Gamma}_\lambda$ und zumindest ein isolierter weiterer $*$-Kalkül, $\tilde{\Gamma}''_{q^{2N+2}}$, aus der zweiten Klassifikation durch Einschränkung geeigneter kovarianter Differentialkalküle erster Ordnung auf der Quantengruppe $\mathrm{SU}_q(N)$ erhalten werden können.

7. Die kovarianten Differentialkalküle erster Ordnung aus den Klassifikationssätzen haben eine Bimodulstruktur ähnlich derjenigen der bekannten Differentialkalküle für Quantenvektorräume, die durch das Auftreten linearer Glieder mit den R-Matrizen der zugrundeliegenden Quantengruppe als Koeffizientenmatrizen gekennzeichnet ist. Hinzu treten jedoch weitere Terme; in allen Fällen mit der einzigen Ausnahme des Differentialkalküls $\tilde{\Gamma}''_{q^{2N+2}}$ sind darunter auch Terme dritter Ordnung.

8. Das wesentliche Instrument zum Beweis der Klassifikationsresultate für kovariante Differentialkalküle erster Ordnung ist eine Untersuchung von Kodarstellungen der Quantengruppe $\mathrm{SU}_q(N)$ auf S_q^{2N-1}. Da der Deformationsparameter $q \neq +1, 0, -1$ reell und damit sicher keine Einheitswurzel ist, kann hierfür die wohlbekannte Beschreibung der Darstellungstheorie der undeformierten Matrixgruppe $\mathrm{SU}(N)$ herangezogen werden.

Die Koeffizienten des aus der darstellungstheoretischen Untersuchung hervorgehenden allgemeinen Ansatzes für die Bimodulstruktur eines kovarianten Differentialkalküls erster Ordnung können durch Auswertung algebraischer Bedingungen spezifiziert werden, woraus sich die angegebenen Familien von Differentialkalkülen ergeben.

Die Einschränkung der Klassifikationsaussage auf $N \geq 4$ ist erforderlich, weil für $N = 2$ und $N = 3$ zusätzliche Morphismen von Kodarstellungen existieren.

9. Die Formulierung grundlegender Begriffe der nichtkommutativen Differentialgeometrie erfordert bereits Differentialformen höherer Ordnung. Aus diesem Grunde ist es im Hinblick auf die Beschreibung einer nichtkommutativen Differentialgeometrie unerläßlich, auch Differentialkalküle höherer Ordnung zu untersuchen.

In der Arbeit werden Untersuchungen hierzu auf der Basis eines der inneren $*$-Differentialkalküle erster Ordnung aus der zweiten Klassifikation, nämlich $\tilde{\Gamma}_1$, der durch zusätzliche algebraische Eigenschaften ausgezeichnet ist, durchgeführt.

In jedem Differentialkalkül höherer Ordnung, der $\tilde{\Gamma}_1$ fortsetzt, verschwinden alle Differentialformen der Ordnung $2N+1$ und höherer Ordnung. (Folgerung 3.4)

Die Eigenschaft des Differentialkalküls $\tilde{\Gamma}_1$, innerer Kalkül zu sein, überträgt sich nicht automatisch auf die Differentialkalküle höherer Ordnung. Stellt man an den Differentialkalkül höherer Ordnung die zusätzliche Forderung, innerer Kalkül zu sein (d. h. daß die Differentialabbildung durch einen graduierten Kommutator mit einer festen invarianten 1-Form gegeben sein soll), so verschwinden bereits alle Differentialformen der Ordnung $2N-1$ und für $N \geq 3$ der Ordnung $2N-2$. (Folgerung 3.5)

Eine umfassendere Beschreibung der Moduln höherer Differentialformen stößt vor allem aus zwei Gründen auf Schwierigkeiten: Erstens besitzt bereits die Algebra

S_q^{2N-1} keine endliche Gröbnerbasis; zweitens sind die Moduln der Differentialformen höherer Ordnung wie schon derjenige der 1-Formen keine frei erzeugten Moduln.

10. Komplementär zur Beschreibung von Differentialkalkülen höherer Ordnung wird ein Konzept zur Symmetrie in der Tensoralgebra über dem ausgewählten Differentialkalkül erster Ordnung entwickelt, das sich an das entsprechende Konzept eines Symmetriehomomorphismus (braiding) anlehnt, wie es von Woronowicz [Wor2] für den Fall der bikovarianten Differentialrechnung auf Quantengruppen eingeführt wurde. Damit ist es zum einen möglich, Differentialkalküle höherer Ordnung auch durch eine Antisymmetrisierungsprozedur aus der Tensoralgebra zu gewinnen; zum anderen ist das Symmetriekonzept von eigenständigem Wert für Untersuchungen zur nichtkommutativen Differentialgeometrie der Quantensphären S_q^{2N-1}.

Auf dem Tensorprodukt zweiter Ordnung des 1-Formen-Moduls existiert ein invertierbarer und bis auf Ersetzung durch sein Inverses eindeutig bestimmter Symmetriehomomorphismus. (Theorem 4.10) Damit die Zopfrelation, die eine unerläßliche Forderung der Definition eines Symmetriehomomorphismus darstellt, erfüllt ist, ist jedoch die Ersetzung der Tensorprodukte zumindest der dritten und höherer Ordnungen durch geeignete faktorisierte Tensorprodukte unvermeidlich.

11. Mit Hilfe der kovarianten Differentialrechnung ist es möglich, Grundbegriffe der nichtkommutativen Differentialgeometrie auf den Quantensphären nach Vaksman und Soibelman einzuführen.

Exemplarisch werden in der Arbeit invariante Metriken für Differentialformen erster Ordnung sowie Zusammenhänge untersucht; mit Hilfe des aufgefundenen Symmetriehomomorphismus kann u. a. der Begriff der Symmetrie einer Metrik definiert werden. Die Begriffsbildungen lehnen sich an die in [HS] im Rahmen der bikovarianten Differentialrechnung auf Quantengruppen gegebenen Definitionen an.

Es existiert eine dreiparametrige Familie invarianter Metriken für 1-Formen. Diese Metriken sind jedoch nicht symmetrisch. Die Zusammenhänge bilden eine Familie mit 7 Parametern.

Eine Möglichkeit zur Definition von Levi-Civita-Zusammenhängen wird untersucht. Ein noch nicht gelöstes Problem stellt die hinreichend allgemeine Fassung der Bedingung für die Verträglichkeit eines Zusammenhangs mit einer Metrik in der nichtkommutativen Situation dar. Eine in [HS] für die Situation von Quantengruppen gegebene Verträglichkeitsbedingung erfaßt, auf die Quantensphären übertragen, nur eine Untermenge der Paare von 1-Formen. Auf der Basis dieser unvollständigen Verträglichkeitsbedingung kann jedoch bereits ein Zusammenhang als möglicher Levi-Civita-Zusammenhang gekennzeichnet werden.

12. Ergänzend wird ein Teil der Untersuchungen zu Symmetriehomomorphismen und Metriken außerdem für den Differentialkalkül erster Ordnung $\tilde{\Gamma}''_{q^{2N+2}}$ durchgeführt.

13. Durch die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit konnte eine kovariante Differentialrechnung auf den Quantensphären ungerader Dimension nach Vaksman und Soibelman als einem wichtigen Beispiel homogener Quantenräume beschrieben werden, die als Grundlage für den Aufbau einer nichtkommutativen Geometrie auf diesen Quantenräumen dienen kann.

Literatur

[AS] Apel, J.; Schmüdgen, K.: Classification of Three Dimensional Covariant Differential Calculi on Podleś' Quantum Spheres and on Related Spaces. – Lett. Math. Phys. **32** (1994), 25–36.

[HS] Heckenberger, I.; Schmüdgen, K.: Levi-Civita Connections on the Quantum Groups $\mathrm{SL}_q(N)$, $\mathrm{O}_q(N)$ and $\mathrm{Sp}_q(N)$. – Commun. Math. Phys. **185** (1997), 177–196.

[RTF] Reshetikhin, N. Yu.; Takhtajan, L. A.; Faddeev, L. D.: Kvantovanie grupp Li i algebr Li. – Algebra i analiz **1** (1987), 178–206. (engl. Übers.: Leningrad J. Math. **1** (1990), 193–225.)

[Sch] Schmüdgen, K.: On the Construction of Covariant Differential Calculi on Quantum Homogeneous Spaces. – Preprint, math.QA/9804143.

[Schü] Schüler, A.: Differential Hopf Algebras on Quantum Groups of Type A. – Preprint, math.QA/9805139.

[SS1] Schmüdgen, K.; Schüler, A.: Classification of Bicovariant Differential Calculi on Quantum Groups of Type A, B, C and D. – Commun. Math. Phys. **167** (1995), 635–670.

[SS2] Schmüdgen, K.; Schüler, A.: Classification of Bicovariant Differential Calculi on Quantum Groups. – Commun. Math. Phys. **170** (1995), 315–335.

[VS] Vaksman, L. L.; Soibelman, Ja. S.: Algebra funkcij na kvantovoj gruppe $\mathrm{SU}(n+1)$ i nečetnomernye kvantovye sfery. – Algebra i analiz **2** n. 5 (1990), 101–120. (engl. Übers.: Leningrad J. Math. **2** (1991), 1023–1042.)

[Wor] Woronowicz, S. L.: Differential Calculus on Quantum Matrix Pseudogroups (Quantum Groups). – Commun. Math. Phys. **122** (1989), 125–170.

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Dissertation selbständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe angefertigt zu haben. Ich habe keine anderen als die im Schriftenverzeichnis angeführten Quellen benutzt und sämtliche Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Schriften entnommen wurden, und alle Angaben, die auf mündlichen Auskünften beruhen, als solche kenntlich gemacht. Ebenfalls sind alle von anderen Personen bereitgestellten Materialien oder erbrachten Dienstleistungen als solche gekennzeichnet.

Leipzig, den 15. Juli 1998 Martin Welk

Lebenslauf

Persönliche Angaben

Name:	Welk
Vorname:	Martin
Geburtsdatum:	4. März 1970
Geburtsort:	Pößneck
Staatsangehörigkeit:	deutsch
Geschlecht:	männlich
Familienstand:	ledig

Werdegang

1976–1978	Schulbesuch in Lobenstein
1978–1986	Besuch der POS in Eisenach
1986–1988	Besuch der Ernst-Abbe-Schule Eisenach (EOS)
Juli 1988	Abitur (Ernst-Abbe-Schule Eisenach)
Nov. 1988–Jan. 1990	Ersatzwehrdienst als Bausoldat
Feb. 1990–Jan. 1995	Studium der Mathematik an der Universität Leipzig
Januar 1995	Abschluß der Diplomprüfung in Mathematik
Feb. 1995	Aufnahme des Promotionsstudiums an der Universität Leipzig

Leipzig, den 15. Juli 1998 Martin Welk