Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

Konstruktion einer $\mathfrak{B}$-Wichte auf einer partiellen *-Algebra, für die alle in bestimmter Weise assoziierten Proberäume tonneliert sind

Diplomarbeit

Leipzig, Juni 2000

Studiengang
Mathematik

vorgelegt von
Alexander Bluhm

Danksagung

Herrn Prof. Dr. K.-D. Kürsten danke ich für die Vergabe der Aufgabenstellung und die Betreuung der Diplomarbeit.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

In der Arbeit *On representations of partial *-algebras based on $\mathfrak{B}$-Weights* von K.-D. Kürsten und E. Wagner wird in Proposition 3.3 eine verallgemeinerte GNS-Darstellung eingeführt. Die gleiche Aussage wird in Proposition 3.4 getroffen, allerdings sind die Voraussetzungen leicht abgeändert. Ziel dieser Arbeit ist es, ein Beispiel zu finden, das die zweite Variante der Voraussetzungen erfüllt.

In den ersten Kapiteln werden dazu die Begriffe der Kompatibilität und der vollständigen Überdeckung aufbereitet, wie sie von Antoine eingeführt wurden. Anschließend werden diese Erkenntnisse auf die ℓ_p-Räume, ihre Schnitte ℓ_{p+} und ihre Vereinigungen ℓ_{p-} angewandt. Dabei zeigt sich, daß man auf dem Raum $\ell_{\infty-}$ folgende drei Kompatibilitäten einführen kann. Kompatibel bezüglich $\#_0$ werden zwei Vektoren x und y genau dann genannt, wenn die Reihe $\sum |x_j y_j|$ konvergiert. Dies ist auch die Kompatibilität, die Köthe in seinem Kapitel über vollkommene Räume untersucht. Die beiden anderen Kompatibilitäten werden mit Hilfe vollständiger Überdeckungen definiert. So sollen die Proberäume der Kompatibilität $\#_1$ genau die Mengen ℓ_p, ℓ_{p+} und ℓ_{p-} sein. Für $\#_2$ bilden breits ℓ_{p+} und ℓ_{p-} die zugehörige Überdeckung.

Auch die Topologien von ℓ_{p+} und ℓ_{p-} werden genauer untersucht. Der Raum ℓ_{r+} wird dazu als projektiver Limes aller ℓ_p mit $p > r$ aufgefaßt. Es wird gezeigt, daß dies ein Frechetraum ist. Analog ist ℓ_{s-} der induktive Limes aller ℓ_p mit $p < s$. Für diesen gilt, daß er ein tonnelierter (DF)-Raum ist. Sowohl ℓ_{r+} als auch ℓ_{s-} sind reflexiv, und der eine ist der Dualraum des anderen, falls gilt $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.

Als letzter vorbereitender Schritt ist noch zu klären, wie die Kompatibilität $\#_2$ mit Räumen der Gestalt $x\ell_p$ interagiert. Dabei stellt sich heraus, daß für jedes p genau ein p' gefunden werden kann, so daß gilt $(x\ell_{p+})^{\#_2\#_2} = (x\ell_p)^{\#_2\#_2} = \ell_{p'+}$.

Mit diesem Wissen kann nun ein Beispiel für Proposition 3.4 konstruiert werden. Als *-Algebra dient $\ell_{\infty-}$, auf der die Kompatibilität $\sharp = \#_2$ definiert wird. Der Teilraum $\mathfrak{B}$ wird als $\ell_{\frac{3}{2}}$ gewählt und die $\mathfrak{B}$-Wichte ist $\Omega : (x, y) \mapsto \sum x_j \overline{y_j}$. Durch diese Wahl wird die entscheidende Voraussetzung des Satzes, nämlich daß $\left(\widehat{x\mathfrak{B}}\right)^{\sharp}$ tonneliert ist, erfüllt. Mit geeignetem q' gilt $\left(x\ell_{\frac{3}{2}}\right)^{\#_2} = \ell_{q'-}$, welches im allgemeinen tonneliert ist.

2 Partielle innere Produkträume

2.1 Kompatibilität

Als erstes werden einige allgemeine Überlegungen zu Kompatibilitäten angestellt. Die Gedanken hierzu stammen im wesentlichen aus [Antoine I].

2.1.1. Definition. Eine *Kompatiblität* ist eine symmetrische binäre Relation $\#$ auf einer Menge S. Zwei Elemente x und y der Menge S heißen *kompatibel*, wenn gilt $x\#y$. Für eine Menge $A \subseteq S$ ist die dazu *kompatible Menge*

$$A^{\#} = \{y \mid \forall x \, (x \in A \longrightarrow x\#y)\}$$

A heißt *Probemenge*, wenn $A^{\#\#} = A$. Diese Probemenge wird in der englischen Fachliteratur als *assaying subset* bezeichnet.

2.1.2. Lemma. *Für Vereinigungen und Durchschnitte von Familien von Mengen $(A_\jmath)_{\jmath \in J}$ über beliebige Indexmengen J gilt*

$$\left(\bigcup A_\jmath\right)^{\#} = \bigcap A_\jmath{}^{\#} \tag{2.1.1}$$

$$\left(\bigcap A_\jmath\right)^{\#} \supseteq \bigcup A_\jmath{}^{\#} \tag{2.1.2}$$

Beweis. (2.1.1)

$$\begin{aligned}
\left(\bigcup A_\jmath\right)^{\#} &= \left\{y \mid \forall x \left(x \in \bigcup A_\jmath \longrightarrow x\#y\right)\right\} \\
&= \{y \mid \forall x \, ((\exists \jmath \, (x \in A_\jmath)) \longrightarrow x\#y)\} \\
&= \{y \mid \forall x \, ((\forall \jmath \neg \, (x \in A_\jmath)) \vee x\#y)\} \\
&= \{y \mid \forall x \forall \jmath \, (x \in A_\jmath \longrightarrow x\#y)\} \\
&= \{y \mid \forall \jmath \forall x \, (x \in A_\jmath \longrightarrow x\#y)\} \\
&= \left\{y \mid \forall \jmath \left(y \in A_\jmath{}^{\#}\right)\right\} \\
&= \bigcap A_\jmath{}^{\#}
\end{aligned}$$

(2.1.2)

$$\begin{aligned}
\left(\bigcap A_\jmath\right)^{\#} &= \left\{y \mid \forall x \left(x \in \bigcap A_\jmath \longrightarrow x\#y\right)\right\} \\
&= \{y \mid \forall x \, ((\forall \jmath \, (x \in A_\jmath)) \longrightarrow x\#y)\} \\
&= \{y \mid \forall x \, ((\exists \jmath \neg \, (x \in A_\jmath)) \vee x\#y)\} \\
&= \{y \mid \forall x \exists \jmath \, (x \in A_\jmath \longrightarrow x\#y)\} \\
&\supseteq \{y \mid \exists \jmath \forall x \, (x \in A_\jmath \longrightarrow x\#y)\} \\
&= \left\{y \mid \exists \jmath \left(y \in A_\jmath{}^{\#}\right)\right\} \\
&= \bigcup A_\jmath{}^{\#}
\end{aligned}$$

□

2.1.3. Lemma. *Die Kompatibilität # hat folgende Eigenschaften*

$$A^{\#} = \bigcap_{x \in A} \{x\}^{\#} \tag{2.1.3}$$

$$A \subseteq B \Longrightarrow A^{\#} \supseteq B^{\#} \tag{2.1.4}$$

$$A \subseteq B \Longrightarrow A^{\#\#} \subseteq B^{\#\#} \tag{2.1.5}$$

$$A^{\#\#} \supseteq A \tag{2.1.6}$$

$$A^{\#\#\#} = A^{\#} \tag{2.1.7}$$

$$A^{\#\#} = A \Longleftrightarrow \exists B \left(A = B^{\#}\right) \tag{2.1.8}$$

Beweis. Da $A = \bigcup_{x \in A} \{x\}$, folgt (2.1.3) sofort aus (2.1.1). Gleichung (2.1.4) gilt wegen (2.1.3) und

$$A^{\#} = \bigcap_{x \in A} \{x\}^{\#} \supseteq \bigcap_{x \in B} \{x\}^{\#} = B^{\#}$$

(2.1.5) ergibt sich durch zweimaliges Anwenden von (2.1.4). Für einelementige Mengen gilt

$$\{x\}^{\#\#} = \{y \mid x\#y\}^{\#} = \{z \mid \forall y \, (x\#y \longrightarrow y\#z)\} \supseteq \{x\}$$

Daraus, aus (2.1.3) und aus (2.1.2) folgt (2.1.6)

$$A^{\#\#} = \left(\bigcap_{x \in A} \{x\}^{\#}\right)^{\#} \supseteq \bigcup_{x \in A} \{x\}^{\#\#} \supseteq \bigcup_{x \in A} \{x\} = A$$

(2.1.7) erhält man aus (2.1.6) und (2.1.4)

$$A^{\#\#\#} = \left(A^{\#}\right)^{\#\#} \supseteq A^{\#} \supseteq \left(A^{\#\#}\right)^{\#} = A^{\#\#\#}$$

Die Implikation von links nach rechts der Gleichung (2.1.8) ergibt sich mit $B = A^{\#}$, die Rückrichtung folgt aus (2.1.7) angewendet auf B. □

2.1.4. Lemma. *Es gilt*

$$A^{\#\#} = \bigcap \left\{B \mid B = B^{\#\#}, A \subseteq B\right\} \tag{2.1.9}$$

$A^{\#\#}$ ist die kleinste Probemenge, die A enthält.

Beweis. Die Inklusion $\supseteq$ gilt, da $A^{\#\#}$ nach (2.1.7) und (2.1.6) selbst ein solches B ist. Andererseits gilt für jedes B wegen (2.1.5) $A^{\#\#} \subseteq B^{\#\#} = B$, was natürlich auch auf den Durchschnitt zutrifft.

Der Durchschitt von Probemengen ist selbst eine Probemenge. □

2.1.5. Definition. Eine Kompatibilität # auf einem Vektorraum V heißt *linear*, wenn alle Probemengen Untervektorräume von V sind.

2.1.6. Bemerkung. Im weiteren werden nur noch lineare Kompatibilitäten auf Vektorräumen betrachtet. Die Probemengen werden als *Proberäume* bezeichnet. Insbesondere sind alle Mengen der Form $A^{\#}$ nach (2.1.8) Untervektorräume von V.

2.2 Involutive Überdeckungen

Wie in [Antoine III] ausgeführt, gibt es einen weiteren Zugang zu den Kompatibilitäten. Man betrachtet dazu eine involutive Überdeckung des Raumes, durch die eine Kompatibilität eindeutig definiert wird.

2.2.1. Definition. Sei A eine partiell geordnete Menge mit der Ordnung $\leq$. Eine Involution auf A ist eine Bijektion $r \to \overline{r}$ von A auf sich selbst, so daß für alle $r, p, q \in A$ gilt

$$\overline{\overline{r}} = r \tag{2.2.1}$$

$$p \leq q \Longrightarrow \overline{p} \geq \overline{q} \tag{2.2.2}$$

2.2.2. Definition. Sei F ein Verband mit den Operationen $\wedge$ und $\vee$. Außerdem habe F die Involution $r \leftrightarrow \overline{r}$ und es gelte für alle $p, q \in F$

$$\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q} \tag{2.2.3}$$

Dann heißt F ein *involutiver Verband.*

Gilt darüber hinaus für beliebige Teilmengen $J \subseteq F$

$$\overline{\left(\bigvee_{r \in J} r \right)} = \bigwedge_{r \in J} \overline{r} \tag{2.2.4}$$

heißt F *vollständiger involutiver Verband.*

2.2.3. Definition. Eine Familie $\mathcal{F} = \{V_r\}_{r \in J}$ von Teilräumen des Vektorraums V heißt *involutive Überdeckung* von V, falls

1. $\mathcal{F}$ ist eine Überdeckung von V, d.h. $\bigcup_{r \in J} V_r = V$
2. $\mathcal{F}$ ist stabil unter endlicher Durchschnittsbildung, d.h. $V_p \cap V_q \in \mathcal{F}$
3. $\mathcal{F}$ trägt eine Involution $V_r \leftrightarrow V_{\overline{r}}$, welche die Teilmengenordnung umkehrt, d.h. $V_p \subseteq V_q \Longrightarrow V_{\overline{p}} \supseteq V_{\overline{q}}$,

2.2.4. Satz. *Sei V ein Vektorraum und $\#$ eine lineare Kompatibilität. Dann ist die Familie aller Proberäume $\mathfrak{F}(V, \#)$ eine involutive Überdeckung von V mit der Involution $V_r \leftrightarrow V_{\overline{r}} = {V_r}^{\#}$. Darüber hinaus ist $\mathfrak{F}(V, \#)$ ein vollständiger involutiver Verband mit den Operationen*

$$\bigwedge_{r \in J} V_r = \bigcap_{r \in J} V_r \qquad \bigvee_{r \in J} V_r = \left(\sum_{r \in J} V_r \right)^{\#\#} \tag{2.2.5}$$

Beweis. [Antoine III, 3.1. Theorem] □

2.2.5. Satz. *Sei V ein Vektorraum mit einer involutiven Überdeckung $\mathcal{F}$. Betrachte im karthesischen Produkt $V \times V$ die Teilmenge $\Delta = \bigcup_{V_r \in \mathcal{F}} V_r \times V_{\overline{r}}$. Definiere $f\#g$ durch $\{f, g\} \in \Delta$. Dann ist $\#$ eine lineare Kompatibilität, $\mathcal{F}$ ein involutiver Unterverband von $\mathfrak{F}(V, \#)$ und $\mathfrak{F}(V, \#)$ der durch $\mathcal{F}$ erzeugte vollständige involutive Verband.*

Beweis. [Antoine III, 3.2. Theorem] □

2.2.6. Bemerkung. Diese beiden Sätze besagen, daß die Definiton einer Kompatibilität entweder elementar oder durch die Angabe einer involutiven Überdeckung erfolgen kann. Die beiden Begriffe sind äquivalent, da man nach 2.2.4 von einer Kompatibilitat $\#_0$ zu einem vollständigen involutiven Verband $\mathfrak{F}(V, \#_0)$ gelangt. Aus diesem kann man mittels 2.2.5 wieder eine Kompatibilität $\#_1$ konstruieren, deren Verband der Probemengen $\mathfrak{F}(V, \#_1)$ die Vervollständigung von $\mathfrak{F}(V, \#_0)$ ist. Da $\mathfrak{F}(V, \#_0)$ bereits vollständig war, ist $\mathfrak{F}(V, \#_1) = \mathfrak{F}(V, \#_0)$. Es gilt für die kompatible einer einelementigen Menge $\{x\}^{\#_1} = \{x\}^{\#_1\#_1\#_1} = \{x\}^{\#_0\#_0\#_1} = \{x\}^{\#_0\#_0\#_0} = \{x\}^{\#_0}$ und daher $\#_1 = \#_0$.

2.3 Vergleich verschiedener Kompatibilitäten

Man kann auf einem Raum V natürlich auch mehrere verschiedene Kompatibilitäten einführen. Auf diesen läßt sich folgende Ordnung definieren.

2.3.1. Definition. Eine Kompatibiliät $\#_1$ heißt (echt) gröber als $\#_0$ bezüglich des Gesamtraumes V, wenn der involutive Verband der Proberäume $\mathfrak{F}(V, \#_1)$ ein (echter) involutiver Unterverband von $\mathfrak{F}(V, \#_0)$ ist. Man schreibt dafür $\#_1 \leq \#_0$ ($\#_1 < \#_0$).

Involutiver Unterverband bedeutet dabei sowohl, daß $\mathfrak{F}(V, \#_1)$ Teilmenge von $\mathfrak{F}(V, \#_0)$ ist, als auch daß die Involution und die Verbandoperationen die gleichen sind.

2.3.2. Lemma. *$\#_1$ ist genau dann gröber als $\#_0$, wenn*

$$S^{\#_1\#_1} = S^{\#_1\#_0} \tag{2.3.1}$$

für jede Teilmenge $S \in V$.

Beweis. Der folgende Beweis stammt aus [Antoine III, 5.3. Proposition]. Eine Menge $A \subseteq V$ ist genau dann eine Probemenge, wenn es ein B gibt mit $B^{\#\#} = A$ oder äquivalent dazu, wenn es ein C gibt mit $C^{\#} = A$. Aus $S^{\#_1\#_1} = S^{\#_1\#_0}$ folgt also, daß jede Probemenge bezüglich $\#_1$ als $\left(S^{\#_1}\right)^{\#_0}$ geschrieben werden kann und somit Probemenge bezüglich $\#_0$ ist. Folglich ist $\mathfrak{F}(V, \#_1)$ Teilmenge von $\mathfrak{F}(V, \#_0)$. Für Mengen aus $\mathfrak{F}(V, \#_1)$, welche sich alle als $S^{\#_1}$ schreiben lassen, gilt, daß die Involution $\#_1$ die gleiche ist wie $\#_0$, somit ist $\mathfrak{F}(V, \#_1)$ ein involutiver Unterverband von $\mathfrak{F}(V, \#_0)$.

Ist hingegen $\#_1$ gröber als $\#_0$, so gilt für die Mengen aus $\mathcal{F}(V, \#_1)$, welche sich alle als $S^{\#_1}$ schreiben lassen, daß die Involutionen $\#_1$ und $\#_0$ die gleichen sind, somit $S^{\#_1\#_1} = S^{\#_1\#_0}$. $\square$

2.3.3. Lemma. *Falls $\#_1 \leq \#_0$, gilt für alle Mengen $S \subseteq V$*

$$S^{\#_1\#_1} \supseteq S^{\#_0\#_0} \tag{2.3.2}$$

$$S^{\#_1} \subseteq S^{\#_0} \tag{2.3.3}$$

$$x\#_1 y \Longrightarrow x\#_0 y \tag{2.3.4}$$

Beweis. Dies ist die Folgerung [Antoine III, 5.4. Corollary]. Die Menge $A^{\#\#}$ ist die kleinste Probemenge die A enthält. Da die Probemengen bezüglich $\#_1$ ein involutiver Unterverband der Probemengen bezüglich $\#_0$ sind, ist $S^{\#_0\#_0}$ eine Teilmenge von $S^{\#_1\#_1}$. Da $S \subseteq S^{\#_1\#_1}$ ist, folgt mittels 2.3.2 $S^{\#_1} = S^{\#_1\#_1\#_1} = S^{\#_1\#_1\#_0} \subseteq S^{\#_0}$. Schließlich gilt $y \in \{x\}^{\#_1} \subseteq \{x\}^{\#_0}$. $\square$

3 Folgenräume

3.1 Vektorraumstruktur

Anschließend werden Aussagen über Räume von Zahlenfolgen gemacht. Dabei bedeutet das Zeichen $\subset$ „echte Teilmenge von“, während $\subseteq$ auch die Gleichheit zuläßt.

Betrachtet wird der Vektorraum ω der komplexen Zahlenfolgen. Die Addition und skalare Multiplikation werden komponentenweise definiert.

3.1.1. Definition. Für zwei komplexe Zahlenfolgen $x = (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und $y = (y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aus ω ist $x + y = (x_j + y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ die punktweise Summe und $xy = (x_j y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ das punktweise Produkt der Folgen. Ist A eine Menge aus ω dann ist $x + A = \{x + y \mid y \in A\}$ und $xA = \{xy \mid y \in A\}$.

3.1.2. Bemerkung. Im folgenden werden die Räume ℓ_p untersucht. Dazu sei $p \in [1, \infty]$. Für q gelte dann stets $q \in [1, \infty]$ und

$$q = \begin{cases} \infty & \text{falls } p = 1 \\ 1 + \frac{1}{p-1} & \text{falls } p \in (1, \infty) \\ 1 & \text{falls } p = \infty \end{cases}$$

Die Variablen r und s werden analog benutzt.

3.1.3. Lemma. *Sei $1 \leq r < p \leq \infty$. Dann ist $\ell_r \subset \ell_p$ und $\|.\|_r \geq \|.\|_p$. Die Normtopologie von ℓ_r ist stärker als die durch ℓ_p auf ℓ_r induzierte Topologie.*

Beweis. Der folgende Beweis stammt aus [Köthe I, §14 8.(9)]. Sei x ein Element der Einheitssphäre von ℓ_r. Dann ist $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^r = 1$ und somit $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \leq 1$ für $r < p < \infty$ und $\sup_{1\leq j<\infty} |x_j| \leq 1$ für $p = \infty$. Für diese x gilt also $\|x\|_r \geq \|x\|_p$. Da nicht negative Vielfache von x die Ungleichung auch erfüllen, gilt sie für alle $x \in \ell_r$.

Aus der Normabschätzung folgt $\ell_r \subseteq \ell_p$. Die beiden Räume sind aber nicht gleich, was z.B. das Element $y = \left(\left(\frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{r}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ zeigt, denn $y \notin \ell_r$ aber $y \in \ell_p$.

Die beiden genannten Topologien sind ebenfalls nicht gleich. Betrachte dazu die Folge der $z_n = (z_{n,j})_{j\in\mathbb{N}}$ mit $z_{n,j} = \begin{cases} y_j & \text{falls } j \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$. Alle z_n liegen in ℓ_r und mit der Normtopologie $\|.\|_r$ divergiert die Folge. Da ℓ_r ein Banachraum ist, ist z_n keine Cauchyfolge. Unter der durch $\|.\|_p$ induzierten Metrik hingegen ist z_n eine Cauchyfolge, woraus folgt, daß die Topologien unterschiedlich sind. Also ergibt sich zusammen mit der Normabschätzung, daß die Normtopologie von ℓ_r echt stärker ist als die Topologie, welche durch ℓ_p auf ℓ_r induziert wird. □

3.1.4. Definition. Für $r \in [1, \infty)$ und $s \in (1, \infty]$ sind

$$\ell_{r+} = \bigcap_{r<p<\infty} \ell_p \qquad\qquad \ell_{s-} = \bigcup_{1<q<s} \ell_q \tag{3.1.1}$$

3.1.5. Satz. *Ist* $1 \leq r < p \leq \infty$*, so gelten folgende Inklusionen*

$$\cdots \subset \ell_r \subset \ell_{r+} \subset \ell_{p-} \subset \ell_p \subset \cdots \tag{3.1.2}$$

Beweis. Sei $x \in \ell_r$. Für alle $a > r$ gilt $x \in \ell_a$ und somit $x \in \ell_{r+}$. Sei $r < b < c < p$ und $x \in \ell_{r+}$. Dann ist $x \in \ell_b \subset \ell_c \subseteq \ell_{p-}$. Sei $x \in \ell_{p-}$. Dann gibt es ein $d < p$ mit $x \in \ell_d \subset \ell_p$.

Zu zeigen ist noch, daß es sich immer um echte Inklusionen handelt. Die Folge $\left(\frac{1}{j}\right)^{\frac{1}{r}}$ liegt nicht in ℓ_r aber in ℓ_{r+}, da die Reihe $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$ genau dann konvergiert, wenn $\alpha > 1$.

Im Fall $p = \infty$ ist $\ell_{p-} \neq \ell_p$ offensichtlich durch die konstante Folge bewiesen, sonst wird $\left(\frac{1}{(j+1)(\ln(j+1))^2}\right)^{\frac{1}{p}}$ betrachtet. Nach dem Cauchyschen Verdichtungssatz hat die Reihe $\sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{n(\ln n)^2}\right)^{\alpha}$ das gleiche Konvergenzverhalten wie

$$\sum 2^n \left(\frac{1}{2^n (\ln 2^n)^2}\right)^{\alpha} = \sum 2^{n(1-\alpha)} \left(\frac{1}{(\ln 2^n)^2}\right)^{\alpha} = \sum 2^{n(1-\alpha)} \frac{1}{n^{2\alpha}} (\ln 2)^{-2\alpha}$$

Für $\alpha = 1$ konvergiert diese Reihe. Wenn man den Grenzwert des Quotienten zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder für $n \to \infty$ betrachtet, bekommt man

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(n+1)(1-\alpha)} n^{2\alpha}}{2^{n(1-\alpha)} (n+1)^{2\alpha}} = \lim_{n\to\infty} 2^{1-\alpha} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2\alpha} = 2^{1-\alpha}$$

Im Fall $\alpha > 1$ ist der Grenzwert kleiner 1, die Reihe konvergiert daher, bei $\alpha < 1$ hingegen divergiert sie. $\square$

3.1.6. Lemma. *Mit $p \in [1, \infty]$, $r \in [1, \infty)$ und $s \in (1, \infty]$ sind die Mengen ℓ_p, ℓ_{r+} und ℓ_{s-} Untervektorräume von ω. Dies gilt auch für beliebige Vereinigungen und Durchschnitte dieser Mengen.*

Beweis. Die ℓ_p sind Vektorräume bezüglich komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation von Zahlenfolgen. Für ℓ_{r+} gilt die Behauptung, weil Durchschnitte von Untervektorräumen wieder Untervektorräume sind. Da für aufsteigende q die ℓ_q ineinander enthalten sind, sind auch die ℓ_{s-} Vektorräume. Beliebige Vereinigungen sind auch Vektorräume, da man immer eine Inklusion finden kann. $\square$

3.1.7. Lemma. *Sei A eine beliebige nicht leere Teilmenge von $(1, \infty)$ und $a = \inf A$ und $b = \sup A$. Für Schnitte und Vereinigungen der ℓ_{p-}, ℓ_p, ℓ_{p+}-Räume gilt,*

1. *falls das Minimum von A existiert,*
$$\bigcap_{p\in A} \ell_{p-} = \ell_{a-} \qquad \bigcap_{p\in A} \ell_p = \ell_a \qquad \bigcap_{p\in A} \ell_{p+} = \ell_{a+} \tag{3.1.3}$$

2. *falls das Maximum von A existiert,*
$$\bigcup_{p\in A} \ell_{p-} = \ell_{b-} \qquad \bigcup_{p\in A} \ell_p = \ell_b \qquad \bigcup_{p\in A} \ell_{p+} = \ell_{b+} \tag{3.1.4}$$

3. *falls A kein Minimum hat,*
$$\bigcap_{p\in A} \ell_{p-} = \bigcap_{p\in A} \ell_p = \bigcap_{p\in A} \ell_{p+} = \ell_{a+} \tag{3.1.5}$$

4. *falls A kein Maximum hat,*
$$\bigcup_{p\in A} \ell_{p-} = \bigcup_{p\in A} \ell_p = \bigcup_{p\in A} \ell_{p+} = \ell_{b-} \tag{3.1.6}$$

Beweis. Die Gleichungen (3.1.3) und (3.1.4) sind aufgrund der Enthaltenseinsrelationen 3.1.5 offensichtlich.

Aus

$$\ell_{a+} = \bigcap_{p>a} \ell_p = \bigcap_{p>a} \bigcap_{r>p} \ell_r = \bigcap_{p>a} \ell_{p+} \supseteq \bigcap_{p>a} \ell_p \supseteq \bigcap_{p>a} \ell_{p-} =$$
$$\bigcap_{p>a} \bigcup_{r<p} \ell_r = \bigcap_{p>a} \bigcup_{a<r<p} \ell_r \supseteq \bigcap_{p>a} \ell_{a+} = \ell_{a+}$$

folgt (3.1.5), während

$$\ell_{b-} = \bigcup_{p<b} \ell_p = \bigcup_{p<b} \bigcup_{r<p} \ell_r = \bigcup_{p<b} \ell_{p-} \subseteq \bigcup_{p<b} \ell_p \subseteq \bigcup_{p<b} \ell_{p+} =$$
$$\bigcup_{p<b} \bigcap_{r>p} \ell_r = \bigcup_{p<b} \bigcap_{b>r>p} \ell_r \subseteq \bigcup_{p<b} \ell_{b-} = \ell_{b-}$$

(3.1.6) ergibt. □

3.1.8. Bemerkung. Für $r \in [1, \infty)$ und $s \in (1, \infty]$ können die Räume ℓ_{r+} und ℓ_{s-} als Durchschnitt bzw. Vereinigung beliebiger Räume ℓ_p, ℓ_{p+} und ℓ_{p-} mit $p > r$ bzw. $p < s$ gebildet werden. Sie müssen lediglich konfinal in der Folge der ℓ_p mit $p = r + \frac{1}{n}$ bzw. $p = s - \frac{1}{n}$ und $n \in \mathbb{N}$ liegen. Im Fall $s = \infty$ muß man stattdessen Konfinalität mit $p = n$ fordern. Insbesondere sind Durchschnitt und Vereinigung abzählbar.

3.1.9. Lemma. *Sei $x \in \omega$, J eine beliebige Indexmenge und $(A_\jmath)_{\jmath \in J}$ eine Familie von Mengen aus ω, dann gilt für Vereinigungen und Durchschnitte*

$$x \bigcup A_\jmath = \bigcup x A_\jmath \tag{3.1.7}$$
$$x \bigcap A_\jmath \subseteq \bigcap x A_\jmath \tag{3.1.8}$$

Beweis. (3.1.7)

$$\begin{aligned} x \bigcup A_\jmath &= \left\{ y \mid \exists z \left(z \in \bigcup A_\jmath \wedge y = xz \right) \right\} \\ &= \{ y \mid \exists z \exists \jmath \, (z \in A_\jmath \wedge y = xz) \} \\ &= \{ y \mid \exists \jmath \exists z \, (z \in A_\jmath \wedge y = xz) \} \\ &= \{ y \mid \exists \jmath \, (y \in x A_\jmath) \} \\ &= \bigcup x A_\jmath \end{aligned}$$

(3.1.8)

$$\begin{aligned} x \bigcap A_\jmath &= \left\{ y \mid \exists z \left(z \in \bigcap A_\jmath \wedge y = xz \right) \right\} \\ &= \{ y \mid \exists z \forall \jmath \, (z \in A_\jmath \wedge y = xz) \} \\ &\subseteq \{ y \mid \forall \jmath \exists z \, (z \in A_\jmath \wedge y = xz) \} \\ &= \{ y \mid \forall \jmath \, (y \in x A_\jmath) \} \\ &= \bigcap x A_\jmath \end{aligned}$$

□

3.2 Kompatibilität bezüglich der absoluten Konvergenz

Auf dem Raum der Zahlenfolgen wird nun eine Kompatibilität eingeführt. Mit dieser beschäftigt sich auch [Köthe I, §30 Vollständige Räume].

3.2.1. Definition. Zwei Vektoren $x, y \in \omega$ heißen *kompatibel bezüglich der absoluten Konvergenz der Summe über die Koordinaten des Produkts*, falls

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| < \infty$$

Man schreibt dafür $x \#_0 y$.

3.2.2. Satz. *Es gilt für* $p \in [1, \infty]$

$$\ell_p{}^{\#_0} = \ell_q \tag{3.2.1}$$

Insbesondere ist ℓ_p ein Proberaum.

Beweis. Der Beweis für die Spezialfälle $p = 1$ und $p = \infty$ stammt aus [Köthe I, §30 1.(4)] für die anderen Fälle aus [Köthe I, §30 1.(6)].

Sei $x \in \ell_\infty{}^{\#_0}$. Wegen $(1, 1, 1, \dots) \in \ell_\infty$ ist $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j \cdot 1| < \infty$ und somit $x \in \ell_1$. Ist andererseits $x \in \ell_1$ und $y \in \ell_\infty$ so gilt $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \|x\|_1 \|y\|_\infty < \infty$, also $x \in \ell_\infty{}^{\#_0}$.

Aus $y \in \ell_\infty$ und $x \in \ell_1$ folgt aus dem gleichen Grund $y \in \ell_1{}^{\#_0}$. Ist hingegen y unbeschränkt, läßt sich immer ein $x \in \ell_1$ finden, so daß $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j|$ divergiert. Denn es gibt eine Teilfolge von y mit $|y_{j_n}| \geq n$, zu der ein x mit $x_{j_n} = \frac{1}{n^2}$ und sonst $x_j = 0$ gewählt werden kann. Dann ist $x \in \ell_1$ und die Summe der $|x_j y_j|$ divergiert wie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Somit ist $y \notin \ell_1{}^{\#_0}$.

Sei nun $p \in (1, \infty)$. Für alle $x \in \ell_p$ und $y \in \ell_q$ konvergiert die Summe auf Grund der Hölderschen Ungleichung $\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_q$, woraus folgt $\ell_q \subseteq \ell_p{}^{\#_0}$. Angenommen es gäbe ein $y \in \ell_p{}^{\#_0}$, das nicht in ℓ_q liegt. Da $\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q = \infty$ ist, lassen sich $0 = n_1 < n_2 < \cdots$ und $M_i \geq 1$ so bestimmen, daß $\left|y_{(n_i)+1}\right|^q + \cdots + \left|y_{n_{(i+1)}}\right|^q = M_i^q \geq 1$ ist. Für $n_i + 1 \leq j \leq n_{i+1}$ wird $x_j = \frac{1}{i} \frac{|y_j|^{q-1}}{M_i^{q-1}}$ gesetzt. Unter Verwendung von $(q-1)\,p = q$ erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \frac{1}{i} \frac{|y_j|^{q-1}}{M_i^{q-1}} \right|^p &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{i^p} \frac{|y_j|^q}{M_i^q} \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p} \frac{\left|y_{(n_i)+1}\right|^q + \cdots + \left|y_{n_{(i+1)}}\right|^q}{M_i^q} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^p} < \infty
\end{aligned}$$

und somit $x \in \ell_p$. Allerdings ist

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{i} \frac{|y_j|^q}{M_i^{q-1}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} \frac{\left|y_{(n_i)+1}\right|^q + \cdots + \left|y_{n_{(i+1)}}\right|^q}{M_i^{q-1}}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} M_i \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty$$

was bedeutet $y \notin {\ell_p}^{\#_0}$. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme. $\square$

3.2.3. Satz. *Es gilt für $r \in [1, \infty)$ und $s \in (1, \infty]$*

$${\ell_{r+}}^{\#_0} = \ell_{s-} \qquad\qquad {\ell_{s-}}^{\#_0} = \ell_{r+} \tag{3.2.2}$$

Insbesondere sind ℓ_{r+} und ℓ_{s-} Proberäume.

Beweis. Aus den Aussagen über Vereinigung und Durchschnitt kompatibler Mengen 2.1.2 folgt

$${\ell_{r+}}^{\#_0} = \left(\bigcap_{r<p<\infty} \ell_p \right)^{\#_0} \supseteq \bigcup_{r<p<\infty} {\ell_p}^{\#_0} = \bigcup_{1<q<s} \ell_q = \ell_{s-}$$

$${\ell_{s-}}^{\#_0} = \left(\bigcup_{1<q<s} \ell_q \right)^{\#_0} = \bigcap_{1<q<s} {\ell_q}^{\#_0} = \bigcap_{r<p<\infty} \ell_p = \ell_{r+}$$

Noch zu zeigen ist ${\ell_{r+}}^{\#_0} \subseteq \ell_{s-}$. Sei $x \notin \ell_{s-}$. Dann ist wegen 3.1.5 für alle $q \in (1, s)$ auch $x \notin \ell_q$. Sei $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $(1, s)$, wobei $q_n \nearrow s$ konvergiert, und sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die dazugehörige streng monoton fallende Folge in (r, ∞) mit $p_n \searrow r$. Die Reihen $\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j|^{q_n}$ sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ divergent. Es läßt sich also in Abhängigkeit von n eine streng monoton wachsende Folge $(j_k(n))_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ finden, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\left(\sum_{j=j_k(n)+1}^{j_{k+1}(n)} |x_j|^{q_n} \right)^{1/q_n} \geq 2^k$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man zusätzlich fordern, daß $j_k(n)$ auch in n monoton wachsend ist. Damit ergibt sich die neue, streng monoton wachsende Folge $(j_n(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Dies ermöglicht die Definition der partiellen ℓ_p-Norm über dem n-ten Intervall, die im folgenden mit $\|.\|_{n,p}$ bezeichnet wird.

$$\|x\|_{n,p} = \left(\sum_{j=j_n(n)+1}^{j_{n+1}(n+1)} |x_j|^p \right)^{1/p}$$

Weiterhin gilt $\|x\|_{n,q_n} \geq 2^n$.

Nun wird ein $y \in \omega$ wie folgt konstruiert:

$$j_n(n) + 1 \leq j \leq j_{n+1}(n+1) \quad \Longrightarrow \quad y_j = 2^{-n} \frac{x_j}{\|x\|_{n,p_n}}$$

Der Nenner ist sicher positiv, da $\|x\|_{n,q_n} > 0$ und die partielle ℓ_p-Norm positiv definit ist. Dadurch ist y jeweils im n-ten Intervall linear zu x, $\|y\|_{n,p_n} = 2^{-n}$ und $|y_j| \leq 1$. Die ℓ_p-Norm von y für beliebiges $p \in (r, \infty)$ wird wie folgt abgeschätzt

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{N}} |y_j|^p &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=j_n(n)+1}^{j_{n+1}(n+1)} |y_j|^p \\ &= \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ p_n\geq p}} \sum_{j=j_n(n)+1}^{j_{n+1}(n+1)} |y_j|^p + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ p_n< p}} \sum_{j=j_n(n)+1}^{j_{n+1}(n+1)} |y_j|^p\end{aligned}$$

Die erste Reihe hat aufgrund der Monotonie und Konvergenz von $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur endlich viele Summanden und die zweite Reihe konvergiert wegen

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ p_n< p}} \sum_{j=j_n(n)+1}^{j_{n+1}(n+1)} |y_j|^p &\leq \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ p_n< p}} \sum_{j=j_n(n)+1}^{j_{n+1}(n+1)} |y_j|^{p_n} = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ p_n< p}} \left(\|y\|_{n,p_n}\right)^{p_n} \\ &= \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ p_n< p}} \left(2^{-n}\right)^{p_n} \leq \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ p_n< p}} 2^{-n} \leq 1\end{aligned}$$

Folglich liegt y in jedem ℓ_p und somit auch in deren Durchschnitt ℓ_{r+}.

Da x und y in den einzelnen Intervallen linear abhängig sind, gilt in der partiellen Hölderschen Ungleichung sogar die Gleichheit, womit folgt

$$\begin{aligned}\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j y_j| &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=j_n(n)+1}^{j_{n+1}(n+1)} |x_j y_j| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|xy\|_{n,1} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \|x\|_{n,q_n} \|y\|_{n,p_n} \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n 2^{-n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1 = \infty\end{aligned}$$

Also ist x nicht kompatibel zu y, d.h. $x \notin {\ell_{r+}}^{\#_0}$. □

3.3 Kompatibilitäten auf $\ell_{\infty-}$

Im folgenden Abschnitt werden verschiedene Kompatibilitäten betrachtet, bei denen die ℓ_p-Räume eine wesentliche Rolle spielen. Diese werden durch involutive Überdeckungen eingeführt.

Dazu muß zunächst der Gesamtraum eingeschränkt werden. Ab jetzt werden nicht mehr Zahlenfolgen aus ganz ω betrachtet, sondern nur noch solche aus $\ell_{\infty-}$.

3.3.1. Lemma. *Für* $p \in (1, \infty)$, $r \in [1, \infty)$ *und* $s \in (1, \infty]$ *gilt auf dem Raum* $\ell_{\infty-}$

$$\ell_p{}^{\#_0} = \ell_q \qquad \ell_{r+}{}^{\#_0} = \ell_{s-} \qquad \ell_{s-}{}^{\#_0} = \ell_{r+} \tag{3.3.1}$$

Beweis. Die Formeln wurden in 3.2.2 und 3.2.3 auf dem Raum aller Zahlenfolgen ω gezeigt. Da die kompatiblen Mengen ohnehin schon in $\ell_{\infty-}$ liegen, ändern sie sich bei der Einschränkung des Grundbereichs nicht. □

3.3.2. Bemerkung. Die Menge aller Proberäume $\mathfrak{F}(\ell_{\infty-}, \#_0)$, die auf dem Vektorraum $\ell_{\infty-}$ durch die Kompatibilität $\#_0$ erzeugt werden, bilden nach 2.2.4 einen vollständigen involutiven Verband. Dieser wird im weiteren mit $\mathcal{F}_0$ bezeichnet.

3.3.3. Definition. Sei F_1 die Menge $\{1+\} \cup \{p-, p, p+ \mid p \in (1, \infty)\} \cup \{\infty-\}$. Diese Menge wird total geordnet durch die Bedingungen $1+ < p- < p < p+ < \infty-$ und $r < p \Longrightarrow r+ < p-$, wobei $p, r \in (1, \infty)$. Eine Involution wird definiert durch $\overline{1+} = \infty-$, $\overline{p-} = q+$, $\overline{p} = q$, $\overline{p+} = q-$ und $\overline{\infty-} = 1+$. Durch diese Involution wird die Ordnung auf F_1 umgekehrt, d.h. $f < h \Longrightarrow \overline{f} > \overline{h}$. Durch $f \wedge h = \min\{f, h\}$ und $f \vee h = \max\{f, h\}$ wird F_1 zum involutiven Verband, da gilt $\overline{f \vee h} = \overline{\max\{f, h\}} = \min\{\overline{f}, \overline{h}\} = \overline{f} \wedge \overline{h}$.

3.3.4. Bemerkung. Die Menge der ℓ_{1+}, ℓ_{p-}, ℓ_p, ℓ_{p+} und $\ell_{\infty-}$ kann auch als Verband aufgefaßt werden. Wenn man die Familie $\mathcal{F}_1 = \{\ell_f\}_{f \in F_1}$ durch die Indizes $f \in F_1$ anordnet, erhält man wie in 3.1.5 gesehen die echte Teilmengenbeziehung als Ordnungsrelation. Die Verbandoperationen sehen wie folgt aus

$$\ell_f \wedge \ell_h = \ell_f \cap \ell_h = \ell_{f \wedge h} = \ell_{\min\{f,h\}}$$
$$\ell_f \vee \ell_h = \ell_f \cup \ell_h = \ell_{f \vee h} = \ell_{\max\{f,h\}}$$

3.3.5. Lemma. *Sei* P *eine Teilmenge von* $(1, \infty)$ *und* Q *die Menge aller derjenigen* q, *für die* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *für ein* $p \in P$ *gilt. Die Mengen* $R \subseteq [1, \infty)$ *und* $S \subseteq (1, \infty]$ *seien analog verknüpft. Dann gilt mit der Involution* $\overline{\ell_f} = \ell_{\overline{f}}$

$$\overline{\bigcap_{p \in P} \ell_p} = \bigcup_{q \in Q} \ell_q \qquad \overline{\bigcap_{r \in R} \ell_{r+}} = \bigcup_{s \in S} \ell_{s-} \qquad \overline{\bigcap_{s \in S} \ell_{s-}} = \bigcup_{r \in R} \ell_{r+} \tag{3.3.2}$$

$$\overline{\bigcup_{p \in P} \ell_p} = \bigcap_{q \in Q} \ell_q \qquad \overline{\bigcup_{r \in R} \ell_{r+}} = \bigcap_{s \in S} \ell_{s-} \qquad \overline{\bigcup_{s \in S} \ell_{s-}} = \bigcap_{r \in R} \ell_{r+} \tag{3.3.3}$$

Beweis. In 3.1.7 wurden bereits derartige Schnitte und Vereinigungen untersucht. Entscheident war dabei, ob das Minimum oder Maximum der Indexmengen existiert. Hier wurden die Indexmengen so konstruiert, daß P genau dann ein Maximum hat, wenn Q ein Minimum hat und umgekehrt. Für R und S gilt dies analog. Die erste Gleichung wird exemplarisch bewiesen.

1. Fall: Minimum von P und Maximum von Q existieren

$$\overline{\bigcap_{p\in P}\ell_p} = \overline{\ell_{\min P}} = \ell_{\overline{\min P}} = \ell_{\max Q} = \bigcup_{q\in Q}\ell_q$$

2. Fall: P und Q haben kein Minimum bzw. Maximum

$$\overline{\bigcap_{p\in P}\ell_p} = \overline{\ell_{(\inf P)+}} = \ell_{\overline{(\inf P)+}} = \ell_{(\sup Q)-} = \bigcup_{q\in Q}\ell_q$$

Der Spezialfall, daß $1 \in R$ und $\infty \in S$, wird von 3.1.7 nicht abgedeckt, aber dann sind die relevanten Gleichungen ohnehin trivial. □

3.3.6. Satz. *$\mathcal{F}_1 = \{\ell_f\}_{f\in F_1}$ ist ein vollständiger involutiver Verband mit der Involution $\overline{\ell_f} = \ell_{\overline{f}}$ und den Operationen*

$$\bigwedge \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{F} \tag{3.3.4}$$

$$\bigvee \mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F} \tag{3.3.5}$$

wobei F beliebige Teilmenge von F_1 ist und $\mathcal{F} = \{\ell_f\}_{f\in F}$.

Beweis. Um Durchschnitt und Vereinigung von $\mathcal{F}$ berechnen zu können, zerlegt man F in folgende drei Teile: $F_- = F \cap \{s- \mid s \in (1,\infty]\}$, $F_= = F \cap \{p \mid p \in (1,\infty)\}$ und $F_+ = F \cap \{r+ \mid r \in [1,\infty)\}$.

Entsprechend können dann Schnitt und Vereinigung aufgeteilt werden

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{f\in F}\ell_f = \bigcap_{s-\in F_-}\ell_{s-} \cap \bigcap_{p\in F_=}\ell_p \cap \bigcap_{r+\in F_+}\ell_{r+}$$

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{f\in F}\ell_f = \bigcup_{s-\in F_-}\ell_{s-} \cup \bigcup_{p\in F_=}\ell_p \cup \bigcup_{r+\in F_+}\ell_{r+}$$

Nach 3.1.7 liegen diese Mengen alle wieder in $\mathcal{F}_1$. Außerdem erkennt man anhand dieser Aufteilung und 3.3.5, daß $\overline{\bigwedge \mathcal{F}} = \bigvee \overline{\mathcal{F}}$ und $\overline{\bigvee \mathcal{F}} = \bigwedge \overline{\mathcal{F}}$. □

3.3.7. Definition. Nach 2.2.5 läßt sich durch jede involutive Überdeckung eine Kompatibilität einführen. Da $\mathcal{F}_1$ den Raum $\ell_{\infty-}$ überdeckt, läßt sich $\#_1$ als diejenige Kompatibilität definieren, die durch $\mathcal{F}_1$ erzeugt wird.

3.3.8. Bemerkung. Da $\mathcal{F}_1$ ein vollständiger involutiver Verband ist, gilt für den Verband aller Proberäume $\mathfrak{F}(\ell_{\infty-}, \#_1) = \mathcal{F}_1$. Zwei Vektoren x und y sind genau dann kompatibel bezüglich $\#_1$, wenn sich ein $f \in F_1$ finden läßt, so daß $x \in \ell_f$ und $y \in \ell_{\overline{f}}$. Eine entsprechende Konstruktion findet man auch in [Antoine III, 3.C. Generalization: Reflexive chains of Banach spaces].

3.3.9. Lemma. *Auf $\ell_{\infty-}$ ist die Kompatibilität $\#_1$ echt gröber als $\#_0$.*

Beweis. $\mathcal{F}_1$ ist ein involutiver Unterverband von $\mathcal{F}_0$. Nach Definition 2.3.1 gilt dann $\#_1 \leq \#_0$.

Die beiden Kompatibilitäten sind aber nicht gleich. Dazu seien x und y Vektoren aus $\ell_{\infty-}$, die mit $\#_1$ nicht kompatibel sind. $\hat{x}$ und $\hat{y}$ werden aus x und y konstuiert, indem an den geraden bzw. ungeraden Folgengliedern Nullen eingefügt werden. Da sich die ℓ_p-Normen dabei nicht ändern, liegen diese Vektoren in genau denselben Räumen ℓ_{p-}, ℓ_p und ℓ_{p+} wie x und y. Somit ist $\hat{x}$ nicht $\#_1$-kompatibel zu $\hat{y}$. Allerdings ist deren punktweises Produkt Null, also $\hat{x}\#_0\hat{y}$. □

3.3.10. Definition. Sei $F_2 = \{1+\} \cup \{p-, p+ \mid p \in (1, \infty)\} \cup \{\infty-\}$. Die Involution, Ordnung und Verbandsoperationen seien analog zu denen bei F_1. Somit ist F_2 ein echter involutiver Unterverband von F_1.

3.3.11. Bemerkung. Die Familie $\mathcal{F}_2 = \{\ell_f\}_{f \in F_2}$ wird damit zum involutiven Unterverband von $\mathcal{F}_1$.

3.3.12. Satz. *$\mathcal{F}_2 = \{\ell_f\}_{f \in F_2}$ ist ein vollständiger involutiver Verband mit der Involution $\overline{\ell_f} = \ell_{\overline{f}}$ und den Operationen*

$$\bigwedge \mathcal{F} = \bigcap \mathcal{F} \tag{3.3.6}$$

$$\bigvee \mathcal{F} = \bigcup \mathcal{F} \tag{3.3.7}$$

wobei F beliebige Teilmenge von F_2 ist und $\mathcal{F} = \{\ell_f\}_{f \in F}$.

Beweis. Um Durchschnitt und Vereinigung von $\mathcal{F}$ berechnen zu können, wird F in die Teile $F_- = F \cap \{s- \mid s \in (1, \infty]\}$ und $F_+ = F \cap \{r+ \mid r \in [1, \infty)\}$ zerlegt.

Entsprechend können dann Schnitt und Vereinigung aufgeteilt werden

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{f \in F} \ell_f = \bigcap_{s- \in F_-} \ell_{s-} \cap \bigcap_{r+ \in F_+} \ell_{r+}$$

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{f \in F} \ell_f = \bigcup_{s- \in F_-} \ell_{s-} \cup \bigcup_{r+ \in F_+} \ell_{r+}$$

Nach 3.1.7 liegen diese Mengen alle wieder in $\mathcal{F}_2$. Außerdem erkennt man anhand dieser Aufteilung und 3.3.5, daß $\overline{\bigwedge \mathcal{F}} = \bigvee \overline{\mathcal{F}}$ und $\overline{\bigvee \mathcal{F}} = \bigwedge \overline{\mathcal{F}}$. □

3.3.13. Definition. Die Kompatibilität $\#_2$ wird durch die involutive Überdeckung $\mathcal{F}_2$ auf dem Vektorraum $\ell_{\infty-}$ definiert.

3.3.14. Bemerkung. Es gilt $\mathfrak{F}(\ell_{\infty-}, \#_2) = \mathcal{F}_2$, da $\mathcal{F}_2$ ein vollständiger involutiver Verband ist. Zwei Vektoren x und y sind genau dann kompatibel bezüglich $\#_2$, wenn sich ein r und das dazugehörige s finden lassen, so daß $x \in \ell_{r+}$ und $y \in \ell_{s-}$ oder $y \in \ell_{r+}$ und $x \in \ell_{s-}$.

3.3.15. Lemma. *Es gilt* $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_0$ *und* $\#_2 < \#_1 < \#_0$.

Beweis. Die vollständigen involutiven Verbände der Proberäume sind echte Unterverbände. Die Kleinerrelation folgt damit sofort aus ihrer Definition. $\square$

3.3.16. Lemma. *Es gilt für* $p \in [1, \infty)$

$$\ell_p{}^{\#_2\#_2} = \ell_{p+} \tag{3.3.8}$$

Beweis. Nach 2.1.4, 3.1.5 und 3.1.7 ist

$$\begin{aligned}
\ell_p{}^{\#_2\#_2} &= \bigcap \left\{ B \mid B = B^{\#_2\#_2}, \ell_p \subseteq B \right\} \\
&= \bigcap \{\ell_{r+} \mid \ell_p \subseteq \ell_{r+}\} \cap \bigcap \{\ell_{s-} \mid \ell_p \subseteq \ell_{s-}\} \\
&= \bigcap_{p \leq r < \infty} \ell_{r+} \cap \bigcap_{p < s \leq \infty} \ell_{s-} \\
&= \ell_{p+} \cap \ell_{p+}
\end{aligned}$$

$\square$

3.4 Topologie der ℓ_p-Räume

In diesem Abschnitt werden Aussagen über die Topologien der Räume ℓ_{p-}, ℓ_p und ℓ_{p+} gemacht, wobei $1 < p < \infty$. Darüber hinaus gelten die Aussagen auch für ℓ_{1+} und $\ell_{\infty-}$.

3.4.1. Lemma. *Falls* $1 < r < p < \infty$, *läßt sich* ℓ_r *stetig in* ℓ_p *einbetten. Diese Einbettung ist außerdem schwach kompakt.*

Beweis. Die Aussage über die Stetigkeit folgt aus 3.1.3. Seien U_r und U_p die abgeschlossenen Einheitskugeln der Räume ℓ_r bzw. ℓ_p. Wegen $\|.\|_r \geq \|.\|_p$ gilt für die Einheitskugeln $U_r \subseteq U_p$. Nach [Meise, 23.25] ist die abgeschlossene Einheitskugel eine Banachraums genau dann schwach kompakt, wenn er reflexiv ist. Somit ist U_r als Teilmenge der Einheitskugel U_p relativ schwach kompakt in ℓ_p. Dies ist die Definition einer schwach kompakten Abbildung. $\square$

3.4.2. Definition. Für $r \in [1, \infty)$ kann der Raum ℓ_{r+} als projektiver Limes aller ℓ_p mit $r < p$ aufgefaßt werden. Damit ist er ein topologischer Vektorraum.

$$\ell_{r+} = \varprojlim_{r<p<\infty} \ell_p \tag{3.4.1}$$

Analog kann man für $s \in (1, \infty]$ auf ℓ_{s-} die Topolgie des induktiven Limes aller ℓ_q mit $q < s$ einführen.

$$\ell_{s-} = \varinjlim_{1<q<s} \ell_q \tag{3.4.2}$$

3.4.3. Bemerkung. Aus [Meise, 24.6(3)] läßt sich die Existenz des induktiven Limes leicht folgern, sie wird aber beim Beweis von 3.4.7 ohnehin gezeigt.

3.4.4. Lemma. *Beide Limites können ohne Einschränkung auch als abzählbar angenommen werden.*

Beweis. Die Mengen $\left\{r + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ bzw. $\left\{s - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ für $s < \infty$ liegen konfinal in den urspünglichen Indexmengen. Nach [Köthe I, §19 8.(2)] bzw. [Köthe I, §19 3.(2)] reicht dies aus, damit projektiver bzw. induktiver Limes über diese Teilindizes topologisch isomorph zu den ursprünglichen Limites sind. Im Fall $s = \infty$ benutze $\mathbb{N}$ als Indexmenge. □

3.4.5. Lemma. *Die Räume ℓ_p sind normiert, vollständig, reflexiv und tonneliert, falls $p \in (1, \infty)$.*

Beweis. Die ℓ_p sind reflexive Banachräume. □

3.4.6. Satz. *Für $r \in [1, \infty)$ ist ℓ_{r+} ein (F)-Raum.*

Beweis. Die Vollständigkeit folgt mittels [Schaefer, Ch.II 5.3] aus der Vollständigkeit der ℓ_p-Räume.

Im projektiven Limes ℓ_{r+} läßt sich ein Halbnormsystem allgemein als

$$\left\{\rho \mid \rho = \max_{p \in M} \rho_p, M \text{ endliche Teilmenge von } (r, \infty), \rho_p \text{ stetige Halbnorm in } \ell_p\right\}$$

angeben. Da ℓ_p ein normierter Raum ist, läßt sich jede stetige Halbnorm durch $c_p \|.\|_p$ mit einem $c_p > 0$ abschätzen. Es gilt somit

$$\rho = \max_{p \in M} \rho_p \leq \max_{p \in M} c_p \cdot \max_{p \in M} \|.\|_p \leq \max_{p \in M} c_p \cdot \|.\|_{\min M}$$

Folglich ist $\left\{\|.\|_p \mid p \in (r, \infty)\right\}$ ein Fundamentalsystem von Halbnormen auf ℓ_{r+}. Das abzählbare System $\left\{\|.\|_{r+\frac{1}{n}} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ ist dazu äquivalent. □

3.4.7. Satz. *Für $s \in (1, \infty]$ ist ℓ_{s-} ein vollständiger reflexiver tonnelierter (DF)-Raum.*

Beweis. Wegen 3.4.1 und 3.4.4 bilden die Abbildungen $j_q : \ell_q \to \ell_{s-}$ ein schwach kompaktes Einbettungsspektrum. [Meise, 25.18] sichert damit die Existenz des induktiven Limes, und [Meise, 25.19] sagt aus, daß jener ein vollständiger reflexiver (DF)-Raum ist. Als induktiver Limes tonnelierter Räume ist ℓ_{s-} nach [Meise, 24.16] selbst tonneliert. □

3.4.8. Satz. *Mit $r \in [1,\infty)$ und zugehörigem $s \in (1,\infty]$ sind ℓ_{r+} und ℓ_{s-} reflexiv und es gilt*

$$\ell_{r+}{}' = \ell_{s-} \qquad\qquad \ell_{s-}{}' = \ell_{r+} \tag{3.4.3}$$

Beweis. Bezeichne τ_{r+} die Topologie von $\ell_{r+} = \varprojlim_{r<p<\infty} \ell_p$, die durch den projektiven, und τ_{s-} die Topologie von $\ell_{s-} = \varinjlim_{1<q<s} \ell_q$, die durch den induktiven Limes induziert wird. μ sei die Mackeysche und β die starke Topologie. Als Abbildung des dualen Paares wird $(x,y) \longmapsto \sum_{j\in\mathbb{N}} x_j y_j$ verwendet.

Nach [Schaefer, Ch.IV §4 Seite 139] heißt ein projektiver Limes $E = \varprojlim_\alpha p_\alpha E_\alpha$ genau dann reduziert, wenn die Bilder der Projektionen $p_\alpha(E)$ in allen E_α dicht liegen. Auf ℓ_{r+} trifft dies zu, weil die endlichen Zahlenfolgen in allen ℓ_p enthalten sind und dort dicht liegen. Somit läßt sich [Schaefer, Ch.IV 4.4] mit $E = \ell_{r+}$ anwenden. Danach gilt unter Benutzung der Reflexivität von ℓ_q

$$\begin{aligned}\left(\ell_{r+}{}', \mu\left(\ell_{r+}{}', \ell_{r+}\right)\right) &= \varinjlim_{r<p<\infty} \left(\ell_p{}', \mu\left(\ell_p{}', \ell_p\right)\right) = \varinjlim_{1<q<s} \left(\ell_q, \mu\left(\ell_q, \ell_q{}'\right)\right) \\ &= \varinjlim_{1<q<s} \left(\ell_q, \|.\|_q\right) = \left(\ell_{s-}, \tau_{s-}\right)\end{aligned}$$

Es gilt für die Vektorräume $\ell_{s-} = \ell_{r+}{}'$ und für die Topologien $\tau_{s-} = \mu\left(\ell_{s-}, \ell_{r+}\right)$. τ_{s-} ist also zulässig bezüglich des dualen Paares $\left(\ell_{s-}, \ell_{r+}\right)$. Daher ist bezüglich dieser Topologie der Dualraum $\ell_{s-}{}' = \ell_{r+}$.

Nach 3.4.7 ist ℓ_{s-} reflexiv bezüglich der induktiven Topologie τ_{s-}. Diese ist gleich der Mackeyschen Topologie $\mu\left(\ell_{s-}, \ell_{r+}\right)$, die dann mit der starken Topologie $\beta\left(\ell_{s-}, \ell_{r+}\right)$ zusammen fällt. Damit gilt für den Bidualraum von ℓ_{r+}

$$\ell_{r+}{}'' = \left(\ell_{s-}, \beta\left(\ell_{s-}, \ell_{r+}\right)\right)' = \left(\ell_{s-}, \tau_{s-}\right)' = \ell_{s-}{}' = \ell_{r+}$$

ℓ_{r+} ist daher halbreflexiv und als (F)-Raum tonneliert, was die Reflexivität zur Folge hat. □

3.4.9. Lemma. *Für $1 < r < p < \infty$ sind folgende Einbettungen stetig*

$$\cdots \longrightarrow \ell_{r+} \longrightarrow \ell_{p-} \longrightarrow \ell_p \longrightarrow \ell_{p+} \longrightarrow \cdots \tag{3.4.4}$$

$$\ell_{1+} \longrightarrow \ell_{p-} \longrightarrow \cdots \qquad\qquad \cdots \longrightarrow \ell_{r+} \longrightarrow \ell_{\infty-} \tag{3.4.5}$$

Beweis. Mit $r < a < p$ ist die erste Abbildung gerade die Hintereinanderausführung der Einbettungen $\ell_{r+} \longrightarrow \ell_a \longrightarrow \ell_{p-}$. Diese erzeugen die Topologie des projektiven bzw. induktiven Limes und sind daher stetig. Für alle $b < p$ ist $\ell_b \longrightarrow \ell_p$ stetig. Nach [Meise, 24.7] gilt das dann auch für $\ell_{p-} \longrightarrow \ell_p$. Jede Halbnorm des Halbnormsystems $\|.\|_c$ von ℓ_{p+} mit $c > p$ läßt sich durch $\|.\|_p$ abschätzen, weshalb $\ell_p \longrightarrow \ell_{p+}$ stetig ist. Die letzen beiden Aussagen sind wegen der Hintereinanderausführungen $\ell_{1+} \longrightarrow \ell_r \longrightarrow \ell_{p-}$ und $\ell_{r+} \longrightarrow \ell_p \longrightarrow \ell_{\infty-}$ offensichtlich. □

3.4.10. Bemerkung. Die projektiven bzw. induktiven Limites ℓ_{r+} und ℓ_{s-} können aus beliebigen Teilsequenzen von (3.4.4) mit $r < p$ bzw. $p < s$ gebildet werden. Sie müssen lediglich konfinal in der Folge der ℓ_p mit $p = r + \frac{1}{n}$ bzw. $p = s - \frac{1}{n}$ und $n \in \mathbb{N}$ liegen, da nach [Köthe I, §19 8.(2), 3.(2)] die Konfinalität der Teilindizes bereits die topologische Isomorphie der Limites bewirkt.

Lediglich die Existenz des induktiven Limes über die gesamte Sequenz ist noch zu zeigen, diese folgt aus [Meise, 24.6(3)].

3.5 Die Räume $x\ell_p$ unter der Kompatibilität $\#_2$

Im folgenden werden einige Aussagen über die Räume $x\ell_p$ getroffen. Insbesondere ist von Interesse, was $\#_2$ angewandt auf solche Räume bewirkt. Die komplexe Zahlenfolge x sei im weiteren als beschränkt vorausgesetzt.

3.5.1. Lemma. *Es ist für jedes $x \in \ell_\infty$ und $p \in [1, \infty]$*

$$x\ell_p \subseteq \ell_p \tag{3.5.1}$$

Beweis. Sei $y \in \ell_p$. Aus $\|xy\|_p \leq \|x\|_\infty \|y\|_p$ folgt $xy \in \ell_p$. □

3.5.2. Lemma. *Die Multiplikationsoperatoren*

$$M_x : \ell_p \ni y \longmapsto xy \in \ell_{\infty-} \tag{3.5.2}$$

$$M_x : \ell_{p+} \ni y \longmapsto xy \in \ell_{\infty-} \tag{3.5.3}$$

sind stetig, falls $x \in \ell_\infty$ und $p \in [1, \infty)$.

Beweis. Die Abbildung $\ell_p \ni y \longmapsto xy \in \ell_p$ ist wegen $\|xy\|_p \leq \|x\|_\infty \|y\|_p$ und die Einbettung $\ell_p \longrightarrow \ell_{\infty-}$ nach 3.4.9 stetig.

Die stetige Einbettung $\ell_{p+} \ni y \longmapsto y \in \ell_{p+1}$ führt die zweite Aussage auf die erste zurück.

□

3.5.3. Lemma. *Sei $x \in \ell_\infty$, $p \in [1, \infty)$ und $s \in (1, \infty]$. Falls $x\ell_p \subseteq \ell_{s-}$, dann existiert ein $s' \in (1, s)$ so, daß $x\ell_p \subseteq \ell_{s'-}$. Falls $x\ell_{p+} \subseteq \ell_{s-}$, dann existiert ein $s' \in (1, s)$ so, daß $x\ell_{p+} \subseteq \ell_{s'-}$.*

Beweis. Der Beweis wird mittels [Meise, 24.33 Grothendieckscher Faktorisierungssatz] geführt. Dabei ist $E = \ell_{\infty-}$, $F = \ell_p$, $u = M_x$ und $u_n = id$.

1. Fall $s \in (1, \infty)$
   Setze $F_n = \ell_{s - \frac{1}{n + \frac{1}{s-1}}}$. Die Konstruktion ist so angelegt, daß $s - \frac{1}{n + \frac{1}{s-1}} \in (1, s)$ und $\lim_{n\to\infty} s - \frac{1}{n + \frac{1}{s-1}} = s$. F und F_n sind als Banachräume natürlich auch (F)-Räume. u und u_n sind nach 3.5.2 bzw. 3.4.9 stetige lineare Abbildungen von F bzw. F_n in E. Es ist $u(F) = x\ell_p \subseteq \ell_{s-} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell_{s - \frac{1}{n + \frac{1}{s-1}}} =$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} u_n(F_n)$. Da alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind, existiert ein $m \in \mathbb{N}$ so, daß $u(F) \subseteq u_m(F_m)$. Mit $s' = s - \frac{1}{m+1+\frac{1}{s-1}}$ erhält man $x\ell_p = u(F) \subseteq u_m(F_m) = \ell_{s-\frac{1}{m+\frac{1}{s-1}}} \subseteq \ell_{\left(s-\frac{1}{m+1+\frac{1}{s-1}}\right)-} = \ell_{s'-}$.

2. Fall $s = \infty$

   Setze $F_n = \ell_n$. F und F_n sind als Banachräume natürlich auch (F)-Räume. u und u_n sind nach 3.5.2 bzw. 3.4.9 stetige lineare Abbildungen von F bzw. F_n in E. Es ist $u(F) = x\ell_p \subseteq \ell_{s-} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \ell_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} u_n(F_n)$. Da alle Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind, existiert ein $m \in \mathbb{N}$ so, daß $u(F) \subseteq u_m(F_m)$. Mit $s' = m+1$ erhält man $x\ell_p = u(F) \subseteq u_m(F_m) = \ell_m \subseteq \ell_{(m+1)-} = \ell_{s'-}$.

Die zweite Aussage läßt sich analog mit $F = \ell_{p+}$ statt ℓ_p beweisen, da ℓ_{p+} nach 3.4.6 ebenfalls ein (F)-Raum ist. □

3.5.4. Lemma. *Sei $x \in \ell_\infty$ und $p \in [1,\infty)$. Dann gibt es genau ein $p' \in [1,\infty)$, so daß*

$$(x\ell_p)^{\#_2\#_2} = \ell_{p'+} \tag{3.5.4}$$

Es gibt es genau ein $p' \in [1,\infty)$, so daß

$$(x\ell_{p+})^{\#_2\#_2} = \ell_{p'+} \tag{3.5.5}$$

Beweis. Die Kompatibilität $\#_2$ hat nur die Räume ℓ_{s-} mit $s \in (1,\infty]$ und ℓ_{r+} mit $r \in [1,\infty)$ als Proberäume. Da laut 2.1.4 das zweimalige Anwenden von # auf eine Menge den Durchschnitt aller größeren Probemengen ergibt, erhält man in diesem Fall

$$(x\ell_p)^{\#_2\#_2} = \bigcap \{\ell_{s-} \mid x\ell_p \subseteq \ell_{s-}\} \cap \bigcap \{\ell_{r+} \mid x\ell_p \subseteq \ell_{r+}\}$$

Nach 3.1.7 kann ein solcher Durchschnitt höchstens dann vom Typ $\ell_{p'-}$ sein, wenn das Minimum im ersten Schnitt existiert. Da dies wegen 3.5.3 nicht möglich ist, ist der entstehende Proberaum vom anderen Typ $\ell_{p'+}$.

Die Eindeutigkeit folgt aus 3.1.5, denn für verschiedene p' sind die Räume $\ell_{p'+}$ echt ineinander enthalten.

Die zweite Aussage folgt analog. □

3.5.5. Lemma. *Sei $x \in \ell_\infty$, $p \in [1,\infty)$ und $r' \in [1,\infty)$. Falls $x\ell_p \subseteq \ell_{r'}$, dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß $x\ell_{p+\delta} \subseteq \ell_{r'+\varepsilon}$*

Beweis. Sei $\hat{y} \in \ell_{\frac{p}{r'}}$ und $y = \left(|\hat{y}_j|^{\frac{1}{r'}}\right)_{j\in\mathbb{N}}$. Dann gilt $\sum |y_j|^p = \sum |\hat{y}_j|^{\frac{p}{r'}} < \infty$, das heißt $y \in \ell_p$. Nach Voraussetzung ist deshalb $xy \in \ell_{r'}$. Mit $\hat{x} = \left(|x_j|^{r'}\right)_{j\in\mathbb{N}}$

konvergiert die Reihe $\sum |\hat{x}_j \hat{y}_j| = \sum |x_j|^{r'} |y_j|^{r'} = \sum |x_j y_j|^{r'} < \infty$. Das bedeutet $\hat{x} \#_0 \hat{y}$. Da aber $\hat{y}$ beliebig gewählt wurde, ist $\hat{x} \in \left(\ell_{\frac{p}{r'}}\right)^{\#_0}$

Angenommen, es existiert ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $\delta > 0$ gilt $x\ell_{p+\delta} \not\subseteq \ell_{r'+\varepsilon}$. Dann gibt es ein $z \in \ell_{p+\delta}$ mit $xz \notin \ell_{r'+\varepsilon}$. Sei $\tilde{x} = \left(|x_j|^{r'+\varepsilon}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ und $\tilde{z} = \left(|z_j|^{r'+\varepsilon}\right)_{j\in\mathbb{N}}$. Einerseits ist $\sum |\tilde{z}_j|^{\frac{p+\delta}{r'+\varepsilon}} = \sum \left||z_j|^{r'+\varepsilon}\right|^{\frac{p+\delta}{r'+\varepsilon}} = \sum |z_j|^{p+\delta} < \infty$ und somit $\tilde{z} \in \ell_{\frac{p+\delta}{r'+\varepsilon}}$. Andererseits ist $\sum |\tilde{x}_j \tilde{z}_j| = \sum |x_j|^{r'+\varepsilon} |z_j|^{r'+\varepsilon} = \sum |x_j z_j|^{r'+\varepsilon} = \infty$, was bedeutet, daß $\tilde{x}$ bezüglich $\#_0$ nicht kompatibel zu $\tilde{z}$ ist. Dann ist $\tilde{x} \notin \left(\ell_{\frac{p+\delta}{r'+\varepsilon}}\right)^{\#_0}$.

Das Problem besteht nun darin, daß die kompatiblen Mengen nicht einfach berechnet werden können. In 3.3.1 wurden nur Aussagen über die kompatiblen Mengen der ℓ_p getroffen, deren Index in $[1,\infty]$ liegt. Da aber die Quotienten von p und r' bzw. $p+\delta$ und $r'+\varepsilon$ dies im allgemeinen nicht erfüllen, müssen die einzelnen Fälle getrennt betrachtet werden.

1. Fall $p > r'$

   Es wurde angenommen, daß es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß $x\ell_{p+\delta} \not\subseteq \ell_{r'+\varepsilon}$. Diese Aussage gilt dann aber auch für alle kleineren $0 < \varepsilon' < \varepsilon$, da $\ell_{r'+\varepsilon'} \subset \ell_{r'+\varepsilon}$. Also kann man ohne Einschränkung annehmen, daß $p > r' + \varepsilon$.

   Es ist somit $\frac{p}{r'} > 1$ und $\frac{p+\delta}{r'+\varepsilon} > 1$, d.h. $\hat{x} \in \ell_{1+\frac{1}{\frac{p}{r'}-1}}$ und $\tilde{x} \notin \ell_{1+\frac{1}{\frac{p+\delta}{r'+\varepsilon}-1}}$. Da dies für alle δ gilt, liegt $\tilde{x}$ auch nicht in der Vereinigung, also $\tilde{x} \notin \ell_{1+\frac{1}{\frac{p}{r'+\varepsilon}-1}-} \supset \ell_{1+\frac{1}{\frac{p}{r'}-1}}$. Für $|x_j| \leq 1$ gilt $|\tilde{x}_j| \leq |\hat{x}_j|$. Folglich ist auch $\hat{x} \notin \ell_{1+\frac{1}{\frac{p}{r'}-1}}$, was ein Widerspruch ist.

2. Fall $p \leq r'$

   Die Annahme gilt für alle $\delta > 0$ also insbesondere auch für $\delta = \varepsilon$.

   Nach 3.5.1 ist $x\ell_{p+\delta} = x\ell_{p+\varepsilon} \subseteq \ell_{p+\varepsilon} \subseteq \ell_{r'+\varepsilon}$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme.

□

3.5.6. Lemma. *Sei $x \in \ell_\infty$, $p \in [1,\infty)$ und $s \in (1,\infty]$. Falls $x\ell_p \subseteq \ell_{s'-}$, dann ist auch $x\ell_{p+} \subseteq \ell_{s'-}$. Die umgekehrte Richtung gilt trivialerweise.*

Beweis. Nach 3.5.4 gibt es ein p', so daß $x\ell_p \subseteq \ell_{p'+} = (x\ell_p)^{\#_2\#_2} \subseteq (\ell_{s'-})^{\#_2\#_2} = \ell_{s'-}$. Da $\ell_{p'+}$ niemals gleich $\ell_{s'-}$ sein kann, ist $p' < s'$. Wähle r' und ε so, daß $p' < r' < r' + \varepsilon < s'$. Wegen $x\ell_p \subseteq \ell_{p'+} \subset \ell_{r'}$ existiert dann nach 3.5.5 ein $\delta > 0$ mit $x\ell_{p+\delta} \subseteq \ell_{r'+\varepsilon} \subset \ell_{s'-}$. Unter Verwendung von 3.1.9 erhält man schließlich $x\ell_{p+} = x\bigcap_{d>0} \ell_{p+d} \subseteq \bigcap_{d>0} x\ell_{p+d} \subseteq x\ell_{p+\delta} \subset \ell_{s'-}$. □

3.5.7. Satz. *Für alle $x \in \ell_\infty$ und $p \in [1, \infty)$ gibt es genau ein $p' \in [1, p]$, so daß*

$$(x\ell_{p+})^{\#_2\#_2} = (x\ell_p)^{\#_2\#_2} = \ell_{p'+} \tag{3.5.6}$$

Beweis. Wie in 3.5.4 gesehen, ist sowohl $(x\ell_{p+})^{\#_2\#_2}$ als auch $(x\ell_p)^{\#_2\#_2}$ von der Gestalt $\ell_{p'+}$. Es muß noch gezeigt werden, daß es sich in beiden Fällen um dasselbe p' handelt. Räume vom Typ $\ell_{p'+}$ lassen sich nach 3.1.8 als Durchschnitt aller größeren $\ell_{s'-}$ darstellen. Da es kein s' gibt mit $x\ell_{p+} \subseteq \ell_{s'-} \subseteq (x\ell_{p+})^{\#_2\#_2}$ oder $x\ell_p \subseteq \ell_{s'-} \subseteq (x\ell_p)^{\#_2\#_2}$, ist zu zeigen

$$\bigcap \{\ell_{s'-} \mid x\ell_{p+} \subseteq \ell_{s'-}\} = \bigcap \{\ell_{s'-} \mid x\ell_p \subseteq \ell_{s'-}\}$$

In 3.5.6 wurde bewiesen, daß die beiden Bedingungen äquivalent sind, woraus die Gleichheit der Mengen folgt.

$p' \leq p$ folgt mittels 3.5.1 und 3.3.16 aus $\ell_{p'+} = (x\ell_p)^{\#_2\#_2} \subseteq \ell_p{}^{\#_2\#_2} = \ell_{p+}$. □

4 Beispiele für eine verallgemeinerte GNS-Darstellung

4.1 Stetigkeit des linearen Funktionals

In [Kürsten] wird die verallgemeinerte GNS-Darstellung von partiellen *-Algebren untersucht. Im allgemeinen Fall sind die Voraussetzung relativ umfangreich. Jedoch existiert in [Kürsten, Proposition 3.4] die gleiche Aussage mit einfacheren Voraussetzungen, wenn zusätzlich gefordert wird, daß alle in bestimmter Weise assozierten Proberäume tonneliert sind. Ziel ist es, für diesen Spezialfall ein Beispiel zu finden. Dazu werden Konstruktionen mit Hilfe der ℓ_p, ℓ_{p+} und ℓ_{p-} Räume gemacht.

In diesem ersten Unterkapitel wird untersucht, wie die zuvor eingeführten Räume und Topologien auf das Beispiel anwendbar sind.

4.1.1. Bemerkung. Sei $y^* = (\overline{y})_{j\in\mathbb{N}}$ das komponentenweise konjugiert komplexe von y. Da $\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j\overline{y_j}| = \sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j|\,|\overline{y_j}| = \sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j y_j|$ ist, gilt $x\#_0 y^*$ genau dann wenn $x\#_0 y$. Weil die Zugehörigkeit von y zu ℓ_p mittels absoluter Konvergenz der Reihe definiert ist, gehören y und y^* denselben ℓ_p, ℓ_{p+} und ℓ_{p-} an. Die Kompatibilitäten $\#_1$ und $\#_2$ wurden durch diese Räume eingeführt, somit ist $x\#_1 y^*$ äquivalent zu $x\#_1 y$ und $x\#_2 y^*$ äquivalent zu $x\#_2 y$.

4.1.2. Definition. Sei V ein beliebiger Teilraum von $\ell_{\infty-}$ und Ω die Abbildung

$$\Omega : V \times V^{\#_2} \ni (x, y) \longmapsto \sum_{j\in\mathbb{N}} x_j \overline{y_j} \in \mathbb{C} \tag{4.1.1}$$

Auf dem Raum V werde die Topologie $\Sigma\left(V, V^{\#_2}\right)$ durch die Halbnormen

$$\rho_y : V \ni x \longmapsto |\Omega\,(x, y)| \in [0, \infty) \tag{4.1.2}$$

erzeugt, wobei $y \in V^{\#_2}$.

4.1.3. Lemma. *Ω und Σ sind wohldefiniert.*

Beweis. In 3.3.15 wurde gezeigt, daß $\#_2$ gröber ist als $\#_0$. Nach 2.3.3 gilt $x\#_0 y$ und somit $x\#_0 y^*$. Weil die Konvergenz der Summe $\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j y_j|$ in 3.2.1 benutzt wurde, um die Kompatibilität $\#_0$ zu definieren, ist gewärleistet, daß Ω für alle x und y definiert ist. Wegen der Linearität von Ω in x ist ρ_y eine Halbnorm. □

4.1.4. Lemma. *Für $p \in [1, \infty)$ gilt ${\ell_p}^{\#_2} = \ell_{q-}$.*

Beweis. Wegen 3.3.16 ist ${\ell_p}^{\#_2} = {\ell_p}^{\#_2\#_2\#_2} = {\ell_{p+}}^{\#_2} = \ell_{q-}$ □

4.1.5. Satz. *Falls p in $[1, \infty)$ liegt, bilden die Räume ℓ_p und ℓ_{q-} zusammen mit der Abbildung $(x, y) \mapsto \sum_{j\in\mathbb{N}} x_j y_j$ ein duales Paar. $\Sigma\,(\ell_p, \ell_{q-})$ stimmt mit der schwachen Topologie $\sigma\,(\ell_p, \ell_{q-})$ überein. Ebenso bilden ℓ_{p+} und ℓ_{q-} ein duales Paar, und es gilt $\Sigma\,(\ell_{p+}, \ell_{q-}) = \sigma\,(\ell_{p+}, \ell_{q-})$.*

Beweis. Da $\ell_p \times \ell_{q-} \subset \ell_{p+} \times \ell_{q-}$ und ${\ell_{p+}}^{\#_0} = \ell_{q-}$, konvergiert die Summe in beiden Fällen absolut. Es ist $y \in \ell_{q-}$ genau dann wenn $y^* \in \ell_{q-}$. □

4.1.6. Satz. *Sei $p \in [1, \infty)$ und f das lineare Funktional*

$$f : \ell_p \ni b \longmapsto \Omega\,(xb, w) \in \mathbb{C} \tag{4.1.3}$$

wobei $x \in \ell_{\infty-}$ und $w \in (x\ell_p)^{\#_2}$. Dann ist f stetig bezüglich der Topologie $\Sigma\left(\ell_p, {\ell_p}^{\#_2}\right)$ mit $p \in [1, \infty)$.

Beweis. f ist nach Definition von Ω mit $V = x\ell_p$ wohldefiniert. Wegen 3.5.7 und 2.3.3 gilt $(x\ell_p)^{\#_2} = (x\ell_{p+})^{\#_2} \subseteq (x\ell_{p+})^{\#_0}$. Folglich ist $w \in (x\ell_{p+})^{\#_0}$. Für alle $y \in \ell_{p+}$ gilt also $xy\#_0 w$, was äquivalent ist zur Konvergenz der Summe $\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j y_j w_j| = \sum_{j\in\mathbb{N}} |y_j \overline{x_j} w_j|$, was wiederum äquivalent ist zu $y\#_0 x^* w$. Somit ist $x^* w \in {\ell_{p+}}^{\#_0} = \ell_{q-} = {\ell_p}^{\#_2}$.

Da $x^* w \in {\ell_p}^{\#_2}$, bildet $b \longmapsto |\Omega\,(b, x^* w)|$ eine stetige Halbnorm auf ℓ_p bezüglich der Topologie $\Sigma\left(\ell_p, {\ell_p}^{\#_2}\right)$. Wegen $|f(b)| = |\Omega\,(xb, w)| = |\Omega\,(b, x^* w)|$ ist f stetig. □

4.2 Ein elementares Beispiel

Zunächst wird ein Beispiel konstruiert, das auf einen Kern und die Echtheit der partiellen *-Algebra verzichtet. Diese Eigenschaften werden in den folgenden Kapiteln ergänzt. Es müssen alle in [Kürsten, Proposition 3.4] und in den vorangegangenen Definitionen gemachten Voraussetztungen Schritt für Schritt überprüft werden.

Als partielle *-Algebra $\mathfrak{A}$ wird der Vektorraum $\ell_{\infty-}$ mit der Involution $x^* = (\overline{x_j})_{j\in\mathbb{N}}$ und dem koordinatenweisen Produkt $x \cdot y = xy = (x_j y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ benutzt. Da dieses Produkt auf ganz $\ell_{\infty-}$ definiert ist, handelt es sich sogar um eine gewöhnliche *-Algebra. Offensichtlich ist $x \cdot (\lambda y + \mu z) = \lambda (x \cdot y) + \mu (x \cdot z)$ und $(x \cdot y)^* = y^* \cdot x^*$.

Als lineare Kompatibilität $\sharp$ auf $\mathfrak{A}$ wird $\#_2$ benutzt. Die Abbildung Ω auf dem Graphen $\Gamma(\sharp) = \{(x,y) \mid x\sharp y\}$ wird durch $\Omega(x,y) = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_j \overline{y_j}$ eingeführt. Wenn $x\sharp y$ ist, gilt auch $x\#_0 y$, also ist Ω wohldefiniert. Ω ist linear im ersten Argument und es gilt $\Omega(x,y) = \overline{\Omega(y,x)}$.

Als $\mathfrak{B}$ wird $\ell_{\frac{3}{2}}$ gewählt. Da das Produkt der *-Algebra $\mathfrak{A}$ überall definiert ist, ist $\mathfrak{B}$ ein linearer Unterraum der rechten Multiplikatoren $R(\mathfrak{A}) = \ell_{\infty-}$. Noch zu prüfen sind die Bedingungen $i)$ bis $iv)$ in [Kürsten, Definition 2.1]. Wegen $\ell_{\frac{3}{2}} \subset \ell_{3-} = \ell_{\frac{3}{2}}{}^{\#_2}$ und $\ell_{\infty-}\ell_{\frac{3}{2}} \subseteq \ell_{\frac{3}{2}} \subset \ell_{\frac{3}{2}}{}^{\#_2}$ ist $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \cup \mathfrak{A}\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \subseteq \Gamma(\sharp)$. $\Omega(xb_1, b_2) = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_j b_{1j} \overline{b_{2j}} = \sum_{j\in\mathbb{N}} b_{1j} \overline{x_j^* b_{2j}} = \Omega(b_1, x^* b_2)$. Wegen $\ell_{\infty-}\ell_{\frac{3}{2}} \subseteq \ell_{\frac{3}{2}}$ ist $(x_1 b_1, x_2^* b_2) \in \Gamma(\sharp)$ und $\Omega(x_1 b_1, x_2^* b_2) = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_{1j} b_{1j} \overline{x_{2j}^* b_{2j}} = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_{2j} x_{1j} b_{1j} \overline{b_{2j}} = \Omega(x_2 x_1 b_1, b_2)$. Falls $\Omega(x,y) = 0$ für alle $y \in \mathfrak{B}$, dann ist $x = 0$, also $\Omega(y,x) = 0$ für alle $y \in \mathfrak{B}^\sharp$.

Für die in [Kürsten, Proposition 2.3] eingeführten Mengen gilt $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N} = \{0\}$, also $V = \mathfrak{B}^\sharp / \mathfrak{N} = \mathfrak{B}^\sharp = \ell_{\frac{3}{2}}{}^{\#_2} = \ell_{3-}$ und $\hat{x} = x + \mathfrak{N} = x$. Es ist $\# = \#_2$ und $\langle x, y\rangle = \Omega(x,y)$. Das Tripel $(V, \#, \langle .,. \rangle)$ bildet einen partiellen inneren Produktraum. Da die endlichen Zahlenfolgen in $V^\# = \ell_{3-}{}^{\#_2} = \ell_{\frac{3}{2}}$ liegen, ist $(V, \#, \langle .,. \rangle)$ nicht degeneriert.

Die in [Kürsten, Definition 3.2] unter der Bedingung $\mathfrak{B} = \ell_{\frac{3}{2}} \subseteq \ell_{3-} = \mathfrak{B}^\sharp$ eingeführte Topologie $\Sigma(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^\sharp)$ ist gleich der schwachen Topologie $\sigma\left(\ell_{\frac{3}{2}}, \ell_{3-}\right)$. Das Funktional $\mathfrak{B} \ni b \longmapsto \Omega(xb, w) \in \mathbb{C}$ ist bezüglich dieser Topologie nach 4.1.6 stetig.

Die Bedingung $i)$ ist wegen $\mathfrak{B}^{\sharp\sharp} = \ell_{\frac{3}{2}+} \neq \ell_{\frac{3}{2}} = \mathfrak{B} = \mathfrak{B} + \mathfrak{N}$ nicht erfüllt. Hingegen gilt $ii)$, denn $\left(\widehat{x\mathfrak{B}}\right)^\# = \left(x\ell_{\frac{3}{2}}\right)^{\#_2}$ ist nach 3.5.7 von der Gestalt $\ell_{q'-}$ mit $q' \in [3, \infty]$. 3.4.7 besagt, daß dieser Raum unter der induktiven Topologie tonneliert ist. Wegen 3.4.8 ist diese Topologie zulässig bezüglich des dualen Paares $(\ell_{q'-}, \ell_{p'+})$. Folglich ist $\left(\widehat{x\mathfrak{B}}\right)^\#$ tonneliert bezüglich der Mackeyschen Topologie $\mu\left(\left(\widehat{x\mathfrak{B}}\right)^\#, \left(\widehat{x\mathfrak{B}}\right)^{\#\#}\right)$.

Zusammengefaßt muß man die Variablen wie folgt wählen

$$\mathfrak{A} = \ell_{\infty-} \qquad \sharp = \#_2 \qquad \Omega(x,y) = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_j \overline{y_j} \qquad \mathfrak{B} = \ell_{\frac{3}{2}}$$

Automatisch ergibt sich dann

$$\mathfrak{N} = \mathbf{0} \qquad V = \ell_{3-} \qquad \# = \#_2 \qquad \langle .,. \rangle = \Omega \qquad \Sigma(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^\sharp) = \sigma\left(\ell_{\frac{3}{2}}, \ell_{3-}\right)$$

Diese Belegung liefert ein Beispiel für [Kürsten, Proposition 3.4].

4.3 Beispiel mit Kern

Im letzen Kapitel war der Raum $\mathfrak{N} = \mathbf{0}$. Nun wird eine Konstruktion angegeben, bei welcher der Kern $\mathfrak{N}$ nicht der Nullraum ist. Dabei ist die Idee, daß man im Vergleich zum vorherigen Beispiel, an den ungraden Stellen der Elemente von $\ell_{\infty-}$ beliebige Zahlen einfügt.

Um diese Räume einfacher handhaben zu können, werden folgende Bezeichnungen eingeführt. Sei A eine Teilmenge der komplexen Zahlenfolgen ω. Dann ist

$$\begin{aligned}
[A]_0 &= \left\{ (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid (x_{2j})_{j\in\mathbb{N}} \in A \text{ und } x_{2j-1} = 0 \right\} \\
[A]_{\mathbb{C}} &= \left\{ (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \mid (x_{2j})_{j\in\mathbb{N}} \in A \text{ und } x_{2j-1} \in \mathbb{C} \right\} \\
[A]_/ &= \left\{ (x_{2j})_{j\in\mathbb{N}} \mid (x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in A \right\}
\end{aligned}$$

Für Elemente $x \in \omega$ gelte entsprechend $[x]_/ = (x_{2j})_{j\in\mathbb{N}}$.

Als *-Algebra $\mathfrak{A}$ wird der Raum derjenigen Zahlenfolgen benutzt, für dessen Elemente gilt $(x_{2j})_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_{\infty-}$; in der neuen Schreibweise $\mathfrak{A} = [\ell_{\infty-}]_{\mathbb{C}}$. Das Produkt und die Involution seien nach wie vor komponentenweise definiert, alle Zahlen sind miteinander multiplizierbar. Zwei Vektoren $x, y \in \mathfrak{A}$ heißen kompatibel bezüglich $\sharp$, falls gilt $[x]_/ \#_2 [y]_/$. Für die kompatiblen Mengen bedeutet das, $A^\sharp = \left[[A]_/{}^{\#_2} \right]_{\mathbb{C}}$. Die Abbildung Ω auf dem Graphen $\Gamma(\sharp) = \{(x,y) \mid x\sharp y\}$ wird durch $\Omega(x,y) = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_{2j}\overline{y_{2j}}$ eingeführt. Wegen $x\sharp y$ ist $[x]_/ \#_0 [y]_/$ und somit Ω wohldefiniert. Linearität im ersten Argument und $\Omega(x,y) = \overline{\Omega(y,x)}$ sind offensichtlich.

Als $\mathfrak{B}$ wird der Raum $\left[\ell_{\frac{3}{2}}\right]_0$ gewählt. Für das Produkt eines Vektors aus $\mathfrak{B}$ und eines aus $\mathfrak{A}$ gilt, daß es an ungeraden Stellen 0 ist und die geraden Komponenten in $\ell_{\infty-}$ liegen. $\mathfrak{B}$ ist ein linearer Unterraum der rechten Multiplikatoren $R(\mathfrak{A})$.

Noch zu prüfen sind die Bedingungen *i)* bis *iv)* in [Kürsten, Definition 2.1]. Die Rechnungen erfolgen analog zum vorherigen Beispiel, man muß jeweils nur die geraden Komponenten betrachten. Wegen $\mathfrak{B} = \left[\ell_{\frac{3}{2}}\right]_0 \subset [\ell_{3-}]_{\mathbb{C}} = \left[\ell_{\frac{3}{2}}{}^{\#_2}\right]_{\mathbb{C}} = \mathfrak{B}^\sharp$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = [\ell_{\infty-}]_{\mathbb{C}} \left[\ell_{\frac{3}{2}}\right]_0 = \left[\ell_{\infty-}\ell_{\frac{3}{2}}\right]_0 \subseteq \left[\ell_{\frac{3}{2}}\right]_0 = \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}^\sharp$ ist $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \cup \mathfrak{A}\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \subseteq \Gamma(\sharp)$. $\Omega(xb_1, b_2) = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_{2j} b_{12j}\overline{b_{22j}} = \sum_{j\in\mathbb{N}} b_{12j}\overline{x^*_{2j} b_{22j}} = \Omega(b_1, x^* b_2)$. Wegen $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$ ist $(x_1 b_1, x_2^* b_2) \in \Gamma(\sharp)$ und $\Omega(x_1 b_1, x_2^* b_2) = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_{12j} b_{12j} \overline{x^*_{22j} b_{22j}} = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_{22j} x_{12j} b_{12j} \overline{b_{22j}} = \Omega(x_2 x_1 b_1, b_2)$. Falls $\Omega(x,y) = 0$ für alle $y \in \mathfrak{B}$, dann ist $x_{2j} = 0$, also $\Omega(y,x) = 0$ für alle $y \in \mathfrak{B}^\sharp$.

Für die in [Kürsten, Proposition 2.3] eingeführten Mengen gilt $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N} = [\{0\}]_{\mathbb{C}}$, also $V = \mathfrak{B}^\sharp/\mathfrak{N} \cong \left[\mathfrak{B}^\sharp\right]_/ = \ell_{\frac{3}{2}}{}^{\#_2} = \ell_{3-}$. Das Bild der kanonischen

Abbildung $\mathfrak{B}^\sharp \ni x \longmapsto x + \mathfrak{N} \in \mathfrak{B}^\sharp/\mathfrak{N}$ wird als $\hat{x} = (x_{2j})_{j\in\mathbb{N}}$ bezeichnet. Es ist $\# = \#_2$ und $\langle \hat{x}, \hat{y}\rangle = \Omega(x,y)$. Das Tripel $(V, \#, \langle .,. \rangle)$ bildet einen partiellen inneren Produktraum. Da die endlichen Zahlenfolgen in $V^\# = \ell_{3-}{}^{\#_2} = \ell_{\frac{3}{2}}$ liegen, ist $(V, \#_2, \langle .,. \rangle)$ nicht degeneriert.

Die in [Kürsten, Definition 3.2] unter der Bedingung $\mathfrak{B} = \left[\ell_{\frac{3}{2}}\right]_0 \subseteq [\ell_{3-}]_\mathbb{C} = \mathfrak{B}^\sharp$ eingeführte Topologie $\Sigma\left(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^\sharp\right)$ wird durch die Halbnormen $p_y : \mathfrak{B} \ni x \longmapsto \left|\sum_{j\in\mathbb{N}} x_{2j}\overline{y_{2j}}\right| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ wobei $y \in \mathfrak{B}^\sharp$ erzeugt. Zu zeigen ist die Stetigkeit des Funktionals $f : \mathfrak{B} \ni b \longmapsto \sum_{j\in\mathbb{N}} x_{2j} b_{2j}\overline{w_{2j}} \in \mathbb{C}$ unter der Bedingung $x \in \mathfrak{A} = [\ell_{\infty-}]_\mathbb{C}$ und $w \in (x\mathfrak{B})^\sharp = \left[\left([x]_/\ell_{\frac{3}{2}}\right)^{\#_2}\right]_\mathbb{C}$. Es ist dann $[x]_/ \in \ell_{\infty-}$ und $[w]_/ \in \left([x]_/\ell_{\frac{3}{2}}\right)^{\#_2}$. Im Beweis von 4.1.6 wurde gezeigt, daß für solche $[x]_/$ und $[w]_/$ gilt $[x]_/{}^*[w]_/ \in \ell_{\frac{3}{2}}{}^{\#_2}$, was bedeutet $x^*w \in \left[\ell_{\frac{3}{2}}{}^{\#_2}\right]_\mathbb{C} = \mathfrak{B}^\sharp$. Also folgt aus der Abschätzung $|f(b)| = \left|\sum_{j\in\mathbb{N}} x_{2j}b_{2j}\overline{w_{2j}}\right| = \left|\sum_{j\in\mathbb{N}} b_{2j}\overline{x_{2j}^* w_{2j}}\right| = p_{x^*w}(b)$ die Stetigkeit von f bezüglich $\Sigma\left(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^\sharp\right)$.

Die Bedingung *i)* ist wegen $\mathfrak{B}^{\sharp\sharp} = \left[\ell_{\frac{3}{2}+}\right]_\mathbb{C} \neq \left[\ell_{\frac{3}{2}}\right]_\mathbb{C} = \left[\ell_{\frac{3}{2}}\right]_0 + [\{0\}]_\mathbb{C} = \mathfrak{B} + \mathfrak{N}$ nicht erfüllt. Hingegen gilt *ii)*, denn $\left(\widehat{x\mathfrak{B}}\right)^\# = \left([x]_/\ell_{\frac{3}{2}}\right)^{\#_2}$ ist nach 3.5.7 von der Gestalt $\ell_{q'-}$ mit $q \in [3, \infty]$ und 3.4.7 besagt, daß dieser Raum tonneliert ist.

Zusammengefaßt muß man die Variablen wie folgt wählen

$$\mathfrak{A} = [\ell_{\infty-}]_\mathbb{C} \qquad x\sharp y \Leftrightarrow [x]_/\#_2[y]_/ \qquad \Omega(x,y) = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_{2j}\overline{y_{2j}} \qquad \mathfrak{B} = \left[\ell_{\frac{3}{2}}\right]_0$$

Automatisch ergibt sich dann

$$\mathfrak{B}^\sharp = [\ell_{3-}]_\mathbb{C} \qquad \mathfrak{N} = [\mathbf{0}]_\mathbb{C} \qquad V = \ell_{3-} \qquad \# = \#_2 \qquad \langle x, y\rangle = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_j\overline{y_j}$$

Diese Belegung liefert ein weiteres Beispiel für [Kürsten, Proposition 3.4].

4.4 Beispiel einer echten partiellen *-Algebra mit Kern

Abschließend wird ein Beispiel angegeben, bei dem man es mit einer echten partiellen *-Algebra zu tun hat und außerdem der Kern $\mathfrak{N}$ nicht der Nullraum ist. Zu diesem Zweck bildet man die direkte Summe der Algebra aus 4.2 mit einer echten patiellen *-Algebra. Man wählt dazu den Raum ℓ_∞, wobei das punktweise Produkt $\varphi\psi = (\varphi_j)_{j\in\mathbb{N}} \cdot (\psi_j)_{j\in\mathbb{N}} = (\varphi_j\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ genau dann definiert sein soll, wenn $\sum_{j\in\mathbb{N}} |\varphi_j\psi_j|^2 < \infty$ ist.

Als partielle *-Algebra $\mathfrak{A}$ hat man $\ell_{\infty-} \times \ell_\infty$. Es gilt die Bezeichnung $x = (x_a, x_b) = \left((x_{aj})_{j\in\mathbb{N}}, (x_{bj})_{j\in\mathbb{N}}\right)$. Die Multiplikation ist komponentenweise definiert als $x \cdot y = (x_a \cdot y_a, x_b \cdot y_b)$, falls gilt $\sum_{j\in\mathbb{N}} \left|x_{bj} y_{bj}\right|^2 < \infty$, und die Involution als $x^* = (x_a^*, x_b^*)$. Offensichtlich ist $x \cdot (\lambda y + \mu z) = \lambda (x \cdot y) + \mu (x \cdot z)$ und $(x \cdot y)^* = y^* \cdot x^*$.

Zwei Vektoren $x, y \in \mathfrak{A}$ heißen kompatibel bezüglich $\sharp$, falls gilt $x_a \#_2 y_a$ und $x_b \#_0 y_b$. Für die kompatiblen Mengen bedeutet das, $(A \times B)^\sharp = A^{\#_2} \times B^{\#_0}$. Die Abbildung Ω auf dem Graphen $\Gamma(\sharp) = \{(x, y) \mid x \sharp y\}$ wird durch $\Omega(x, y) = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_{aj} \overline{y_{aj}}$ eingeführt. Wegen $x \sharp y$ ist $x_a \#_2 y_a$ und somit Ω wohldefiniert. Linearität im ersten Argument und $\Omega(x, y) = \overline{\Omega(y, x)}$ sind offensichtlich.

Als $\mathfrak{B}$ wird der Raum $\ell_{\frac{3}{2}} \times \ell_2$ gewählt. Für das Produkt eines Vektors aus $\mathfrak{B}$ und eines aus $\mathfrak{A}$ gilt, daß es wieder in $\mathfrak{B}$ liegt, da die Elemente von $\mathfrak{A}$ beschränkt sind. Insbesondere ist die zweite Komponente des Produkts in ℓ_2, somit ist $\mathfrak{B}$ ein linearer Unterraum der rechten Multiplikatoren $R(\mathfrak{A})$.

Noch zu prüfen sind die Bedingungen *i)* bis *iv)* in [Kürsten, Definition 2.1]. Wegen $\mathfrak{B} = \ell_{\frac{3}{2}} \times \ell_2 \subset \ell_{3-} \times \ell_2 = \ell_{\frac{3}{2}}{}^{\#_2} \times \ell_2{}^{\#_0} = \mathfrak{B}^\sharp$ und $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \ell_{\infty-}\ell_{\frac{3}{2}} \times \ell_\infty \ell_2 \subseteq \ell_{\frac{3}{2}} \times \ell_2 = \mathfrak{B} \subset \mathfrak{B}^\sharp$ ist $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \cup \mathfrak{A}\mathfrak{B} \times \mathfrak{B} \subseteq \Gamma(\sharp)$. $\Omega(x b_1, b_2) = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_{aj} b_{1aj} \overline{b_{2aj}} = \sum_{j\in\mathbb{N}} b_{1aj} \overline{x_{aj}^* b_{2aj}} = \Omega(b_1, x^* b_2)$. Wegen $\mathfrak{A}\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{B}$ ist $(x_1 b_1, x_2^* b_2) \in \Gamma(\sharp)$ und $\Omega(x_1 b_1, x_2^* b_2) = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_{1aj} b_{1aj} \overline{x_{2aj}^* b_{2aj}} = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_{2aj} x_{1aj} b_{1aj} \overline{b_{2aj}} = \Omega(x_2 x_1 b_1, b_2)$. Falls $\Omega(x, y) = 0$ für alle $y \in \mathfrak{B}$, dann ist $x_a = 0$, also $\Omega(y, x) = 0$ für alle $y \in \mathfrak{B}^\sharp$.

Für die in [Kürsten, Proposition 2.3] eingeführten Mengen gilt $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N} = \mathbf{0} \times \ell_2$, also $V = \mathfrak{B}^\sharp / \mathfrak{N} = (\ell_{3-} \times \ell_2) / (\mathbf{0} \times \ell_2) \cong \ell_{3-}$ Das Bild der kanonischen Abbildung $\mathfrak{B}^\sharp \ni x \longmapsto x + \mathfrak{N} \in \mathfrak{B}^\sharp/\mathfrak{N}$ wird als $\hat{x} = x_a$ bezeichnet. Es ist $\# = \#_2$ und $\langle x_a, y_a \rangle = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle = \Omega(x, y) = \sum_{j\in\mathbb{N}} x_{aj} \overline{y_{aj}}$. Das Tripel $(V, \#, \langle ., . \rangle)$ bildet einen partiellen inneren Produktraum. Da die endlichen Zahlenfolgen in $V^\# = \ell_{3-}{}^{\#_2} = \ell_{\frac{3}{2}}$ liegen, ist $(V, \#_2, \langle ., . \rangle)$ nicht degeneriert.

Die in [Kürsten, Definition 3.2] unter der Bedingung $\mathfrak{B} = \ell_{\frac{3}{2}} \times \ell_2 \subset \ell_{3-} \times \ell_2 = \mathfrak{B}^\sharp$ eingeführte Topologie $\Sigma\left(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^\sharp\right)$ wird durch die Halbnormen $p_y : \mathfrak{B} \ni x \longmapsto \left|\sum_{j\in\mathbb{N}} x_{aj} \overline{y_{aj}}\right| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ wobei $y \in \mathfrak{B}^\sharp$ erzeugt. Zu zeigen ist die Stetigkeit des Funktionals $f : \mathfrak{B} \ni b \longmapsto \sum_{j\in\mathbb{N}} x_{aj} b_{aj} \overline{w_{aj}} \in \mathbb{C}$ unter der Bedingung $x \in \mathfrak{A}$ und $w \in (x\mathfrak{B})^\sharp$. Es ist dann $x_a \in \ell_{\infty-}$, $x_b \in \ell_\infty$, $w_a \in \left(x_a \ell_{\frac{3}{2}}\right)^{\#_2}$ und $w_b \in (x_b \ell_2)^{\#_0}$. Wegen 3.5.7 ist $w_a \in \left(x_a \ell_{\frac{3}{2}+}\right)^{\#_2} \subseteq \left(x_a \ell_{\frac{3}{2}+}\right)^{\#_0}$. Das bedeutet, für alle $y \in \ell_{\frac{3}{2}+} \times \ell_2$ gilt $\sum_{j\in\mathbb{N}} |w_a x_a y_a| < \infty$ und $\sum_{j\in\mathbb{N}} |w_b x_b y_b| < \infty$, was auch als $x^* w \in \ell_{3-} \times \ell_2$ interpretiert werden kann. Insbesondere ist die Multiplikation $x^* w$ definiert, da $x_b w_b \in \ell_2$ ist. Wegen $x^* w \in \mathfrak{B}^\sharp$ folgt aus der Abschätzung $|f(b)| = \left|\sum_{j\in\mathbb{N}} x_{aj} b_{aj} \overline{w_{aj}}\right| = \left|\sum_{j\in\mathbb{N}} b_{aj} \overline{x_{aj}^* w_{aj}}\right| = p_{x^* w}(b)$ die Stetigkeit von f bezüglich $\Sigma\left(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}^\sharp\right)$.

Die Bedingung *i)* ist wegen $\mathfrak{B}^{\sharp\sharp} = \ell_{\frac{3}{2}+} \times \ell_2 \neq \ell_{\frac{3}{2}} \times \ell_2 = \ell_{\frac{3}{2}} \times \ell_2 + \mathbf{0} \times \ell_2 = \mathfrak{B} + \mathfrak{N}$ nicht erfüllt. Hingegen gilt *ii)*, denn $\left(\widehat{x\mathfrak{B}}\right)^\# = \left(x_a \ell_{\frac{3}{2}}\right)^{\#_2}$ ist nach 3.5.7 von der Gestalt $\ell_{q'-}$ mit $q \in [3, \infty]$ und 3.4.7 besagt, daß dieser Raum tonneliert ist.

Zusammengefaßt muß man die Variablen wie folgt wählen

$$\mathfrak{A} = \ell_{\infty-} \times \ell_\infty \quad x\sharp y \Leftrightarrow x_a \#_2 y_a \wedge x_b \#_0 y_b \quad \Omega(x, y) = \sum_{j \in \mathbb{N}} x_{aj} \overline{y_{aj}} \quad \mathfrak{B} = \ell_{\frac{3}{2}} \times \ell_2$$

Automatisch ergibt sich dann

$$\mathfrak{B}^\sharp = \ell_{3-} \times \ell_2 \qquad \mathfrak{N} = \mathbf{0} \times \ell_2 \qquad V = \ell_{3-} \qquad \# = \#_2 \qquad \langle x_a, y_a \rangle = \sum_{j \in \mathbb{N}} x_{aj} \overline{y_{aj}}$$

Diese Belegung liefert ein weiteres Beispiel für [Kürsten, Proposition 3.4].

5 Zusammenfassung

Auf der Suche nach einem Beispiel für [Kürsten, Proposition 3.4] stößt man auf die wesentliche Voraussetzung:

Sei eine der beiden Bedingungen erfüllt:

i). $\mathfrak{B}^{\sharp\sharp} = \mathfrak{B} + \mathfrak{N}$

ii). $\left(\widehat{x\mathfrak{B}}\right)^{\#}$ *ist tonneliert für alle* $x \in \mathfrak{A}$

Da sich *i*) relativ einfach erfüllen läßt, ist in der Aufgabenstellung gefordert, ein derartiges Beispiel zu finden, bei dem nur *ii*) gilt. Außerdem soll *i*) auch bei $\mathfrak{N} = \mathbf{0}$ nicht gelten. Das bedeutet, daß $\mathfrak{B}$ kein Proberaum bezüglich $\sharp$ sein darf.

Wenn man $\mathfrak{B}$ als $\ell_{\frac{3}{2}}$ wählt, darf man nicht mehr die durch $\sum |x_j y_j|$ definierte Kompatibilität verwenden, da dort alle ℓ_p Proberäume sind. Als Ausweg bietet sich die gröbere Kompatibilität $\#_2$ an, bei der genau die Mengen ℓ_{p+} und ℓ_{p-} Proberäume sind. Diese kann wie in [Antoine III] beschrieben eingeführt werden, da diese Mengen eine involutive Überdeckung des Gesamtraums $\ell_{\infty-}$ sind. Sie bilden dort mit den Operationen $\bigcap$, $\bigcup$ und $\ell_{r+} \leftrightarrow \ell_{s-}$ einen vollständigen involutiven Verband. Mit $\sharp = \#_2$ erhält man $\mathfrak{B}^{\sharp\sharp} = \ell_{\frac{3}{2}}{}^{\#_2\#_2} = \ell_{\frac{3}{2}+}$, was ungleich $\mathfrak{B}$ ist.

Um zu sehen, daß *ii*) erfüllt ist, muß man die Topologie der beteiligten Räume studieren. Wenn man ℓ_{r+} mit der projektiven Topologie und ℓ_{s-} mit der induktiven Topologie ausstattet, erhält man mittels der Theorie über lokalkonvexe Räume, daß ℓ_{r+} ein (F)-Raum und ℓ_{s-} ein reflexiver tonnelierter (DF)-Raum ist. Ein Satz aus [Schaefer] mit der Aussage, daß der Dualraum eines projektiven Limes gleich dem induktiven Limes der Dualräume ist, wird verwendet, um zu beweisen, daß auch ℓ_{r+} reflexiv ist, und sowohl ℓ_{r+} als auch ℓ_{s-} der Dualraum des jeweils anderen ist, falls gilt $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.

Der Grothendieksche Faktorisierungssatz wird benutzt, um unter Ausnutzung der topologischen Eigenschaften zu zeigen, daß man für alle p ein p' finden kann, so daß gilt $(x\ell_{p+})^{\#_2\#_2} = (x\ell_p)^{\#_2\#_2} = \ell_{p'+}$. Jetzt kann man erkennen, daß Bedingung *ii*) erfüllt ist, denn es gilt $\left(\widehat{x\mathfrak{B}}\right)^{\#} = \left(x\ell_{\frac{3}{2}}\right)^{\#_2} = \ell_{q'-}$, und dieser Raum ist tonneliert.

Man kann das Beispiel noch variieren. Zum einen kann man die $\mathfrak{B}$-Wichte so abändern, daß sie nur die Einträge an den geraden Stellen der Zahlenfolgen beachtet. Dadurch bekommt man einen Kern $\mathfrak{N}$ der nicht der Nullraum ist. Zum anderen kann man das direkte Produkt aus der ursprünglich betrachteten *-Algebra und einer echten partiellen *-Algebra bilden. Man erhält in diesem Beispiel neben einem Kern auch eine echte partielle *-Algebra.

6 Literatur

[Antoine I] J.-P. Antoine and A. Grossmann. Partial Inner Product Spaces. I. General Properties. *Journal of Functional Analysis 23(4), 369-378, 1976*

[Antoine II] J.-P. Antoine and A. Grossmann. Partial Inner Product Spaces. II. Operators. *Journal of Functional Analysis 23(4), 379-391, 1976*

[Antoine III] J.-P. Antoine. Partial Inner Product Spaces. III. Compatibility relations revisited. *J. Math. Phys. 21(2), 268-279, 1980*

[Antoine IV] J.-P. Antoine. Partial Inner Product Spaces. IV. Topological Considerations. *J. Math. Phys. 21(8), 2067-2079, 1980*

[Köthe I] G. Köthe, Topologische lineare Räume 1. *Springer-Verlag, 1966*

[Kürsten] K.-D. Kürsten and E. Wagner. On representations of partial *-algebras based on $\mathfrak{B}$-weights. *ZAA Vol 19(3), 2000 (im Druck)*

[Meise] R. Meise und D. Vogt. Einführung in die Funktionalanalysis. *Vieweg, 1992*

[Schaefer] H.H. Schaefer. Topological Vector Spaces. *Springer-Verlag, 1986*

7 Selbständigkeitserklärung

Ich versichere, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Leipzig, 30. Juni 2000