

Über das Verhalten von Kapillarflächen in Spitzen

Von der Fakultät für Mathematik und Informatik
der Universität Leipzig
angenommene

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des akademischen Grades

DOCTOR RERUM NATURALIUM
(Dr. rer. nat.)

im Fachgebiet
Mathematik

vorgelegt
von Dipl.-Math. Markus Scholz
geboren am 22. November 1974 in Leipzig

Die Annahme der Dissertation haben empfohlen:

1. Prof. Dr. Erich Miersemann (Universität Leipzig)
2. Prof. Dr. Robert Finn (Stanford University)
3. Prof. Dr. Bernd Kawohl (Universität zu Köln)

Die Verleihung des akademischen Grades erfolgt auf Beschluß des Rates der Fakultät für
Mathematik und Informatik vom 27.05.2002 mit dem Gesamtprädikat
„summa cum laude“.

Bibliographische Daten

Scholz, Markus

Über das Verhalten von Kapillarflächen in Spitzen

Dissertation

Universität Leipzig, Mathematisches Institut

Leipzig, 20. August 2001

127 Seiten, 10 Abbildungen

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	5
2. Danksagung	6
3. Das Kapillarflächenproblem für Gebiete mit Spitzen	7
3.1. Die Formulierung des Problems und einige bekannte Sätze	7
3.2. Die Parametrisierung einer Spitze	10
3.3. Existenz von Lösungen	13
3.4. Das Vergleichstheorem von Concus und Finn	16
4. Die asymptotischen Resultate	19
4.1. Abschätzung des führenden Terms	19
4.2. Vollständige asymptotische Entwicklung	24
4.3. Zusammenfassung und Ausblick	26
5. Das Problem in der Schwerelosigkeit	27
5.1. Motivation und Theorie verallgemeinerter Lösungen	27
5.2. Existenz verallgemeinerter Lösungen	33
5.3. Beweis zu Lemma 5.3 und Satz 5.2	37
6. Verallgemeinerte Lösungen für das Problem in der Schwerelosigkeit	49
6.1. Charakterisierung der singulären Mengen	49
6.2. C-singuläre Lösungen	55
6.3. Ein Beispiel	60
6.4. Zusammenfassung und Ausblick	64
Anhang	65
A.1. Beweis zu Satz 4.1	65
A.2. Beweis zu Satz 4.2a	68
A.3. Beweis zu Satz 4.2b	81
A.4. Beweis zu Satz 4.3a	83
A.5. Beweis zu Satz 4.3b	93
A.6. Beweis zu Lemma 4.1 und Satz 4.4	94
A.7. Einige Bemerkungen zur Spurdefinition	104
A.8. Rechnung zum Beispiel	109
Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen und Symbole	116

Literaturverzeichnis	118
Zusammenfassung der Ergebnisse der Arbeit	122
Selbständigkeitserklärung	126
Wissenschaftlicher Werdegang	127

1. Einleitung

Kapillarität als Ansteigen des Flüssigkeitsspiegels an Gefäßwänden erscheint vertraut. In der Physik werden unter diesem Begriff alle Effekte zusammengefaßt, die durch Oberflächenspannungen verursacht werden.

Kapillaritätsphänomene haben in den letzten Jahrzehnten wieder verstärkte Beachtung gefunden. Die schnelle Entwicklung der Raumfahrt und der Mikrotechnik wirft zum Beispiel Fragen nach dem Verhalten von Flüssigkeiten unter extremen Bedingungen (Schwereelosigkeit, enge Gefäße) auf, bei denen die Oberflächenspannung zu einer dominierenden Größe wird und die Form der Flüssigkeit entscheidend beeinflußt. Diesbezügliche mathematische Problemstellungen sind inzwischen sehr vielfältig. Die starke Nichtlinearität der zugrunde liegenden Gleichungen führt dabei zu überraschenden Ergebnissen, die qualitativ erheblich von entsprechenden Ergebnissen für lineare Aufgaben abweichen können.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich in zwei Teile. Im ersten Teil wird das klassische Kapillarflächenproblem für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ betrachtet, wobei Ω ein Gebiet mit stückweise glattem Rand ist. Für Ecken mit hinreichend kleinem Öffnungswinkel $\alpha > 0$ ist bekannt, daß die Lösung bei Annäherung an die Ecke unbegrenzt wächst. Das heißt, die Flüssigkeit steigt praktisch beliebig hoch. Es können hier asymptotische Formeln aufgestellt werden (siehe die Arbeiten von CONCUS, FINN [CF2] und MIERSEMANN [Mie1], [Mie2]). In der vorliegenden Arbeit wird der Fall $\alpha = 0$ untersucht. Man erhält dann keine Ecke, sondern eine Spitze. Es werden analog zu den oben zitierten Arbeiten asymptotische Formeln gesucht. Eine bedeutende Rolle spielt dabei wieder die Anwendung des Vergleichsprinzips von CONCUS und FINN ([Fin1]).

Der zweite Teil der Arbeit beruht auf der Beobachtung, daß keine klassischen Lösungen für Gebiete mit Spitzen für das Kapillarflächenproblem in der Schwerelosigkeit existieren. Es werden verallgemeinerte Lösungen betrachtet, die von MIRANDA ([Mir2]) eingeführt wurden. Es wird gezeigt, daß solche Lösungen unter sehr allgemeinen Voraussetzungen existieren. Die Lösungen sollen danach für das Kapillarflächenproblem in der Schwerelosigkeit, also für konstante mittlere Krümmung und Randkontaktwinkel weiter untersucht werden.

2. Danksagung

Der DFG (Deutsche Forschungsgemeinschaft) danke ich an dieser Stelle für die Möglichkeit der Anfertigung dieser Arbeit im Rahmen des DFG-Projektes „Mathematische Theorie der Kapillarität“.

Bei Herrn Prof. Dr. R. Finn und Herrn Prof. Dr. E. Giusti möchte ich mich für die Diskussion einiger Probleme bedanken.

Herrn Prof. Dr. E. Miersemann möchte ich ganz besonders herzlich für die Anregungen zum Thema, die Betreuung sowie für viele hilfreiche Gespräche danken.

3. Das Kapillarflächenproblem für Gebiete mit Spitzen

3.1. Die Formulierung des Problems und einige bekannte Sätze

Es bezeichne $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit stückweise glattem (zunächst C^1) Rand. Das Kapillarflächenproblem für ein homogenes Gefäß mit Grundfläche Ω , senkrechter Gefäßwand und unbegrenztem Reservoir einer homogenen, inkompressiblen Flüssigkeit mit angrenzendem homogenen Medium in einem konstanten, nichtverschwindenden Gravitationsfeld mit einzig senkrechter Kraftkomponente lautet:

$$(3.1) \quad \operatorname{div} Tu = \kappa u \quad \text{in } \Omega, \quad \kappa > 0 \text{ konstant}$$

$$(3.2) \quad \nu \circ Tu = \cos \gamma \quad \text{auf glatten Komponenten von } \partial\Omega$$

mit $Tu = \frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$, u beschreibt eine Fläche mit dem Parameterbereich Ω (Kapillarfläche). Der Vektor ν ist der äußere Normaleneinheitsvektor auf glatten Komponenten von $\partial\Omega$.

Gleichung (3.1) ist die Euler-Lagrange-Gleichung eines Variationsproblems (vgl. [Fin1], Kapitel 1). In der Literatur wird häufig die allgemeinere Form $\operatorname{div} Tu = H(x, u)$, $x \in \Omega$ betrachtet. Sie wird als Gleichung der mittleren Krümmung bezeichnet, wobei H eine vorgegebene Funktion ist. Dies wird motiviert durch die Tatsache, daß $\operatorname{div} Tu$ die doppelte mittlere Krümmung der durch u beschriebenen Fläche darstellt. In der vorliegenden Arbeit beschränken wir uns jedoch zunächst auf den Fall $H = \kappa u$, das heißt auf die klassische Form des Kapillarflächenproblems.

Für die Größe κ gilt $\kappa = \frac{\rho g}{\sigma}$, wobei ρ der lokale Dichteunterschied zwischen der Flüssigkeit und ihrer Umgebung (z. B. Vakuum oder eine andere Flüssigkeit), g die Schwerkraftbeschleunigung und σ die Oberflächenspannung ist. Die Bedingung der Inkompressibilität und der Homogenität der Flüssigkeit, die Homogenität des angrenzenden Mediums sowie die Konstanz des Gravitationsfeldes (nichtverschwindend) gewährleisten $\kappa > 0$ konstant.

Die Gleichung (3.2) ist die natürliche, physikalisch vorgegebene Randbedingung zu (3.1), die besagt, daß der Winkel zwischen Kapillarfläche und der Gefäßwand am Rand von Ω oder genauer der Winkel zwischen dem entgegengesetzten Normaleneinheitsvektor der Kapillarfläche und dem Normaleneinheitsvektor der Gefäßwand vorgegeben ist. Er wird als Randkontaktwinkel bezeichnet. Unter der Voraussetzung, daß Gefäßwand und Flüssigkeit homogen sind, das heißt, der lokale Adhäsionskoeffizient β ist konstant, gilt wegen $\cos \gamma = \beta$ (vgl. [Fin1], S. 10), daß γ konstant ist. Im folgenden wird, wenn nicht anders gesagt, stets von konstantem γ ausgegangen.

Bemerkung: Die Randbedingung (3.2) hat ihre spezielle Form aufgrund der Voraussetzung senkrechter Gefäßwände.

Wenn γ konstant ist, so kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ angenommen werden, denn der Fall $\gamma > \frac{\pi}{2}$ läßt sich auf obigen Fall durch die Transformation $u \rightarrow \Leftrightarrow u$ zurückführen. Der Fall $\gamma = \frac{\pi}{2}$ führt auf die triviale und einzige Lösung $u \equiv 0$ als Folgerung des Vergleichstheorems (siehe Kapitel 3.4). Für $\gamma = 0$ ist eine Lösungsexistenz für die nachfolgend betrachteten Gebiete mit Spitze nicht gesichert (siehe Kapitel 3.3), deshalb wird im folgenden stets

$$(3.3) \quad 0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$$

angenommen.

Der Rand von Ω wird als stückweise glatt angenommen. Es interessiert das Verhalten der Kapillarfläche bei Annäherung an einen Randpunkt, in dem die Randkurve nicht differenzierbar ist.

CONCUS und FINN ([CF2]) fanden für ein Gebiet Ω , daß eine durch Geraden begrenzte auswärtige Ecke enthält, daß die Lösung unter bestimmten Bedingungen unbeschränkt ist und den führenden Term einer asymptotischen Entwicklung für diesen Fall. Es bezeichne $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ den halben Öffnungswinkel der Ecke, (r, θ) Polarkoordinaten mit Ursprung O in der Spitze der Ecke ($\theta \in [\Leftrightarrow\alpha, \alpha]$), $k = \frac{\sin \alpha}{\cos \gamma}$, $h(\theta) = \frac{\cos \theta - \sqrt{k^2 - \sin^2 \theta}}{k}$, B_δ einen Kreis um O und $\Omega^* = \Omega \cap B_\delta$. Die Größe δ ist dabei so klein zu wählen, daß Ω^* die Form eines Kreissektors hat (vgl. Bild 5.4. in [Fin1], S. 115).

Satz 3.1 (Führender Term der Lösung in einer durch Geraden begrenzten Ecke [CF2], S. 219): *Für $\alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$ existiert eine Konstante A unabhängig von der speziellen betrachteten Lösung (das heißt unabhängig von der speziellen Gestalt von Ω), so daß*

$$(3.4) \quad \left| u \Leftrightarrow \frac{h(\theta)}{r} \right| < A$$

in Ω^* .

Aufgrund der Voraussetzung (3.3) sagt die Bedingung $\alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$ aus, daß der Öffnungswinkel α der Ecke hinreichend klein zu wählen ist. In asymptotischer Schreibweise läßt sich das Resultat des Satzes zusammenfassen zu

$$u \sim \frac{h(\theta)}{r} \quad r \rightarrow 0.$$

Das heißt, die Lösung des Kapillarflächenproblems verhält sich für solche Gebiete bei Eckannäherung asymptotisch hyperbolisch.

Es seien hier die Definitionen zur Erklärung der Relation „ \sim “ kurz dargestellt. Man vergleiche dazu auch [Mur], Kapitel 1.2.

Definition 3.1 (asymptotische Folge): Eine Folge $\{\Phi_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ von komplexen Funktionen heißt *asymptotische Folge* für $z \rightarrow z_0$ genau dann, wenn

$$\Phi_{n+1}(z) = o(\Phi_n(z)) \quad z \rightarrow z_0 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

wobei unter o das Landausche Ordnungssymbol zweiter Art zu verstehen ist ($f(z) = o(g(z)) \quad z \rightarrow z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0$).

Definition 3.2 (asymptotische Entwicklung): Sei $\{\Phi_n(z)\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine asymptotische Folge. Eine Summe $\sum_{i=1}^N a_i \Phi_i(z)$ ($a_i \in \mathbb{C}$) heißt *asymptotische Entwicklung einer Funktion* $f(z)$ für $z \rightarrow z_0$ nach den Funktionen Φ_i , wenn

$$(3.5) \quad f(z) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^N a_i \Phi_i(z) = o(\Phi_N(z)) \quad z \rightarrow z_0.$$

Schreibweise:

$$(3.6) \quad f(z) \sim \sum_{i=1}^N a_i \Phi_i(z).$$

Definition 3.3 (vollständige asymptotische Entwicklung): Eine Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \Phi_i(z)$ heißt *vollständige asymptotische Entwicklung von $f(z)$* für $z \rightarrow z_0$ nach den Funktionen Φ_i , wenn (3.5) für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt. Schreibweise:

$$(3.7) \quad f(z) \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_i \Phi_i(z).$$

Man beachte, daß (3.7) in keiner Weise die Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite voraussetzt, die auch im allgemeinen nicht gewährleistet ist. Existiert eine Entwicklung der Form (3.7), so sind die Zahlen a_i eindeutig bestimmt ([Mur], S. 13).

In der vorliegenden Arbeit treten nur Potenzfunktionen Φ_i auf.

MIERSEMANN bestimmte die vollständige asymptotische Entwicklung für die im Satz 3.1 betrachteten Lösungen:

Satz 3.2 (Vollständige asymptotische Entwicklung der Lösung in durch Geraden begrenzter Ecke [Mie1]): Für jede nichtnegative ganze Zahl m existieren positive Konstanten r_0 , A und $m+1$ auf $(\Leftrightarrow \alpha, \alpha)$ analytische und auf $[\Leftrightarrow \alpha, \alpha]$ beschränkte Funktionen $h_{4l-1}(\theta)$, $l = 0, \dots, m$, so daß

$$(3.8) \quad \left| u \Leftrightarrow \sum_{l=0}^m h_{4l-1}(\theta) r^{4l-1} \right| \leq A r^{4m+3}$$

in $\Omega_{r_0} = \Omega \cap B_{r_0}$. Weiterhin sind die Konstanten r_0 , A und die Funktionen h_{4l-1} unabhängig von der speziellen betrachteten Lösung.

In asymptotischer Schreibweise:

$$u \sim \sum_{l=0}^{\infty} h_{4l-1}(\theta) r^{4l-1} \quad r \rightarrow 0,$$

wobei $h_{-1}(\theta) = h(\theta)$.

MIERSEMANN fand ebenfalls eine Verallgemeinerung des Satzes 3.1 für den Fall, daß die Ecke nicht durch Linien, sondern durch nach Taylor entwickelbaren Funktionen, die sich im Winkel 2α schneiden, begrenzt wird:

Satz 3.3 (Führende Terme der Lösung in krummlinig begrenzten Ecken vgl. [Mie2]): *Unter den Voraussetzungen $\alpha + \gamma < \frac{\pi}{2}$ und $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ folgt*

$$(3.9) \quad u \sim \frac{h(\theta)}{s} + q(\theta) \quad s \rightarrow 0.$$

Die Größen (s, θ) bezeichnen dabei krummlinige Koordinaten. Die Funktion q ist die eindeutige Lösung eines Randwertproblems einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Die Lösung hat in Übereinstimmung mit den Sätzen 3.1 und 3.2 folglich in krummlinigen Koordinaten eine asymptotische Entwicklung, deren führender Term von der Ordnung $\frac{1}{s}$ ist ($s \rightarrow 0$). Der zweite Term ist jedoch von der Ordnung 1, im Unterschied zu (3.8), wo der zweite Term von der Ordnung r^3 ist.

In der vorliegenden Arbeit wird der Fall $\alpha = 0$ untersucht. Man erhält dann keine Ecke, sondern eine Spitze. Wir wollen dabei im folgenden, wenn nicht anders gesagt, unter Spitzen stets auswärtige Spitzen verstehen. Mit ähnlichen Methoden wie in den oben aufgeführten Arbeiten werden für Spitzen analoge asymptotische Abschätzungen aufgestellt. Die in [Mie2] verwendete Parametrisierung nach krummlinigen Koordinaten hat sich dabei als besonders günstig erwiesen. Die asymptotischen Terme werden durch das Auffinden geeigneter Vergleichsfunktionen bestimmt. Eine entscheidende Rolle spielt dabei wieder das Vergleichstheorem von CONCUS und FINN (vgl. Kapitel 3.4).

Das Verhalten der Lösung wird nur innerhalb einer gewissen Umgebung der Spitze untersucht. Die Ergebnisse erweisen sich deshalb als von der globalen Struktur von Ω unabhängig.

3.2. Die Parametrisierung einer Spitze

Die zu untersuchende Spitze des Gebietes Ω liege ohne Einschränkung der Allgemeinheit im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Sie wird von zwei zunächst stetig differenzierbaren Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ gebildet, mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} f_1(0) &= f_2(0) = 0 \\ f_1'(0) &= f_2'(0) = 0. \end{aligned}$$

Diese Bedingungen lassen sich auch zu

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= o(x_1) & x_1 \rightarrow 0 \\ f_2(x_1) &= o(x_1) & x_1 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

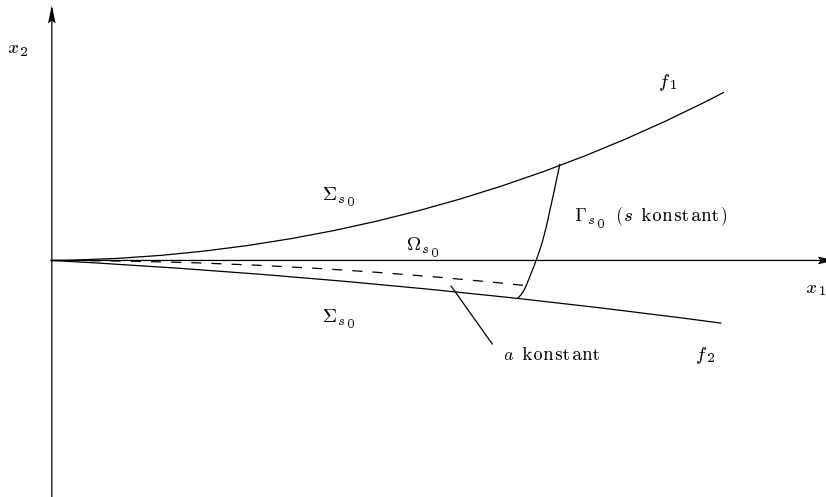
zusammenfassen.

Weiterhin existiere ein $x^* > 0$ derart, daß

$$(3.10) \quad f_1(x_1) > f_2(x_1) \quad \text{in } (0, x^*].$$

Somit läßt sich eine Spitze beschreiben als $\Omega^* = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < x^*, f_2(x_1) < x_2 < f_1(x_1)\}$, diese ist dann durch die Vorgabe zweier Funktionen f_1 und f_2 mit obigen Eigenschaften charakterisiert.

Wenn also im folgenden zwei solche Funktionen vorgegeben werden, so werden damit alle Gebiete Ω betrachtet, die eine entsprechende Spitze Ω^* für ein (festes) x^* als Teilgebiet enthalten, so daß die Bedingung (3.10) erfüllt ist. Das heißt, $\Omega^* \subset \Omega$ und $\{(x_1, f_1(x_1)) : 0 \leq x_1 < x^*\} \cup \{(x_1, f_2(x_1)) : 0 \leq x_1 < x^*\} \subset \partial\Omega$. Die globale Gestalt von Ω spielt für unsere Betrachtungen keine Rolle. Die Lösung wird nur in der Nähe der Spitze untersucht. Es erweist sich als vorteilhaft, Ω^* durch krummlinige Koordinaten zu parametrisieren. Die Koordinaten werden analog zu [Mie2] eingeführt. Anstelle der dort verwendeten Winkelkoordinate für Gebiete mit Ecken wird die Größe a so definiert, daß die Kurven mit konstantem a wieder durch den Ursprung verlaufen und durch jeden Punkt $(x_1, x_2) \in \Omega^*$ genau eine solche Kurve verläuft. Die Größe s mißt dann wieder die Bogenlänge dieser Kurven (siehe Skizze 1).



Skizze 1

In Formeln ausgedrückt erhält man:

$$(3.11) \quad x_2 = x_2(a, x_1) = \frac{1+a}{2} f_1(x_1) + \frac{1 \Leftrightarrow a}{2} f_2(x_1) \quad a \in [\Leftrightarrow 1, 1]$$

$$(3.12) \quad a(x_1, x_2) = \frac{2x_2 \Leftrightarrow f_1(x_1) \Leftrightarrow f_2(x_1)}{f_1(x_1) \Leftrightarrow f_2(x_1)}$$

$$(3.13) \quad s(x_1, a) = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + x_{2,x_1}^2(a, \xi)} d\xi,$$

wobei a in der letzten Gleichung als von ξ unabhängig zu betrachten ist. Aufgrund der Eigenschaften von f_1 und f_2 kann der Integrand in (3.13) entwickelt werden und man erhält:

$$(3.14) \quad s(x_1, a) \sim x_1 \quad x_1 \rightarrow 0.$$

Die Größe s verhält sich also asymptotisch wie x_1 bei Annäherung an die Spitze.

Aus Gleichung (3.13) folgt nach ausgeführter Integration und Einsetzen von (3.12) eine Gleichung für $s = s(x_1, x_2)$. Für diese Transformation gilt folgender Satz, wenn man noch voraussetzt, daß f_1, f_2 zweimal stetig auf \mathbb{R}^+ differenzierbar sind.

Lemma 3.1 (Regularität der Transformation): *Die durch die Gleichungen (3.11), (3.12) und (3.13) beschriebene Transformation ist eineindeutig, zweimal stetig differenzierbar und regulär auf $\Omega^* \cup \partial\Omega^* \setminus \{(0, 0)\}$.*

Beweis: Die Eineindeutigkeit und die Differenzierbarkeit sind klar. Um die Regularität zu zeigen, wird die Determinante der Jacobimatrix $\frac{\partial(s,a)}{\partial(x_1,x_2)}$ berechnet:

$$(3.15) \quad \frac{\partial a}{\partial x_1} = \frac{\Leftrightarrow f_1'(x_1) \Leftrightarrow f_2'(x_1) \Leftrightarrow a (f_1'(x_1) \Leftrightarrow f_2'(x_1))}{f_1(x_1) \Leftrightarrow f_2(x_1)} = \frac{\Leftrightarrow 2b(x_1)}{f_1(x_1) \Leftrightarrow f_2(x_1)}$$

$$(3.16) \quad \frac{\partial a}{\partial x_2} = \frac{2}{f_1(x_1) \Leftrightarrow f_2(x_1)}$$

mit der Abkürzung $b(x_1) = \frac{1+a}{2}f_1'(x_1) + \frac{1-a}{2}f_2'(x_1)$.

Da f_1 und f_2 als stetig differenzierbar vorausgesetzt wurden, läßt sich der Satz über die Differenzierbarkeit von Integralen nach Parametern anwenden und es folgt:

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \sqrt{1 + b(\xi)^2} d\xi \\ &= \sqrt{1 + b(x_1)^2} + \frac{\partial a}{\partial x_1} \int_0^{x_1} \frac{b(\xi)}{\sqrt{1 + b(\xi)^2}} \frac{f_1'(\xi) \Leftrightarrow f_2'(\xi)}{2} d\xi \\ &= \sqrt{1 + b(x_1)^2} \Leftrightarrow \frac{b(x_1)}{f_1(x_1) \Leftrightarrow f_2(x_1)} \int_0^{x_1} \frac{b(\xi)}{\sqrt{1 + b(\xi)^2}} (f_1'(\xi) \Leftrightarrow f_2'(\xi)) d\xi \end{aligned}$$

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial x_2} &= \frac{\partial s}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x_2} \\ &= \frac{1}{f_1(x_1) \Leftrightarrow f_2(x_1)} \int_0^{x_1} \frac{b(\xi)}{\sqrt{1 + b(\xi)^2}} (f_1'(\xi) \Leftrightarrow f_2'(\xi)) d\xi. \end{aligned}$$

Mit den Formeln (3.15) bis (3.18) erhält man für die Determinante der Jacobimatrix:

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\partial(s, a)}{\partial(x_1, x_2)} \right) &= \frac{\partial s}{\partial x_1} \frac{\partial a}{\partial x_2} \Leftrightarrow \frac{\partial s}{\partial x_2} \frac{\partial a}{\partial x_1} \\ &= \frac{2}{f_1(x_1) \Leftrightarrow f_2(x_1)} \sqrt{1 + b(x_1)^2} \\ &> 0, \end{aligned}$$

woraus die Regularität der Koordinatentransformation folgt. \square

Damit läßt sich das Problem (3.1), (3.2) in einer gewissen Umgebung der Spitze in krummlinigen Koordinaten schreiben. Für diese Umgebung werden noch folgende Größen definiert (siehe Skizze 1):

$$(3.19) \quad \Omega_{s_0} = \left\{ (a, s) : \Leftrightarrow -1 < a < 1, \quad 0 < s < s_0 \right\}$$

$$(3.20) \quad \Sigma_{s_0} = \left\{ (a, s) : a = \pm 1, \quad 0 < s \leq s_0 \right\}$$

$$(3.21) \quad \gamma_{s_0} = \left\{ (a, s) : \Leftrightarrow -1 < a < 1, \quad s = s_0 \right\},$$

mit $0 < s_0 \leq s^* = \min_{a \in [-1, 1]} s(a, x^*)$. Im folgenden wird die Lösung des Kapillarflächenproblems in $\Omega_{s^*} \subset \Omega^*$ untersucht, also in einer gewissen Umgebung der Spitze.

3.3. Existenz von Lösungen

Es stellt sich die Frage, ob für Gebiete mit Spitzen überhaupt (klassische) Lösungen existieren.

Gleichung (3.1) ist vom quasilinearen, elliptischen Typ, aber im allgemeinen nicht gleichmäßig elliptisch. Für das Problem (3.1), (3.2) bzw. für Probleme diesen Typs gibt es eine Vielzahl von Arbeiten, die sich mit der Existenz von Lösungen beschäftigen (man sehe z. B. Kapitel 7 in [Fin1] und die zugehörige Literatur), so daß hier im einzelnen nicht darauf eingegangen werden kann. Es wird dabei entweder vom Variationsproblem bzw. verallgemeinerten Problem ausgegangen (z. B. [G1], [FG] oder siehe 5. Kapitel), oder es werden a-priori-Abschätzungen von u , ∇u usw. verwendet, um die Lösungsexistenz mittels Fixpunkttheoremen (z. B. nach Art des Leray-Schauderschen Fixpunktsatzes ([GT]) für Dirichlet-Probleme) zu beweisen (vgl. z. B. [Fio], [U], [SS], [L]). In [Fio] wird die Grundlage hierfür geschaffen und in [U], [SS], [L] wird diese Methode auf das Kapillarflächenproblem angewendet.

Mitunter wird dabei jedoch von allgemeineren Gleichungen als (3.1) ausgegangen, was zu höheren Anforderungen an die Glattheit des Randes führt. Man beachte, daß beispielsweise das zu (3.1), (3.2) verwandte Kapillarflächenproblem ohne Gravitation und mit beschränktem Reservoir

$$(3.22) \quad \operatorname{div} Tu = \lambda \quad \text{in } \Omega, \quad \lambda \text{ konstant}$$

$$(3.23) \quad \nu \circ Tu = \cos \gamma \quad \text{auf glatten Komponenten von } \partial\Omega$$

für Gebiete Ω mit Spitze keine klassische Lösung hat falls $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$.

Bemerkung: Obige Problemstellung ist zunächst nur für beschränkte Gebiete mit endlichem Rand physikalisch sinnvoll. Für unbeschränkte Gebiete können lokale Aussagen getroffen werden. Durch die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes erhält man $\lambda = \frac{|\partial\Omega|}{|\Omega|} \cos \gamma$, wobei unter $|\cdot|$ der geometrische Inhalt (Länge, Flächeninhalt) der entsprechenden Größe zu verstehen ist, das heißt, für $A \subset \mathbb{R}^2$ wird $|A| = \mathcal{H}_2(A)$, $|\partial A| = \mathcal{H}_1(A)$ gesetzt. \mathcal{H} bezeichnet dabei das Hausdorffmaß der angegebenen Dimension.

Die Konstante λ ist folglich nicht frei wählbar.

Lemma 3.2 (Nichtexistenz klassischer Lösungen): *Es existiert keine klassische Lösung für (3.22), (3.23) für Gebiete mit Spitzen und $\gamma \neq \frac{\pi}{2}$.*

Beweis: Zum Beweis dieser Tatsache wird die notwendige Bedingung von CONCUS und FINN ([CF1], S. 183 oder auch [Fin1], S. 135) verwendet. Dazu wird ein Gebiet $A \subset \Omega$, $A \neq \Omega$ betrachtet und darauf der Gaußsche Integralsatz angewendet (A sei genügend regulär). Mit den Größen $\nu_A = \partial A \cap \Omega$, $\Sigma_A = \partial A \cap \partial\Omega$ und der Abschätzung $|Tu| < 1$ in Ω erhält man:

$$(3.24) \quad |\nu_A| \Leftrightarrow |\Sigma_A| \cos \gamma + \lambda |A| > 0$$

für jedes solcher Teilgebiete A .

Bemerkung: Es wird $|A| = \mathcal{H}_2(A)$, $|\Sigma_A| = \mathcal{H}_1(\Sigma_A)$, $|\nu_A| = \mathcal{H}_1(\nu_A)$ gesetzt (vgl. Bemerkung zu (3.22), (3.23)).

Wie bereits in Kapitel 3.2 erwähnt wurde, kann ein Gebiet mit Spitze allgemein durch

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= o(x_1) & x_1 &\rightarrow 0 \\ f_2(x_1) &= o(x_1) & x_1 &\rightarrow 0 \\ f_2(x_1) &< f_1(x_1) & \text{in } (0, x^*], & x^* > 0 \text{ hinreichend klein} \end{aligned}$$

beschrieben werden. Betrachtet man die Teilgebiete $A = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < x_{1,0}, f_2(x_1) < x_2 < f_1(x_1)\}$ für hinreichend kleine $x_{1,0} \leq x^*$, so folgt für die Größen in (3.24):

$$\begin{aligned} |\nu_A| &= f_1(x_{1,0}) \Leftrightarrow f_2(x_{1,0}) = o(x_{1,0}) \\ |\Sigma_A| &= \int_0^{x_{1,0}} \sqrt{1 + f_1'^2(\xi)} d\xi + \int_0^{x_{1,0}} \sqrt{1 + f_2'^2(\xi)} d\xi = 2x_{1,0} + o(x_{1,0}) \\ |A| &= \int_0^{x_{1,0}} (f_1(\xi) \Leftrightarrow f_2(\xi)) d\xi = o(x_{1,0}^2). \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$|, A| \Leftrightarrow |\Sigma_A| \cos \gamma + \lambda |A| = \Leftrightarrow 2 \cos \gamma x_{1,0} + o(x_{1,0}).$$

Für ein hinreichend kleines $x_{1,0}$ erhält man folglich einen Widerspruch zu dem notwendigen Kriterium (3.24). Es kann also keine klassische Lösung für (3.22), (3.23) existieren. Wir werden im 5. Kapitel erneut auf dieses Problem zurückkommen. \square

Dieses Resultat zeigt, daß für ein Existenztheorem im betrachteten Fall solche Arbeiten besonders interessant sind, die die spezielle Gestalt von (3.1), (3.2) verwenden. Eine solche Herangehensweise wurde z. B. von SIEGEL praktiziert. SIEGEL beweist in [S] folgendes Theorem:

Satz 3.4 (Existenz von Lösungen für (3.1), (3.2)) vgl. [S], S. 475): *Sei Ω ein Gebiet mit stückweise glattem Rand Σ . Es gelte $\Sigma = \Sigma^0 \cup \Sigma^*$, wobei Σ^* eine offene Teilmenge in Σ ist mit $\Sigma^* \in C^4$, und Σ^0 ist eine Menge vom eindimensionalen Hausdorffmaß 0. Auf Σ^* gelte $\gamma(\sigma) \in C^{1,\alpha}$ und $0 < \gamma(\sigma) < \pi$, dann existiert eine Lösung u von (3.1), die die Randbedingung (3.2) auf Σ^* erfüllt.*

Bemerkung zu Satz 3.4: Laut Satz sind sogar veränderliche Randdaten möglich ($\gamma = \gamma(\sigma)$, $\sigma \in \Sigma^*$). Unter $C^{1,\alpha}$ werden die Funktionen mit hölderstetiger Ableitung verstanden.

Der Beweis verwendet die bereits bewiesene Existenz klassischer Lösungen für Gebiete mit $C^4 \Leftrightarrow \text{Rand}$ (z. B. [SS], [L] oder auch [FG] mit diversen Resultaten aus der Regularitätstheorie (vgl. [Fin1], Kapitel 7)). Das Ursprungsgebiet wird dabei durch C^4 -Gebiete Ω_i approximiert (siehe [S], S. 476). Aus den Lösungen u_i werden dann durch die Anwendung des Arzela-Ascoli-Theorems auf kompakten Mengen konvergente Teilfolgen ausgewählt. Es muß Konvergenz in C^2 für alle $K \subset\subset \Omega$ („ $\subset\subset$ “ steht dabei für „kompakt enthalten in“) und Konvergenz in C^1 für alle $K \subset\subset \Omega \cup \Sigma^*$ gewährleistet sein, um klassische Lösungen zu erhalten. Um das Arzela-Ascoli-Theorem anwenden zu können, müssen a-priori-Abschätzungen für u_i , ∇u_i usw. verwendet werden. Die gleichgradige Stetigkeit wird über Hölderabschätzungen gezeigt.

Diese Abschätzungen werden unterschiedlichen Arbeiten entnommen. Für die gleichmäßige Beschränktheit der Funktionen u_i wird ein Resultat von CONCUS und FINN verwendet. Es wird hier zitiert, da es später noch einmal benötigt wird.

Satz 3.5 (Abschätzung der Lösung) vgl. [CF2], S. 208 oder [Fin1], S. 113): *Sei u eine Lösung von (3.1) für ein Gebiet Ω , B_δ ein Kreis vom Radius δ , mit $B_\delta \subset \Omega$, dann gilt*

$$(3.25) \quad u < \frac{2}{\kappa\delta} + \delta$$

in B_δ .

Wie in [S] gezeigt, läßt sich dieses Resultat verwenden, um gleichmäßige Beschränktheit der Lösungen u_i auf $K \subset\subset \Omega$ zu beweisen, da der Rand von Ω hinreichend regulär ist (stückweise C^2 würde hierfür genügen).

Um eine ähnliche Abschätzung für die Gradienten von u_i in einer Umgebung des Randes von Ω zu erhalten, wird ein Resultat von SIMON und SPRUCK verwendet ([SS]). Dies erfordert die stückweise C^4 -Regularität des Randes und die Bedingung $0 < \gamma(\sigma) < \pi$.

Für eine innere Gradientenabschätzung verwendet SIEGEL eine Ungleichung von TRUDINGER ([Tr] oder [GT], S. 406), die dieser nur für Gleichungen vom Typ $\operatorname{div} Tu = H(x)$, wobei $H(x)$ eine vorgegebene Funktion auf Ω ist, bewiesen hat. Dieser Beweis läßt sich meines Erachtens nach auch nicht ohne weiteres auf den hier betrachteten Typ $\operatorname{div} Tu = H(u)$ verallgemeinern, da dann der Gradient wieder in der rechten Seite der Ungleichung auftritt. Anstelle des Resultates von TRUDINGER könnte man jedoch für den Beweis ein späteres Resultat von ECKER (siehe [E]) verwenden oder auch ein Resultat von BOMBIERI und GIUSTI ([BG], S. 386), welches sich aufgrund der Bemerkung in [BG], S. 393 auch auf Gleichungen vom Typ $H = H(x, u)$, zumindest aber auf den Fall $H = \kappa u$ anwenden läßt. Dieses liefert die benötigte innere Gradientenschranke und somit die gleichmäßige Beschränktheit der ∇u_i auf K .

Satz 3.4 beweist die Existenz von klassischen Lösungen für die hier betrachteten Fälle, wenn man zusätzlich voraussetzt, daß $f_1, f_2 \in C^4((0, x^*])$, und daß die betrachteten Gebiete Ω mit entsprechender Spitze Ω^* ansonsten einen stückweise glatten (C^4) Rand besitzen. Dies sei im folgenden erfüllt.

3.4. Das Vergleichsprinzip von Concus und Finn

Das Vergleichsprinzip von Concus und Finn lautet (vgl. [Fin1], S. 110):

Satz 3.6 (Vergleichsprinzip): *Sei $\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta, \Sigma_0$ eine Zerlegung von $\Sigma = \partial\Omega$ der Form $\Sigma = \Sigma_\alpha \cup \Sigma_\beta \cup \Sigma_0$ mit den Bedingungen $\Sigma_\beta \in C^1$ und Σ_0 sei vom eindimensionalen Hausdorffmaß 0, so daß für zwei Funktionen $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Sigma_\beta \cup \Omega)$ gilt:*

- (i) $\operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u \geq \operatorname{div} Tv \Leftrightarrow \kappa v$ in Ω
- (ii) $u \leq v$ auf Σ_α
- (iii) $\nu \circ Tu \leq \nu \circ Tv$ auf Σ_β ,

so folgt $v \geq u$ in Ω .

Dieser Satz gilt unverändert auch für unbeschränkte Gebiete, da $\kappa > 0$ vorausgesetzt

wurde ([FH]). Es ist interessant, daß keine Regularitätsbedingungen auf Σ_α benötigt werden (vgl. Beweis in [Fin1], S. 111).

Dieses Prinzip ermöglicht es, eine Vielzahl interessanter Eigenschaften der Lösungen für (3.1), (3.2) ohne spezielle Kenntnis derselben zu bestimmen, so folgt z. B. aus Satz 3.6 sofort die Eindeutigkeit der Lösung für (3.1), (3.2) und die a-priori-Abschätzung der Lösung u von Satz 3.5 (siehe [Fin1]).

Auch im Beweis der bereits bekannten asymptotischen Resultate (Sätze 3.1 bis 3.3) spielt dieses Resultat eine entscheidende Rolle (vgl. [CF2], [Mie1], [Mie2]) und ebenso für die vorliegende Arbeit.

Da die Lösung in der Nähe der Spitze untersucht werden soll, wird das Vergleichsprinzip auf die in Kapitel 3.2 eingeführten Teilgebiete Ω_{s_0} ($0 < s_0 \leq s^*$) angewendet. Eine Funktion wird dabei stets die nach Satz 3.4 existierende und nach dem Vergleichsprinzip eindeutige Lösung von (3.1), (3.2) für ein Gebiet Ω mit entsprechender Spitze Ω_{s^*} sein, die andere Funktion wird eine geeignete Vergleichsfunktion sein, mit deren Hilfe dann eine Abschätzung erzeugt werden kann. Unter einer geeigneten Vergleichsfunktion wollen wir dabei eine Funktion verstehen, die den Nachweis der Eigenschaften (i), (ii) und (iii) von Satz 3.6 ermöglicht und damit eine obere oder untere Schranke der Lösung in der Nähe der Spitze liefert. Satz 3.6 wird also in der folgenden Form angewendet:

Satz 3.7 (Formulierung des Vergleichsprinzips für den vorliegenden Fall): Sei v eine klassische Lösung von (3.1), (3.2) für ein Gebiet Ω mit Spitze Ω_{s^*} , $u \in C^2(\Omega_{s^*}) \cap C^1(\Sigma_{s^*} \cup \Omega_{s^*})$ (Vergleichsfunktion) und $0 < s_0 \leq s^*$, so gilt:

Aus

- (i) $\operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u \geq 0$ in Ω_{s_0}
- (ii) $u \leq v$ auf \cdot, s_0
- (iii) $\nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma \leq 0$ auf Σ_{s_0}

folgt $v \geq u$ in Ω_{s_0} .

Aus

- (i) $\operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u \leq 0$ in Ω_{s_0}
- (ii) $u \geq v$ auf \cdot, s_0
- (iii) $\nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma \geq 0$ auf Σ_{s_0}

folgt $v \leq u$ in Ω_{s_0} .

Bemerkung zu Satz 3.7: Es ist im allgemeinen $\cdot, s_0 \cap \partial\Omega = \emptyset$ nach Konstruktion, das heißt, man hat keine Bedingung der Form (3.2) an die Lösung v auf \cdot, s_0 , deshalb ist es günstig, das Vergleichsprinzip in der obigen Form zu schreiben.

Das Problem besteht allerdings im Auffinden einer geeigneten Vergleichsfunktion u , da

diese die richtige Asymptotik schon widerspiegeln muß, um eine gute Abschätzung zu erhalten. Es genügt auch im allgemeinen nicht, nur den (vermuteten) führenden Term als Vergleichsfunktion zu benutzen, da dies nicht notwendig zu einer geeigneten Vergleichsfunktion führt. Die Bedingungen (i) bis (iii) sind nur hinreichend für die Folgerung $v \geq u$ in Ω .

4. Die asymptotischen Resultate

In diesem Kapitel sollen einige Resultate für das asymptotische Verhalten der Lösungen des Kapillarflächenproblems (3.1), (3.2) für Gebiete mit Spitze vorgestellt werden. Wie bereits in Kapitel 3 dargestellt, werden dazu zwei Funktionen f_1, f_2 mit den Eigenschaften aus Kapitel 3.2 vorgegeben und damit alle Gebiete betrachtet, die eine entsprechende Spitze Ω^* enthalten (vgl. Kapitel 3.2). Es gelten die Bezeichnungen und Voraussetzungen aus Kapitel 3.

Zunächst soll aber noch ein Resultat bewiesen werden, welches später die Anwendung des Vergleichstheorems (Satz 3.7) auf Ω_{s_0} ermöglicht.

Satz 4.1 (Gleichmäßige Beschränktheit der Lösungen auf Ω_{s_0}): *Es existiert eine Konstante A unabhängig von der speziellen betrachteten Lösung v von (3.1), (3.2) für Gebiete Ω mit Spitze Ω^* derart, daß*

$$(4.1) \quad |v| \leq A \quad \text{auf } \Omega_{s_0}$$

mit $0 < s_0 < s^*$ beliebig, fest.

Das heißt, die Lösungen v für Gebiete mit gleicher Spitze Ω^* sind auf Ω_{s_0} gleichmäßig beschränkt. Die Schranke A ist unabhängig von der speziellen Gestalt von Ω . Sie ist nur abhängig von der Form der Spitze Ω^* , von κ und der Wahl von s_0 .

Mit Hilfe dieses Satzes soll später die Bedingung (ii) von Satz 3.7 durch die geeignete Wahl einer additiven Konstanten der Vergleichsfunktion erfüllt werden.

Beweis: Die Beweisidee beruht auf der Anwendung der a-priori-Abschätzung von CONCUS und FINN (Satz 3.5). Der vollständige Beweis ist im Anhang aufgeführt. \square

4.1. Abschätzung des führenden Terms

Wir kommen nun zur Darstellung der asymptotischen Resultate.

Satz 4.2a (Führende Terme der Lösung in speziellen Spitzen): *Es werde*

$$(4.2) \quad \begin{aligned} f_1(x_1) &= x_1^\alpha & \alpha > 1, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ f_2(x_1) &= \Leftrightarrow x_1^\alpha \end{aligned}$$

gesetzt. Für die Konstante C und die Funktion $h(a)$ auf $[\Leftrightarrow 1, 1]$ gelte:

$$(4.3) \quad C = \frac{\cos \gamma}{\kappa}$$

$$(4.4) \quad h(a) = \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\kappa} \sqrt{1 \Leftrightarrow a^2 \cos^2 \gamma}.$$

Sei v die Lösung von (3.1), (3.2) für ein Gebiet Ω mit Spitze Ω^* , so existieren positive Konstanten $s_0 < s^*$, A derart, daß in Ω_{s_0} gilt:

$$(4.5) \quad \left| v \Leftrightarrow \left(\frac{C}{s^\alpha} + \frac{h(a)}{s} \right) \right| \leq A \quad \text{für } \alpha > 2$$

$$(4.6) \quad \left| v \Leftrightarrow \left(\frac{C}{s^\alpha} + \frac{h(a)}{s} \right) \right| \leq As^{\alpha-2} \quad \text{für } 1 < \alpha \leq 2.$$

Weiterhin sind die Größen s_0 und A unabhängig von der speziellen betrachteten Lösung v , das heißt unabhängig von dem speziellen betrachteten Gebiet Ω .

In asymptotischer Schreibweise läßt sich das Resultat von Satz 4.2a zusammenfassen.

Für $s \rightarrow 0$ gilt:

$$(4.7) \quad v \sim \frac{C}{s^\alpha} + \frac{h(a)}{s}.$$

Die Lösungen des Kapillarflächenproblems sind folglich in Spitzen der Form (4.2) unbeschränkt und verhalten sich in krummlinigen Koordinaten asymptotisch wie die Funktion $\frac{C}{s^\alpha}$ für $s \rightarrow 0$. Die Lösung wächst also bei Annäherung an die Spitze mit der gleichen Ordnung wie die Berührungsordnung der die Spitze bildenden Funktionen f_1 und f_2 ist. Damit zeigen Kapillarflächen in Spitzen ein ähnliches Verhalten wie in Ecken mit hinreichend kleinem Öffnungswinkel (vgl. Kapitel 3.1 Sätze 3.1 bis 3.3). Es ist interessant festzustellen, daß der formale Grenzübergang $\alpha \rightarrow 1$ qualitativ diese Resultate widerspiegelt.

Beweis: Es soll hier nur eine Beweisskizze angegeben werden. Zur ausführlichen Darstellung sei auf den Anhang verwiesen.

Das Problem (3.1), (3.2) wird nur auf Ω^* betrachtet und dort in krummlinige Koordinaten überführt (vgl. Kapitel 3.2), das heißt, die in den Operatoren T und $\text{div } T$ auftretenden Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}$ werden in krummlinige Koordinaten transformiert. Mit diesen Formeln werden die Ausdrücke $\text{div } Tu \Leftrightarrow \kappa u$ in Ω_{s_0} und $\nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma$ auf Σ_{s_0} für eine allgemeine Vergleichsfunktion der Form

$$(4.8) \quad u(a, s) = Cs^{-\alpha} + h(a)s^{-1} + g(a)s^{\alpha-2} + f(a)s^{2\alpha-3} + D$$

mit auf $[\Leftrightarrow, 1]$ analytischen Funktionen h, g, f und Konstanten $C > 0, D$ berechnet. Um gewisse Restterme abschätzen zu können, ist dabei s_0 hinreichend klein zu wählen. Um das Verhalten der Restterme bei Differentiation kontrollieren zu können, ist das Aufstellen geeigneter Regeln erforderlich. Die Lemmata A.2 und A.3 im Anhang leisten dies.

Die noch unbestimmten Größen in der allgemeinen Vergleichsfunktion werden dann so gewählt, daß die Voraussetzungen des Satzes 3.7 erfüllt sind. Genauer erhält man für die Funktionen gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung aus der Bedingung, daß führende Terme der Entwicklung von $\text{div } Tu \Leftrightarrow \kappa u$ verschwinden sollen, womit u eine

Approximationslösung von (3.1) auf Ω_{s_0} wird. Ein Teil der (Integrations)konstanten wird durch eine entsprechende Bedingung für die Entwicklung von $\nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma$ bestimmt, die übrigen werden geeignet gewählt, z. B. ermöglicht eine entsprechende Wahl von D den Nachweis der Voraussetzung (ii) in Satz 3.7 durch Anwendung von Satz 4.1. Diese Wahlen führen dann zu den Abschätzungen (4.5), (4.6).

Die Unabhängigkeit der Wahl der Größen A und s_0 von der speziellen betrachteten Lösung v folgt aus der Tatsache, daß zur Bestimmung dieser Größen nur die Lösungseigenschaften von v auf Ω^* verwendet wurden, also auf einem Teilgebiet des ursprünglichen Gebietes Ω , welches jedoch für alle betrachteten Gebiete gleich ist. \square

Das Resultat von Satz 4.2a kann weiter verallgemeinert werden. Man betrachte die Situation, daß die Spitze Ω^* von zwei Containerwänden (f_1, f_2) **unterschiedlichen** aber homogenen Materials gebildet wird. In diesem Fall erhält man anstelle der Randbedingung (3.2) auf Σ_{s^*} :

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \nu \circ Tu &= \cos \gamma_1 && \text{auf } \Sigma_{s^*}^o \\ \nu \circ Tu &= \cos \gamma_2 && \text{auf } \Sigma_{s^*}^u \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \Sigma_{s^*}^o &= \left\{ (a, s) : a = 1, \quad 0 < s \leq s^* \right\} && \text{(oberer Rand)} \\ \Sigma_{s^*}^u &= \left\{ (a, s) : a = \Leftrightarrow 1, \quad 0 < s \leq s^* \right\} && \text{(unterer Rand),} \end{aligned}$$

wobei γ_1 und γ_2 die Randkontaktwinkel des jeweiligen Containermaterials mit der betrachteten Flüssigkeit bezeichnen.

Zur Abkürzung sei anstelle von (4.9) geschrieben:

$$(4.10) \quad \nu \circ Tu = \cos \gamma_{1,2} \quad \text{auf } \Sigma_{s^*}.$$

Für die beiden Randkontaktwinkel gelte:

$$(4.11) \quad 0 < \gamma_{1,2} < \pi.$$

Es kann weiterhin ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß

$$(4.12) \quad \gamma_1 \leq \pi \Leftrightarrow \gamma_2,$$

anderenfalls führt eine Transformation $u \rightarrow \Leftrightarrow u$ zu dieser Bedingung.

Die Existenz und Eindeutigkeit von klassischen Lösungen ist auch für Probleme mit der Randbedingung (4.10) gewährleistet (vgl. 3.3. Kapitel).

Des weiteren kann durch eine einfache Transformation $a \rightarrow \frac{1+a}{2}a_1 + \frac{1-a}{2}a_2$ zu den allgemeineren Begrenzungsfunktionen der Ecke:

$$(4.13) \quad \begin{aligned} f_1(x_1) &= a_1 x_1^\alpha \\ f_2(x_1) &= a_2 x_1^\alpha \end{aligned} \quad \alpha > 1, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \quad a_1 > a_2$$

übergegangen werden. Man erhält:

Satz 4.2b (Verallgemeinerung von Satz 4.2a): *Es sei v eine Lösung von (3.1) mit der verallgemeinerten Randbedingung (4.10) für ein Gebiet Ω mit Spitze Ω^* gebildet durch die Funktionen (4.13). Es gelte $\gamma_1 < \pi \Leftrightarrow \gamma_2$, und $C > 0$, $h(a)$ seien erklärt durch*

$$(4.14) \quad C = \frac{\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)\kappa}$$

$$(4.15) \quad h(a) = \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\kappa} \sqrt{1 \Leftrightarrow \left(\frac{\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2}{2} a + \frac{\cos \gamma_1 \Leftrightarrow \cos \gamma_2}{2} \right)^2},$$

so existieren positive Konstanten $s_0 < s^*$ und A derart, daß (4.5) und (4.6) mit den neuen Bezeichnungen gelten.

Die Größen s_0 und A sind unabhängig von der speziellen betrachteten Lösung.

Das Resultat von Satz 4.2b stimmt mit Satz 4.2a überein, wenn man $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ und $a_1 = \Leftrightarrow a_2 = 1$ setzt. Der Fall $\gamma_1 = \pi \Leftrightarrow \gamma_2$ mußte ausgeschlossen werden, da im Beweis explizit $C > 0$ benötigt wird. Hier liegt vermutlich eine andere Asymptotik als (4.7) vor. Der führende Term könnte eine nichtseparierte Abhängigkeit von a und s aufweisen, das heißt, nicht vom Typ $f(a)g(s)$ sein. In diesem Fall ist das Auffinden einer geeigneten Vergleichsfunktion problematisch (siehe Ausführungen am Ende des Kapitels 3.4).

Beweis: Um Satz 4.2b zu zeigen wird im wesentlichen auf den Beweis von Satz 4.2a zurückgegriffen, der bereits so allgemein aufgeschrieben wurde, daß nichts Neues mehr gezeigt werden muß (siehe Anhang für weitere Details). \square

Des weiteren wäre es wünschenswert, wenn man Aussagen über das Verhalten der Lösungen für eine größere Klasse von Spitzen erhielte. Man vergleiche beispielsweise die Sätze 3.1, 3.2 mit Satz 3.3 im 3.1. Kapitel, in dem MIERSEMANN das Resultat von Gebieten mit durch Geraden begrenzten Ecken auf Gebiete mit Ecken, die durch den Schnitt zweier beliebiger analytischer Funktionen (mit hinreichend kleinem Schnittwinkel) gebildet werden, verallgemeinerte. Dies soll hier ebenfalls versucht werden. Wir betrachten also im folgenden zwei in $x_1 = 0$ analytische Funktionen f_1 und f_2 , die die zu untersuchenden Spitzen bilden:

$$(4.16) \quad \begin{aligned} f_1(x_1) &= a_1 x_1^n + b_1 x_1^{n+1} + O(x_1^{n+2}) & n \in \mathbb{N}, \quad n > 1 \\ f_2(x_1) &= a_2 x_1^n + b_2 x_1^{n+1} + O(x_1^{n+2}) & a_i, b_i \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

$$(4.17) \quad a_1 > a_2.$$

Dabei bezeichnet O das bekannte Landausche Ordnungssymbol: $f(x) = O(g(x))$ für $x \rightarrow x_0$ genau dann, wenn eine reelle Zahl M existiert mit $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < M$ für $x \rightarrow x_0$.

Aufgrund der Bedingung (4.17) existiert ein $x_{1,0} > 0$ mit $f_1(x_1) > f_2(x_1)$ für $x_1 \in (0, x_{1,0}]$. Diese Bedingung kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, denn der Fall $a_1 = a_2$ kann durch eine Transformation auf die obige Form zurückgeführt werden, z. B. läßt sich $f_1(x_1) = x_1^3 + x_1^4$, $f_2(x_1) = x_1^3 \Leftrightarrow x_1^4$ durch die Transformation $x_2 \rightarrow x_2 + x_1^3$ auf den Fall $f_1(x_1) = x_1^4$, $f_2(x_1) = \Leftrightarrow x_1^4$ zurückführen usw.

Für Spitzen der Form (4.16) erhält man:

Satz 4.3a (Führender Term der Lösung in allgemeiner Spitze): *Es sei v die Lösung von (3.1), (3.2) für ein Gebiet Ω mit Spitze Ω^* der Form (4.16), so existieren positive Konstanten $s_0 < s^*$, A unabhängig von der speziellen betrachteten Lösung v , so daß*

$$(4.18) \quad \left| v \Leftrightarrow \frac{C}{s^n} \right| \leq \frac{A}{s^{n-1}} \quad \text{in } \Omega_{s_0},$$

wobei für C gilt:

$$(4.19) \quad C = \frac{2 \cos \gamma}{(a_1 \Leftrightarrow a_2) \kappa}.$$

In asymptotischer Schreibweise:

$$(4.20) \quad v \sim \frac{C}{s^n} \quad s \rightarrow 0.$$

Das heißt, auch für Spitzen, die durch die sehr allgemeinen Begrenzungsfunktionen (4.16) gebildet werden, erhält man $\frac{C}{s^n}$ als führenden Term der asymptotischen Entwicklung der Lösung. Dieser Term hängt folglich nur von dem führenden Term der die Spitze bildenden Funktionen ab. Der zweite Term wird hier jedoch im allgemeinen nicht von der Ordnung $\frac{1}{s}$ sein wie in Satz 4.2, sondern von der Ordnung $\frac{1}{s^{n-1}}$. Man beachte die Analogie zu den Sätzen 3.2 und 3.3!

Beweis: Siehe Anhang. □

Bemerkung: Im Beweis wird nicht die vollständige Analytizität der Funktionen f_1 , f_2 benötigt. Man könnte auch eine schwächere Voraussetzung an f_1 bzw. f_2 finden. Es müßten dann jedoch wenig handhabbare Voraussetzungen über das Verhalten der Restterme in (4.16) bei Differentiation gestellt werden. Man vergleiche dazu auch die Ausführungen im Beweis zu Satz 4.2, insbesondere müssen die Differentiationseigenschaften von Lemma A.2 erfüllt sein (siehe Anhang Beweis zu Satz 4.2a). Dazu reicht es auch im allgemeinen nicht, daß f_1 und f_2 hinreichend oft differenzierbar sind (vgl. [Mur], S. 16, Gegenbeispiel $x^n \sin(x^{-\varepsilon})$).

Das Resultat von Satz 4.3a läßt sich ebenfalls auf den Fall unterschiedlicher Randkontaktwinkel verallgemeinern.

Satz 4.3b (Verallgemeinerung von Satz 4.3a auf unterschiedliche Randkontaktwinkel): *Es sei v die Lösung von (3.1) mit der verallgemeinerten Randbedingung (4.10) auf Σ_{s^*} für ein Gebiet Ω mit Spitze Ω^* der Form (4.16). Es gelte $\gamma_1 < \pi \Leftrightarrow \gamma_2$, so existieren positive Konstanten $s_0 < s^*$, A derart, daß*

$$(4.21) \quad \left| v \Leftrightarrow \frac{C}{s^n} \right| \leq \frac{A}{s^{n-1}} \quad \text{in } \Omega_{s_0},$$

wobei für C die Gleichung (4.14) gilt.

Beweis: Siehe Anhang. □

Wir kommen nun zu einer möglichen praktischen Anwendung der Resultate.

Beispiel: Zwei sich berührende Kreiszyylinder mit Radius 1 gleichen, homogenen Materials stehen in einem hinreichend großen Bassin mit einer Flüssigkeit, die mit dem Material der Zylinder einen Randkontaktwinkel γ bildet. Legt man den Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems in den Berührungspunkt der Zylinder am Bassingrund und die x_1 -Achse tangentiell, so folgt:

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 \Leftrightarrow x_1^2} \\ f_2(x_1) &= \Leftrightarrow 1 + \sqrt{1 \Leftrightarrow x_1^2}. \end{aligned}$$

Dies sind in $x_1 = 0$ analytische Funktionen, die eine Spitze mit den geforderten Voraussetzungen bilden. Durch Taylor-Entwicklung erhält man:

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= \frac{1}{2}x_1^2 + O(x_1^4) \\ f_2(x_1) &= \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_1^2 + O(x_1^4). \end{aligned}$$

Aus Satz 4.3a folgt für die Lösung v :

$$v \sim \frac{2 \cos \gamma}{\kappa} \frac{1}{s^2} \quad s \rightarrow 0.$$

4.2. Vollständige asymptotische Entwicklung

Der Nachteil der Abschätzungen (4.18) bzw. (4.21) besteht darin, daß die Fehler zwar von geringerer Ordnung sind als die Vergleichsfunktion $\frac{C}{s^n}$, aber dennoch unendlich groß werden, wenn s gegen null strebt. Abhilfe würde eine vollständige asymptotische Entwicklung der Lösung schaffen. Es erweist sich als möglich, eine solche für die Lösung v von (3.1), (4.10) für Gebiete mit Spitze der Form (4.16) zu konstruieren. Dazu wird eine Methode von MIERSEMANN ([Mie1]) auf Gebiete mit Spitzen verallgemeinert. Im folgenden werde stets der Fall

$$(4.22) \quad \gamma_1 < \pi \Leftrightarrow \gamma_2$$

vorausgesetzt, und für f_1, f_2 gelte (4.16). Es sei für $k \geq 0, k \in \mathbb{N}$

$$(4.23) \quad u_k(a, s) = \sum_{i=-n}^{-n+k} C_i s^i + \sum_{i=-1}^{-1+k} h_i(a) s^i,$$

wobei C_i Konstanten und $h_i(a)$ auf $[\llbracket 1, 1 \rrbracket]$ analytische Funktionen bezeichnen, so läßt sich zunächst folgendes Lemma beweisen:

Lemma 4.1 (Existenz von Approximationslösungen): *Es existieren Konstanten C_i ($i = \llbracket n, \llbracket n + 1, \dots \rrbracket$) und auf $[\llbracket 1, 1 \rrbracket]$ analytische Funktionen $h_j(a)$ ($j = \llbracket 1, 0, \dots \rrbracket$) derart, daß*

$$(4.24) \quad \operatorname{div} T u_k \Leftrightarrow \kappa u_k = O(s^{k-n+1}) \quad \text{in } \Omega_{s_0} \quad (s_0 < s^*)$$

$$(4.25) \quad \nu \circ T u_k \Leftrightarrow \cos \gamma_{1,2} = O(s^{k+1}) \quad \text{auf } \Sigma_{s_0},$$

für alle $k \geq 0$.

Das heißt, die Funktionen u_k sind Approximationslösungen von (3.1), (4.10).

Beweis: Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion im Zusammenhang mit dem Beweis des folgenden Satzes (siehe Anhang). Satz 4.3b stellt dabei den Induktionsanfang dar. Für C_{-n} gilt daher (4.14) und $h_{-1} = h(a)$ mit den Bezeichnungen aus dem Beweis zu Satz 4.3b (siehe Anhang). Bei jedem Induktionsschritt wird eine Konstante eindeutig und eine Funktion als Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung bis auf eine additive Konstante bestimmt. Aufgrund der Darstellung von u_k (4.23) kann diese ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich null gesetzt werden. \square

Bemerkung: Anders formuliert könnten die Summen in (4.23) gleich zusammengefaßt werden mit der Definition $\tilde{h}_i(a) = h_i(a) + C_i$, wobei die Funktionen \tilde{h}_i dann eindeutig bestimmt wären. Die Form (4.23) erweist sich aber für den Beweis als besonders vorteilhaft, da dadurch keinerlei Fallunterscheidungen erforderlich sind.

Satz 4.4 (Vollständige asymptotische Entwicklung): *Die Funktionen u_k mögen (4.24), (4.25) erfüllen, v sei die Lösung von (3.1), (4.10) für ein Gebiet Ω mit Spitze Ω^* der Form (4.16), so existieren für jedes $k \geq 0$ positive Konstanten $s_0 < s^*$ und A unabhängig von der speziellen betrachteten Lösung v derart, daß*

$$(4.26) \quad |v \Leftrightarrow u_k| \leq A s^{-n+k+1} \quad \text{in } \Omega_{s_0}.$$

Dieser Satz liefert die (eindeutig bestimmte) vollständige asymptotische Laurentreihenentwicklung der Lösung v bei Annäherung an die Spitze:

$$(4.27) \quad v \sim \sum_{i=-n}^{-2} C_i s^i + \sum_{i=-1}^{\infty} \tilde{h}_i(a) s^i \quad s \rightarrow 0,$$

mit $\tilde{h}_i(a) = h_i(a) + C_i$ und $C_i, h_i(a)$ wie in Lemma 4.1.

Die führenden $n \Leftrightarrow 1$ Glieder der Entwicklung sind folglich unabhängig von a .

Beweis: Der Beweis verläuft ähnlich wie der in [Mie1] angegebene Beweis für das analoge Resultat für Gebiete mit durch Geraden begrenzten Ecken (Satz 3.2). Es wird eine Zerlegung der Operatoren $\operatorname{div} T$ und T benötigt. Des weiteren ist eine feinere Abschätzung der Restterme erforderlich als in den Beweisen zu den Sätzen 4.2 und 4.3, um den Beweis führen zu können. Das Vergleichstheorem (Satz 3.7) wird dabei ein weiteres Mal verwendet. Der Nachweis der Bedingung (ii) erfolgt hier jedoch nicht über die Wahl einer additiven Konstanten der Vergleichsfunktion wie in den Beweisen zu den Sätzen 4.2 und 4.3, sondern durch die Verwendung eben dieser Resultate. Gerade ein solcher Schritt ermöglicht es erst, bessere Abschätzungen als z. B. Abschätzungen von der Ordnung 1 im Satz 4.2 für $\alpha > 2$ zu erhalten.

Ansonsten sei wieder auf den Anhang verwiesen. \square

4.3. Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß durch die Sätze 4.2 und 4.3 das Verhalten der Lösung des Kapillarflächenproblems für Gebiete mit Spitzen für eine große Klasse von Objekten charakterisiert werden konnte. Es zeigte sich, daß die Methode von CONCUS und FINN auch auf solche Gebiete angewendet werden kann und dort ebenfalls interessante Resultate liefert. Man erhält in allen betrachteten Fällen, daß *die Lösung des Kapillarflächenproblems bei Annäherung an die Spitze mit gleicher Ordnung wächst, wie die Berührungsordnung der die Spitze bildenden Funktionen ist* sowie den führenden Term der asymptotischen Entwicklung.

Des weiteren war es möglich, eine vollständige Entwicklung in Form einer Laurentreihe in s für den Fall einer durch analytische Funktionen begrenzten Spitze aufzustellen, die die interessante Eigenschaft aufwies, daß die führenden ($n \Leftrightarrow 1$) Glieder dieser Entwicklung von a unabhängig sind.

Im Falle der in Satz 4.2 untersuchten Gebiete wird eine vollständige asymptotische Entwicklung voraussichtlich jedoch **nicht** von der Form

$$\frac{C}{s^\alpha} + \sum_{i=0}^{\infty} h_i(a) s^{i(\alpha-1)-1}$$

sein, wie man aufgrund des Ansatzes für die geeignete Vergleichsfunktion (4.8) vermuten könnte. Es ist im Beweis zu Satz 4.2 erkennbar, daß obige Reihe „gestört“ wird.

Offen bleibt weiterhin die Frage nach dem asymptotischen Verhalten im Falle auf Σ_s^o und Σ_s^u verschiedener Randkontaktwinkel γ_1 und γ_2 mit $\gamma_1 = \pi \Leftrightarrow \gamma_2$.

5. Das Problem in der Schwerelosigkeit

5.1. Motivation und Theorie verallgemeinerter Lösungen

Wir betrachten das Problem

$$(5.1) \quad \operatorname{div} Tu = 2H \quad \text{in } \Omega$$

$$(5.2) \quad \nu \circ Tu = \beta \quad \text{auf glatten Komponenten von } \partial\Omega,$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet mit stückweise glattem Rand. Im Falle $H > 0$, $\beta = \cos \gamma$ konstant entspricht dies dem Kapillarflächenproblem ohne Gravitation, mit beschränktem Reservoir. Für γ gelte

$$(5.3) \quad 0 \leq \gamma < \frac{\pi}{2}.$$

Wie bereits in Kapitel 3.3 bewiesen, hat das Problem für Gebiete mit Spitzen keine klassische Lösung (Lemma 3.2). Dennoch ist man in der Praxis sehr an (wenn auch in irgendeiner Form verallgemeinerten) Lösungen von (5.1), (5.2) interessiert. Der Biologe ZIMMERMANN beschreibt in seinem Buch [Z] den Flüssigkeitstransport in Interzellularräumen von Bäumen und kritisiert, daß in der Vergangenheit der Einfluß der Kapillarität auf Wasserleitprozesse in Pflanzen fast völlig ignoriert wurde. Dazu sei auch ein Zitat aus einem Lehrbuch [SW] aufgeführt. Unter der Überschrift „Mechanismen des Stofftransportes in der Sproßachse“ wird behauptet ([SW], S. 64): „Auch auf die in den Gefäßen zweifellos wirksamen Kapillarkräfte kann der Wasseraufstieg nur zu einem geringen Teil zurückgeführt werden.“. Der Wasseraufstieg wird dort im wesentlichen auf den Transpirationssog zurückgeführt, was jedoch laut ZIMMERMANN im Widerspruch zu der Beobachtung steht, daß auch entlaubte Bäume ihr Wasserreservoir noch auffüllen können (vgl. [Z], S. 49). Der Wassertransport könnte über die Kapillarwirkung der Interzellularräume zwischen benachbarten (kreisförmigen) Leitfasern erfolgen, also über zylindrische Gefäße mit Grundfläche, die Spitzen enthält (vgl. später Skizze 7). Da es sich dabei um extrem kleine Gebiete mit Durchmessern im μm -Bereich handelt, erscheint das Modell der Kapillarflächen in der Schwerelosigkeit (5.1), (5.2) mit konstantem H , β geeignet zur Beschreibung des Flüssigkeitsverhaltens zu sein, denn für Kapillarflächen gilt grob gesprochen folgende Relation

$$\text{enge Gefäße} \Leftrightarrow \text{geringe Gravitation,}$$

oder anders formuliert, die Gravitationsenergie der Flüssigkeit in engen Gefäßen ist vernachlässigbar gegenüber der Ober- und Grenzflächenenergie. Man beachte dazu auch das Variationsproblem zu (5.1), (5.2) (siehe später (5.4)).

Bemerkung: Die obige Relation erhält man, indem man vom Problem (3.1), (3.2) zu einer dimensionslosen Gleichung übergeht (vgl. [Fin1], S. 14) durch die Transformation

$U := \frac{u}{a}$, $\mathbf{X} := \frac{\mathbf{x}}{a}$, wobei a die Größenordnung des Systems bezeichnet (repräsentative Länge). Es folgt aus (3.1), (3.2):

$$\begin{aligned}\operatorname{div} TU &= BU \\ \nu \circ TU &= \cos \gamma,\end{aligned}$$

wobei die Größe $B = \kappa a^2$ als *Bondzahl* ([Fin1], S. 14) bezeichnet wird. Man erkennt, daß einer kleinen Bondzahl eine geringe Größenordnung des Systems oder eine geringe Gravitation entspricht.

Da folglich das Problem (5.1), (5.2) wichtig zum Verständnis der Stoffwechselprozesse in Pflanzen sein könnte, sollen im folgenden nach geeigneter Verallgemeinerung des Problems für beobachtete Interzellularräume verallgemeinerte Lösungen von (5.1), (5.2) bestimmt werden. Anschließend wird untersucht, inwiefern sich diese Lösungen physikalisch interpretieren lassen. Wir wollen uns dabei jedoch nicht nur auf konstante H , β beschränken. Es sei zunächst $H = H(u) \in C^1(\mathbb{R})$ (H beschränkt) zugelassen, $\beta(s) \in L^1(\partial\Omega)$ ($|\beta| \leq 1$), so lautet das Variationsproblem zu (5.1), (5.2) (vgl. [Fin1], S. 190):

$$(5.4) \quad \mathcal{E}[u] = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} + \int_{\Omega} \lambda(u) dx \Leftrightarrow \oint_{\partial\Omega} \beta(s)u ds \rightarrow \min! \quad u \in BV(\Omega),$$

für die Funktion λ gelte $\lambda'(u) = 2H(u)$ und $\lambda''(u) \geq 0$.

Die Gleichungen (5.1), (5.2) mit entsprechendem $H = H(u)$ bilden die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen zum Variationsproblem (5.4).

Das Randintegral ist im Sinne der Spurbildung von u auf $\partial\Omega$ zu verstehen, sofern eine solche Spur in $L^1(\partial\Omega)$ existiert. Dies ist zumindest für Lipschitzgebiete garantiert ([EG], S. 177), allerdings nicht für Gebiete mit Spitzen.

Physikalisch interpretiert bezeichnet \mathcal{E} die Summe aus Oberflächen-, Gravitations- und Grenzflächenenergie. Des weiteren kann der mittlere Term noch entsprechend der Problemstellung eine mittels Lagrangescher Multiplikatorenregel eingebundene Volumenrestriktion ($\int_{\Omega} u dx = V$ konstant) beinhalten. Man beachte, daß dies stets durch eine geeignete Wahl von $\lambda(u)$ realisierbar ist. Für das oben beschriebene Problem (Volumenrestriktion und Schwerelosigkeit) erhalte man beispielsweise $\lambda(u) = 2H(u \Leftrightarrow \frac{V}{|\Omega|})$ (H konstant, V das Flüssigkeitsvolumen im Gefäß), für das gleiche Problem ohne Volumenrestriktion dagegen $\lambda(u) \equiv 0$ und für (5.1) die Minimalflächengleichung.

Der Funktionenraum $BV(\Omega)$ bezeichnet die Menge der Funktionen beschränkter Variation auf Ω . Eine Einführung in die Theorie dieser Räume findet man z. B. in den Büchern [G2], [EG]. Es seien hier die wichtigsten Definitionen aufgeführt:

Definition 5.1 ($\int_{\Omega} |Df|$ [G2], S. 3): Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f \in L^1(\Omega)$, so sei definiert

$$(5.5) \quad \int_{\Omega} |Df| = \sup \left\{ \int_{\Omega} f \operatorname{div} g dx : g \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^n), \quad |g(x)| \leq 1 \text{ für } x \in \Omega \right\}.$$

Definition 5.2 (BV-Funktion [G2], S. 4): Eine Funktion $f \in L^1(\Omega)$ heißt *von beschränkter Variation in Ω* , falls $\int_{\Omega} |Df| < \infty$.

Definition 5.3 (Subgraph): Es sei u eine reellwertige Funktion auf Ω , dann heißt die Menge

$$U = \{(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R} \quad : \quad t < u(x)\}$$

der *Subgraph* von u .

Definition 5.4 (charakteristische Funktion): Die Funktion

$$\varphi_E(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in E \\ 0 & : \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus E \end{cases}$$

heißt *charakteristische Funktion* von $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

Definition 5.5 (Caccioppolimenge [G2], S. 6): Eine Borelmenge $E \subseteq \mathbb{R}^n$ für die

$$\int_{\Omega} |D\varphi_E| < \infty$$

für alle offenen, beschränkten Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gilt, heißt *Caccioppolimenge*.

Bemerkung: Wie üblich werden Caccioppolimengen, die sich nur auf einer Menge vom entsprechend dimensional Hausdorffmaß 0 unterscheiden, identifiziert.

Für den ersten Summand in (5.4) gilt im obigen Sinne

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} = \sup \left\{ \int_{\Omega} (g_{n+1} + u \operatorname{div} (g_1, \dots, g_n)) dx \quad : \right. \\ \left. g = (g_1, \dots, g_{n+1}) \in C_0^1(\Omega; \mathbb{R}^{n+1}) \text{ und } |g(x)| \leq 1 \right. \\ \left. \text{für } x \in \Omega \right\},$$

wenn die Definition von $\int_{\Omega} |Du|$ auf die Funktion $\tilde{u} = u(x_1, \dots, x_n) + x_{n+1}$ angewandt wird oder unter Verwendung des Theorems 14.6 aus [G2], S. 163:

$$\int_{\Omega} \sqrt{1 + |Du|^2} = \int_{\Omega \times \mathbb{R}} |D\varphi_U|.$$

Es kann bewiesen werden, daß im Falle der Existenz einer Lösung für das Variationsproblem (5.4) diese lokal analytisch ist und (5.1) erfüllt ([Fin1], Kapitel 7), des weiteren muß das Randintegral in (5.4) für Gebiete mit Spitzen nicht für alle $u \in BV(\Omega)$ existieren. Generell ist die Behandlung des Variationsproblems (5.4) ungünstig, wenn einzelne Energien unendlich groß werden könnten, wie z. B. in Gebieten mit Ecken oder Spitzen oder in

unbeschränkten Gebieten. Es stellt deshalb (5.4) noch keine geeignete Verallgemeinerung unseres Problems dar.

Eine Beobachtung von MIRANDA [Mir1] führt jedoch vom Variationsproblem (5.4) zu einer verallgemeinerten Formulierung desselben:

Satz 5.1 (Äquivalente Formulierung zum Variationsproblem [Fin1], S. 192 bzw. [Mir1]): Eine Funktion $u \in BV(\Omega)$ minimiert \mathcal{E} in Ω (Ω Lipschitzgebiet) genau dann, wenn ihr Subgraph U das Funktional

$$(5.6) \quad \mathcal{F}[U] = \int_{Q=\Omega \times \mathbb{R}} |D\varphi_U| + 2 \int_Q H\varphi_U dxdt \Leftrightarrow \int_{\delta Q=\partial\Omega \times \mathbb{R}} \beta\varphi_U dsdt$$

minimiert.

Durch die Bedingung $u \in BV(\Omega)$ ist gewährleistet, daß die Integrale in (5.6) definiert sind. Das Randintegral beinhaltet wieder die Spur von φ_U auf dem Rand von Q .

Die Minimierung von (5.6) ist im folgenden Sinne zu verstehen. Es sei

$$(5.7) \quad \mathcal{F}_T[U] = \int_{Q_T=\Omega \times [-T,T]} |D\varphi_U| + 2 \int_{Q_T} H\varphi_U dxdt \Leftrightarrow \int_{\delta Q_T=\partial\Omega \times [-T,T]} \beta\varphi_U dsdt$$

für eine Caccioppolimenge $U \subseteq Q$ und $T > 0$, so wird definiert (vgl. [Fin1], [Mir1], [Mir2]):

Definition 5.6 (Lösung in Q_T): U minimiert (oder U ist eine Lösung von) \mathcal{F}_T in Q_T wenn $\mathcal{F}_T[U] \leq \mathcal{F}_T[S]$ für alle Caccioppolimengen S , die mit U außerhalb von Q_T übereinstimmen.

Bemerkung: Die zusätzliche Bedingung an S (S stimmt außerhalb von Q_T mit U überein) müßte meines Erachtens nach in [Fin1], S. 192 noch ergänzt werden, um eine Äquivalenz zu anderen Formulierungen in der Literatur (vgl. später Lemma 5.1) zu gewährleisten. Ließe man diese Bedingung weg, so erhielte man beispielsweise für den Fall H, β konstant nur die in Lemma 6.1 (vgl. später) angegebenen verallgemeinerten Lösungen und folglich niemals klassische Lösungen, selbst wenn solche (für Gebiete ohne Spitzen) existieren. Dies dürfte im Sinne der Verallgemeinerung nicht wünschenswert sein. Es ist des weiteren wichtig, gerade über die halbgeschlossenen Mengen Q_T zu integrieren. Man hat nur in diesem Fall Beziehungen der Form „ U minimiert $\mathcal{F}_T \Rightarrow U$ minimiert $\mathcal{F}_{T'}$ für $0 < T' < T$ “.

Definition 5.7 (lokale Lösung): U minimiert (oder U ist eine lokale Lösung von) \mathcal{F} in Q wenn U das Funktional \mathcal{F}_T in Q_T minimiert für alle $T > 0$.

In diesem Sinne kann der Begriff der verallgemeinerten Lösung eingeführt werden, der wichtig ist für das folgende:

Definition 5.8 (verallgemeinerte Lösung): Eine Funktion $u(x) : \Omega \rightarrow [\Leftrightarrow\infty, \infty]$ heißt *verallgemeinerte Lösung* für das Problem (5.1), (5.2), wenn ihr Subgraph U eine Caccioppolimenge und eine lokale Lösung von \mathcal{F} in Q ist.

Durch die Bedingung, daß U , S Caccioppolimengen sind, ist gewährleistet, daß die Integrale in (5.7) stets existieren, auch für Gebiete mit Spitzen. Deshalb ist der Begriff der verallgemeinerten Lösung auch für Gebiete mit Spitzen sinnvoll definiert. Aus dem Strukturtheorem für Caccioppolimengen ([EG], S. 205) und dem verallgemeinerten Gauß-Green-Theorem ([EG], S. 209) kann geschlußfolgert werden, daß

$$(5.8) \quad \varphi_U|_{\delta Q_T} = \begin{cases} 1 & : x \in \partial_* U \cap \delta Q_T \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad \forall T > 0,$$

wobei $\partial_* U$ den maßtheoretischen Rand von U bezeichnet. Genauere Ausführungen hierzu findet man in ([EG], Kapitel 5.8) bzw. im Anhang Kapitel A.7.

Der Ausdruck $\int_A |D\varphi_E|$ (E eine Caccioppolimenge) ist nach der Supremumdefinition (5.5) zunächst nur für offene Mengen A erklärt. Es kann aber gezeigt werden ([EG], Kapitel 5.1), daß ein Radonmaß auf \mathbb{R}^n existiert, welches mit der Definition $\mu(A) = \int_A |D\varphi_E|$ die Gleichung (5.5) für alle offenen Mengen A erfüllt. Da μ ein Borelmaß ist, ist $\int_A |D\varphi_E|$ im obigen Sinne für beliebige Borelmengen A erklärt, also insbesondere für die Mengen Q_T , und es kann bewiesen werden ([EG], S. 209), daß

$$(5.9) \quad \int_A |D\varphi_E| = \mathcal{H}_{n-1}(\partial_* E \cap A).$$

Bemerkung zur Schreibweise: Es wird hier weitestgehend die Schreibweise von GIUSTI ([G2]) verwendet, da diese auch in der vorhandenen Literatur zur verallgemeinerten Lösungstheorie (z. B. [Fin1], [G1], [Ta]) benutzt wird. Dies wird nicht immer möglich sein, da ein Teil der Bezeichnungen in [EG] kein Äquivalent in [G2] hat. Wir werden an gegebener Stelle darauf hinweisen, aus welchem Buch die entsprechende Bezeichnung stammt. In [EG] wird das obige Maß μ mit $\|\partial E\|$ bzw. $\|D\varphi_E\|$ bezeichnet ([EG], S. 169). Für das Radonmaß $\int |Df|$ mit der zu μ analogen Definition wird in [EG] $\|Df\|(\cdot)$ geschrieben.

Im Falle H , $\beta = \cos \gamma$ konstant läßt sich (5.7) wegen (5.8) und (5.9) schreiben als:

$$\mathcal{F}_T[U] = \mathcal{H}_2(\partial_* U \cap Q_T) + 2H\mathcal{H}_3(U \cap Q_T) \Leftrightarrow \cos \gamma \mathcal{H}_2(\partial_* U \cap \delta Q_T).$$

Satz 5.1 wird zur Erklärung der verallgemeinerten Lösung von (5.1) und (5.2) nicht direkt benötigt, er liefert nur die Motivation hierfür.

Jede Lösung des Variationsproblems (5.4) ist auch eine verallgemeinerte Lösung (Satz 5.1). Des weiteren kann mit der obigen Definition gezeigt werden ([Mir1], siehe auch die

Ausführungen in [Fin1], 7. Kapitel), daß, falls klassische Lösungen für (5.1), (5.2) existieren, diese auch verallgemeinerte Lösungen sind. In diesem Sinne stellt die Minimierungsbedingung für \mathcal{F} eine (geeignete) Verallgemeinerung des Problems (5.1), (5.2) dar. Die Verallgemeinerung besteht darin, daß $u(x)$ von nun an keine BV -Funktion und erst recht keine glatte Funktion sein muß, da $u(x)$ auf Mengen von positivem Maß $\pm\infty$ werden kann. Des weiteren muß das Funktional \mathcal{F} für den Subgraphen der verallgemeinerten Lösung gar nicht sinnvoll definiert sein. Es genügt die Definiertheit der Funktionale \mathcal{F}_T um die Minimierungseigenschaft anzunehmen, die dort auftretenden Integrale sind aufgrund der Voraussetzung, daß U eine Caccioppolimenge ist auch für Gebiete mit Spitzen erklärt (s. o.).

Der Vorteil einer solchen Formulierung besteht darin, daß die eventuelle Lösung u innerhalb von Q_T mit praktisch allen anderen denkbaren Flüssigkeitskonstellationen, repräsentiert durch die Gestalt der Caccioppolimenge S in Q_T , verglichen wird und durch die Minimierungsbedingung (lokal) den energetisch günstigsten Zustand einnehmen muß (man vergleiche mit den Ausführungen zum Variationsproblem (5.4), insbesondere in bezug auf die physikalische Bedeutung der Integrale). Es ist jedoch **nicht** so, daß der Wert der Funktionale \mathcal{F}_T für eine Lösung minimal sein muß, denn man kann die Lösung z. B. nicht mit allen möglichen Subgraphen von verallgemeinerten Funktionen vergleichen, sondern nur mit bestimmten zulässigen Vergleichsmengen. Man erhält eine Minimierung bezüglich lokaler Störungen (siehe die Zusatzbedingung an S).

Ein interessanter Unterschied zwischen dem Problem (5.1), (5.2) und der verallgemeinerten Formulierung ist im Falle H , β konstant, daß die Konstante H für (5.1) und (5.2) durch die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes vorbestimmt ist (siehe Kapitel 3.3, Bemerkung zu (3.22), (3.23)), für die verallgemeinerte Formulierung jedoch noch keine derartige Relation erkennbar ist, und H somit noch frei gewählt werden kann. Dieser scheinbare Widerspruch in der physikalischen Intuition wird später aufgelöst, indem eine geeignet erscheinende Vorschrift zur Festlegung von H aufgestellt wird. Es wird sich zeigen müssen, inwiefern verallgemeinerte Lösungen physikalisch sinnvoll sind.

Wie bereits angedeutet, wurde die Theorie der im obigen Sinne verallgemeinerten Lösungen zuerst für die Behandlung der Minimalflächengleichung entwickelt (siehe z. B. [G2], [Mir2]). Eine Vielzahl dieser Resultate läßt sich aber auch auf das Kapillaritätsproblem anwenden (vgl. Kapitel 7 in [Fin1]).

Es ist klar, daß die verallgemeinerte Formulierung nicht nur für die bisher betrachteten H , β aufgestellt werden kann. Es genügt, daß $H \in L^1_{loc}(Q)$ (der Raum der lokal integrierbaren Funktionen) und $\beta \in L^1_{loc}(\delta Q)$ gilt, um den Begriff der verallgemeinerten Lösung sinnvoll definieren zu können. Wir werden einige der folgenden Sätze auch für solche allgemeinere Größen beweisen. Dazu betrachten wir noch die folgenden Strukturbedingungen, die für einige Sätze an H und β gestellt werden müssen:

$$(5.10) \quad H \in L^1_{loc}(Q), \quad \beta \in L^1_{loc}(\delta Q)$$

$$(5.11) \quad H = H(x, t) \text{ nichtfallend bezüglich } t \text{ für fast alle } x \in \Omega$$

$$(5.12) \quad \beta = \beta(x, t) \text{ nichtfallend bezüglich } t \text{ für fast alle } x \in \partial\Omega$$

$$(5.13) \quad H \text{ ist lokal wesentlich beschränkt auf } Q \cup \delta Q$$

$$(5.14) \quad |\beta| \leq 1 \text{ fast überall auf } \delta Q.$$

Im folgenden soll versucht werden, verallgemeinerte Lösungen für Gebiete mit Spitzen zu konstruieren.

5.2. Existenz verallgemeinerter Lösungen

Es soll zunächst noch gezeigt werden, daß die unterschiedlichen Minimierungsbedingungen für \mathcal{F} in der Literatur (man vergleiche die Definitionen in [Fin1], [G1], [Ta]) (für beschränkte Gebiete) äquivalent sind. Des weiteren wird eine neue Formulierung aufgestellt, die sich als sehr nützlich erweisen wird.

Sei das Funktional $\mathcal{F}_{[a,b]}$ ($[a, b]$ ein Intervall mit $b > a$) so definiert, daß die Integrale in (5.7) über die Mengen $Q_{[a,b]} = \Omega \times [a, b]$ bzw. $\delta Q_{[a,b]} = \partial\Omega \times [a, b]$ erstreckt werden, so folgt:

Lemma 5.1 (Äquivalenz verschiedener Definitionen): *Für H, β gelte (5.10). Die Bedingung*

$$(5.15) \quad \mathcal{F}_T[U] \leq \mathcal{F}_T[S]$$

für alle Caccioppolimengen S , die außerhalb von Q_T mit U übereinstimmen und alle $T > 0$ ist äquivalent zu der Bedingung

$$(5.16) \quad \mathcal{F}_{[a,b]}[U] \leq \mathcal{F}_{[a,b]}[S]$$

für alle Caccioppolimengen S , die außerhalb von $Q_{[a,b]}$ mit U übereinstimmen und alle Intervalle $[a, b]$ mit $b > a$ und äquivalent zu den Definitionen von GIUSTI ([G1]) und TAM ([Ta]).

Beweis: Zunächst seien noch einmal die Definitionen zusammengestellt. Der Subgraph U einer verallgemeinerten Lösung minimiert das Funktional \mathcal{F} genau dann, wenn Formulierung A:

$$(5.17) \quad \mathcal{F}_T[U] \leq \mathcal{F}_T[S]$$

für alle Caccioppolimengen S , die außerhalb von Q_T mit U übereinstimmen und alle $T > 0$.

Formulierung B:

$$(5.18) \quad \mathcal{F}_{[a,b]}[U] \leq \mathcal{F}_{[a,b]}[S]$$

für alle Caccioppolimengen S , die außerhalb von $Q_{[a,b]}$ mit U übereinstimmen und alle Intervalle $[a, b]$ mit $b > a$.

Formulierung C ([G1], S. 300):

$$(5.19) \quad \mathcal{F}_T[U] \leq \mathcal{F}_T[U \cup S] \quad (U \text{ ist Superlösung in } Q_T)$$

$$(5.20) \quad \mathcal{F}_T[U] \leq \mathcal{F}_T[U \setminus S] \quad (U \text{ ist Sublösung in } Q_T)$$

für alle Caccioppolimengen $S \subseteq Q_T$ und alle $T > 0$.

Formulierung D ([Ta], S. 855):

mit der Definition

$$\mathcal{F}_K[U] = \int_{Q \cap K} |D\varphi_U| + 2 \int_{Q \cap K} H\varphi_U dxdt \Leftrightarrow \int_{\delta Q \cap K} \beta\varphi_U ds$$

gilt

$$(5.21) \quad \mathcal{F}_K[U] \leq \mathcal{F}_K[S]$$

für alle kompakten Mengen $K \subset \mathbb{R}^n$ und alle Caccioppolimengen S , die mit U außerhalb von K übereinstimmen.

Es sei noch angemerkt, daß die Formel (5.9) Zerlegungen der Form

$$(5.22) \quad \int_V |D\varphi_U| = \int_A |D\varphi_U| + \int_B |D\varphi_U|$$

A, B zwei disjunkte, beschränkte Borelmengen mit $A \cup B = V$ ermöglicht, dies entspricht gerade der Maßeigenschaft von $\int |D\varphi_U|$.

Wir kommen nun zum Beweis der Äquivalenzen.

$A \Leftrightarrow B$:

Die Richtung „ \Leftarrow “ ist trivial. Für die andere Implikation wählt man zu jedem Intervall $[a, b]$ die Zahl T so groß, daß $[a, b] \subset [\Leftarrow T, T]$ und setzt $S = (U \setminus Q_{[a,b]}) \cup S_0$, wobei S_0 eine beliebige Caccioppolimenge aus $Q_{[a,b]}$ ist. Aus der Anwendung der Formel (5.22) folgt die Formulierung B.

Bemerkung: Die Vereinigung, Komplemente und damit auch die Durchschnitte und Differenzen zweier Caccioppolimengen ist wieder eine solche (vgl. [G2]).

$A \Leftrightarrow C$:

Die Richtung „ \Rightarrow “ ist klar. Sei S eine Caccioppolimenge, die außerhalb von Q_T mit U übereinstimmt und gelte Formulierung C, so folgt

$$(5.23) \quad \mathcal{F}_T[U] \leq \mathcal{F}_T[U \cup S]$$

$$(5.24) \quad \mathcal{F}_T[U] \leq \mathcal{F}_T[U \cap S].$$

Mit Hilfe der Coarea-Formel für BV -Funktionen ([EG], S. 185) soll gezeigt werden, daß

$$(5.25) \quad \int_{Q_T} |D\varphi_{U \cup S}| + \int_{Q_T} |D\varphi_{U \cap S}| \leq \int_{Q_T} |D\varphi_U| + \int_{Q_T} |D\varphi_S|.$$

Seien A, B zwei Caccioppolimengen, so gilt:

$$\varphi_A + \varphi_B = \varphi_{A \cup B} + \varphi_{A \cap B}.$$

Für eine offene, beschränkte Menge V folgt mittels Coarea-Formel:

$$(5.26) \quad \begin{aligned} \int_V |D(\varphi_A + \varphi_B)| &= \int_0^1 \int_V |D\varphi_{\{x \in V : \varphi_A(x) + \varphi_B(x) > 0\}}| dt \\ &\quad + \int_1^2 \int_V |D\varphi_{\{x \in V : \varphi_A(x) + \varphi_B(x) > 1\}}| dt \\ &= \int_V |D\varphi_{A \cup B}| + \int_V |D\varphi_{A \cap B}|. \end{aligned}$$

Aus der Supremumdefinition von $\int_V |Df|$ folgt sofort

$$(5.27) \quad \int_V |D(\varphi_A + \varphi_B)| \leq \int_V |D\varphi_A| + \int_V |D\varphi_B|.$$

Die Ungleichung (5.25) folgt nun aus (5.26) und (5.27), wenn man $A = U$, $B = S$, $V = \Omega \times (\Leftrightarrow T \Leftrightarrow \varepsilon, T + \varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) setzt und berücksichtigt, daß $U = S$ auf $\Omega \times ((\Leftrightarrow T \Leftrightarrow \varepsilon, \Leftrightarrow T) \cup (T, T + \varepsilon))$. Mit dieser Ungleichung und der Linearität der Spurabbildung ([EG], S. 177) folgt nun aus der Addition der Ungleichungen (5.23) und (5.24)

$$(5.28) \quad 2\mathcal{F}_T[U] \leq \mathcal{F}_T[U] + \mathcal{F}_T[S],$$

also die Behauptung.

$A \Leftrightarrow D$:

Die Richtung „ \Leftarrow “ ist trivial, da Ω als beschränkt vorausgesetzt wurde. Sei $\mathcal{K} \subset \subset \mathbb{R}^n$. Es kann T so groß gewählt werden, daß $Q_T \supset \mathcal{K} \cap Q$. Es wird $S = (U \setminus \mathcal{K}) \cup S_0$ gesetzt, wobei $S_0 \subseteq \mathcal{K} \cap Q_T$ eine beliebige Caccioppolimenge sei, so gilt unter Annahme der Formulierung A:

$$\mathcal{F}_T[U] \leq \mathcal{F}_T[S].$$

Die Beziehung (5.22) liefert hieraus wieder die Behauptung. \square

Aus diesem Lemma kann geschlußfolgert werden:

Lemma 5.2 (Nichteindeutigkeit für $H = H(x)$, $\beta = \beta(x)$): *Seien H und β nicht explizit von t abhängig und gelte (5.10), so ist eine verallgemeinerte Lösung (falls diese existiert) höchstens bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.*

Beweis: Sei u eine verallgemeinerte Lösung, so folgt aus Lemma 5.1:

$$\mathcal{F}_{[a,b]}[U] \leq \mathcal{F}_{[a,b]}[S]$$

für alle Caccioppolimengen S , die außerhalb von $Q_{[a,b]}$ mit U übereinstimmen und alle Intervalle $[a, b]$ mit $b > a$. Sei $\tilde{u} = u + C$ ($C \in \mathbb{R}$) und bezeichne \tilde{U} den Subgraphen von \tilde{u} , so folgt hieraus durch Koordinatentransformation

$$\mathcal{F}_{[a+C, b+C]}[\tilde{U}] \leq \mathcal{F}_{[a+C, b+C]}[\tilde{S}]$$

für alle Caccioppolimengen \tilde{S} , die außerhalb von $Q_{[a+C, b+C]}$ mit \tilde{U} übereinstimmen und alle Intervalle $[a + C, b + C]$ mit $b > a$.

Die spezielle Wahl $a = \Leftrightarrow T \Leftrightarrow C$, $b = T \Leftrightarrow C$ mit $T > 0$ liefert die Behauptung. \square

Das folgende Lemma wird zum Beweis der Existenz verallgemeinerter Lösungen benötigt:

Lemma 5.3 (Konvergenzlemma): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand (C^3 genügt), die glatten Komponenten des Randes seien von beschränkter Krümmung, seien H_j und β_j zwei Folgen, deren Glieder die Strukturbedingungen (5.10), (5.13) und (5.14) erfüllen und die gegen H bzw. β gleichmäßig konvergieren, minimieren die Subgraphen U_j die Funktionale

$$(5.29) \quad \mathcal{F}_T^j(A) = \int_{Q_T} |D\varphi_A| + 2 \int_{Q_T} H_j \varphi_A \, dxdt \Leftrightarrow \int_{\delta Q_T} \beta_j \varphi_A \, d\mathcal{H}_2,$$

gelte des weiteren für eine Caccioppolimenge U , daß $U_j \rightarrow U$ in Q_T bezüglich der L^1 -Konvergenz der charakteristischen Funktionen sowie

$$(5.30) \quad \int_{\tilde{\partial} Q_T} |\varphi_{U_j} \Leftrightarrow \varphi_U| \, d\mathcal{H}_2 \rightarrow 0, \quad \tilde{\partial} Q_T = \partial Q_T \setminus \delta Q_T,$$

$$(5.31) \quad \int_{\tilde{\partial} Q_T} |D\varphi_{U_j}| = 0 \quad \forall j \geq j_0 \in \mathbb{N},$$

$$(5.32) \quad \int_{\tilde{\partial} Q_T} |D\varphi_U| = 0,$$

so minimiert U das Funktional \mathcal{F}_T in Q_T .

Die Beziehung (5.30) ist im Sinne der (äußeren) Spur, das ist die Spur von $|\varphi_{U_j \setminus Q_T} \Leftrightarrow \varphi_{U \setminus Q_T}|$ auf $\tilde{\partial} Q_T$ zu verstehen (siehe [G2], Kapitel 2 zur Definition und Eigenschaften von äußerer und innerer Spur einer BV-Funktion auf Hyperflächen).

In [G1], S. 304 ist eine allgemeinere Version dieses Satzes ohne die Bedingungen (5.31), (5.32) angegeben. Der dortige Beweis ist jedoch nicht ganz vollständig. Das Problem besteht darin, daß man bei der vorliegenden Konvergenz nicht schlußfolgern kann, daß auch das Randintegral über φ_{U_j} gegen das Randintegral über φ_U konvergiert, bzw. daß das

Maß $\int |D\varphi_U|$ zwar auf offenen Mengen unterhalbstetig ist bezüglich des Grenzübergangs $\varphi_{U_j} \rightarrow \varphi_U$ in L^1 (z. B. [G2], S. 7) aber im allgemeinen nicht auf den halbgeschlossenen Mengen Q_T . Das Lemma 5.3 soll deshalb im Zusammenhang mit dem Beweis des nächsten Satzes bewiesen werden (siehe nächstes Kapitel, 4. Schritt). Der Satz wird hier zwar nur für den Fall $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ gezeigt, aber die im Beweis angegebene Methode läßt sich auch auf den in [G1] benötigten Fall $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ übertragen, wenn Ω ein beschränktes Gebiet mit C^2 -Rand ist (wie in [G1] vorausgesetzt). Man verwendet dann eine zu Lemma 5.4 im Beweis zu Satz 5.2 analoge Version im \mathbb{R}^n , welche sich für Gebiete mit glattem Rand analog zum Beweis von Lemma 1.1 in [G1], S. 301 zeigen läßt. Dies sichert die Gültigkeit der Resultate in [G1], denn es stellt sich heraus, daß die zusätzlichen Bedingungen (5.31), (5.32) keine wesentlichen Einschränkungen darstellen. Sie sind für fast alle T erfüllt (siehe nächstes Kapitel, 3. Schritt), und dies genügt für die weitere Argumentation in [G1] (siehe [G1], S. 305).

Der nächste Satz sichert die Existenz von verallgemeinerten Lösungen:

Satz 5.2 (Existenz verallgemeinerter Lösungen): *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand (C^3 genügt), die glatten Komponenten des Randes seien von beschränkter Krümmung, die Funktionen H , β erfüllen die Bedingungen (5.10) bis (5.14), so existiert eine verallgemeinerte Lösung von (5.1), (5.2).*

Der Beweis zu Lemma 5.3 und Satz 5.2 soll in einem separaten Kapitel geführt werden.

5.3. Beweis zu Lemma 5.3 und Satz 5.2

Es wird das Programm von GIUSTI aus [G1] für Gebiete mit glattem Rand auf Gebiete mit stückweise glattem Rand erweitert. Es lassen sich analoge Resultate aufstellen, die die Lösungsexistenz für obige Gebiete aus der bereits bewiesenen Lösungsexistenz für Gebiete mit glattem Rand folgern lassen. Im Gegensatz zu [G1] wird hier jedoch anstelle des Funktionals \mathcal{E} direkt mit den Funktionalen \mathcal{F}_T gearbeitet.

Die Voraussetzung an die Krümmung wird benötigt, um ein Resultat von GILBARG und TRUDINGER ([GT]) anwenden zu können.

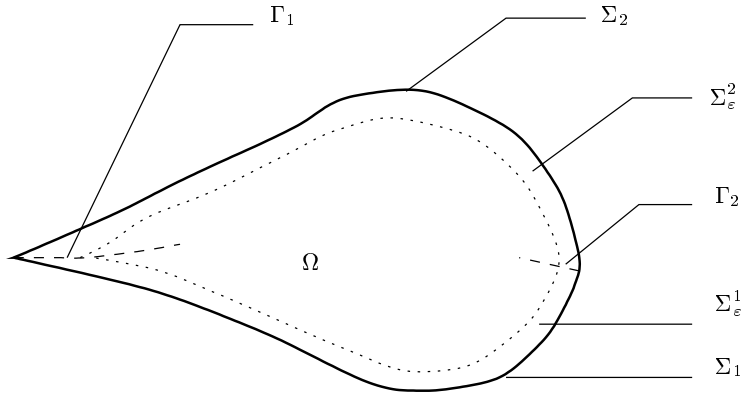
Das Beweisverfahren ist speziell für Gebiete Ω aus \mathbb{R}^2 konstruiert und läßt sich nicht ohne weiteres auf einen höherdimensionalen Fall ausweiten.

Der Beweis erfolgt in vier Schritten, zunächst unter Voraussetzung von Lemma 5.3. Im 4. Schritt wird dann Lemma 5.3 bewiesen.

1. Schritt: (Nachweis der Unterhalbstetigkeit der Funktionale \mathcal{F}_T bezüglich L^1 -Konvergenz der charakteristischen Funktionen)

Es soll zunächst ein zu Lemma 1.1. in [G1], S. 301 analoges Resultat bewiesen werden.

Der Rand von Ω läßt sich aufgrund der Voraussetzung zerlegen $\partial\Omega = (\bigcup_l \Sigma_l) \cup (\bigcup_l \{x_l\})$ ($l = 1, \dots, n$), wobei die Σ_l disjunkte, glatte (C^3) zusammenhängende Komponenten von $\partial\Omega$ bezeichnen und die Punkte x_l ($l < n$) gerade die durch die Bögen Σ_l und Σ_{l+1} , x_n die durch die Bögen Σ_n und Σ_1 gebildete(n) Ecke(n) bzw. Spitze(n) bezeichnen. Es kann angenommen werden, daß $n > 1$ gilt, andernfalls kann man als zweite „Ecke“ einen beliebigen anderen Randpunkt hinzunehmen (siehe Skizze 2).



Skizze 2

Wir nehmen zunächst an, daß die Öffnungswinkel aller Ecken (Spitzen) x_l kleiner oder gleich π sind, bzw. daß x_l ein Punkt aus einer C^3 -Randkomponente ist (s. o.).

Nach Lemma 2.3 in [Mie3], S. 234 existiert für jeden Punkt x_l in einer gewissen Umgebung eine Kurve $\gamma_l \subset \Omega$ mit

$$\begin{aligned} \text{dist}(x, \Sigma_l) &= \text{dist}(x, \Sigma_{l+1}) & \forall x \in \gamma_l \quad l < n \\ \text{dist}(x, \Sigma_n) &= \text{dist}(x, \Sigma_1) & \forall x \in \gamma_n. \end{aligned}$$

Wählt man x_l als Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems, so besagt dieses Lemma auch, daß sich γ_l lokal als C^2 -Funktion darstellen läßt. Die Argumentation im Beweis zu Lemma 2.3 in [Mie3] funktioniert für alle Ecken mit Öffnungswinkel kleiner als π sowie für Spitzen. Es ist klar, daß auch im Falle daß x_l ein Punkt aus einer C^3 -Randkomponente ist, bzw. der Öffnungswinkel der Ecke gleich π ist, eine solche Kurve existiert. Die Kurve γ_l ist dann ein Stück der inneren Normale, wovon man sich aufgrund der Voraussetzung an die Krümmung leicht überzeugen kann (vgl. [GT], S. 355).

Wir betrachten nun die Menge

$$(5.33) \quad \Sigma_\epsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \leq \epsilon\}$$

für ein hinreichend kleines $\epsilon > 0$. Es kann ϵ_0 so klein gewählt werden, daß für alle $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ die Kurven γ_l eine Zerlegung von Σ_ϵ in disjunkte Teilgebiete Σ_ϵ^l (siehe Skizze 2) bewirken, wobei für diese Teilgebiete gilt

$$(5.34) \quad \Sigma_\epsilon^l = \{x \in \Sigma_\epsilon : \text{dist}(x, \partial\Omega) = \text{dist}(x, \Sigma_l), \text{dist}(x, \Sigma_k) > \text{dist}(x, \Sigma_l) \forall k \neq l\},$$

und mit dieser Wahl folgt

$$(5.35) \quad \Sigma_\varepsilon = \left(\bigcup_{l=1}^n \Sigma_\varepsilon^l \right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^n, l \cap \Sigma_\varepsilon \right)$$

$$(5.36) \quad \partial \Sigma_\varepsilon^l \subset \partial \Sigma_\varepsilon \cup \left(\bigcup_{i=1}^n, i \cap \Sigma_\varepsilon \right).$$

Man vergleiche mit den Ausführungen in [Mie3].

Bemerkung: Man beachte, daß aufgrund der Bedingung an die Öffnungswinkel für alle Punkte $x \in \Sigma_\varepsilon \setminus \{, l\}$ und alle Eckpunkte x_l gilt $\text{dist}(x, \partial\Omega) < \text{dist}(x, x_l)$. Des weiteren können sich die Randkurvenstücke Σ_l, Σ_k ($k \neq l$) außer in den Ecken $\{x_l\}$ nicht beliebig nahe kommen, da es sonst aufgrund der Kompaktheit des Randes einen Punkt $x \in \partial\Omega \setminus \{x_l\}$ gäbe, mit $x \in \bar{\Sigma}_l \cap \bar{\Sigma}_k$ im Widerspruch zur Konstruktion, denn x ist in keiner der Mengen $\{\Sigma_l\}$ bzw. $\{x_l\}$ enthalten.

Aufgrund der Eigenschaft (5.34), der Voraussetzung an die Krümmung und Lemma 14.16 in ([GT], S. 355) sowie der Bemerkung zu (5.35), (5.36) kann ε_0 auch noch so klein gewählt werden, daß die Abstandsfunktion $\text{dist}(x, \partial\Omega)$ zweimal stetig differenzierbar ist auf den Mengen Σ_ε^l für alle $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, denn Σ_l läßt sich als Teil des Randes eines C^2 -Gebietes auffassen.

Mit diesen Eigenschaften läßt sich folgendes Lemma beweisen (man vergleiche mit Lemma 1.1 in [G1], S. 301):

Lemma 5.4 (Abschätzung des Randterms): Sei Ω ein Gebiet das die Voraussetzungen von Satz 5.2 erfüllt, sei $w \in BV_{loc}(Q)$ eine auf Q_T wesentlich beschränkte Funktion, so gilt

$$(5.37) \quad \int_{\delta Q_T} |w| d\mathcal{H}_2 \leq \int_{\Sigma_\varepsilon \times (-T, T)} |Dw| + c_1 \int_{\Sigma_\varepsilon \times [-T, T]} |w| dxdt + \left(\text{ess sup}_{x \in Q_T} |w| \right) R(\varepsilon),$$

wobei c_1 eine nur von Q_T und ε abhängige Konstante ist, und für die ebenfalls von w unabhängige Größe R gilt $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} R(\varepsilon) = 0$.

Beweis: Die Beschränktheit von w garantiert die Existenz einer L^1 -Spur auf δQ_T (siehe Bemerkungen zur Spurdefinition im Anhang Kapitel A.7). Sei zunächst $w \geq 0$ angenommen und sei η eine C^∞ -Funktion mit $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta = 1$ auf δQ_T und $\eta = 0$ in $Q_T \setminus (\Sigma_\varepsilon \times [\Leftrightarrow T, T])$. Mit der obigen Wahl von ε folgt, daß für die Abstandsfunktion $d(x) = \text{dist}(x, \delta Q_T)$ mit der Definition $\Sigma_{\varepsilon, T}^l = \Sigma_\varepsilon^l \times (\Leftrightarrow T, T)$ gilt $d \in C^2(\Sigma_{\varepsilon, T}^l)$ für alle l . Es folgt

$$(5.38) \quad \sum_{l=1}^n \int_{\Sigma_{\varepsilon, T}^l} w \text{div}(\eta Dd) dxdt = \Leftrightarrow \sum_{l=1}^n \int_{\Sigma_{\varepsilon, T}^l} \eta Dd Dw + \sum_{l=1}^n \int_{\partial \Sigma_{\varepsilon, T}^l} w \eta \nu \circ Dd d\mathcal{H}_2.$$

Aufgrund der globalen Lipschitzstetigkeit von d mit Lipschitzkonstante 1 (z. B. [GT], S. 354), der Beschränktheit der Funktionen w und η sowie der Regularität der Flächenstücke $\Sigma_l \times [\Leftrightarrow T, T]$ folgt für den Randterm:

$$(5.39) \quad \begin{aligned} \sum_{l=1}^n \int_{\partial \Sigma_{\varepsilon, T}^l} w \eta \nu \circ Dd d\mathcal{H}_2 &\leq \sum_{l=1}^n \int_{\Sigma_l \times [-T, T]} w \eta \nu \circ Dd d\mathcal{H}_2 + \left(\operatorname{ess\,sup}_{x \in Q_T} |w| \right) R(\varepsilon) \\ &\leq \Leftrightarrow \int_{\delta Q_T} w d\mathcal{H}_2 + \left(\operatorname{ess\,sup}_{x \in Q_T} |w| \right) R(\varepsilon), \end{aligned}$$

wobei für die letzte Ungleichung noch verwendet wurde, daß $\nu \circ Dd = \Leftrightarrow 1$ auf $\Sigma_l \times (\Leftrightarrow T, T)$ und $\eta = 1$ auf δQ_T .

Des weiteren folgt wegen $|Dd| \leq 1$:

$$(5.40) \quad \begin{aligned} \Leftrightarrow \sum_{l=1}^n \int_{\Sigma_{\varepsilon, T}^l} \eta Dd Dw &\leq \sum_{l=1}^n \int_{\Sigma_{\varepsilon, T}^l} |Dw| \\ &\leq \int_{\Sigma_{\varepsilon} \times (-T, T)} |Dw| \end{aligned}$$

sowie

$$(5.41) \quad \Leftrightarrow \sum_{l=1}^n \int_{\Sigma_{\varepsilon, T}^l} w \operatorname{div}(\eta Dd) dx dt \leq c_1(\varepsilon) \int_{\Sigma_{\varepsilon} \times [-T, T]} w dx dt$$

mit $c_1(\varepsilon) = \sup_l \sup_{\Sigma_{\varepsilon, T}^l} |\operatorname{div}(\eta Dd)| < \infty$ ([GT], Lemma 14.17, S. 355, ε_0 hinreichend klein $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$). Diese Größe ist offenbar nur von ε und Ω abhängig (η wurde fest und nur in Abhängigkeit von ε und Ω gewählt). Aus der Gleichung (5.38) und den Ungleichungen (5.39) bis (5.41) folgt die Behauptung (5.37) für den Fall $w \geq 0$.

Der allgemeine Fall folgt aus der Ungleichung (vgl. [G1], S. 301):

$$(5.42) \quad \int_{\Sigma_{\varepsilon} \times (-T, T)} |D|w|| \leq \int_{\Sigma_{\varepsilon} \times (-T, T)} |Dw|.$$

Diese Ungleichung folgt sofort aus der Coarea-Formel und unter Verwendung der Ungleichung $\int |D\varphi_{A \cup B}| \leq \int |D\varphi_A| + \int |D\varphi_B|$. \square

Mit Hilfe dieses Lemmas kann nun die Unterhalbstetigkeit der Funktionale \mathcal{F}_T bewiesen werden.

Lemma 5.5 (Unterhalbstetigkeit von \mathcal{F}_T Version 1): Sei $U_j \subseteq Q_T$ eine Folge von Caccioppolimengen und gelte $\varphi_{U_j} \rightarrow \varphi_U$ in $L^1(Q_T)$ für eine Caccioppolimenge $U \subseteq Q_T$, so folgt:

$$(5.43) \quad \mathcal{F}_T(U) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}_T(U_j).$$

Beweis: Aus der Definition der Funktionale \mathcal{F}_T und den Strukturbedingungen (5.13) und (5.14) folgt zunächst (C ist nachfolgend eine positive Konstante):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_T(U) \Leftrightarrow \mathcal{F}_T(U_j) &\leq \int_{Q_T} |D\varphi_U| \Leftrightarrow \int_{Q_T} |D\varphi_{U_j}| + C \int_{Q_T} |\varphi_U \Leftrightarrow \varphi_{U_j}| \, dxdt \\ &\quad + \int_{\delta Q_T} |\varphi_U \Leftrightarrow \varphi_{U_j}| \, d\mathcal{H}_2. \end{aligned}$$

Die Anwendung von Lemma 5.4 für die Funktion $w = \varphi_U \Leftrightarrow \varphi_{U_j}$ ermöglicht folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_T(U) \Leftrightarrow \mathcal{F}_T(U_j) &\leq \int_{Q_T} |D\varphi_U| \Leftrightarrow \int_{Q_T} |D\varphi_{U_j}| + C \int_{Q_T} |\varphi_U \Leftrightarrow \varphi_{U_j}| \, dxdt \\ &\quad + \int_{\Sigma_\varepsilon \times [-T, T]} |D\varphi_U| + \int_{\Sigma_\varepsilon \times [-T, T]} |D\varphi_{U_j}| \\ &\quad + c_1 \int_{\Sigma_\varepsilon \times [-T, T]} |\varphi_U \Leftrightarrow \varphi_{U_j}| \, dxdt + R(\varepsilon) \\ &\leq \int_{Q_{T,\varepsilon}} |D\varphi_U| \Leftrightarrow \int_{Q_{T,\varepsilon}} |D\varphi_{U_j}| + C \int_{Q_T} |\varphi_U \Leftrightarrow \varphi_{U_j}| \, dxdt \\ &\quad + c_1 \int_{\Sigma_\varepsilon \times [-T, T]} |\varphi_U \Leftrightarrow \varphi_{U_j}| \, dxdt + 2 \int_{\Sigma_\varepsilon \times [-T, T]} |D\varphi_U| \\ &\quad + R(\varepsilon), \end{aligned}$$

mit der Bezeichnung $Q_{T,\varepsilon} = Q_T \setminus (\Sigma_\varepsilon \times [-T, T])$.

Berücksichtigt man die Unterhalbstetigkeit der Maße $\int |D\varphi_U|$ (z. B. [G2], S. 7), so folgt hieraus mittels Grenzübergang $j \rightarrow \infty$:

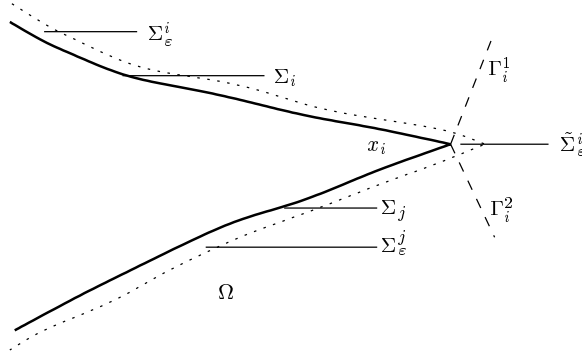
$$(5.44) \quad \mathcal{F}_T(U) \Leftrightarrow \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}_T(U_j) \leq 2 \int_{\Sigma_\varepsilon \times [-T, T]} |D\varphi_U| + R(\varepsilon).$$

Bemerkung: Die Unterhalbstetigkeit der Maße $\int |D\varphi_U|$ folgt zunächst nur über offenen Mengen, während Q_T nicht offen ist. Wenn man jedoch beachtet, daß für eine Menge $U \subseteq Q_T$ gilt $\int_{Q_T} |D\varphi_U| = \int_{\Omega \times (-T-\varepsilon_1, T+\varepsilon_1)} |D\varphi_U|$ für alle Zahlen $\varepsilon_1 > 0$, so ist klar, daß die Unterhalbstetigkeitseigenschaft auch auf die Gebiete Q_T anwendbar ist. Es wird hierfür jedoch die spezielle Bedingung $U_j, U \subseteq Q_T$ benötigt, wodurch Lemma 5.5 nicht auf Subgraphen angewendet werden kann. Man vergleiche mit der späteren Version dieses Lemmas (Lemma 5.6 im 4. Schritt des Beweises)!

Aus (5.44) folgt die Unterhalbstetigkeit von \mathcal{F}_T , wenn man ε gegen 0 gehen läßt und die Stetigkeit des Maßes $\int |D\varphi_U|$ von oben verwendet. \square

Wir kommen nun zu dem Fall, daß Ω auch Ecken mit Öffnungswinkel größer π enthält. Für diese Ecken gibt es keine Kurven γ_i der obigen Form, die eine entsprechende Zerlegung von Σ_ε gewährleisten. Es ist eine andere Zerlegung von Σ_ε erforderlich. Es bezeichne $\{x_{l^*}\} \subseteq \{x_l\}$ die Teilmenge der Ecken mit Öffnungswinkel größer π und L^* die entsprechende Indexteilmenge aus $\{1, \dots, n\} = L$. Es bezeichnen γ_i^1 und γ_i^2 ($i \in L^*$) die inneren

Normalen zu den die jeweilige Ecke bildenden Randkurvenstücke Σ_i bzw. Σ_j ($i \in L^*$, $j = i + 1$ falls $i < n$, $j = 1$ sonst). Diese Kurven bewirken aufgrund der Voraussetzung an die Krümmung zusammen mit den Kurven γ_i ($i \in L \setminus L^*$) für ein hinreichend kleines ε_0 mit der Wahl $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ eine Zerlegung von Σ_ε in Teilmengen (siehe Skizze 3)



Skizze 3

$$(5.45) \quad \Sigma_\varepsilon^i = \left\{ x \in \Sigma_\varepsilon : \text{dist}(x, \partial\Omega) = \text{dist}(x, \Sigma_i), \text{dist}(x, \Sigma_k) > \text{dist}(x, \Sigma_i), \right. \\ \left. \text{dist}(x, x_l) > \text{dist}(x, \Sigma_i) \forall k, l \in L, k \neq i \right\}$$

$$\tilde{\Sigma}_\varepsilon^j = \left\{ x \in \Sigma_\varepsilon : \text{dist}(x, \partial\Omega) = \text{dist}(x, x_j), \text{dist}(x, x_j) < \text{dist}(x, x_k) \right. \\ \left. \forall k \in L \setminus \{j\} \right\}$$

($i \in L, j \in L^*$), mit den Eigenschaften

$$\Sigma_\varepsilon = \left(\bigcup_{i \in L} \Sigma_\varepsilon^i \right) \cup \left(\bigcup_{i \in L \setminus L^*} \gamma_i \cap \Sigma_\varepsilon \right) \cup \left(\bigcup_{i \in L^*} \tilde{\Sigma}_\varepsilon^i \right)$$

$$\partial \Sigma_\varepsilon^l \subset \partial \Sigma_\varepsilon \cup \left(\bigcup_{i \in L \setminus L^*} \gamma_i \cap \Sigma_\varepsilon \right) \cup \left(\bigcup_{i \in L^*} (\gamma_i^1 \cup \gamma_i^2) \cap \Sigma_\varepsilon \right) \quad \forall l \in L.$$

Bemerkung: Von der letzten Beziehung überzeugt man sich schnell, indem man die Randstücke Σ_i ($i \in L^*$) jeweils lokal als Funktionen in einem kartesischen Koordinatensystem darstellt, dessen Ursprung x_i ist und dessen y -Achse in innere Normalenrichtung zeigt. Für diese Funktion f gilt dann $f'(0) = 0$. Daraus folgt, daß für Punkte $P_0(x_0, y_0) \in \Omega$ mit $x_0 > 0, y_0 \Leftrightarrow f(x_0)$ hinreichend klein der Abstand nicht im Ursprung angenommen wird, während für $x_0 = 0$ der Abstand im Ursprung angenommen wird (aufgrund der Voraussetzung an die Krümmung). Die Normalenstücke $\gamma_i^j \cap \Sigma_\varepsilon$ ($j = 1, 2$) stellen also tatsächlich Teile der Ränder der Mengen Σ_ε^l ($l \in L$) dar.

Aufgrund der Eigenschaft (5.45) kann nun mit der gleichen Begründung wie im obigen Falle ε_0 auch noch so klein gewählt werden, daß die Abstandsfunktion $\text{dist}(x, \partial\Omega)$ zweimal stetig differenzierbar ist auf den Mengen Σ_ε^i für alle $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ und $i \in L$.

Auf den Mengen $\tilde{\Sigma}_\varepsilon^i$ ($i \in L^*$) hat die Abstandsfunktion keine beschränkten zweiten Ableitungen. Eine Integration über diese Mengen liefert allerdings keine Beiträge zum Rand der Menge Ω , da $\partial\tilde{\Sigma}_\varepsilon^i \cap \partial\Omega = \{x_i\}$. Wir ersetzen nun in den bisherigen Beweisen (Lemma 5.4 und 5.5) außer für die Definition der Funktion η im Beweis zu Lemma 5.4 die Menge Σ_ε durch die Menge Σ_ε^* mit der Definition

$$(5.46) \quad \Sigma_\varepsilon^* = \Sigma_\varepsilon \setminus \left(\bigcup_{i \in L^*} \tilde{\Sigma}_\varepsilon^i \right).$$

Völlig analog erhält man dann die Abschätzung (5.37) mit der obigen Ersetzung (siehe Beweis zu Lemma 5.4) und damit die benötigte Unterhalbstetigkeit der Funktionale \mathcal{F}_T (Lemma 5.5) auch für diesen Fall.

2. Schritt: (Konstruktion einer Minimalfolge auf Q_T)

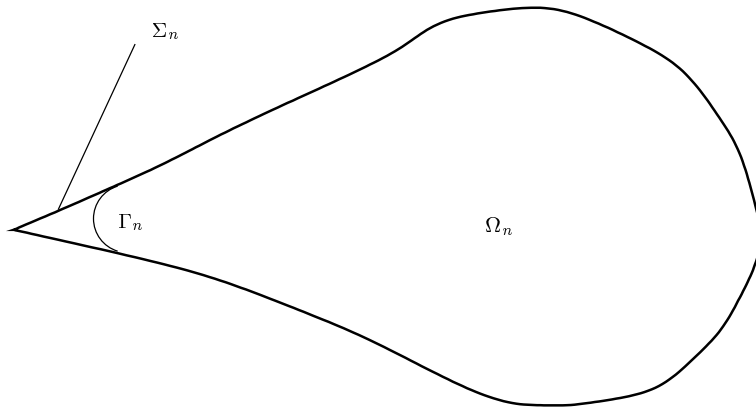
Wir approximieren Ω durch glatte Gebiete wie folgt. Sei Ω_n ($n \in \mathbb{N}$) eine Folge von C^2 -Gebieten derart, daß

$$\Omega_i \subset \Omega_j \quad \forall i, j \quad i < j$$

$$(5.47) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_1(\Sigma_n) = 0$$

$$(5.48) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_1(\cdot, n) = 0$$

$$(5.49) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_2(\Omega_n) = \mathcal{H}_2(\Omega)$$



Skizze 4

mit den Bezeichnungen $\Sigma_n = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_n$ und $\cdot, n = \partial\Omega_n \cap \Omega$ (siehe Skizze 4).

Bemerkung: Hierbei handelt es sich um eine gängige Methode um bestimmte Resultate auf Gebiete mit allgemeineren Rändern zu übertragen. Man sehe z. B. [GT] oder [S]. Aufgrund der Voraussetzung, daß der Rand von Ω stückweise C^3 ist, kann man leicht eine solche Glättung durch Polynome mit geeigneten Anschlußbedingungen explizit konstruieren.

ieren. Vermutlich genügt aber auch, daß die zweiten Ableitungen des Randes wenigstens lipschitzstetig sind. Satz 5.2 wäre dann auch für solche Gebiete gültig.

Es werde $\beta = 0$ auf Ω_n gesetzt. Es folgt aus [G1], S. 303, daß auf den Gebieten Ω_n eine Lösung u_i^n von \mathcal{E} existiert in den Mengen

$$(5.50) \quad V_i(\Omega_n) = \{v \in BV(\Omega_n) : |v| \leq i\} \quad i \in \mathbb{N}^+,$$

deren Subgraphen U_i^n die Funktionale \mathcal{F}_T^n mit der Definition

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_T^n[A] &= \int_{Q_T^n = \Omega_n \times [-T, T]} |D\varphi_A| + \int_{Q_T^n} 2H\varphi_A \, dxdt \\ &\Leftrightarrow \int_{\delta Q_T^n = \partial\Omega_n \times [-T, T]} \beta\varphi_A \, dsdt \end{aligned}$$

für alle $0 < T \leq i$ minimieren.

Bemerkung: Minimiert eine Menge das Funktional \mathcal{F}_i^n , so minimiert die Menge auch alle Funktionale \mathcal{F}_j^n mit $0 < j \leq i$. Dies folgt sofort aus der Definition 5.6 der Minimierung.

Wir wählen für ein festes i aus der Menge der Lösungen u_i^n eine Folge $\{u_i^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus. Es soll gezeigt werden, daß aus dieser Folge eine Teilfolge ausgewählt werden kann, die lokal (das heißt auf Q_i) gegen eine Funktion u_i aus $V_i(\Omega)$ konvergiert, wobei deren Subgraph U_i das Funktional \mathcal{F}_i minimiert, also eine lokale Lösung auf Ω darstellt.

Es gilt zunächst:

$$(5.51) \quad \int_{Q_i} \varphi_{U_i^n \cap Q_i^n} \leq \mathcal{H}_3(Q_i) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

das heißt, die Funktionen $\varphi_{U_i^n \cap Q_i^n}$ sind gleichmäßig beschränkt in $L^1(Q_i)$. Da die Mengen U_i^n auf Ω_n Lösungen sind für \mathcal{F}_i^n folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_i^n[U_i^n] &\leq \mathcal{F}_i^n[U_i^n \setminus Q_i^n] \\ \Rightarrow \int_{Q_i^n} |D\varphi_{U_i^n}| &\leq |\Omega_n| + 2 \int_{Q_i^n} |H| \, dxdt + \int_{\delta Q_i^n} |\beta| \, dsdt \\ \Rightarrow \int_{Q_i^n} |D\varphi_{U_i^n \cap Q_i^n}| &\leq 2|\Omega_n| + 2 \int_{Q_i^n} |H| \, dxdt + \int_{\delta Q_i^n} |\beta| \, dsdt, \end{aligned}$$

wobei die letzten beiden Ungleichungen verwenden, daß $u_i^n \in V_i(\Omega_n)$.

Hieraus kann unter Verwendung der Konstruktion der Folge Ω_i und der Wahl von β geschlußfolgert werden, daß:

$$(5.52) \quad \int_{Q_i^n} |D\varphi_{U_i^n \cap Q_i^n}| \leq 2|\Omega| + 2 \int_{Q_i} |H| \, dxdt + \int_{\delta Q_i} |\beta| \, dsdt.$$

Sei O eine offene Kugel mit $O \supset Q_i$, so folgt aus (5.52):

$$(5.53) \quad \int_O |D\varphi_{U_i^n \cap Q_i^n}| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

wobei die Konstante C unabhängig von n bzw. U_i^n gewählt werden kann. Die Ausdrücke $\int |D\varphi_{U_i^n \cap Q_i^n}|$ sind deshalb gleichmäßig beschränkt in O . Damit sind wegen (5.51) die Funktionen $\varphi_{U_i^n \cap Q_i^n}$ gleichmäßig in BV -Norm beschränkt auf O . Aus dem Kompaktheitstheorem für BV -Funktionen ([EG], S. 176) folgt damit, daß aus $\{\varphi_{U_i^n \cap Q_i^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge ausgewählt werden kann, die in $L^1(O)$ gegen eine BV -Funktion f konvergiert. Es ist klar, daß f wieder eine charakteristische Funktion des Schnittes eines Subgraphen U_i einer Funktion $u_i \in V_i$ mit Q_i ist. Wir setzen $f = \varphi_{U_i \cap Q_i}$ und bezeichnen obige Teilfolge wieder mit $\{\varphi_{U_i^n \cap Q_i^n}\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Bemerkung: Obige Einbettung in eine offene Kugel ist erforderlich aufgrund der Voraussetzungen des Kompaktheitstheorems für BV -Funktionen.

Es bleibt noch zu zeigen, daß U_i das Funktional \mathcal{F}_i minimiert.

Wir wählen $\varepsilon > 0$ hinreichend klein (oder obiges O hinreichend groß), so daß $Q_{i+\varepsilon} \subset O$. Es ist klar, daß $\varphi_{U_i^n \cap Q_{i+\varepsilon}^n}$ gegen $\varphi_{U_i \cap Q_{i+\varepsilon}}$ konvergieren (in $L_1(Q_{i+\varepsilon})$). Die Anwendung der Unterhalbstetigkeit für die Funktionale $\mathcal{F}_{i+\varepsilon}$ (Lemma 5.5) liefert:

$$(5.54) \quad \mathcal{F}_{i+\varepsilon}[U_i \cap Q_{i+\varepsilon}] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{i+\varepsilon}[W_i^n \cap Q_{i+\varepsilon}^n],$$

wobei W_i^n die Subgraphen der Funktionen

$$w_i^n = \begin{cases} u_i^n & : x \in \Omega_n \\ \Leftrightarrow \infty & : x \in \Omega \setminus \Omega_n \end{cases}$$

bezeichnen. Wegen

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{i+\varepsilon}[U_i \cap Q_{i+\varepsilon}] &= \mathcal{F}_i[U_i] + |\Omega| + 2 \int_{\Omega \times [-i-\varepsilon, -i]} H \, dxdt \Leftrightarrow \int_{\partial\Omega \times [-i-\varepsilon, i]} \beta \, dsdt \\ \mathcal{F}_{i+\varepsilon}[W_i^n \cap Q_{i+\varepsilon}^n] &= \mathcal{F}_i[W_i^n] + |\Omega_n| + \varepsilon|_n| + 2 \int_{\Omega_n \times [-i-\varepsilon, -i]} H \, dxdt \\ &\Leftrightarrow \int_{\partial\Omega_n \times [-i-\varepsilon, i]} \beta \, dsdt \end{aligned}$$

folgt aufgrund der Eigenschaften (5.47) bis (5.49) und Ungleichung (5.54):

$$(5.55) \quad \mathcal{F}_i[U_i] \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_i[W_i^n].$$

Sei S eine beliebige Caccioppolimenge, die mit U außerhalb von Q_i übereinstimmt, so gilt aufgrund der inneren Regularität des Maßes $\int |D\varphi_S|$ sowie der Eigenschaften (5.47) bis (5.49):

$$(5.56) \quad \mathcal{F}_i[S] = \mathcal{F}_i^n[S \cap Q^n] + R_1(n) \quad Q^n = \Omega_n \times \mathbb{R}$$

mit $\lim_{n \rightarrow \infty} R_1(n) = 0$. Die Menge $S \cap Q^n$ ist dabei eine beliebige Caccioppolimenge, die aufgrund der Konstruktion mit U_i^n außerhalb von Q_i^n übereinstimmt.

Aufgrund der Minimierungseigenschaften der Funktionen u_i^n folgt:

$$(5.57) \quad \mathcal{F}_i^n[W_i^n] \leq \mathcal{F}_i^n[S \cap Q^n].$$

Des weiteren gilt unter Verwendung der Definition von W_i^n :

$$(5.58) \quad \mathcal{F}_i^n[W_i^n] = \mathcal{F}_i[W_i^n] + R_2(n)$$

mit $\lim_{n \rightarrow \infty} R_2(n) = 0$.

Aus (5.55) bis (5.58) folgt:

$$(5.59) \quad \mathcal{F}_i[U_i] \leq \mathcal{F}_i[S],$$

das heißt, U_i minimiert \mathcal{F}_i und stellt somit eine Lösung in Q_i dar.

3. Schritt: (Konstruktion der verallgemeinerten Lösung)

Sei $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ eine Folge obiger Lösungen in Q_i mit zugehörigen Subgraphen U_i , so gilt aufgrund der Tatsache, daß die Minimierer für \mathcal{F}_T auch Minimierer für $\mathcal{F}_{T'}$ mit $0 < T' \leq T$ sind wie oben:

$$(5.60) \quad \int_{Q_T} |D\varphi_{U_i}| \leq C \quad \forall i > T$$

mit der nur von T abhängigen Konstante C . Mit der gleichen Argumentation wie oben läßt sich deshalb aus $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ eine Teilfolge auswählen, die auf Q_T gegen den Subgraphen einer (verallgemeinerten) Funktion konvergiert. Wir wählen für $T = 1$ eine solche Teilfolge aus und aus dieser für $T = 2$ eine entsprechende Teilfolge usw. Die aus dieser Folge von Teilfolgen ausgewählte Diagonalfolge, die wir erneut mit $\{u_i\}_{i \in \mathbb{N}^+}$ bezeichnen wollen, hat die Eigenschaft, daß sie auf jeder Menge Q_T gegen den Schnitt eines Subgraphen U mit Q_T konvergiert. Die zugehörige Funktion u ist eine verallgemeinerte Funktion, die die Werte $\pm\infty$ annehmen kann. Deren Subgraph ist eine Borelmenge als Vereinigung der Borelmengen $U \cap Q_T$ und eine Caccioppolimenge wegen (5.60) und der Unterhalbstetigkeit des Maßes $\int |D\varphi_U|$.

Es bleibt zu zeigen, daß u eine Lösung für \mathcal{F} ist. Dies folgt aber aus Lemma 5.3. Da φ_U, φ_{U_i} ($i \in \mathbb{N}^+$) in $L^1_{loc}(Q)$ sind, folgt aus dem Satz von Lebesgue (z. B. [G2], S. 30), daß für fast alle $x \in Q$ die innere und äußere Spur dieser Funktionen auf $\tilde{\partial}Q_T$ mit $x \in \tilde{\partial}Q_T$ (das ist die Spur von $\varphi_{U_{(i)} \cap Q_T}$ bzw. $\varphi_{U_{(i)} \setminus Q_T}$ auf $\tilde{\partial}Q_T$ - siehe [G2], S. 34 für diese Definitionen) in diesem Punkt übereinstimmen mit $\varphi_U(x)$ bzw. $\varphi_{U_i}(x)$. Aus Proposition 2.8 ([G2], S. 36) folgt dann sogleich, daß (5.31), (5.32) für fast alle $T > 0$ erfüllt sind. Da weiterhin $\varphi_{U_i} \rightarrow \varphi_U$ in $L^1_{loc}(Q)$ gilt, folgt, daß $\int_{\tilde{\partial}Q_T} |\varphi_{U_i} \Leftrightarrow \varphi_U| d\mathcal{H}_2 \rightarrow 0$ im herkömmlichen Sinne für fast alle T und mit dem oben gesagten auch (5.30) für fast alle T . Die Voraussetzungen des Lemmas 5.3 sind also für fast alle $T > 0$ erfüllt. Dies garantiert, die Lösungseigenschaft

von u , wenn man in Lemma 5.3 $H_j = H$ und $\beta_j = \beta$ fest wählt und die Bemerkung zu den Funktionalen \mathcal{F}_T (2. Schritt) hinzuzieht.

4. Schritt: (Beweis von Lemma 5.3)

Es wird noch ein technisches Lemma benötigt. Man vergleiche mit Lemma 5.5!

Lemma 5.6 (Unterhalbstetigkeit von \mathcal{F}_T Version 2): Sei $U_j \subseteq Q$ eine Folge von Caccioppolimengen und gelte $\varphi_{U_j} \rightarrow \varphi_U$ in $L^1_{loc}(Q)$ für eine Caccioppolimenge $U \subseteq Q$, gelte (5.31) und (5.32), so folgt:

$$\mathcal{F}_T(U) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \mathcal{F}_T(U_j).$$

Beweis: Der Beweis erfolgt völlig analog zum Beweis von Lemma 5.5. Aufgrund der Bedingungen (5.31) und (5.32) hat man Relationen der Form $\int_{Q_T} |D\varphi_U| = \int_{\Omega \times (-T, T)} |D\varphi_U|$ usw., die es ermöglichen, die Unterhalbstetigkeit der Maße $\int |D\varphi_U|$ auf offenen Mengen anzuwenden. \square

Mit Hilfe dieses Satzes kann nun Lemma 5.3 bewiesen werden, wir beginnen zunächst genauso wie im Beweis zu Proposition 1.2 in [G1], S. 304.

Sei $V \subseteq Q$, $V = U$ außerhalb von Q_T und sei

$$V_j = \begin{cases} V & \text{in } Q_T \\ U_j & \text{außerhalb von } Q_T \end{cases},$$

dann ist V_j offenbar eine zulässige Vergleichsmenge zu U_j , und man hat aufgrund der Minimierungseigenschaft von U_j :

$$(5.61) \quad \mathcal{F}_T^j(U_j) \leq \mathcal{F}_T^j(V_j).$$

Sei $Q_T^o = \Omega \times (\Leftrightarrow T, T)$ so folgt aufgrund der Übereinstimmung von V_j und V in Q_T sowie Proposition 2.8 in [G2], S. 36:

$$\begin{aligned} \int_{Q_T} |D\varphi_{V_j}| &= \int_{Q_T^o} |D\varphi_{V_j}| + \int_{\partial Q_T} |D\varphi_{V_j}| \\ &= \int_{Q_T} |D\varphi_V| + \int_{\partial Q_T} |D\varphi_{V_j}| \Leftrightarrow \int_{\partial Q_T} |D\varphi_V| \\ &\leq \int_{Q_T} |D\varphi_V| + \int_{\partial Q_T} |\varphi_{U_j} \Leftrightarrow \varphi_U| d\mathcal{H}_2 \\ (5.62) \quad \mathcal{F}_T^j(V_j) &\leq \mathcal{F}_T^j(V) + \int_{\partial Q_T} |\varphi_{U_j} \Leftrightarrow \varphi_U| d\mathcal{H}_2. \end{aligned}$$

Aus (5.61) und (5.62) erhält man:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_T(U_j) + 2 \int_{Q_T} (H_j \Leftrightarrow H) \varphi_{U_j} + \int_{\partial Q_T} (\beta \Leftrightarrow \beta_j) \varphi_{U_j} \\ \leq \mathcal{F}_T^j(V) + \int_{\partial Q_T} |\varphi_{U_j} \Leftrightarrow \varphi_U| d\mathcal{H}_2. \end{aligned}$$

Mittels Übergang zum unteren Limes $j \rightarrow \infty$ folgt hieraus unter Verwendung von Lemma 5.6, der gleichmäßigen Konvergenz der H_j , β_j und der Voraussetzung (5.30)

$$\mathcal{F}_T(U) \leq \mathcal{F}_T(V),$$

also die Behauptung, denn V ist eine beliebige zulässige Vergleichsmenge zu U . \square

6. Verallgemeinerte Lösungen für das Problem in der Schwerelosigkeit

6.1. Charakterisierung der singulären Mengen

Im folgenden sei Ω stets ein Gebiet, daß die Voraussetzungen von Satz 5.2 erfüllt, und es seien H und β wieder konstant ($\beta = \cos \gamma$, $H > 0$). Für γ gelte (5.3).

Wir kommen nun zu einer Charakterisierung der Mengen auf denen eine verallgemeinerte Lösung plus oder minus unendlich sein kann. Die Geometrie dieser Mengen wird sich als stark eingeschränkt erweisen.

Sei $u(x)$ eine verallgemeinerte Lösung so werden die Mengen P und N eingeführt durch

$$\begin{aligned} P &= \{x \in \Omega \quad : \quad u(x) = +\infty\} \\ N &= \{x \in \Omega \quad : \quad u(x) = \Leftrightarrow\infty\}. \end{aligned}$$

Es kann $u(x)$ auf einer Menge vom Maß 0 so abgeändert werden (vgl. [G2], S. 42), daß für alle Kreise $B_r(x)$ mit Mittelpunkt x und Radius r gilt

$$(6.1) \quad \mathcal{H}_2(P \cap B_r(x)) \neq 0 \quad \forall x \in P$$

$$(6.2) \quad \mathcal{H}_2(N \cap B_r(x)) \neq 0 \quad \forall x \in N.$$

Dies sei im folgenden stets erfüllt.

Satz 6.1 (Minimierungseigenschaft der singulären Mengen): *Die Menge P minimiert das Funktional*

$$(6.3) \quad \Phi[\Omega^*; H, \gamma, \Omega] = |\cdot, \Omega^*| \Leftrightarrow |\Sigma_{\Omega^*}| \cos \gamma + 2H|\Omega^*|,$$

wobei $\Omega^* \subseteq \Omega$ Caccioppolimengen sind. Die Menge N minimiert das Funktional

$$(6.4) \quad \Psi[\Omega^*; H, \gamma, \Omega] = |\cdot, \Omega^*| + |\Sigma_{\Omega^*}| \cos \gamma \Leftrightarrow 2H|\Omega^*|.$$

Es gelten die Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \cdot, \Omega^* &= \partial_* \Omega^* \cap \Omega \\ \Sigma_{\Omega^*} &= \partial_* \Omega^* \cap \partial \Omega \\ |\cdot, \Omega^*| &= \mathcal{H}_1(\cdot, \Omega^*) \\ |\Sigma_{\Omega^*}| &= \mathcal{H}_1(\Sigma_{\Omega^*}) \\ |\Omega^*| &= \mathcal{H}_2(\Omega^*). \end{aligned}$$

Bemerkungen: Diese Definitionen sind stets sinnvoll, da Ω als beschränkt vorausgesetzt

wurde. Der Einfachheit wegen soll $\Phi[\Omega^*; H, \gamma, \Omega] = \Phi[\Omega^*]$ usw. gesetzt werden, wenn klar ist, auf welche Größen H, γ, Ω sich die entsprechende Aussage bezieht.

Eine analoge Version dieses Satzes für beschränkte Gebiete mit glattem Rand aus dem \mathbb{R}^n ist in [G1], S. 306 zu finden. Die Bedingung „glatte Rand“ ist dort notwendig. Man vergleiche mit den Ausführungen im Anschluß an Lemma 5.3!

Man beachte, daß ein Satz 6.1 entsprechendes Resultat in [Fin1], S. 196 sich auf globale Minimierer von \mathcal{F} bezieht (siehe Beweis der dortigen Lemmata 7.3 und 7.4). Verallgemeinerte Lösungen müssen jedoch nicht unbedingt globale Minimierer von \mathcal{F} sein. Siehe dazu auch die Ausführungen in Kapitel 5.1.

Beweis: Der Beweis soll mittels Lemma 5.3 geführt werden.

Sei u eine verallgemeinerte Lösung von (5.1), (5.2), so sind die Funktionen $u \Leftrightarrow j$ ($j \in \mathbb{N}$) ebenfalls Lösungen (Lemma 5.2), das heißt, die Subgraphen

$$U_j = \{(x, t) \in Q : t < u(x) \Leftrightarrow j\}$$

minimieren \mathcal{F}_T für alle $T > 0$. Es gilt $U_j \rightarrow U = P \times \mathbb{R}$ in $L^1_{loc}(Q)$, des weiteren sind die Bedingungen (5.30) bis (5.32) für fast alle T erfüllt, mit der gleichen Begründung wie im Beweis zu Satz 5.2 (3. Schritt im Beweis zu Satz 5.2, Kapitel 5.3). Aus Lemma 5.3 folgt, indem man $H_j = H, \beta_j = \beta$ setzt, daß U ebenfalls ein Minimierer der Funktionale \mathcal{F}_T ist. Angenommen es gäbe nun eine Caccioppolimenge $A \subseteq \Omega$ mit $\Phi[A] < \Phi[P]$. Wir setzen $\Phi[P] \Leftrightarrow \Phi[A] = \varepsilon > 0$. Es wird T so groß gewählt, daß $\varepsilon T > |\Omega|$ gilt. Man betrachte die zulässige Vergleichsmenge $S = (A \times [\Leftrightarrow T, T]) \cup (U \setminus Q_T)$, so folgt wegen $\mathcal{F}_T[U] = \int_{-T}^T \Phi[P] = 2T\Phi[P]$ und unter Verwendung von Lemma 9.8 ([G2], S. 112):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_T[S] &\leq \int_{-T}^T \Phi[A] dt + 2|\Omega| = 2T\Phi[A] + 2|\Omega| \\ &\leq 2T(\Leftrightarrow\varepsilon + \Phi[P]) + 2|\Omega| \\ &\leq \mathcal{F}_T[U] + 2(|\Omega| \Leftrightarrow \varepsilon T) \\ &< \mathcal{F}_T[U] \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Minimierungseigenschaft von U . Das Resultat für N folgt analog, wenn man noch die folgende Eigenschaft verwendet: Minimiert die Menge M das Funktional Φ , so minimiert die Menge $\Omega \setminus M$ das Funktional Ψ . Dies folgt sofort durch Nachrechnen, wenn man in der Minimierungsbedingung $\Phi[M] \leq \Phi[A]$ für alle Caccioppolimengen $A \subseteq \Omega$ anstelle von M die Menge $\Omega \setminus (\Omega \setminus M)$ und anstelle von A die Menge $\Omega \setminus A$ einsetzt. Man erhält dann die Minimierungsbedingung $\Psi[\Omega \setminus M] \leq \Psi[A]$ für alle Caccioppolimengen $A \subseteq \Omega$. \square

Der im Beweis zu Satz 6.1 gezeigte Zusammenhang der Minimierer von Φ und Ψ motiviert die Bezeichnung von Ψ als das zu Φ adjungierte Funktional. Wir können uns deshalb im

folgenden auf die Betrachtung der Minimierer von Φ beschränken, für die Minimierer von Ψ gelten dann analoge Resultate.

Der Beweis von Satz 6.1 führt zu einem einfachen Beispiel für eine verallgemeinerte Lösung:

Lemma 6.1 (Beispiel für eine verallgemeinerte Lösung): *Sei M ein Minimierer von Φ , so ist die verallgemeinerte Funktion*

$$(6.5) \quad u(x) = \begin{cases} +\infty & : x \in M \\ \Leftrightarrow\infty & : x \in \Omega \setminus M \end{cases}$$

eine verallgemeinerte Lösung von (5.1), (5.2).

Beweis: Es bezeichne U den Subgraphen von u , $S = S_0 \cup (U \setminus Q_T)$ eine beliebige zulässige Vergleichsmenge zu U , das heißt, S_0 ist eine beliebige Caccioppolimenge in Q_T . Es ist zu zeigen, daß

$$(6.6) \quad \mathcal{F}_T[U] \leq \mathcal{F}_T[S].$$

Wir betrachten die Menge $\bar{S} = \bar{S}_0 \cup (U \setminus Q_T)$ mit $\bar{S}_0 = Q_T \setminus S_0$ und setzen

$$(6.7) \quad \bar{S}^t = \{x \in \Omega : (x, t) \in \bar{S}_0\}.$$

Aus dem Beweis zu Lemma 9.8 in [G2], S. 112 folgt, daß \bar{S}^t eine Caccioppolimenge in \mathbb{R}^2 ist für fast alle $t \in [\Leftrightarrow T, T]$.

Aufgrund der Voraussetzung, daß M ein Minimierer von Φ und damit $\Omega \setminus M$ ein Minimierer von Ψ ist, folgt

$$(6.8) \quad \Psi[\Omega \setminus M] \leq \Psi[\bar{S}^t] \quad \text{für fast alle } t \in [\Leftrightarrow T, T].$$

Es werde $Q_T^o = \Omega \times (\Leftrightarrow T, T)$, $\delta Q_T^o = \partial\Omega \times (\Leftrightarrow T, T)$ und $\bar{U} = (\Omega \setminus M) \times \mathbb{R}$ gesetzt. Man erhält aus der Integration der Gleichung (6.8) unter Verwendung von Lemma 9.8 ([G2], S. 112) und $\cos \gamma \geq 0$:

$$(6.9) \quad \begin{aligned} & \int_{Q_T^o} |D\varphi_{\bar{U}}| \Leftrightarrow 2H \int_{Q_T^o} \varphi_{\bar{U}} dxdt + \cos \gamma \int_{\delta Q_T^o} \varphi_{\bar{U}} dsdt \leq \int_{-T}^T \Psi[\bar{S}^t] dt \\ & \leq \int_{Q_T^o} |D\varphi_{\bar{S}_0}| \Leftrightarrow 2H \int_{Q_T^o} \varphi_{\bar{S}_0} dxdt + \cos \gamma \int_{\delta Q_T^o} \varphi_{\bar{S}_0} dsdt. \end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität der Spurabbildung gilt

$$(6.10) \quad \int_{\delta Q_T^o} \varphi_{\bar{U}} dsdt = |\delta Q_T| \Leftrightarrow \int_{\delta Q_T^o} \varphi_U dsdt$$

$$(6.11) \quad \int_{\delta Q_T^o} \varphi_{\bar{S}_0} dsdt = |\delta Q_T| \Leftrightarrow \int_{\delta Q_T^o} \varphi_{S_0} dsdt.$$

Des weiteren folgt aus der Definition des maßtheoretischen Randes sofort, daß der maßtheoretische Rand einer Menge gleich dem maßtheoretischen Rand ihrer Komplementärmenge ist und damit

$$(6.12) \quad \begin{aligned} \int_{Q_T^o} |D\varphi_{S_0}| &= \int_{Q_T^o} |D\varphi_{S_0}| \\ &= \int_{Q_T^o} |D\varphi_S|, \end{aligned}$$

sowie

$$(6.13) \quad \int_{Q_T^o} |D\varphi_{\bar{U}}| = \int_{Q_T^o} |D\varphi_U|.$$

Mit den Gleichungen (6.10) bis (6.13) folgt aus (6.9):

$$(6.14) \quad \begin{aligned} \int_{Q_T^o} |D\varphi_U| + 2H \int_{Q_T^o} \varphi_U dxdt &\Leftrightarrow \cos \gamma \int_{\delta Q_T^o} \varphi_U dsdt \leq \\ \int_{Q_T^o} |D\varphi_S| + 2H \int_{Q_T^o} \varphi_S dxdt &\Leftrightarrow \cos \gamma \int_{\delta Q_T^o} \varphi_S dsdt. \end{aligned}$$

Geht man nun wieder zu den halbgeschlossenen Mengen Q_T über, so gilt aufgrund der speziellen Gestalt von U :

$$(6.15) \quad \int_{Q_T^o} |D\varphi_U| = \int_{Q_T} |D\varphi_U|,$$

des weiteren

$$(6.16) \quad \int_{Q_T^o} |D\varphi_S| \leq \int_{Q_T} |D\varphi_S|.$$

Es folgt aus (6.14), (6.15) und (6.16) die Ungleichung (6.6), also die Behauptung. \square

Man vergleiche dieses Resultat mit einer entsprechenden verallgemeinerten Lösung für das Minimalflächenproblem (siehe [G2], S. 183). Dieses Beispiel zeigt auch eine Besonderheit der verallgemeinerten Lösungen. Existieren z. B. klassische Lösungen (für (5.1), (5.2)), so gilt $\Phi[A] > 0$ und $\Psi[A] > 0$ für alle $A \neq \emptyset, \Omega$ (vgl. [Fin1], S. 135 bzw. siehe Kapitel 3.3). Es gilt aber $\Phi[\emptyset] = \Phi[\Omega] = 0$ (desgleichen für Ψ), das heißt, die Mengen \emptyset und Ω sind Minimierer von Φ bzw. Ψ . Damit sind nicht nur die bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmten klassischen Lösung von (5.1), (5.2) verallgemeinerte Lösungen, sondern auch die zugehörigen „Grenzlösungen“ $u \equiv +\infty$ und $u \equiv -\infty$.

Es ist aus dem Beweis zu Lemma 3.2 ersichtlich, daß für Gebiete mit Spitze unabhängig von der speziellen Wahl von Ω stets folgt $P \neq \emptyset$, denn für Gebiete Ω mit Spitze existiert stets eine Teilmenge B mit $\Phi[B] < 0$. In Lemma 3.2 wurde gezeigt, daß für die dort ausgewählten Gebiete A (Umgebungen der Spitze) die Größen $| \cdot |_A$ und $|A|$ in höherer

Ordnung gegen 0 gehen als $|\Sigma_A|$, wenn $x_{1,0} \rightarrow 0$, dies impliziert die Existenz eines solchen B und war gerade die Bedingung für die Nichtexistenz klassischer Lösungen.

Aus Satz 6.1 können a priori interessante geometrische Eigenschaften der Menge P abgeleitet werden.

Sei die Menge M im folgenden ein Minimierer von Φ . Es werden wie üblich Mengen, die sich nur auf einer \mathcal{H}_2 -Nullmenge unterscheiden, identifiziert, deshalb kann angenommen werden, daß M eine offene Menge ist, die die Eigenschaft (6.1) erfüllt.

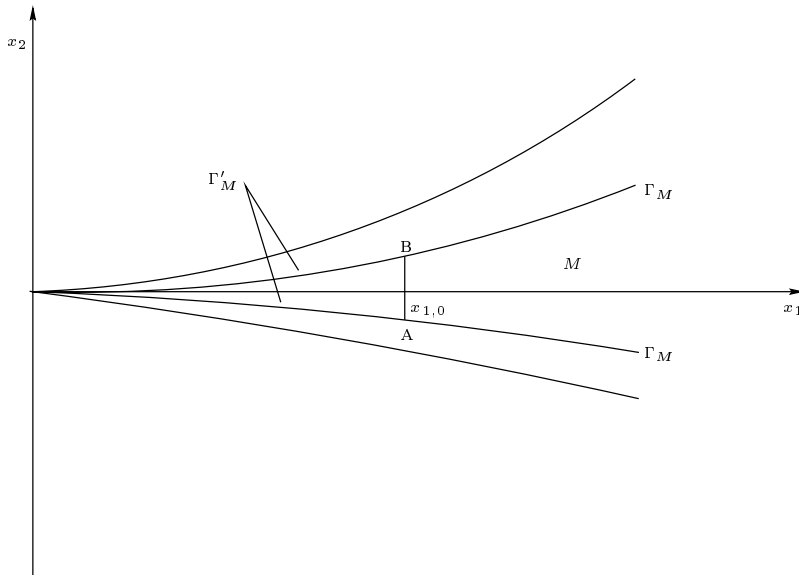
Nach einem Theorem von MASSARI ([Mas], S. 377) besteht die Menge $\Sigma_M = \partial M \cap \Omega$ aus analytischen Bögen, falls diese Menge nicht leer ist. Dieses Theorem wurde von MASSARI zwar nur für ein Funktional der Form $|\Sigma_{\Omega^*}| + 2H|\Omega^*|$ gezeigt, da aber nur lokale Betrachtungen auf Σ_{Ω^*} für den Beweis benötigt werden, bei denen der Term $|\Sigma_{\Omega^*}| \cos \gamma$ unverändert bleibt, ist dieses Resultat auch auf die Funktionale (6.3), (6.4) übertragbar. In [Fin1] Kapitel 6 sind weitere Eigenschaften von Σ_M zusammengefaßt:

Satz 6.2 (Eigenschaften der Minimierer von Φ vgl. [Fin1], Kapitel 6): *Die Menge Σ_M besteht aus Kreisbögen mit Radius $R = \frac{1}{2H}$, die Menge M liegt auf der der Richtung des Krümmungsvektors gegenüberliegenden Seite der Kreisbögen. Trifft ein Kreisbogen auf einen glatten Teil von $\partial\Omega$, so bildet er dort einen Winkel der Größe γ mit $\partial\Omega$. Falls $\gamma > 0$, so sind die Kreisbögen paarweise isoliert. Falls $\gamma = 0$, so können die Kreisbögen auf $\partial\Omega$ als Teile ein- und desselben Kreises ineinander übergehen.*

In [FN] Lemma 3.3 wird des weiteren gezeigt, daß Komponenten von Σ_M nicht in Ecken mit Öffnungswinkel $0 < 2\alpha < \pi$ enden können. Dieses Lemma läßt sich auch auf Spitzen verallgemeinern.

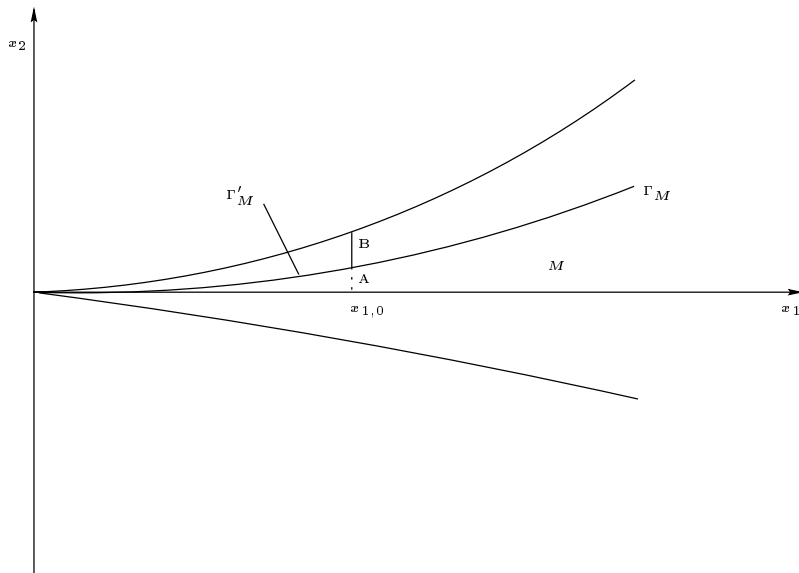
Lemma 6.2 (Weitere Eigenschaften der Minimierer von Φ): *Kein Bogen von Σ_M kann in einer Spitze enden.*

Beweis: Der Beweis erfolgt analog zum erwähnten Lemma 3.3 in [FN]. Aufgrund der Radiusbedingung von Satz 6.2 können höchstens zwei Bögen von Σ_M in ein- und derselben Spitze enden. Man untersucht zunächst den Fall, daß genau zwei Bögen von Σ_M in der Spitze enden (siehe Skizze 5). Man ersetze die Bogenstücke Σ'_M durch die Strecke \overline{AB} für ein hinreichend kleines $x_{1,0}$. Aus der Dreiecksungleichung folgt, daß $|\Sigma_M|$ durch diese Wahl verringert wird. $|M|$ wird ebenfalls verringert und $|\Sigma_M|$ bleibt unverändert. Durch diese Ersetzung wird folglich das Funktional Φ verringert, was im Widerspruch zur vorausgesetzten Minimalität von M steht.



Skizze 5

Betrachten wir nun den Fall, daß genau ein Bogen in der Spitze endet (Skizze 6). Man ersetze den Bogen Γ'_M durch die Strecke \overline{AB} für ein hinreichend kleines $x_{1,0}$. Aus dem Beweis zu Lemma 3.2 kann abgelesen werden, daß sich mit dieser Ersetzung $|\Sigma_M|$ in der Ordnung von $x_{1,0}$ verringert, $|\Sigma_M|$ in der Ordnung $x_{1,0}$ vergrößert und $|M|$ in der Ordnung $o(x_{1,0}^2)$ vergrößert. Es kann folglich $x_{1,0}$ so klein gewählt werden, daß durch diese Ersetzung das Funktional Φ verringert wird, im Widerspruch zur Minimalität von M . \square



Skizze 6

Aus dem Beweis von Lemma 3.2 und 6.2 ist ersichtlich, daß die Minimierer von Φ stets die Spitzen von Ω enthalten müssen. Denn hinreichend kleine Umgebungen der Spitze in

Ω liefern stets negative Beiträge zum Funktional Φ (Lemma 3.2) und kein Bogen von M kann in einer Spitze enden (Lemma 6.2).

Auch die nächste Eigenschaft von M findet später Verwendung:

Lemma 6.3 (Weitere Eigenschaften der Minimierer von Φ): Für $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ kann unter der Voraussetzung, daß Ω keine inneren Ecken (Ecken mit Öffnungswinkel größer π) enthält, $,_M$ keine vollständigen Kreise $B_R(x_0)$ als Teilmengen enthalten.

Beweis: Angenommen $,_M$ enthielte einen solchen Kreis. Dieser Kreis darf den Rand von Ω nicht berühren aufgrund der Winkelbedingung von Satz 6.2, Lemma 6.2 und der Voraussetzung. Er kann auch keinen weiteren Kreisbogen der Menge $,_M$ berühren aufgrund der Analytizität der Bögen von $,_M$. Folglich kann der Kreis um den Faktor $1 + \varepsilon$ (ε hinreichend klein) gestreckt werden und die oben genannten Eigenschaften weiter erfüllen. Man betrachte die durch diese Streckung erhaltene Menge M' im Vergleich mit M .

Es folgt:

$$\begin{aligned} |, M'| &= |, M| + 2\pi R\varepsilon \\ |\Sigma_{M'}| &= |\Sigma_M| \\ |M'| &= |M| \Leftrightarrow \pi R^2(2\varepsilon + \varepsilon^2). \end{aligned}$$

Wegen $R = \frac{1}{2H}$ folgt hieraus:

$$\Phi[M'] < \Phi[M]$$

im Widerspruch zur vorausgesetzten Minimalität von M . □

Die zuletzt genannten Resultate vereinfachen die Suche nach Minimierern für Φ bei gegebenem Ω erheblich und damit auch die Konstruktion spezieller verallgemeinerter Lösungen der Form (6.5). Dies soll im übernächsten Kapitel für ein Beispiel gezeigt werden.

Im nächsten Kapitel wird eine weitere Klasse spezieller verallgemeinerter Lösungen betrachtet, die von physikalischer Bedeutung sein könnten.

6.2. C-singuläre Lösungen

Es sei M ein Minimierer von Φ , es gelte $M \neq \Omega$. Einer Beobachtung in [FN] zufolge existieren auf der Menge $\Omega_0 = \Omega \setminus \bar{M}$ (\bar{M} im folgenden der Abschluß von M usw.) unter gewissen Voraussetzungen klassische Lösungen für das Problem

$$(6.17) \quad \operatorname{div} Tu = 2H \quad \text{in } \Omega_0$$

$$(6.18) \quad \nu \circ Tu = \cos \gamma \quad \text{auf glatten Komponenten von } \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega$$

$$(6.19) \quad \nu \circ Tu = 1 \quad \text{auf } \partial\Omega_0 \cap \Omega.$$

Diese Lösungen werden laut [FN] als *C-singuläre Lösungen* bezeichnet. Gleichung (6.19) ist dabei im Sinne von $\lim_{x \in \Omega_0 \rightarrow x_0 \in \partial\Omega_0 \cap \Omega} \nu(x_0) \circ Tu(x) = 1$ zu verstehen. Es folgt dann aus einem Theorem von FINN [Fin2], S. 561 sofort $\lim_{x \in \Omega_0 \rightarrow x_0 \in \partial\Omega_0 \cap \Omega} u(x) = +\infty$. Die Lösungen von (6.17) bis (6.19) sind, falls sie existieren, als Folgerung aus dem Vergleichsprinzip für diesen Gleichungstyp ([CF1], S. 192) bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Der nächste Satz stellt einen Zusammenhang zwischen den C-singulären Lösungen und den verallgemeinerten Lösungen von (5.1), (5.2) her.

Satz 6.3 (Eine weitere Klasse verallgemeinerter Lösungen): *Sei $M \neq \Omega$ ein Minimierer von Φ , existiere weiterhin eine C-singuläre Lösung u_0 auf $\Omega_0 = \Omega \setminus \bar{M}$, so ist die zusammengesetzte verallgemeinerte Funktion*

$$(6.20) \quad u = \begin{cases} u_0(x) & : x \in \Omega_0 \\ +\infty & : x \in \bar{M} \end{cases}$$

eine verallgemeinerte Lösung von (5.1), (5.2), und es gilt $P = \bar{M}$.

Beweis: Es sei $T > 0$ beliebig, fest, es werde gesetzt

$$\begin{aligned} Q^1 &= \Omega_0 \times \mathbb{R} & Q^2 &= M \times \mathbb{R} \\ Q_T^1 &= \Omega_0 \times [\Leftarrow T, T] & Q_T^2 &= M \times [\Leftarrow T, T] \\ \delta Q^1 &= \partial\Omega_0 \times \mathbb{R} & \delta Q^2 &= \partial M \times \mathbb{R} \\ \delta Q_T^1 &= \partial\Omega_0 \times [\Leftarrow T, T] & \delta Q_T^2 &= \partial M \times [\Leftarrow T, T] \\ \beta^1(x) &= \begin{cases} \cos \gamma & : x \in \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega \\ 1 & : x \in \cdot, M \end{cases} & \beta^2(x) &= \begin{cases} \cos \gamma & : x \in \partial M \cap \partial\Omega \\ \Leftarrow 1 & : x \in \cdot, M \end{cases} \\ \mathcal{F}^1[A] &= \int_{Q^1} |D\varphi_A| + 2 \int_{Q^1} H\varphi_A dxdt \Leftrightarrow \int_{\delta Q^1} \beta^1 \varphi_A dsdt \\ \mathcal{F}_T^1[A] &= \int_{Q_T^1} |D\varphi_A| + 2 \int_{Q_T^1} H\varphi_A dxdt \Leftrightarrow \int_{\delta Q_T^1} \beta^1 \varphi_A dsdt \\ \mathcal{F}^2[A] &= \int_{Q^2} |D\varphi_A| + 2 \int_{Q^2} H\varphi_A dxdt \Leftrightarrow \int_{\delta Q^2} \beta^2 \varphi_A dsdt \\ \mathcal{F}_T^2[A] &= \int_{Q_T^2} |D\varphi_A| + 2 \int_{Q_T^2} H\varphi_A dxdt \Leftrightarrow \int_{\delta Q_T^2} \beta^2 \varphi_A dsdt \end{aligned}$$

für eine Caccioppolimenge A aus Q^1 bzw. Q^2 .

Es bezeichne U den Subgraphen von u , und S sei eine beliebige zulässige Vergleichsmenge zu U bezüglich T . Wir setzen erneut

$$\begin{aligned} U^1 &= U \cap Q^1 & S^1 &= S \cap Q^1 \\ U^2 &= U \cap Q^2 & S^2 &= S \cap Q^2. \end{aligned}$$

Die Menge U^1 ist dann der Subgraph von u_0 und S^1 ist eine zulässige Vergleichsmenge zu

U^1 . Da u_0 eine klassische Lösung und damit auch eine verallgemeinerte Lösung ist (siehe Kapitel 5.1), minimiert U^1 das Funktional \mathcal{F}^1 , das heißt

$$(6.21) \quad \mathcal{F}_T^1[U^1] \leq \mathcal{F}_T^1[S^1].$$

Nach Lemma 6.1 ist U^2 eine Lösung von \mathcal{F} , S^2 ist eine zulässige Vergleichsmenge zu U^2 , deshalb gilt

$$(6.22) \quad \mathcal{F}_T[U^2] \leq \mathcal{F}_T[S^2].$$

Aufgrund der speziellen Gestalt von U^2 , S^2 als Teilmengen von Q^2 folgt mit der obigen Wahl des Funktionals \mathcal{F}^2

$$(6.23) \quad \mathcal{F}_T[U^2] = \mathcal{F}_T^2[U^2]$$

$$(6.24) \quad \mathcal{F}_T[S^2] = \mathcal{F}_T^2[S^2].$$

Aus (6.22) erhält man mit (6.23) und (6.24)

$$(6.25) \quad \mathcal{F}_T^2[U^2] \leq \mathcal{F}_T^2[S^2].$$

Es wird (6.21) und (6.25) addiert

$$(6.26) \quad \mathcal{F}_T^1[U^1] + \mathcal{F}_T^2[U^2] \leq \mathcal{F}_T^1[S^1] + \mathcal{F}_T^2[S^2].$$

Wegen $\lim_{x \in \Omega_0 \rightarrow x_0 \in \Gamma_M} u_0(x) = +\infty$ ([Fin2], S. 561) stimmt die innere Spur von φ_U auf $,_M \times [\Leftrightarrow T, T]$ mit der äußeren Spur überein, deshalb gilt

$$(6.27) \quad \mathcal{F}_T^1[U^1] + \mathcal{F}_T^2[U^2] = \mathcal{F}_T[U].$$

Aus Proposition 2.8 in [G2], S. 36 folgt für die Randintegrale über $,_M \times [\Leftrightarrow T, T]$ der Funktionale \mathcal{F}_T^1 , \mathcal{F}_T^2 bezüglich der Mengen S^1 bzw. S^2

$$(6.28) \quad \int_{\Gamma_M \times [-T, T]} (\varphi_{S^2} \Leftrightarrow \varphi_{S^1}) ds dt \leq \int_{\Gamma_M \times [-T, T]} |D\varphi_S|$$

und damit

$$(6.29) \quad \mathcal{F}_T^1[S^1] + \mathcal{F}_T^2[S^2] \leq \mathcal{F}_T[S].$$

Aus (6.26), (6.27) und (6.29) erhält man

$$(6.30) \quad \mathcal{F}_T[U] \leq \mathcal{F}_T[S],$$

also gerade die Behauptung. □

Bemerkung: Dieser Satz verdeutlicht die Motivation der Begriffsbildung „C-singuläre Lösung“, denn auf dem Komplement des Definitionsbereiches dieser Lösung ist die zugehörige verallgemeinerte Lösung unendlich, also singulär. In [FN] wurde bereits auf die

Funktionen (6.20) hingewiesen. Es wurde dort aber noch nicht gezeigt, daß dies tatsächlich verallgemeinerte Lösungen im Sinne von MIRANDA sind.

Es ist jedoch nicht zu erwarten, daß für alle H und für alle Minimierer M eine C-singuläre Lösung auf Ω_0 existiert. Integriert man (6.17) über Ω_0 , so folgt mittels Gaußschen Integralsatzes:

$$(6.31) \quad \Psi[\Omega_0; H, \gamma, \Omega] = 0.$$

Hieraus folgt sofort

$$H > 0.$$

Da M ein Minimierer von Φ ist und damit Ω_0 ein Minimierer von Ψ ist (siehe Beweis zu Satz 6.1) folgt ebenfalls aus (6.31) durch Vergleich von Ω_0 und Ω :

$$H \leq H_0 = \frac{|\partial\Omega| \cos \gamma}{2|\Omega|},$$

also

$$(6.32) \quad 0 < H \leq H_0.$$

Im Falle der Existenz klassischer Lösungen für (5.1), (5.2) ist $M = \emptyset$ ein Minimierer von Φ als Folgerung aus dem notwendigen Existenzkriterium (siehe Beweis zu Lemma 3.2 oder [Fin1], S. 135). Die Gleichung (6.31) entspricht dann $H = H_0$. Dies entspricht gerade der Festlegung von H aus (5.1), (5.2) mittels Gaußschen Integralsatzes (vgl. Bemerkung zu (3.22), (3.23) in Kapitel 3.3).

Da durch ein festes H die Minimierer von Φ bereits festgelegt sein könnten, muß die Bedingung (6.31) nicht notwendig erfüllt sein. Aus [FN] folgt jedoch, daß unter der Voraussetzung $\Phi[A; H_0, \gamma, \Omega] \leq 0$ für eine Caccioppolimenge $A \neq \emptyset, \Omega$ (diese Bedingung ist insbesondere für alle Gebiete mit Spitzen erfüllt (Beweis zu Lemma 3.2)) ein H existiert, für das eine C-singuläre Lösung existiert auf dem Komplement eines Minimierers von $\Phi[\Omega^*; H, \gamma, \Omega]$ und damit auch (6.31) erfüllt (vgl. [FN], Theorem 3.1, S. 14). Dieses H muß nicht eindeutig bestimmt sein. Die Argumentation in [FN] bezieht sich auf Gebiete ohne Spitzen und $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$. Unter Verwendung der Resultate Lemma 6.2 und Satz 5.2, der in Verbindung mit Satz 6.1 die Existenz von Minimierern für die Funktionale Φ auch für Gebiete mit Spitzen garantiert, ergibt eine Analyse des Beweises von Theorem 3.1 in [FN], daß dieser Satz auch für die hier betrachteten Gebiete gilt und damit die Existenz eines solchen H auch für diese Gebiete sichert.

Das nächste Lemma zeigt eine Besonderheit der Lösungen (6.20).

Lemma 6.4 (Besonderheit der Lösungen (6.20)): *Sei $u(x)$ eine verallgemeinerte Lösung von (5.1), (5.2) der Form (6.20) für ein festes H , so ist die Funktion $v(x) \equiv +\infty$*

auf Ω ebenfalls eine verallgemeinerte Lösung von (5.1), (5.2) für dieses H .

Beweis: Die Menge M ist ein Minimierer von $\Phi[\Omega^*; H, \gamma, \Omega]$, also

$$(6.33) \quad \Phi[M] \leq \Phi[A]$$

für alle Caccioppolimengen $A \subseteq \Omega$.

Es werde die Gleichung (6.31) von (6.33) subtrahiert, man erhält

$$\Phi[\Omega] \leq \Phi[A]$$

für alle Caccioppolimengen $A \subseteq \Omega$. Damit ist Ω auch ein Minimierer von $\Phi[\Omega^*; H, \gamma, \Omega]$.

Die Aussage dieses Lemmas folgt dann aus Lemma 6.1. \square

Es soll nun eine Strategie entwickelt werden, mit der man für gegebene Gebiete Ω verallgemeinerte Lösungen der Form (6.20) suchen kann, auch für Konstellationen, für die die Existenz eines H mit der obigen Eigenschaft noch nicht gesichert ist (z. B. für Fälle mit $\gamma = 0$).

Strategie zur Bestimmung von verallgemeinerten Lösungen der Form (6.20):

1. Für die Werte H mit (6.32) werden mit Hilfe der geometrischen Eigenschaften (Satz 6.2, Lemma 6.2, 6.3) die Minimierer Ω_0 von $\Psi[\Omega^*; H, \gamma, \Omega]$ bestimmt.
2. Es wird festgestellt, ob die Gleichung (6.31) für das entsprechende H und den oder die bestimmten Minimierer Ω_0 erfüllt ist ($M = \Omega \setminus \bar{\Omega}_0$). Nur diese H, Ω_0 werden weiter untersucht.
3. Es wird geprüft, ob auf Ω_0 tatsächlich eine klassische Lösung existiert.
4. Es wird die zusammengesetzte Funktion (6.20) gebildet.

Der 3. Schritt kann entfallen, wenn die Existenz einer C-singulären Lösung bereits gesichert ist (s. o.) und im zweiten Schritt nur noch ein möglicher Kandidat (H, M) übrig bleibt. Ansonsten könnte 3. am besten durch die Anwendung des folgenden Satzes auf das Problem (6.17) bis (6.19) gezeigt werden.

Satz 6.4 (Existenz-Nichtexistenz-Prinzip [FN] oder [Fin1], S. 206): *Es sei $\beta \in L^1(\partial\Omega)$, $|\beta| \leq 1$, Ω ein Lipschitzgebiet und $H = \frac{1}{2|\Omega|} \int_{\partial\Omega} \beta ds$, dann existiert eine klassische Lösung von (5.1), (5.2) genau dann, wenn das Funktional*

$$(6.34) \quad \tilde{\Phi}[\Omega^*] = |\cdot, \Omega^*| \Leftrightarrow \int_{\partial\Omega} \varphi_{\Omega^*} \cdot \beta ds + 2H|\Omega^*|$$

positiv ist für jede Caccioppolimenge $\Omega^* \subset \Omega$ mit $\Omega^* \neq \emptyset, \Omega$.

Man beachte, daß in unserem Fall Ω_0 als Minimierer von Ψ a priori nur lipschitz sein kann.

Die Bedingung an H entspricht in unserem Fall gerade (6.31). Es ist klar, daß $\tilde{\Phi}$ eine Verallgemeinerung des Funktionals Φ darstellt. Das zum Beweis von Lemma 3.2 verwendete notwendige Existenzkriterium von FINN erweist sich also sogar als hinreichend.

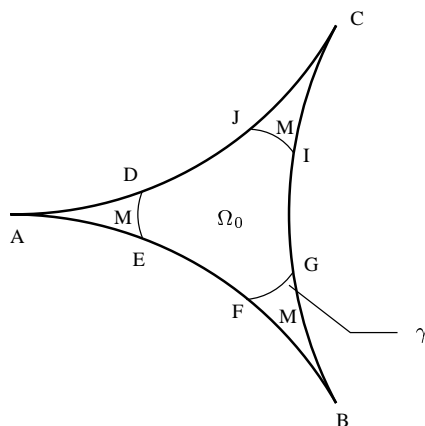
Es stellt sich die Frage, inwiefern verallgemeinerte Lösungen physikalisch sinnvoll sind. Diese Frage wird durch die Ausführungen in z. B. [LLDR] und [Z] positiv beantwortet. Dort wurden Lösungen der Form (6.20) tatsächlich beobachtet bzw. auf solche Beobachtungen hingewiesen. Es kann folgende Hypothese aufgestellt werden.

Hypothese: *Die Lösungen der Form (6.20) sind die physikalisch interessantesten verallgemeinerten Lösungen von (5.1), (5.2).*

Damit stellt die Gleichung (6.31) eine Auswahlbedingung für die Festlegung eines physikalisch interessanten H dar und könnte damit das Problem der fehlenden Bestimmtheit von H bei Nichtexistenz klassischer Lösungen beseitigen (vgl. Kapitel 5.1). Dies wurde in [LLDR] intuitiv, das heißt ohne Beweis, daß man mit dieser Methode auch tatsächlich verallgemeinerte Lösungen erhält, schon für spezielle Gebiete angewendet. Im nächsten Kapitel soll dies für ein weiteres Beispiel, welches gerade dem in Kapitel 5.1 angegebenen Problem aus der Biologie entspricht, angewendet werden.

6.3. Ein Beispiel

Wir betrachten das in der Einführung (Kapitel 5.1) beschriebene Problem aus der Biologie. Wie beschrieben, werden die Interzellularräume durch zylindrische Fasern gebildet. Diese sind wabenförmig angeordnet ([Z], S. 49) und bilden somit eine Vielzahl von zylindrischen Gefäßen mit einer durch drei Kreise mit Radius r begrenzten Querschnittsfläche (siehe Skizze 7) in denen sich Wasser befindet.



Skizze 7

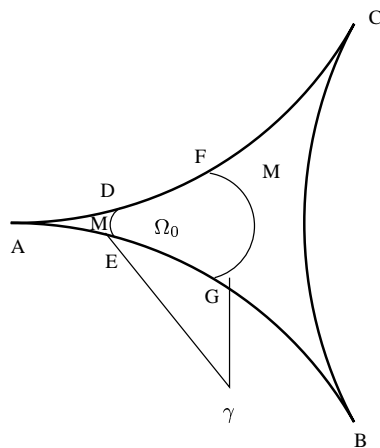
Der Radius r der dieses Dreispitz ($\text{fig}(A, B, C)$) bildenden Kreise liegt im μm -Bereich (ca. $5\mu\text{m}$ [Z], S. 49).

Es seien H und β wieder konstant mit $\beta = \cos \gamma$ und γ erfülle (5.3).

Bemerkung: Der Fall $\gamma = \frac{\pi}{2}$ führt zu $H = 0$ und der Existenz der trivialen klassischen Lösungen u konstant.

Nach Satz 5.2 existiert eine verallgemeinerte Lösung von (5.1), (5.2) auf dem obigen Dreispitz Ω und in Verbindung mit Satz 6.1 auch stets ein Minimierer von $\Phi[\Omega^*; H, \gamma, \Omega]$. Es soll das Problem auf C-singuläre Lösungen untersucht werden. Dazu wird die in Kapitel 6.2 beschriebene Strategie zur Anwendung kommen. Für H gelte also (6.32). Die Menge M sei ein Minimierer von $\Phi[\Omega^*; H, \gamma, \Omega]$ und für Ω_0 gelte $\Omega_0 = \Omega \setminus \bar{M}$.

Durch Anwendung von Kongruenzsätzen erhält man sofort, daß die Kreisbögen, die die Menge M bilden ($\text{arc}(D, E)$, $\text{arc}(F, G)$ usw.), durch Kreise mit Mittelpunkt auf der Tangente durch A, B usw. gebildet werden, um die Winkelbedingung von Satz 6.2 zu erfüllen. Es sei zunächst $\gamma > 0$. Die geometrischen Bedingungen an die Minimierer von Φ (siehe Kapitel 6.1, Satz 6.2, Lemma 6.2, 6.3) ermöglichen mit der Tatsache, daß M die Spitzen enthalten muß (vgl. Kapitel 6.1), nur die in den Skizzen 7 und 8 angegebene Form der Menge M , oder es gilt $M = \Omega$, wobei eine Menge der Form $\text{fig}(D, E, F, G)$ in Skizze 8 auch in zwei oder allen drei Spitzen auftreten könnte.



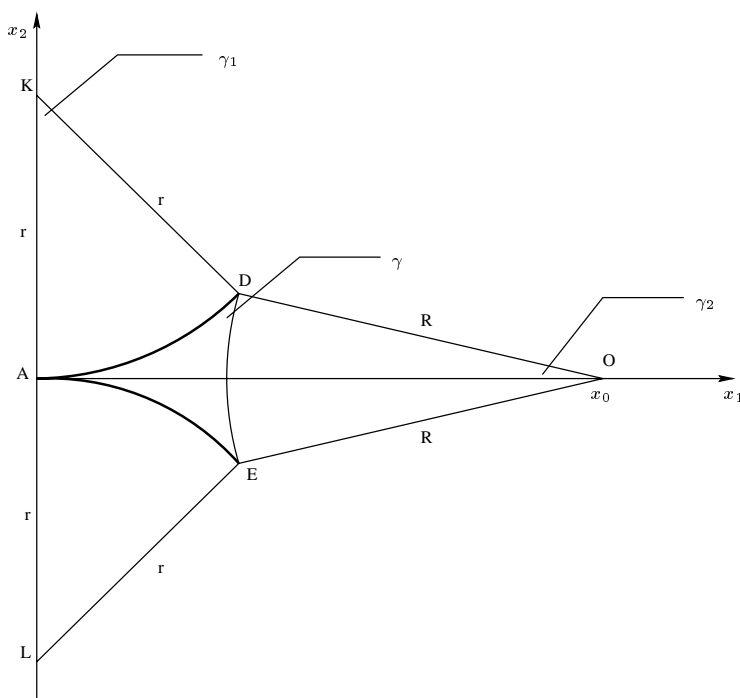
Skizze 8

Die Konstellation von Skizze 8 kann aber ausgeschlossen werden, indem man nachrechnet, daß für diese Gebiete Ω_0 unabhängig von der speziellen Wahl von H stets gilt $\Psi[\Omega_0] > 0$. Auf ihnen kann also keine C-singuläre Lösung existieren (Rechnung siehe Anhang Kapitel A.8).

Der Fall $\gamma = 0$ bedarf einer separaten Untersuchung. Eine Zusammenhangskomponente von Ω_0 könnte aus einem Kreis bestehen, der höchstens einen der Randbögen $\text{arc}(A, B)$, $\text{arc}(B, C)$, $\text{arc}(A, C)$ berührt. Eine Analyse des Beweises von Lemma 6.3 zeigt jedoch,

daß dies keinen Minimierer von Φ liefert. Der Kreis könnte etwas vergrößert werden und den Rand von Ω immer noch in nur höchstens einem Punkt berühren, dies würde jedoch das Funktional verringern. Eine Zusammenhangskomponente von Ω_0 könnte aus einem Kreis bestehen, der $\partial\Omega$ in genau zwei Punkten berührt. Man könnte diesen Kreis entlang der Tangente durch einen entsprechenden Spitzenpunkt (A , B oder C) verschieben und so vergrößern, daß er $\partial\Omega$ wieder in genau zwei Punkten berührt. Man erhält eine neue Menge M' , für die wie im Beweis zu Lemma 6.3 folgt, daß $\Phi[M'] < \Phi[M]$, im Widerspruch zur Minimalität von M . Damit kann im Falle $\gamma = 0$ die Menge Ω_0 ebenfalls nur von der Form $\text{fig}(D, E, F, G, I, J)$ (Skizze 7) sein, oder Ω_0 besteht aus dem einbeschriebenen Kreis oder ist leer. Durch Nachrechnen erhält man sofort, daß für den einbeschriebenen Kreis gilt $\Psi[\Omega_0] > 0$, das heißt, es kann dort ebenfalls keine C-singuläre Lösung existieren.

Wir berechnen nun für ein vorgegebenes H die genaue Gestalt der Menge Ω_0 und stellen die Bedingung (6.31), welches zur Auswahl eines (oder mehrerer) H führt (Rechnung siehe Anhang Kapitel A.8). Es stellt sich heraus, daß man für jedes γ genau eine Menge Ω_0 der Form $\text{fig}(D, E, F, G, I, J)$ von Skizze 7 erhält mit genau einem H , daß (6.31) erfüllt. Diese Menge Ω_0 ist dann aufgrund der Tatsache, daß für die Mengen der Form $\text{fig}(D, E, F, G)$ von Skizze 8 stets gilt $\Psi > 0$ auch sicher ein Minimierer von $\Psi[\Omega^*; H, \gamma, \Omega]$, ebenso die Menge \emptyset . Diese sind aufgrund der obigen Eindeutigkeit die einzigen Minimierer von Ψ . Die zugehörigen Komplementärmengen M und Ω sind dann die einzigen Minimierer von $\Phi[\Omega^*; H, \gamma, \Omega]$ (man vergleiche mit dem Beweis zu Lemma 6.4).



Skizze 9

Aus Symmetriegründen und der Skizze 9 ist ersichtlich, daß die Menge Ω_0 durch die Angabe des Winkels γ_1 bereits bestimmt ist.

Aus der Innenwinkelsumme im Viereck $\text{fig}(A, O, D, K)$ folgt:

$$(6.35) \quad \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Das heißt, aus γ_1 erhält man eindeutig γ_2 und damit auch R und $H = \frac{1}{2R}$ (siehe Anhang). Wir können also anstelle von H auch die Größe γ_1 wählen, dies vereinfacht die Rechnung. Aus der Rechnung im Anhang folgt, daß γ_1 durch eine nichtlineare Gleichung bestimmt ist, die für jedes γ genau eine Lösung hat. Die folgende Tabelle gibt die Werte einer numerischen Berechnung für spezielle Werte von γ an. Es wurde auf vier Stellen nach dem Komma gerundet.

γ in $^\circ$	γ_1 in $^\circ$	γ_2 in $^\circ$	Hr	H_0r	Bemerkung
0	23,2444	66,7556	5,6599	9,7411	Wasser und Glas bei $18^\circ C$ ¹
30	20,2713	39,7287	5,1597	8,4360	
45	18,2651	26,7349	4,4644	6,8880	
54	16,7455	19,2545	3,8882	5,7257	Wasser und Celluloseacetat
60	15,5113	14,4887	3,4346	4,8706	
68	13,4133	08,5867	2,7367	3,6491	Wasser und Cellulosenitrat
89	00,9971	00,0029	0,1672	0,1700	
89,99	00,0100	00,0000	0,0017	0,0017	

Der Wert H_0 genügt für unser Beispiel wegen

$$\begin{aligned} |\partial\Omega| &= \pi r \\ |\Omega| &= \left(\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}\right) r^2 \end{aligned}$$

der Relation

$$(6.36) \quad H_0 = \frac{\pi \cos \gamma}{(2\sqrt{3} \Leftrightarrow \pi) r}.$$

Man erkennt anhand der vierten und fünften Tabellenspalte, daß (6.32) stets erfüllt ist.

Für $\gamma \rightarrow \frac{\pi}{2}$ erhält man wie erwartet $H \rightarrow 0$, $\Omega_0 \rightarrow \Omega$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß auf Ω_0 tatsächlich eine klassische Lösung von (6.17) bis (6.19) existiert, dazu wird Satz 6.4 auf dieses Problem angewendet. Sei $\Omega^* \subseteq \Omega_0$ mit

$$(6.37) \quad \tilde{\Phi}[\Omega^*] \leq 0.$$

Es sei $M = \Omega \setminus \bar{\Omega}_0$, nach obiger Konstruktion ist M ein Minimierer von Φ , es gilt also für alle Caccioppolimengen $A \subseteq \Omega$

$$(6.38) \quad \Phi[M] \leq \Phi[A].$$

¹alle Angaben aus [BTHSS], S. 474-479

Aus der Addition der Ungleichungen (6.37) und (6.38) und Proposition 2.8 aus [G2], S. 36 folgt

$$(6.39) \quad \Phi[M \cup \Omega^*] \leq \Phi[A],$$

das heißt, $M \cup \Omega^*$ ist ebenfalls ein Minimierer von Φ . Da aber nach den obigen Ausführungen nur M und Ω Minimierer von Φ sind, folgt $\Omega^* = \Omega_0$ oder $\Omega^* = \emptyset$. Die Anwendung von Satz 6.4 garantiert hiermit die Existenz einer bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmten klassischen Lösung u_0 von (6.17) bis (6.19) auf Ω_0 .

Man erhält dann nach Satz 6.3 die verallgemeinerte Lösung der Form (6.20), ebenso die Grenzlösungen $u = +\infty$ und (6.5).

Das Ergebnis läßt sich so interpretieren, daß die Flüssigkeit in den mit M gekennzeichneten Gebieten in Skizze 7 praktisch beliebig hoch steigen kann. Für die Wasserversorgung der Bäume (vgl. Motivation in Kapitel 5.1) könnte dieser Effekt des quasi „von selbst“ aufsteigenden Wassers von großer Bedeutung sein.

Nimmt man an, daß in der Natur optimale Benetzung vorliegt, das heißt, für den Randkontaktwinkel gilt $\gamma = 0$, so stimmt das vorliegende Resultat genau mit der Beobachtung in [Z], S. 50 überein.

6.4. Zusammenfassung und Ausblick

Die Kapitel 5 und 6 beschäftigten sich mit verallgemeinerten Lösungen des Problems (5.1), (5.2). Es konnte die Existenz solcher Lösungen unter sehr allgemeinen Bedingungen gezeigt werden (Satz 5.2), auch für Gebiete mit Spitzen, die z. B. in der klassischen Lösungstheorie häufig ausgeschlossen werden müssen durch die Bedingung, daß der Rand des Gebietes Ω lipschitzstetig sein soll. Des weiteren gelang es, im Fall H , β konstant spezielle verallgemeinerte Lösungen zu konstruieren (Lemma 6.1, Satz 6.3).

Die Eigenschaften der Mengen P und N konnten weiter eingeschränkt werden. Es wurde eine Strategie entwickelt, um die physikalisch interessanten Lösungen von Satz 6.3 für beliebige Gebiete zu finden. Diese wurde an einem Beispiel ausprobiert. Das Ergebnis weist eine gute Übereinstimmung mit den Beobachtungen auf.

Offen bleibt die Frage nach der Existenz von Lösungen für den höherdimensionalen Fall. Der hier angegebene Beweis verwendet spezielle Eigenschaften von \mathbb{R}^2 und läßt sich nicht ohne weiteres auf einen höherdimensionalen Fall ausdehnen.

Ebenfalls ungeklärt bleibt die Frage nach der Eindeutigkeit verallgemeinerter Lösungen. Im allgemeinen hat man keine solche, aber auch in diesem Fall ist nicht sicher, welche Lösungsvielfalt vorliegen könnte. Man vergleiche dazu auch mit den Ausführungen in [FN].

Anhang

A.1. Beweis zu Satz 4.1

(Gleichmäßige Beschränktheit der Lösungen auf $[s_0]$)

Es sei $x_0 > 0$ die x_1 -Koordinate des Punktes $(1, s_0)$. Es gilt $x_0 < x^*$, denn

$$\begin{aligned} x_0 &\geq x^* \\ \Rightarrow s(a, x_0) &\geq s(a, x^*) \quad \forall a \in [-1, 1] \\ \Rightarrow s_0 &\geq s(1, x^*) \geq \min_{a \in [-1, 1]} s(a, x^*) = s^* \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Aus $x_0 < x^*$ folgt die Existenz eines $\varepsilon > 0$, so daß

$$\begin{aligned} x_0 + \varepsilon &< x^* \\ x_0 - \varepsilon &> 0. \end{aligned}$$

Es sei δ definiert als

$$\delta = \inf_{x, y \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} \text{dist} \left\{ \left(x, f_1(x) \right), \left(y, f_2(y) \right) \right\},$$

wobei „dist“ die euklidische Abstandsfunktion bezeichnet. Da dist stetig ist, und eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ihr Minimum annimmt, folgt aufgrund der Bedingung an f_1, f_2 aus Kapitel 3.2 ($f_1(x) > f_2(x)$ in $(0, x^*]$):

$$(1) \quad \delta > 0.$$

Für $\sigma \in \left\{ \left(x, f_1(x) \right) : x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \right\}$ bezeichne $k(\sigma)$ die äußere Krümmung des entsprechenden Kurvenstückes im Punkt σ , das heißt die Krümmung in Richtung der äußeren Normale $k \left(x, f_1(x) \right) = \frac{f_1''(x)}{\sqrt{1+f_1'(x)^2}}$. Mit der Wahl $K = \inf_{\sigma} k(\sigma)$ folgt:

$$(2) \quad |K| < \infty,$$

da nach der Voraussetzung von Kapitel 3.3 gilt $f_1, f_2 \in C^4([x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon])$.

Es werden Kreise mit folgendem Radius betrachtet:

$$\begin{aligned} r &= \min \left\{ \frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{4}, \frac{1}{K} \right\} && \text{falls } K < 0 \\ r &= \min \left\{ \frac{\delta}{2}, \frac{\varepsilon}{4} \right\} && \text{falls } K \geq 0. \end{aligned}$$

Es folgt $r > 0$.

Zu jedem Punkt $P_i \in \left\{ \left(x, f_1(x) \right) : x \in \left[x_0 \mp \frac{\varepsilon}{2}, x_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right] \right\}$, $i \in \left[x_0 \mp \frac{\varepsilon}{2}, x_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right]$ wird ein Kreis $B_r(Q_i)$ so gewählt, daß Q_i auf der inneren Normale durch P_i so liegt, daß der Kreis die Funktion $f_1(x)$ in P_i berührt.

Es sei $(x, y) \in \partial B_r(Q_i)$ für ein i aus dem Definitionsbereich, so gilt:

$$(3) \quad y \leq f_1(x).$$

Diese Tatsache folgt aus dem nächsten Lemma.

Lemma A.1 (Eine Ungleichung): Seien $g_1, g_2 : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}$ zwei zweimal stetig differenzierbare Funktionen, wobei I ein offenes Intervall aus \mathbb{R} ist. Für ein $z_0 \in I$ gelte:

$$\begin{aligned} (i) \quad & g_1(z_0) = g_2(z_0) \\ (ii) \quad & g_1'(z_0) = g_2'(z_0) \\ (iii) \quad & \frac{g_1''(z)}{\sqrt{1+g_1'(z)^2}^3} \leq \frac{g_2''(z)}{\sqrt{1+g_2'(z)^2}^3} \quad \forall z \in I, \end{aligned}$$

so folgt $g_1(z) \leq g_2(z) \quad \forall z \in \bar{I}$.

Beweis: Das Resultat folgt aus der Integration der Gleichung (iii) unter Verwendung von $\int \frac{g''(x)}{\sqrt{1+g'(x)^2}^3} dx = \frac{g'(x)}{\sqrt{1+g'(x)^2}} + C$, der Implikation

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \geq \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \quad \Rightarrow \quad x \geq y$$

und nochmaliger Integration. □

Nach Konstruktion gilt außer (3) auch noch

$$(4) \quad y \geq f_2(x),$$

das heißt, $B_r(Q_i) \subset \Omega^* \subset \Omega \quad \forall i \in \left[x_0 \mp \frac{\varepsilon}{2}, x_0 + \frac{\varepsilon}{2} \right]$. Auf jeden dieser Kreise wird Satz 3.5 angewendet. Es folgt für jede Lösung v :

$$(5) \quad v \leq \frac{2}{\kappa r} + r \quad \text{in } \bigcup_i B_r(Q_i).$$

Die Kreise $B_r(Q_i)$ überdecken nach Konstruktion, s_0 in einer gewissen Umgebung des Randpunktes $(1, s_0)$.

Analog erhält man eine Abschätzung in einer Umgebung des Randpunktes $(\Leftrightarrow 1, s_0)$, wenn man $K = \inf_{x \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]} \kappa \left(x, f_2(x) \right)$ wählt:

$$(6) \quad v \leq \frac{2}{\kappa r'} + r' \quad \text{in } \bigcup_i B_{r'}(Q'_i).$$

Aufgrund der Überdeckungseigenschaften von $B_r(Q_i)$ und $B_{r'}(Q'_i)$ existiert eine Menge $M \subset\subset \Omega^*$ derart, daß

$$, s_0 \setminus \left(\bigcup_i B_r(Q_i) \cup \bigcup_i B_{r'}(Q'_i) \right) \subset M$$

Nach Bemerkung 3 zu Theorem 1 in [CF2], S. 208 existiert eine Konstante A' unabhängig von der speziellen betrachteten Lösung derart, daß

$$(7) \quad v \leq A' \quad \text{in } M.$$

Aus (5), (6) und (7) folgt die Existenz einer Konstanten A , so daß

$$(8) \quad v \leq A \quad \text{auf } , s_0,$$

also die Behauptung.

Durch die Konstruktion ist klar, daß A unabhängig von der speziellen Lösung v ist, denn es wurden nur die geometrischen Bedingungen und die Lösungseigenschaften von v auf Ω^* verwendet, also auf einem Teilgebiet von Ω , welches für alle betrachteten Gebiete gleich ist. \square

A.2. Beweis zu Satz 4.2a

(Führende Terme der Lösung in speziellen Spitzen)

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= x_1^\alpha & \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha > 1 \\ f_2(x_1) &= \Leftrightarrow x_1^\alpha \end{aligned}$$

Es werden krummlinige Koordinaten eingeführt:

$$\begin{aligned} (1) \quad a &= \frac{x_2}{x_1^\alpha} & a \in \mathbb{R}, \quad (a \in [\Leftrightarrow 1, 1]) \\ (2) \quad x_2(a, x_1) &= ax_1^\alpha \\ s &= \int_0^{x_1} \sqrt{1 + x_{2,x_1}^2(a, \xi)} d\xi. \end{aligned}$$

Bemerkung: Zunächst wird nicht verwendet, daß $a \in [\Leftrightarrow 1, 1]$ ist, um den Beweis später verallgemeinern zu können. Die Koordinate a ist Element eines beschränkten abgeschlossenen Intervalls.

Mit diesen Koordinaten (a, s) beschreibt die in Kapitel 3.2 eingeführte Größe Ω_{s_0} (s_0 hinreichend klein) dann den Schnitt des betrachteten Gebietes Ω mit einer gewissen Umgebung der Spitze (vgl. Kapitel 3.2). Die Größe s wird nun ebenfalls durch x_1 und x_2 dargestellt, dazu wird der Integrand nach dem Taylorschen Lehrsatz entwickelt und die Gleichung (1) für a eingesetzt:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{x_1} \sqrt{1 + a^2 \alpha^2 \xi^{2\alpha-2}} d\xi \\ (3) \quad &= x_1 + \frac{1}{2} \frac{a^2 \alpha^2}{2\alpha \Leftrightarrow 1} x_1^{2\alpha-1} \Leftrightarrow \frac{1}{8} \frac{a^4 \alpha^4}{4\alpha \Leftrightarrow 3} x_1^{4\alpha-3} + O(x_1^{6\alpha-5}) \\ (4) \quad &= x_1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{2\alpha \Leftrightarrow 1} \frac{x_2^2}{x_1} \Leftrightarrow \frac{1}{8} \frac{\alpha^4}{4\alpha \Leftrightarrow 3} \frac{x_2^4}{x_1^3} + O(x_1^{6\alpha-5}). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet O das bekannte Landausche Ordnungssymbol: $f(x) = O(g(x))$ für $x \rightarrow x_0$ genau dann, wenn eine reelle Zahl M existiert mit $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < M$ für $x \rightarrow x_0$. Dieses Symbol soll in der vorliegenden Arbeit gleichzeitig zur Abkürzung von Reihen verwendet werden, indem es den führenden Term des Restes einer konvergenten bzw. asymptotischen Entwicklung darstellt.

Es treten hier nur Potenzfunktionen als Eichfunktionen $g(x)$ auf, und es erfolgen Entwicklungen für kleine x_1 bzw. kleine s , so daß O auch im folgenden Sinne verstanden werden kann $f(x_1, x_2) = O(x_1^\beta) \Leftrightarrow |f| \leq cx_1^\beta$ ($\beta \in \mathbb{R}$) mit c unabhängig von $x = (x_1, x_2) \in \Omega \cap \{(x_1, x_2) : x_1 \leq x_{1,0}\}$ für ein hinreichend kleines $x_{1,0}$. In gleicher Weise wird $O(s^\beta)$ verwendet: $\tilde{f}(a, s) = O(s^\beta) \Leftrightarrow |\tilde{f}| \leq \tilde{c}s^\beta$ mit \tilde{c} unabhängig von $\tilde{x} = (a, s)$ mit a beliebig aus dem Definitionsbereich, $0 < s < s_0$ für ein hinreichend kleines

s_0 . Insbesondere gilt $\tilde{f}(a, s) = O(s^\beta)$ falls $\lim_{s \rightarrow 0} \left| \frac{\tilde{f}(a, s)}{s^\beta} \right| = g(a)$, und $g(a)$ ist beschränkt auf dem gesamten Definitionsbereich von a .

Gleichung (3) soll nach x_1 aufgelöst werden, um eine Darstellung der Koordinaten x_1 und x_2 in Abhängigkeit von den krummlinigen Koordinaten a, s zu erhalten. Dazu wird (3) weiter umgeformt:

$$(5) \quad s = x_1 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a^2 \alpha^2}{2\alpha \Leftrightarrow 1} (x_1^{\alpha-1})^2 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \frac{a^4 \alpha^4}{4\alpha \Leftrightarrow 3} (x_1^{\alpha-1})^4 + O\left((x_1^{\alpha-1})^6\right) \right).$$

Die in der Klammer stehende Potenzreihe in $x_1^{\alpha-1}$ ist offenbar konvergent für beliebige (beschränkte) a , wenn x_1 hinreichend klein gewählt wird. Gleichung (5) kann mit $\alpha \Leftrightarrow 1$ potenziert werden, indem man den Taylorschen Lehrsatz für die Funktion $(1+x)^{\alpha-1}$ anwendet:

$$\begin{aligned} s^{\alpha-1} &= x_1^{\alpha-1} \left\{ 1 + (\alpha \Leftrightarrow 1) \frac{1}{2} \frac{a^2 \alpha^2}{2\alpha \Leftrightarrow 1} (x_1^{\alpha-1})^2 + \left(\frac{(\alpha \Leftrightarrow 1)(\alpha \Leftrightarrow 2)}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{a^2 \alpha^2}{2\alpha \Leftrightarrow 1} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \Leftrightarrow \frac{1}{8} (\alpha \Leftrightarrow 1) \frac{a^4 \alpha^4}{4\alpha \Leftrightarrow 3} \right) (x_1^{\alpha-1})^4 + O\left((x_1^{\alpha-1})^6\right) \right\}. \end{aligned}$$

Folglich ist $s^{\alpha-1}$ eine in $x_1^{\alpha-1} = 0$ analytische Funktion von $x_1^{\alpha-1}$. Die Umkehrung dieser Funktion ist wieder analytisch in $s^{\alpha-1} = 0$ und kann mittels Potenzreihenansatz $x_1^{\alpha-1} = g_1 s^{\alpha-1} + g_2 (s^{\alpha-1})^3 + g_3 (s^{\alpha-1})^5 + O\left((s^{\alpha-1})^7\right)$ und anschließendem Koeffizientenvergleich gewonnen werden. Die Größen g_i sind dabei nur von a abhängig. Es folgt:

$$\begin{aligned} g_1 &= 1 \\ g_2 &= \Leftrightarrow (\alpha \Leftrightarrow 1) \frac{1}{2} \frac{a^2 \alpha^2}{2\alpha \Leftrightarrow 1} \\ g_3 &= \Leftrightarrow 3 g_2 (\alpha \Leftrightarrow 1) \frac{1}{2} \frac{a^2 \alpha^2}{2\alpha \Leftrightarrow 1} \Leftrightarrow \left(\frac{(\alpha \Leftrightarrow 1)(\alpha \Leftrightarrow 2)}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{a^2 \alpha^2}{2\alpha \Leftrightarrow 1} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \Leftrightarrow \frac{1}{8} (\alpha \Leftrightarrow 1) \frac{a^4 \alpha^4}{4\alpha \Leftrightarrow 3} \right) \\ &= (\alpha \Leftrightarrow 1) \left(\frac{5\alpha \Leftrightarrow 4}{8} \frac{a^4 \alpha^4}{(2\alpha \Leftrightarrow 1)^2} + \frac{1}{8} \frac{a^4 \alpha^4}{4\alpha \Leftrightarrow 3} \right). \end{aligned}$$

Es ist klar, daß damit $x_1^{\alpha-1}$ sogar die Potenzreihenentwicklung einer in $s^{\alpha-1} = 0$ und für alle a aus einem beliebigen, aber beschränkten Definitionsbereich analytischen Funktion von a und $s^{\alpha-1}$ ist. Durch erneute Anwendung des Taylorschen Satzes, diesmal für die Funktion $(1+x)^{\frac{1}{\alpha-1}}$, folgt:

$$\begin{aligned} (6) \quad x_1 &= s + \frac{1}{\alpha \Leftrightarrow 1} (g_2 s^{2\alpha-1} + g_3 s^{4\alpha-3}) + \frac{\Leftrightarrow \alpha + 2}{2(\alpha \Leftrightarrow 1)^2} g_2^2 s^{4\alpha-3} + O(s^{6\alpha-5}) \\ &= s \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{a^2 \alpha^2}{2\alpha \Leftrightarrow 1} s^{2\alpha-1} + \left(\frac{1}{4} \frac{a^4 \alpha^4}{2\alpha \Leftrightarrow 1} + \frac{1}{8} \frac{a^4 \alpha^4}{4\alpha \Leftrightarrow 3} \right) s^{4\alpha-3} + O(s^{6\alpha-5}). \end{aligned}$$

Bemerkung: Der Restterm dieser Entwicklung ist der Rest der Reihenentwicklung einer in 0 analytischen Funktion von $s^{\alpha-1}$ wenn s ausgeklammert wird.

Aus (2) und (6) erhält man eine Entwicklung von x_2 nach Potenzen von s :

$$\begin{aligned}
 x_2 &= ax_1^\alpha \\
 &= a \left\{ s^\alpha + \alpha s^{\alpha-1} \left(\Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{a^2 \alpha^2}{2\alpha \Leftrightarrow 1} s^{2\alpha-1} + \left(\frac{1}{4} \frac{a^4 \alpha^4}{2\alpha \Leftrightarrow 1} + \frac{1}{8} \frac{a^4 \alpha^4}{4\alpha \Leftrightarrow 3} \right) s^{4\alpha-3} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha(\alpha \Leftrightarrow 1)}{2} s^{\alpha-2} \left(\Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{a^2 \alpha^2}{2\alpha \Leftrightarrow 1} s^{2\alpha-1} \right)^2 \right\} + O(s^{7\alpha-6}) \\
 (7) \quad &= as^\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{a^3 \alpha^3}{2\alpha \Leftrightarrow 1} s^{3\alpha-2} + As^{5\alpha-4} + O(s^{7\alpha-6})
 \end{aligned}$$

mit der Abkürzung $A = \frac{1}{4} \frac{a^5 \alpha^5}{2\alpha-1} + \frac{1}{8} \frac{a^5 \alpha^5}{4\alpha-3} + \frac{(\alpha-1)}{8} \frac{a^5 \alpha^5}{(2\alpha-1)^2}$.

Es werden nun aus (1) und (3) die partiellen Ableitungen von a und s nach x_1 und x_2 berechnet und mittels (6) und (7) wieder in Termen von a und s dargestellt, mit dem Ziel die Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x_1}$, $\frac{\partial}{\partial x_2}$ in krummlinige Koordinaten zu überführen.

Bei der Ableitung von asymptotischen Entwicklungen ist zu beachten, daß im allgemeinen keine Beziehung der Form $f = O(g) \Rightarrow f' = O(g')$ besteht. Um dennoch Aussagen über das Verhalten der Restterme bei Differentiation treffen zu können, ist deren spezielle Struktur zu beachten. Die hier auftretenden Restterme sind für beliebige a aus dem Definitionsbereich und für hinreichend kleine s konvergente Potenzreihen in $s^{\alpha-1}$ oder $x_1^{\alpha-1}$ bzw. können durch Ausklammern von eventuell singulären Termen in solche umgeformt werden, wie dies schon in der Bemerkung zu (6) erwähnt wurde. Für diese Art Reste lassen sich die folgenden Regeln aufstellen:

Lemma A.2 (Ableitungsregeln 1): Sei $R(a, \tilde{s})$ eine für alle a aus dem beschränkten Definitionsbereich von a und an der Stelle $\tilde{s} = 0$ analytische Funktion und gelte $R(a, \tilde{s}) = O(\tilde{s}^n)$ für $\tilde{s} \rightarrow 0$ ($n \in \mathbb{N}^+$), sei weiterhin $f(a, s)$ eine für $s > 0$ differenzierbare Funktion mit $\lim_{s \rightarrow 0} f(a, s) = 0$, so gilt:

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial s} R(a, f(a, s)) = O\left(\frac{\partial f(a, s)}{\partial s} f(a, s)^{n-1}\right)$$

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial a} R(a, f(a, s)) = O(f(a, s)^n) + O\left(\frac{\partial f(a, s)}{\partial a} f(a, s)^{n-1}\right)$$

in Ω_{s_0} .

Beweis: (8) und (9) folgen aus der gliedweisen Differenzierbarkeit von Potenzreihen innerhalb des Konvergenzintervalls und der Kettenregel. \square

Häufig wird Lemma A.2 mit der Funktion $f(a, s) = s^{\alpha-1}$ angewendet, das heißt, f ist unabhängig von a . Für solche Funktionen lassen sich (8) und (9) in der folgenden Kurzform schreiben ($g(s) = s^{n(\alpha-1)}$, $n \geq 1$):

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial s} O(g(s)) = O(g'(s))$$

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial a} O(g(s)) = O(g(s)).$$

Die bei den Differentiationen (8), (9) entstehenden Reste erfüllen wieder die Voraussetzungen von Lemma A.2 (im Falle $n > 1$) wenn man $\frac{\partial f(a,s)}{\partial a}$ bzw. $\frac{\partial f(a,s)}{\partial s}$ ausklammert. Analog ist Lemma A.2 auch für Reste $R(a, x_1)$ usw. anwendbar. Weiterhin ist die folgende Regel sehr nützlich:

Lemma A.3 (Ableitungsregeln 2): Seien umgekehrt $R_1(a, s) = O(s^{\beta_1})$ und $R_2(a, s) = O(s^{\beta_2})$ ($\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$) zwei Reste die (10) und (11) erfüllen, das heißt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} R_1(a, s) &= O(s^{\beta_1-1}), & \frac{\partial}{\partial a} R_1(a, s) &= O(s^{\beta_1}), \\ \frac{\partial}{\partial s} R_2(a, s) &= O(s^{\beta_2-1}), & \frac{\partial}{\partial a} R_2(a, s) &= O(s^{\beta_2}), \end{aligned}$$

so folgt (10) und (11) auch für das Produkt der Reste, das heißt:

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial s} (R_1(a, s)R_2(a, s)) = O(s^{\beta_1+\beta_2-1})$$

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial a} (R_1(a, s)R_2(a, s)) = O(s^{\beta_1+\beta_2}).$$

Beweis: Das Resultat folgt aus der Produktregel und der Summen- bzw. Produkteigenschaft von Ordnungsrelationen (vgl. [Mur], S. 10). \square

Die Lemmata A.2 und A.3 kommen später mehrmals zur Anwendung.

Aus (6) folgt unter Verwendung der Taylorreihen für die Funktionen $\frac{1}{1+x}$ und $(1+x)^\alpha$:

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{1}{x_1} &= \frac{1}{s} + \frac{a^2 \alpha^2}{4\alpha \Leftrightarrow 2} s^{2\alpha-3} + O(s^{4\alpha-5}) \\ \frac{\partial a}{\partial x_1} &= \Leftrightarrow \frac{a\alpha}{x_1} \\ &= \Leftrightarrow \frac{a\alpha}{s} \Leftrightarrow \frac{a^3 \alpha^3}{4\alpha \Leftrightarrow 2} s^{2\alpha-3} + O(s^{4\alpha-5}) \end{aligned}$$

$$(15) \quad \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial x_2} &= \frac{1}{x_1^\alpha} \\ &= \frac{1}{s^\alpha} + \frac{a^2 \alpha^3}{4\alpha \Leftrightarrow 2} s^{\alpha-2} + O(s^{3\alpha-4}) \\ \frac{x_2}{x_1} &= a s^{\alpha-1} + O(s^{3\alpha-3}). \end{aligned}$$

Wegen $\alpha \Leftrightarrow 1 > 0$ sind $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha_1}$ -Terme von höherer Ordnung als $\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha_2}$ -Terme, falls $\alpha_1 > \alpha_2$. Dies ermöglicht mit (4) die nächsten Abschätzungen:

$$\frac{\partial s}{\partial x_1} = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2}{4\alpha \Leftrightarrow 2} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 + O\left(\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^4\right)$$

$$(16) \quad = 1 \Leftrightarrow \frac{a^2 \alpha^2}{4\alpha \Leftrightarrow 2} s^{2\alpha-2} + O(s^{4\alpha-4})$$

$$\frac{\partial s}{\partial x_2} = \frac{\alpha^2}{2\alpha \Leftrightarrow 1} \frac{x_2}{x_1} + O\left(\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^3\right)$$

$$(17) \quad = \frac{a\alpha^2}{2\alpha \Leftrightarrow 1} s^{\alpha-1} + O(s^{3\alpha-3}).$$

Damit erhält man nach der Formel der vollständigen Ableitung die Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten.

Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten:

$$(18) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} = \left(1 \Leftrightarrow \frac{a^2 \alpha^2}{4\alpha \Leftrightarrow 2} s^{2\alpha-2} + O(s^{4\alpha-4})\right) \frac{\partial}{\partial s} + \left(\Leftrightarrow \frac{a\alpha}{s} \Leftrightarrow \frac{a^3 \alpha^3}{4\alpha \Leftrightarrow 2} s^{2\alpha-3} + O(s^{4\alpha-5})\right) \frac{\partial}{\partial a}$$

$$(19) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \left(\frac{a\alpha^2}{2\alpha \Leftrightarrow 1} s^{\alpha-1} + O(s^{3\alpha-3})\right) \frac{\partial}{\partial s} + \left(\frac{1}{s^\alpha} + \frac{a^2 \alpha^3}{4\alpha \Leftrightarrow 2} s^{\alpha-2} + O(s^{3\alpha-4})\right) \frac{\partial}{\partial a}.$$

Die Restterme erfüllen die Voraussetzungen von Lemma A.2, wenn man (falls nötig) singuläre Terme ausklammert und $\tilde{s} = f(s) = s^{\alpha-1}$ setzt.

Um nun Satz 4.2a beweisen zu können, wird eine geeignete Funktion mit der Lösung von (3.1), (3.2) verglichen, das heißt, Satz 3.7 wird angewendet. Die Wahl der Vergleichsfunktion ist abhängig von α . Es wird von einer allgemeinen Form der Vergleichsfunktion ausgegangen, aus der sich alle speziellen Vergleichsfunktionen erzeugen lassen.

Die allgemeine Vergleichsfunktion lautet wie folgt:

Vergleichsfunktion:

$$(20) \quad u(a, s) = Cs^{-\alpha} + h(a)s^{-1} + g(a)s^{\alpha-2} + f(a)s^{2\alpha-3} + D$$

mit zunächst noch unbestimmten, auf dem gesamten (abgeschlossenen) Definitionsbereich von a analytischen Funktionen $h(a)$, $g(a)$, $f(a)$ sowie Konstanten $C > 0$, D . Diese Größen werden im folgenden geeignet gewählt um die Bedingungen des Satzes 3.7 zu erfüllen. Dazu werden die Ausdrücke $\operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u$ in Ω_{s_0} und $\nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma$ auf Σ_{s_0} berechnet.

$$u_{x_1} = \left(1 \Leftrightarrow \frac{a^2 \alpha^2}{4\alpha \Leftrightarrow 2} s^{2\alpha-2} + O(s^{4\alpha-4})\right) \left(\Leftrightarrow \alpha C s^{-\alpha-1} \Leftrightarrow h s^{-2} + (\alpha \Leftrightarrow 2) \cdot g s^{\alpha-3} + (2\alpha \Leftrightarrow 3) f s^{2\alpha-4}\right) + \left(\Leftrightarrow \frac{a\alpha}{s} \Leftrightarrow \frac{a^3 \alpha^3}{4\alpha \Leftrightarrow 2} s^{2\alpha-3} + O(s^{4\alpha-5})\right) \cdot (h' s^{-1} + g' s^{\alpha-2} + f' s^{2\alpha-3})$$

$$(21) \quad = \Leftrightarrow \alpha C s^{-\alpha-1} \Leftrightarrow (h + a\alpha h') s^{-2} + \left(\frac{a^2 \alpha^3 C}{4\alpha \Leftrightarrow 2} \Leftrightarrow a\alpha g' + (\alpha \Leftrightarrow 2)g\right) s^{\alpha-3}$$

$$\begin{aligned}
& + O(s^{2\alpha-4}) \\
u_{x_2} &= \left(\frac{a\alpha^2}{2\alpha \Leftrightarrow 1} s^{\alpha-1} + O(s^{3\alpha-3}) \right) \left(\Leftrightarrow \alpha C s^{-\alpha-1} \Leftrightarrow h s^{-2} + (\alpha \Leftrightarrow 2) g s^{\alpha-3} \right. \\
& \quad \left. + (2\alpha \Leftrightarrow 3) f s^{2\alpha-4} \right) + \left(\frac{1}{s^\alpha} + \frac{a^2 \alpha^3}{4\alpha \Leftrightarrow 2} s^{\alpha-2} + O(s^{3\alpha-4}) \right) \left(h' s^{-1} \right. \\
& \quad \left. + g' s^{\alpha-2} + f' s^{2\alpha-3} \right) \\
(22) \quad &= h' s^{-\alpha-1} + \left(g' \Leftrightarrow \frac{a\alpha^3 C}{2\alpha \Leftrightarrow 1} \right) s^{-2} + \left(f' + \frac{a^2 \alpha^3 h'}{4\alpha \Leftrightarrow 2} \Leftrightarrow \frac{a\alpha^2 h}{2\alpha \Leftrightarrow 1} \right) s^{\alpha-3} \\
& \quad + O(s^{2\alpha-4}).
\end{aligned}$$

Aus (21) und (22) folgt:

$$\begin{aligned}
1 + |\nabla u|^2 &= \alpha^2 C^2 s^{-2\alpha-2} + 2\alpha C (h + a\alpha h') s^{-\alpha-3} \Leftrightarrow 2\alpha C \left(\frac{a^2 \alpha^3 C}{4\alpha \Leftrightarrow 2} \Leftrightarrow a\alpha g' \right. \\
& \quad \left. + (\alpha \Leftrightarrow 2) g \right) s^{-4} + O(s^{\alpha-5}) + (h + a\alpha h')^2 s^{-4} + h'^2 s^{-2\alpha-2} \\
& \quad + 2h' \left(g' \Leftrightarrow \frac{a\alpha^3 C}{2\alpha \Leftrightarrow 1} \right) s^{-\alpha-3} + 2h' \left(f' + \frac{a^2 \alpha^3 h'}{4\alpha \Leftrightarrow 2} \Leftrightarrow \frac{a\alpha^2 h}{2\alpha \Leftrightarrow 1} \right) s^{-4} \\
& \quad + O(s^{\alpha-5}) + \left(g' \Leftrightarrow \frac{a\alpha^3 C}{2\alpha \Leftrightarrow 1} \right)^2 s^{-4} + O(1) \\
&= W^2 s^{-2\alpha-2} + T_2 s^{-\alpha-3} + T_1 s^{-4} + O(s^{\alpha-5}) + O(1) \\
(23) \quad &= s^{-2\alpha-2} \{ W^2 + T_2 s^{\alpha-1} + T_1 s^{2\alpha-2} + O(s^{3\alpha-3}) + O(s^{2\alpha+2}) \}
\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned}
W &= \sqrt{\alpha^2 C^2 + h'^2} \\
T_1 &= \Leftrightarrow 2\alpha C \left(\frac{a^2 \alpha^3 C}{4\alpha \Leftrightarrow 2} \Leftrightarrow a\alpha g' + (\alpha \Leftrightarrow 2) g \right) + (h + a\alpha h')^2 \\
& \quad + 2h' \left(f' + \frac{a^2 \alpha^3 h'}{4\alpha \Leftrightarrow 2} \Leftrightarrow \frac{a\alpha^2 h}{2\alpha \Leftrightarrow 1} \right) + \left(g' \Leftrightarrow \frac{a\alpha^3 C}{2\alpha \Leftrightarrow 1} \right)^2 \\
T_2 &= 2\alpha C (h + a\alpha h') + 2h' \left(g' \Leftrightarrow \frac{a\alpha^3 C}{2\alpha \Leftrightarrow 1} \right).
\end{aligned}$$

Das Restglied der Entwicklung (23) ist die Summe aus einem Rest der die Voraussetzungen von Lemma A.2 erfüllt ($\tilde{s} = \tilde{f}(s) = s^{\alpha-1}$) und der Funktion $s^{2\alpha+2}$. Das Restglied hat deshalb wieder die Eigenschaften (10), (11).

Mittels Taylorentwicklung der Funktion $\frac{1}{\sqrt{W^2+x}}$ erhält man:

$$\begin{aligned}
(1 + |\nabla u|^2)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{W} s^{\alpha+1} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{W^3} s^{3\alpha+3} (T_2 s^{-\alpha-3} + T_1 s^{-4} + O(s^{\alpha-5}) + O(1)) \\
& \quad + \frac{3}{8} \frac{1}{W^5} s^{5\alpha+5} T_2^2 s^{-2\alpha-6} + O(s^{4\alpha-2}) \\
(24) \quad &= \frac{1}{W} s^{\alpha+1} + T_3 s^{2\alpha} + T_4 s^{3\alpha-1} + O(s^\beta)
\end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} T_3 &= \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{W^3} T_2 \\ T_4 &= \frac{3}{8} \frac{1}{W^5} T_2^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{1}{W^3} T_1 \\ \beta &= \begin{cases} 4\alpha \Leftrightarrow 2 & : \alpha < 5 \\ 3\alpha + 3 & : \alpha \geq 5 \end{cases}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Es gilt $\beta > 3\alpha \Leftrightarrow 1$.

Durch Anwendung von Lemma A.2, diesmal für die Funktion $\tilde{f}(a, s) = T_2 s^{\alpha-1} + T_1 s^{2\alpha-2} + O(s^{3\alpha-3}) + O(s^{2\alpha+2})$, welche den Rest von (23) darstellen soll und der Taylorreihe von $\frac{1}{\sqrt{W^2+x}}$ folgen die Ableitungseigenschaften (10), (11) auch für den Rest in (24), wenn man berücksichtigt, daß $\tilde{f}(a, s) = O(s^{\alpha-1})$ schon die Eigenschaften (10) und (11) erfüllt (siehe Ausführungen zu (23)).

Aus (21), (22) und (24) lassen sich nun die Komponenten des Vektors Tu und daraus der Ausdruck $\operatorname{div} Tu$ berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{u_{x_1}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} &= \Leftrightarrow \frac{\alpha C}{W} \Leftrightarrow \alpha C T_3 s^{\alpha-1} + O(s^{2\alpha-2}) \Leftrightarrow (h + a\alpha h') \frac{1}{W} s^{\alpha-1} \\ (25) \quad &= \Leftrightarrow \frac{\alpha C}{W} \Leftrightarrow \left(\alpha C T_3 + (h + a\alpha h') \frac{1}{W} \right) s^{\alpha-1} + O(s^{2\alpha-2}) \\ \left(\frac{u_{x_1}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right)_{x_1} &= \Leftrightarrow (\alpha \Leftrightarrow 1) \left(\alpha C T_3 + (h + a\alpha h') \frac{1}{W} \right) s^{\alpha-2} + O(s^{2\alpha-3}) \\ &\quad + \left(\Leftrightarrow \frac{a\alpha}{s} \Leftrightarrow \frac{a^3 \alpha^3}{4\alpha \Leftrightarrow 2} s^{2\alpha-3} + O(s^{4\alpha-5}) \right) \left(\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha C}{W} \right)' \right) \\ &\quad \Leftrightarrow \left(\alpha C T_3 + (h + a\alpha h') \frac{1}{W} \right)' s^{\alpha-1} + O(s^{2\alpha-2}) \\ (26) \quad &= a\alpha^2 C \left(\frac{1}{W} \right)' s^{-1} + \left(a\alpha \left(\alpha C T_3 + (h + a\alpha h') \frac{1}{W} \right)' \right) \\ &\quad \Leftrightarrow (\alpha \Leftrightarrow 1) \left(\alpha C T_3 + (h + a\alpha h') \frac{1}{W} \right) s^{\alpha-2} + O(s^{2\alpha-3}). \end{aligned}$$

Das Restglied in (25) hat die Differentiationseigenschaften (10) und (11) aufgrund der vorherigen Bemerkungen und Lemma A.2. Das Gleiche gilt für das Restglied in der folgenden Entwicklung.

$$\begin{aligned} \frac{u_{x_2}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} &= \frac{h'}{W} + \left(g' \Leftrightarrow \frac{a\alpha^3 C}{2\alpha \Leftrightarrow 1} \right) \frac{1}{W} s^{\alpha-1} + \left(f' + \frac{a^2 \alpha^3 h'}{4\alpha \Leftrightarrow 2} \Leftrightarrow \frac{a\alpha^2 h}{2\alpha \Leftrightarrow 1} \right) \\ &\quad \cdot \frac{1}{W} s^{2\alpha-2} + O(s^{3\alpha-3}) + h' T_3 s^{\alpha-1} + \left(g' \Leftrightarrow \frac{a\alpha^3 C}{2\alpha \Leftrightarrow 1} \right) T_3 s^{2\alpha-2} \\ &\quad + O(s^{3\alpha-3}) + h' T_4 s^{2\alpha-2} + O(s^{3\alpha-3}) + O(s^{\beta-\alpha-1}) \\ (27) \quad &= \frac{h'}{W} + T_6 s^{\alpha-1} + T_5 s^{2\alpha-2} + O(s^{3\alpha-3}) + O(s^{\beta-\alpha-1}) \end{aligned}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} T_5 &= h'T_4 + \left(g' \Leftrightarrow \frac{a\alpha^3 C}{2\alpha \Leftrightarrow 1} \right) T_3 + \left(f' + \frac{a^2\alpha^3 h'}{4\alpha \Leftrightarrow 2} \Leftrightarrow \frac{a\alpha^2 h}{2\alpha \Leftrightarrow 1} \right) \frac{1}{W} \\ T_6 &= \left(g' \Leftrightarrow \frac{a\alpha^3 C}{2\alpha \Leftrightarrow 1} \right) \frac{1}{W} + h'T_3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_{x_2}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)_{x_2} &= O(s^{2\alpha-3}) + \left(\frac{1}{s^\alpha} + \frac{a^2\alpha^3}{4\alpha \Leftrightarrow 2} s^{\alpha-2} + O(s^{3\alpha-4}) \right) \left(\left(\frac{h'}{W} \right)' \right. \\ &\quad \left. + T'_6 s^{\alpha-1} + T'_5 s^{2\alpha-2} + O(s^{3\alpha-3}) + O(s^{\beta-\alpha-1}) \right) \\ &= O(s^{2\alpha-3}) + \left(\frac{h'}{W} \right)' s^{-\alpha} + T'_6 s^{-1} + T'_5 s^{\alpha-2} + O(s^{2\alpha-3}) \\ &\quad + O(s^{\beta-2\alpha-1}) + \left(\frac{h'}{W} \right)' \frac{a^2\alpha^3}{4\alpha \Leftrightarrow 2} s^{\alpha-2} \\ (28) \quad &= \left(\frac{h'}{W} \right)' s^{-\alpha} + T'_6 s^{-1} + \left(T'_5 + \left(\frac{h'}{W} \right)' \frac{a^2\alpha^3}{4\alpha \Leftrightarrow 2} \right) s^{\alpha-2} \\ &\quad + O(s^{2\alpha-3}) + O(s^{\beta-2\alpha-1}). \end{aligned}$$

Aus (20), (26) und (28) läßt sich nun der Ausdruck $\operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u$ berechnen.

Entwicklung des Ausdrucks $\operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u$:

$$\begin{aligned} (29) \quad \operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u &= \left(\left(\frac{h'}{W} \right)' \Leftrightarrow \kappa C \right) s^{-\alpha} + \left(T'_6 + a\alpha^2 C \left(\frac{1}{W} \right)' \Leftrightarrow \kappa h \right) s^{-1} \\ &\quad + \left(T_7 + T'_5 + \left(\frac{h'}{W} \right)' \frac{a^2\alpha^3}{4\alpha \Leftrightarrow 2} \Leftrightarrow \kappa g \right) s^{\alpha-2} \Leftrightarrow \kappa D + O(s^{2\alpha-3}) \\ &\quad + O(s^{\beta-2\alpha-1}), \end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung noch

$$T_7 = a\alpha \left(\alpha C T_3 + (h + a\alpha h') \frac{1}{W} \right)' \Leftrightarrow (\alpha \Leftrightarrow 1) \left(\alpha C T_3 + (h + a\alpha h') \frac{1}{W} \right)$$

gesetzt wurde. Die Restterme $O(s^{2\alpha-3})$ und $O(s^{\beta-2\alpha-1})$ sind dabei offenbar von D unabhängig.

Bemerkung: Es ist $\beta \Leftrightarrow 2\alpha \Leftrightarrow 1 > \alpha \Leftrightarrow 2$.

Um den Ausdruck $\nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma$ auf Σ_{s_0} berechnen zu können, wird noch der äußere Normaleneinheitsvektor ν (auf Σ_{s_0}) in krummlinigen Koordinaten benötigt:

$$\nu = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + a^2\alpha^2 x_1^{2\alpha-2}}} \begin{pmatrix} \Leftrightarrow a\alpha x_1^{\alpha-1} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Plus steht dabei für den oberen Teil des Randes Σ_{s_0} ($a = 1$) und das Minus für den unteren Teil ($a = \Leftrightarrow 1$). Es wird zunächst darauf verzichtet $a = \pm 1$ einzusetzen, um den Beweis später auf einen allgemeineren Fall anwenden zu können.

Mittels (6), der Taylorentwicklung der Funktion $(1+x)^{2\alpha-2}$ und der Taylorentwicklung der Funktion $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ erhält man hieraus:

$$\begin{aligned}
x_1^{2\alpha-2} &= s^{2\alpha-2} \Leftrightarrow (\alpha \Leftrightarrow 1) \frac{a^2 \alpha^2}{2\alpha \Leftrightarrow 1} s^{4\alpha-4} + O(s^{6\alpha-6}) \\
1 + a^2 \alpha^2 x_1^{2\alpha-2} &= 1 + a^2 \alpha^2 s^{2\alpha-2} \Leftrightarrow (\alpha \Leftrightarrow 1) \frac{a^4 \alpha^4}{2\alpha \Leftrightarrow 1} s^{4\alpha-4} + O(s^{6\alpha-6}) \\
\frac{1}{\sqrt{1 + a^2 \alpha^2 x_1^{2\alpha-2}}} &= 1 \Leftrightarrow \frac{a^2 \alpha^2}{2} s^{2\alpha-2} + O(s^{4\alpha-4}) \\
\Leftrightarrow a \alpha x_1^{\alpha-1} &= \Leftrightarrow a \alpha s^{\alpha-1} + \frac{1}{2} (\alpha \Leftrightarrow 1) \frac{a^3 \alpha^3}{2\alpha \Leftrightarrow 1} s^{3\alpha-3} + O(s^{5\alpha-5}) \\
\frac{\Leftrightarrow a \alpha x_1^{\alpha-1}}{\sqrt{1 + a^2 \alpha^2 x_1^{2\alpha-2}}} &= \Leftrightarrow a \alpha s^{\alpha-1} + \left((\alpha \Leftrightarrow 1) \frac{a^3 \alpha^3}{4\alpha \Leftrightarrow 2} + \frac{a^3 \alpha^3}{2} \right) s^{3\alpha-3} + O(s^{5\alpha-5}) \\
(30) \quad \nu &= \pm \left(\frac{\Leftrightarrow a \alpha s^{\alpha-1} + \frac{3\alpha-2}{4\alpha-2} a^3 \alpha^3 s^{3\alpha-3} + O(s^{5\alpha-5})}{1 \Leftrightarrow \frac{a^2 \alpha^2}{2} s^{2\alpha-2} + O(s^{4\alpha-4})} \right).
\end{aligned}$$

Aus den Resultaten (25), (27) und (30) folgt nun:

$$\begin{aligned}
\nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma &= \pm \frac{a\alpha^2 C}{W} s^{\alpha-1} \pm a\alpha \left(\alpha C T_3 + (h + a\alpha h') \frac{1}{W} \right) s^{2\alpha-2} \\
&+ O(s^{3\alpha-3}) \pm \frac{h'}{W} \pm T_6 s^{\alpha-1} \pm T_5 s^{2\alpha-2} \mp \frac{a^2 \alpha^2 h'}{2W} s^{2\alpha-2} \\
&+ O(s^{3\alpha-3}) + O(s^{\beta-\alpha-1}) \Leftrightarrow \cos \gamma.
\end{aligned}$$

Entwicklung des Ausdrucks $\nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma$:

$$\begin{aligned}
(31) \quad \nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma &= \left(\pm \frac{h'}{W} \Leftrightarrow \cos \gamma \right) + \left(\pm \frac{a\alpha^2 C}{W} \pm T_6 \right) s^{\alpha-1} + \left(\pm a \left(\alpha^2 C T_3 \right. \right. \\
&+ \left. \left. \alpha (h + a\alpha h') \frac{1}{W} \right) \pm T_5 \mp \frac{a^2 \alpha^2 h'}{2W} \right) s^{2\alpha-2} + O(s^{3\alpha-3}) \\
&+ O(s^{\beta-\alpha-1}).
\end{aligned}$$

Das obere Vorzeichen liefert dabei stets die Formel für den oberen, das untere Vorzeichen die Formel für den unteren Rand. Bis jetzt wurde noch nicht verwendet, daß $a \in [\Leftrightarrow 1, 1]$ ist.

Mittels $a = \pm 1$ auf Σ_{s_0} vereinfacht sich (31) zu:

$$(32) \quad \nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma = \left(\pm \frac{h'}{W} \Leftrightarrow \cos \gamma \right) + \left(\frac{\alpha^2 C}{W} \pm T_6 \right) s^{\alpha-1} + \left(\left(\alpha^2 C T_3 \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha(h + a\alpha h') \frac{1}{W} \pm T_5 \mp \frac{\alpha^2 h'}{2W} \Big) s^{2\alpha-2} + O(s^{3\alpha-3}) \\
& + O(s^{\beta-\alpha-1}) \quad \text{auf } \Sigma_{s_0}.
\end{aligned}$$

Es werden die Größen C , h , g und f so gewählt, daß die Bedingungen des Satzes 3.7 erfüllt sind. Die Funktion h wird so bestimmt, daß der Koeffizient von $s^{-\alpha}$ in (29) verschwindet, daß heißt, h ist Lösung der Differentialgleichung $(\frac{h'}{W})' \Leftrightarrow \kappa C = 0$. Die bei der ersten Integration dieser Differentialgleichung entstehende Integrationskonstante $C_{h,1}$ und die Konstante C werden so gewählt, daß der Absolutteil in der Randbedingung (32) verschwindet. Es folgt:

$$(33) \quad C = \frac{\cos \gamma}{\kappa}$$

$$C_{h,1} = 0$$

$$(34) \quad h(a) = \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\kappa} \sqrt{1 \Leftrightarrow a^2 \cos^2 \gamma} + C_{h,2}.$$

$C_{h,2}$ ist die zweite, noch frei wählbare Integrationskonstante von h . Da $\gamma > 0$ ist, ist h analytisch auf $[\Leftrightarrow 1, 1]$ und es gilt:

$$h' = \frac{\alpha C a \cos \gamma}{\sqrt{1 \Leftrightarrow a^2 \cos^2 \gamma}}$$

$$W = \frac{\alpha C}{\sqrt{1 \Leftrightarrow a^2 \cos^2 \gamma}}$$

$$\frac{h'}{W} = a \cos \gamma.$$

Die Funktion g wird so bestimmt, daß der Koeffizient von s^{-1} in (29) verschwindet:

$$(35) \quad T_6' = \kappa h \Leftrightarrow a \alpha^2 C \left(\frac{1}{W} \right)'$$

$$\begin{aligned}
T_6 &= \int \left(\Leftrightarrow \alpha \sqrt{1 \Leftrightarrow a^2 \cos^2 \gamma} \Leftrightarrow \alpha a \left(\sqrt{1 \Leftrightarrow a^2 \cos^2 \gamma} \right)' \right) da + \kappa C_{h,2} a \\
&= \Leftrightarrow \alpha a \sqrt{1 \Leftrightarrow a^2 \cos^2 \gamma} + \kappa C_{h,2} a + C_{g,1},
\end{aligned}$$

$C_{g,1}$ ist eine frei wählbare Integrationskonstante von g . Es werden $C_{h,2}$ und $C_{g,1}$ so bestimmt, daß der Koeffizient von $s^{\alpha-1}$ in (32) null wird:

$$(36) \quad C_{h,2} = 0$$

$$C_{g,1} = 0$$

$$(37) \quad T_6 = \Leftrightarrow \alpha a \sqrt{1 \Leftrightarrow a^2 \cos^2 \gamma}.$$

Es muß noch gezeigt werden, daß (35) bzw. (37) eine (lösbare) Differentialgleichung für g darstellt. Im folgenden bezeichnen die Funktionen $F_i(a)$ ($i = 1, \dots, 5$) stets auf $[\Leftrightarrow 1, 1]$ analytische (und damit beschränkte, integrierbare) Funktionen von a , die nicht von g oder f abhängen.

Aus der Gleichung (37) folgt:

$$\begin{aligned}
& T_6 = F_1(a) \\
\Rightarrow & \frac{g'}{W} + h'T_3 = F_2(a) \\
\Rightarrow & \frac{g'}{W} \Leftrightarrow \frac{h'^2 g'}{W^3} = F_3(a) \\
\Rightarrow & g' = F_4(a) \\
\Rightarrow & g = F_5(a) + C_{g,2},
\end{aligned}$$

womit die Existenz und Analytizität der Funktion g mit der gewünschten Eigenschaft (35) gewährleistet wäre.

Die Funktion g ist durch (35) und die vorherige Wahl von $C_{g,1}$ nur bis auf eine additive Konstante $C_{g,2}$ bestimmt.

Es wird f bestimmt, so daß

$$T_7 + T'_5 + \left(\frac{h'}{W}\right)' \frac{a^2 \alpha^3}{4\alpha \Leftrightarrow 2} \Leftrightarrow \kappa F_5(a) \Leftrightarrow \frac{\kappa C_{g,2}}{2} = 0$$

Im folgenden bezeichnen die Funktionen $F_i(a)$ ($i = 6, 7$) auf $[\Leftrightarrow 1, 1]$ analytische Funktionen von a , die nicht von f oder $C_{g,2}$ abhängen und die Funktionen $F_i(a, C_{g,2})$ ($i = 8, \dots, 12$) auf $[\Leftrightarrow 1, 1]$ analytische Funktionen von a , die nicht von f aber von $C_{g,2}$ abhängen:

$$(38) \quad T'_5 = \Leftrightarrow T_7 \Leftrightarrow \left(\frac{h'}{W}\right)' \frac{a^2 \alpha^3}{4\alpha \Leftrightarrow 2} + \kappa F_5(a) + \frac{\kappa C_{g,2}}{2}$$

$$T'_5 = F_6(a) + \frac{\kappa C_{g,2}}{2}$$

$$(39) \quad T_5 = F_7(a) + \frac{\kappa C_{g,2}}{2} a + C_{f,1},$$

$C_{f,1}$ ist eine frei wählbare Integrationskonstante von f . Es wird $C_{f,1} = 0$ gesetzt.

$$\begin{aligned}
& T_5 = F_8(a, C_{g,2}) \\
\Rightarrow & h'T_4 + \frac{f'}{W} = F_9(a, C_{g,2}) \\
\Rightarrow & \frac{f'}{W} \Leftrightarrow \frac{h'^2 f'}{W^3} = F_{10}(a, C_{g,2}) \\
\Rightarrow & f' = F_{11}(a, C_{g,2}) \\
\Rightarrow & f = F_{12}(a, C_{g,2}) + C_{f,2},
\end{aligned}$$

womit die Existenz und Analytizität der Funktion f mit der gewünschten Eigenschaft gewährleistet wäre. Die zweite freie Integrationskonstante $C_{f,2}$ kann ebenfalls gleich null gesetzt werden.

Mit den bisherigen Wahlen erhält man aus (29) und (32):

Gleichungen des Problems nach Einsetzen der geeigneten Vergleichsfunktion:

$$(40) \quad \operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u = \Leftrightarrow \frac{\kappa C_{g,2}}{2} s^{\alpha-2} \Leftrightarrow \kappa D + O(s^{2\alpha-3}) + O(s^{\beta-2\alpha-1}) \quad \text{in } \Omega_{s_0}$$

$$(41) \quad \nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma = \left(Z^\pm + \frac{\kappa C_{g,2}}{2} \right) s^{2\alpha-2} + O(s^{3\alpha-3}) + O(s^{\beta-\alpha-1}) \quad \text{auf } \Sigma_{s_0}.$$

Die Zahlen Z^\pm bezeichnen zwei von $C_{g,2}$ unabhängige Zahlen für den oberen ($a = 1$) bzw. unteren Rand ($a = \Leftrightarrow 1$). Die Restterme sind nach Konstruktion unabhängig von D .

Es wird $C_{g,2} > 0$ so groß gewählt, daß

$$Z^\pm + \frac{\kappa C_{g,2}}{2} > 0$$

gilt. Weiterhin wird $D > 0$ gewählt, sagen wir zunächst $D = 1$.

Aufgrund der Abschätzungen (40) und (41) kann $s_0 < s^*$ so klein gewählt werden, daß

$$(42) \quad \operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u \leq 0 \quad \text{in } \Omega_{s_0}$$

$$(43) \quad \nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma \geq 0 \quad \text{auf } \Sigma_{s_0}.$$

Sei v die Lösung des Problems (3.1), (3.2) für ein betrachtetes Gebiet Ω , welches die Spitze Ω_{s^*} enthält, so folgt aus Satz 4.1, daß $D \geq 1$ unabhängig von dem speziellen v so groß gewählt werden kann, daß

$$(44) \quad u \geq v \quad \text{auf } \Omega_{s_0}.$$

Dies ändert nichts an der Gültigkeit der Ungleichung (42), da die linke Seite von (42) durch diese Wahl wegen (40) höchstens kleiner wird. Die Ungleichung (43) wird deshalb ebenfalls nicht beeinflusst. Aus (42), (43) und (44) folgt mittels des Vergleichstheorems (Satz 3.7):

$$u \geq v \quad \text{in } \Omega_{s_0}$$

bzw. falls $\alpha > 2$

$$(45) \quad v \Leftrightarrow \frac{\cos \gamma}{\kappa} s^{-\alpha} + \frac{\alpha}{\kappa} \sqrt{1 \Leftrightarrow a^2 \cos^2 \gamma} s^{-1} \leq A_1 \quad \text{in } \Omega_{s_0}$$

mit $A_1 = D + \max_{a \in [-1,1]} \{ |g(a)| s_0^{\alpha-2} + |f(a)| s_0^{2\alpha-3} \} < \infty$

und falls $1 < \alpha \leq 2$

$$(46) \quad v \Leftrightarrow \frac{\cos \gamma}{\kappa} s^{-\alpha} + \frac{\alpha}{\kappa} \sqrt{1 \Leftrightarrow a^2 \cos^2 \gamma} s^{-1} \leq A_1 s^{\alpha-2} \quad \text{in } \Omega_{s_0}$$

mit $A_1 = D s_0^{2-\alpha} + \max_{a \in [-1,1]} \{ |g(a)| + |f(a)| s_0^{\alpha-1} \} < \infty$.

Bemerkung: Die Ungleichungen (45) bzw. (46) gelten dann erst recht und mit unverändertem A_1 auf $\Omega_{s'_0}$ für $0 < s'_0 \leq s_0$, da $\Omega_{s'_0} \subset \Omega_{s_0}$.

Andererseits kann $C_{g,2} < 0$ so klein gewählt werden, daß der Koeffizient von $s^{2\alpha-2}$ in (41) negativ wird. Es wird $D < 0$ gewählt, sagen wir wieder zunächst $D = \Leftrightarrow 1$. Damit kann s_0 so klein gewählt werden, daß:

$$(47) \quad \operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u \geq 0 \quad \text{in } \Omega_{s_0}$$

$$(48) \quad \nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma \leq 0 \quad \text{auf } \Sigma_{s_0}.$$

Mit dem gleichen Argument wie oben kann nun $D \leq \Leftrightarrow 1$ so klein gewählt werden, daß

$$(49) \quad u \leq v \quad \text{auf } \Omega_{s_0},$$

was die Gültigkeit der Ungleichungen (47) und (48) nicht beeinflußt. Durch erneute Anwendung des Vergleichstheorems folgt aus (47), (48), (49):

Falls $\alpha < 2$

$$(50) \quad v \Leftrightarrow \frac{\cos \gamma}{\kappa} s^{-\alpha} + \frac{\alpha}{\kappa} \sqrt{1 \Leftrightarrow a^2 \cos^2 \gamma} s^{-1} \geq A_2 \quad \text{in } \Omega_{s_0}$$

mit $A_2 = D \Leftrightarrow \max_{a \in [-1, 1]} \{|g(a)|s_0^{\alpha-2} + |f(a)|s_0^{2\alpha-3}\} > \Leftrightarrow \infty$

und falls $1 < \alpha \leq 2$

$$(51) \quad v \Leftrightarrow \frac{\cos \gamma}{\kappa} s^{-\alpha} + \frac{\alpha}{\kappa} \sqrt{1 \Leftrightarrow a^2 \cos^2 \gamma} s^{-1} \geq A_2 s^{\alpha-2} \quad \text{in } \Omega_{s_0}$$

mit $A_2 = D s_0^{2-\alpha} \Leftrightarrow \max_{a \in [-1, 1]} \{|g(a)| + |f(a)|s_0^{\alpha-1}\} > \Leftrightarrow \infty$.

Mit der Wahl $A = \max\{A_1, \Leftrightarrow A_2\}$ erhält man aus (45) bzw. (46) und (50) bzw. (51) sowie der Bemerkung zu (45), (46) die Behauptung. Da nur die Lösungseigenschaft von v auf Ω_{s^*} , Σ_{s^*} verwendet wurde, also die Lösungseigenschaft auf einem Teilgebiet vom Ursprungsgebiet Ω und keine weiteren Lösungs- oder Wachstumsbedingungen von v in Ω gestellt werden mußten, ist das Resultat auf alle Gebiete, die eine Spitze der Form $\Omega^* \supset \Omega_{s^*}$ enthalten, anwendbar, das heißt, A und s_0 sind unabhängig von der speziellen betrachteten Lösung v bzw. unabhängig von der speziellen Gestalt von Ω . A und s_0 sind nur abhängig von der Form der Spitze (f_1, f_2, s^*) und von den Parametern des Kapillarflächenproblems (κ, γ) . \square

A.3. Beweis zu Satz 4.2b

(Verallgemeinerung von Satz 4.2a)

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= a_1 x_1^\alpha \\ f_2(x_1) &= a_2 x_1^\alpha \end{aligned} \quad \alpha > 1, \quad a_1 > a_2$$

Mittels der Transformation

$$\begin{aligned} a &= \frac{1+b}{2}a_1 + \frac{1 \Leftrightarrow b}{2}a_2 & b &\in [\Leftrightarrow 1, 1] \\ \frac{d}{da} &= \frac{2}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \frac{d}{db} \end{aligned}$$

kann der Beweis zu Satz 4.2a auf diesen Fall verallgemeinert werden. Des weiteren ändert sich die Randbedingung (31). Man erhält:

$$(52) \quad \operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u = \left(\frac{4}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \left(\frac{h'}{\sqrt{\alpha^2 C^2 + \frac{4}{(a_1 - a_2)^2} h'^2}} \right)' \Leftrightarrow \kappa C \right) s^{-\alpha} + \dots$$

$$(53) \quad \nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma_{1,2} = \left(\pm \frac{2}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \frac{h'}{\sqrt{\alpha^2 C^2 + \frac{4}{(a_1 - a_2)^2} h'^2}} \Leftrightarrow \cos \gamma_{1,2} \right) + \dots$$

wobei h jetzt eine analytische Funktion von b ist und in der Randbedingung für $b = 1$ der Winkel γ_1 und das positive Vorzeichen bzw. für $b = \Leftrightarrow 1$ der Winkel γ_2 und das negative Vorzeichen zu nehmen sind.

Wie im Beweis zu Satz 4.2a werden aus den Koeffizienten der führenden Terme in (52) und (53) die Größen C , $C_{h,1}$ und h bestimmt. Es folgt:

$$(54) \quad C = \frac{\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2}{(a_1 \Leftrightarrow a_2) \kappa}$$

$$C_{h,1} = \frac{\cos \gamma_1 \Leftrightarrow \cos \gamma_2}{2}$$

$$(55) \quad h(b) = \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\kappa} \sqrt{1 \Leftrightarrow \left(\frac{\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2}{2} b + \frac{\cos \gamma_1 \Leftrightarrow \cos \gamma_2}{2} \right)^2} + C_{h,2}.$$

Die Funktion g und die Konstanten $C_{h,2}$, $C_{g,1}$ werden ebenfalls wie im Beweis zu Satz 4.2a bestimmt:

$$\begin{aligned} T'_6 &= \Leftrightarrow \alpha^2 C \left(\frac{1+b}{2}a_1 + \frac{1 \Leftrightarrow b}{2}a_2 \right) \left(\frac{1}{W} \right)' + \frac{a_1 \Leftrightarrow a_2}{2} \kappa h \\ &= \kappa \left(\frac{1+b}{2}a_1 + \frac{1 \Leftrightarrow b}{2}a_2 \right) h' + \frac{a_1 \Leftrightarrow a_2}{2} \kappa h \\ T_6 &= \Leftrightarrow \alpha \left(\frac{1+b}{2}a_1 + \frac{1 \Leftrightarrow b}{2}a_2 \right) \sqrt{1 \Leftrightarrow \left(\frac{\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2}{2} b + \frac{\cos \gamma_1 \Leftrightarrow \cos \gamma_2}{2} \right)^2} \\ &\quad + \frac{a_1 \Leftrightarrow a_2}{2} \kappa C_{h,2} b + C_{g,1} \end{aligned}$$

$$(56) \quad \begin{aligned} C_{h,2} &= 0 \\ C_{g,1} &= 0. \end{aligned}$$

Ansonsten wird völlig analog zum Beweis zu Satz 4.2a verfahren. Damit folgt die Behauptung, wenn man abschließend noch b durch a ersetzt. \square

A.4. Beweis zu Satz 4.3a

(Führender Term der Lösung in allgemeiner Spitze)

Die Funktionen $f_1(x_1)$ und $f_2(x_1)$ seien analytisch in $x_1 = 0$, und es gelte für eine natürliche Zahl $n > 1$:

$$\begin{aligned} f_1(x_1) &= a_1 x_1^n + b_1 x_1^{n+1} + O(x_1^{n+2}) \\ f_2(x_1) &= a_2 x_1^n + b_2 x_1^{n+1} + O(x_1^{n+2}) \end{aligned} \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad a_1 > a_2.$$

Es werden krummlinige Koordinaten eingeführt:

$$(1) \quad x_2(a, x_1) = \frac{a+1}{2} f_1(x_1) + \frac{1 \Leftrightarrow a}{2} f_2(x_1) \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \in [\Leftrightarrow 1, 1]$$

$$(2) \quad a = \frac{2x_2 \Leftrightarrow f_1(x_1) \Leftrightarrow f_2(x_1)}{f_1(x_1) \Leftrightarrow f_2(x_1)}$$

$$(3) \quad s = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + x_{2,x_1}^2(a, \xi)} d\xi.$$

Zur Abkürzung bezeichnen im folgenden die Größen $c_i(a)$ auf $[\Leftrightarrow 1, 1]$ analytische Funktionen von a . Diese Funktionen werden nicht explizit angegeben, wenn dies für den Beweis nicht notwendig ist. Gleichung (3) wird analog zum Beweis von Satz 4.2 entwickelt und nach x_1 aufgelöst:

$$s = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + (c_1(a)\xi^{n-1} + c_2(a)\xi^n + O(\xi^{n+1}))^2} d\xi,$$

wobei $c_1(a) = \frac{a+1}{2}na_1 + \frac{1-a}{2}na_2$ gesetzt wurde.

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{x_1} \left(1 + \frac{c_1(a)^2}{2} \xi^{2n-2} + c_3(a)\xi^{2n-1} + O(\xi^{2n}) \right) d\xi \\ (4) \quad &= x_1 + \frac{c_1(a)^2}{4n \Leftrightarrow 2} x_1^{2n-1} + c_4(a)x_1^{2n} + O(x_1^{2n+1}). \end{aligned}$$

Bemerkung: Im Gegensatz zum Beweis von Satz 4.2 hat man hier sofort (konvergente) Potenzreihen vorliegen.

Durch den Ansatz $x_1 = s + g_1 s^{2n-1} + g_2 s^{2n} + O(s^{2n+1})$ mit den nur von a abhängigen Größen g_i folgt aus (4) mittels Koeffizientenvergleichs:

$$\begin{aligned} s &= s + g_1 s^{2n-1} + g_2 s^{2n} + O(s^{2n+1}) + \frac{c_1(a)^2}{4n \Leftrightarrow 2} (s^{2n-1} + O(s^{4n-3})) \\ &\quad + c_4(a) (s^{2n} + O(s^{4n-2})) \\ \Rightarrow \quad g_1 &= \Leftrightarrow \frac{c_1(a)^2}{4n \Leftrightarrow 2} \\ g_2 &= \Leftrightarrow c_4(a) \\ (5) \quad x_1 &= s \Leftrightarrow \frac{c_1(a)^2}{4n \Leftrightarrow 2} s^{2n-1} \Leftrightarrow c_4(a) s^{2n} + O(s^{2n+1}). \end{aligned}$$

Aus (5) folgt mittels (1) eine Darstellung von x_2 in krummlinigen Koordinaten:

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{a+1}{2} (a_1 x_1^n + b_1 x_1^{n+1} + O(x_1^{n+2})) + \frac{1 \Leftrightarrow a}{2} (a_2 x_1^n + b_2 x_1^{n+1} + O(x_1^{n+2})) \\
&= \frac{a+1}{2} a_1 s^n + O(s^{3n-2}) + \frac{a+1}{2} b_1 s^{n+1} + O(s^{3n-1}) + O(s^{n+2}) \\
&\quad + \frac{1 \Leftrightarrow a}{2} a_2 s^n + \frac{1 \Leftrightarrow a}{2} b_2 s^{n+1} \\
(6) \quad &= \frac{c_1(a)}{n} s^n + c_5(a) s^{n+1} + O(s^{n+2}).
\end{aligned}$$

Bemerkung: Es gilt $3n \Leftrightarrow 2 \geq n + 2$.

Es werden nun die Ableitungen von a und s nach x_1 und x_2 berechnet. Die Restglieder verhalten sich bei Differentiation wie die Restglieder im Beweis von Satz 4.2, das heißt, Lemma A.2 ist anwendbar (siehe Beweis zu Satz 4.2). Hier liegen sogar reine Potenzreihen in s bzw. x_1 vor, wenn man eventuelle singuläre Terme ausklammert.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial x_1} &= \left\{ (\Leftrightarrow n(a_1 + a_2)x_1^{n-1} \Leftrightarrow (n+1)(b_1 + b_2)x_1^n + O(x_1^{n+1})) \left((a_1 \Leftrightarrow a_2)x_1^n \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (b_1 \Leftrightarrow b_2)x_1^{n+1} + O(x_1^{n+2}) \right) \Leftrightarrow \left[2x_2 \Leftrightarrow \left((a_1 + a_2)x_1^n + (b_1 + b_2)x_1^{n+1} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + O(x_1^{n+2}) \right) \right] \left[n(a_1 \Leftrightarrow a_2)x_1^{n-1} + (n+1)(b_1 \Leftrightarrow b_2)x_1^n + O(x_1^{n+1}) \right] \right\} \\
&\quad \cdot \left\{ (a_1 \Leftrightarrow a_2)x_1^n + (b_1 \Leftrightarrow b_2)x_1^{n+1} + O(x_1^{n+2}) \right\}^{-2} \\
(7) \quad &= c_6(a) \frac{1}{s} + c_7(a) + O(s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial x_2} &= \frac{2}{f_1(x_1) \Leftrightarrow f_2(x_1)} \\
&= 2x_1^{-n} \left((a_1 \Leftrightarrow a_2) + (b_1 \Leftrightarrow b_2)x_1 + O(x_1^2) \right)^{-1} \\
&= 2x_1^{-n} \left\{ \frac{1}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \Leftrightarrow \frac{1}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \left((b_1 \Leftrightarrow b_2)x_1 + O(x_1^2) \right) + O(x_1^2) \right\} \\
(8) \quad &= \frac{2}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \frac{1}{s^n} + \frac{c_8(a)}{s^{n-1}} + O\left(\frac{1}{s^{n-2}}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s}{\partial x_1} &= 1 + \frac{c_1(a)^2}{2} x_1^{2n-2} + O(x_1^{2n-1}) + \left(\frac{c_1(a)c_1'(a)}{2n \Leftrightarrow 1} x_1^{2n-1} + O(x_1^{2n}) \right) \frac{\partial a}{\partial x_1} \\
(9) \quad &= 1 + c_9(a) s^{2n-2} + O(s^{2n-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial s}{\partial x_2} &= \left(\frac{c_1'(a)c_1(a)}{2n \Leftrightarrow 1} x_1^{2n-1} + c_4'(a) x_1^{2n} + O(x_1^{2n+1}) \right) \frac{\partial a}{\partial x_2} \\
(10) \quad &= c_{10}(a) s^{n-1} + c_{11}(a) s^n + O(s^{n+1})
\end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (7) bis (10) erhält man die Differentialoperatoren in krummlinigen Koordinaten.

Differentialoperatoren in krummlinigen Koordianten:

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} = (1 + c_9(a)s^{2n-2} + O(s^{2n-1})) \frac{\partial}{\partial s} + \left(\frac{c_6(a)}{s} + c_7(a) + O(s) \right) \frac{\partial}{\partial a}$$

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = (c_{10}(a)s^{n-1} + c_{11}(a)s^n + O(s^{n+1})) \frac{\partial}{\partial s} + \left(\frac{2}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \frac{1}{s^n} + \frac{c_8(a)}{s^{n-1}} + O\left(\frac{1}{s^{n-2}}\right) \right) \frac{\partial}{\partial a}.$$

Die Vergleichsfunktion hat die folgende Form:

Vergleichsfunktion:

$$(13) \quad u(a, s) = \frac{C}{s^n} + \frac{D}{s^{n-1}} + E + \frac{h(a)}{s} + g(a)$$

mit zunächst noch unbestimmten, auf $[\Leftrightarrow 1, 1]$ analytischen Funktionen $h(a)$, $g(a)$ und Konstanten $C > 0$, D und E .

Es werden wie im Beweis zu Satz 4.2 die Ausdrücke $\operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u$ in Ω_{s_0} und $\nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma$ auf Σ_{s_0} berechnet, um danach das Vergleichstheorem anwenden zu können. Es ist notwendig, eine Fallunterscheidung durchzuführen.

1. Fall: $n \geq 3$

$$(14) \quad u_{x_1} = \Leftrightarrow \frac{nC}{s^{n+1}} \Leftrightarrow \frac{(n \Leftrightarrow 1)D}{s^n} + O\left(\frac{1}{s^{n-1}}\right)$$

$$u_{x_2} = \frac{2}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \left(\frac{h'}{s^{n+1}} + \frac{g'}{s^n} \right) + c_8(a) \frac{h'}{s^n} + O\left(\frac{1}{s^{n-1}}\right)$$

$$(15) \quad = \frac{2}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \frac{h'}{s^{n+1}} + \frac{\frac{2}{a_1 - a_2} g' + c_8(a) h'}{s^n} + O\left(\frac{1}{s^{n-1}}\right)$$

Aus (14) und (15) folgt:

$$(16) \quad 1 + |\nabla u|^2 = W^2 \frac{1}{s^{2n+2}} + T_1 \frac{1}{s^{2n+1}} + O\left(\frac{1}{s^{2n}}\right)$$

mit den Abkürzungen

$$W = \sqrt{n^2 C^2 + \frac{4h'^2}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2}}$$

$$T_1 = 2n(n \Leftrightarrow 1)CD + \frac{4h'}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \left(\frac{2}{a_1 \Leftrightarrow a_2} g' + c_8(a) h' \right),$$

weiterhin

$$(17) \quad (1 + |\nabla u|^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{s^{n+1}}{W} \Leftrightarrow \frac{T_1}{2W^3} s^{n+2} + O(s^{n+3}).$$

Aus (14), (15) und (17) folgen die Koordinaten des Vektors Tu sowie unter erneuter Anwendung von (11), (12) deren Ableitungen:

$$\begin{aligned}
(18) \quad \frac{u_{x_1}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} &= \Leftrightarrow \frac{nC}{W} + T_3 s + O(s^2) \\
T_3 &= \frac{nCT_1}{2W^3} \Leftrightarrow \frac{(n \Leftrightarrow 1)D}{W} \\
\left(\frac{u_{x_1}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right)_{x_1} &= (1 + c_9 s^{2n-2} + O(s^{2n-1})) (T_3 + O(s)) + \left(\frac{c_6(a)}{s} + c_7(a) \right. \\
&\quad \left. + O(s) \right) \left(\left(\frac{nC}{W} \right)' + T_3' s + O(s^2) \right) \\
(19) \quad &= \Leftrightarrow c_6(a) \left(\frac{nC}{W} \right)' \frac{1}{s} + T_4 + O(s) \\
T_4 &= T_3 + c_6(a) T_3' \Leftrightarrow c_7(a) \left(\frac{nC}{W} \right)'.
\end{aligned}$$

Mit der Abkürzung

$$T_5 = \frac{2g'}{a_1 \Leftrightarrow a_2} + c_8(a)h'$$

erhält man weiterhin

$$\begin{aligned}
(20) \quad \frac{u_{x_2}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} &= \left(\frac{2h'}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \frac{1}{s^{n+1}} + \frac{T_5}{s^n} + O\left(\frac{1}{s^{n-1}}\right) \right) \left(\frac{s^{n+1}}{W} \right. \\
&\quad \left. \Leftrightarrow \frac{T_1}{2W^3} s^{n+2} + O(s^{n+3}) \right) \\
&= \frac{2h'}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \frac{1}{W} + T_6 s + O(s^2) \\
T_6 &= \Leftrightarrow \frac{h'T_1}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W^3} + \frac{T_5}{W} \\
(21) \quad \left(\frac{u_{x_2}}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right)_{x_2} &= \frac{4}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \left(\frac{h'}{W} \right)' \frac{1}{s^n} + T_7 \frac{1}{s^{n-1}} + O\left(\frac{1}{s^{n-2}}\right) \\
T_7 &= \frac{2T_6'}{a_1 \Leftrightarrow a_2} + c_8(a) \left(\frac{2h'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W} \right)'.
\end{aligned}$$

Aus (19) und (21) erhält man eine Entwicklung für $\operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u$.

Entwicklung für $\operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u$ im 1. Fall:

$$\begin{aligned}
(22) \quad \operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u &= \left(\frac{4}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \left(\frac{h'}{W} \right)' \Leftrightarrow \kappa C \right) \frac{1}{s^n} + (T_7 \Leftrightarrow \kappa D) \frac{1}{s^{n-1}} \Leftrightarrow \kappa E \\
&\quad + O\left(\frac{1}{s^{n-2}}\right),
\end{aligned}$$

wobei der Term $O\left(\frac{1}{s^{n-2}}\right)$ unabhängig von E ist.

Es wird der äußere Normaleneinheitsvektor auf Σ_{s_0} bestimmt, um den Ausdruck $\nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma$ auf Σ_{s_0} berechnen zu können.

$$(23) \quad \nu = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + f'_{1,2}(x_1)^2}} \begin{pmatrix} \Leftrightarrow f'_{1,2}(x_1) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dabei ist auf den Teilen des Randes mit $a = 1$ das positive Vorzeichen und $f'_1(x_1)$, im Falle $a = \Leftrightarrow 1$ das negative Vorzeichen und $f'_2(x_1)$ zu nehmen.

$$(24) \quad \begin{aligned} f'_{1,2}(x_1) &= na_{1,2}x_1^{n-1} + (n+1)b_{1,2}x_1^n + O(x_1^{n+1}) \\ &= na_{1,2}s^{n-1} + (n+1)b_{1,2}s^n + O(s^{n+1}) \\ \frac{1}{\sqrt{1 + f'_{1,2}(x_1)^2}} &= 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}f'_{1,2}(x_1)^2 + O(f'_{1,2}(x_1)^4) \\ \nu &= \pm \begin{pmatrix} \Leftrightarrow na_{1,2}s^{n-1} \Leftrightarrow (n+1)b_{1,2}s^n + O(s^{n+1}) \\ 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}n^2a_{1,2}^2s^{2n-2} + O(s^{2n-1}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aus (18), (20) und (24) folgt eine Entwicklung für $\nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma$.

Entwicklung für $\nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma$ im 1. Fall:

$$(25) \quad \nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma = \left(\pm \frac{2h'}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \frac{1}{W} \Leftrightarrow \cos \gamma \right) \pm T_6 s + O(s^2).$$

Der Term $O(s^2)$ ist von E unabhängig.

Die Funktion h wird so bestimmt, daß der Koeffizient von $\frac{1}{s^n}$ in (22) verschwindet.

$$\begin{aligned} \frac{4}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \left(\frac{h'}{W} \right)' \Leftrightarrow \kappa C &= 0 \\ \Rightarrow \frac{2h'}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \frac{1}{W} &= \frac{a_1 \Leftrightarrow a_2}{2} \kappa C a + C_{h,1} \end{aligned}$$

Die Konstante C und die erste Integrationskonstante $C_{h,1}$ von h werden so bestimmt, daß der führende Term in (25) am Rand ($a = \pm 1$) ebenfalls verschwindet.

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{a_1 \Leftrightarrow a_2}{2} \kappa C \pm C_{h,1} &= \cos \gamma \\ C_{h,1} &= 0 \\ C &= \frac{2}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \frac{\cos \gamma}{\kappa} \end{aligned}$$

Es folgt:

$$h(a) = \Leftrightarrow \frac{n}{\kappa} \sqrt{1 \Leftrightarrow a^2 \cos^2 \gamma} + C_{h,2}.$$

Bemerkung: Man beachte die Analogie zu den Gleichungen (33) und (34) im Beweis zu Satz 4.2!

Aufgrund der Voraussetzung (3.3) ist h eine auf $[\Leftrightarrow 1, 1]$ analytische Funktion. Es kann $C_{h,2} = 0$ gesetzt werden.

Die Funktion g wird so bestimmt, daß

$$T_7 \Leftrightarrow \frac{\kappa D}{2} = 0.$$

Es bezeichnen im folgenden die Funktionen F_i ($i = 1, 2$) nur von a , aber nicht von D , E und g abhängige und für $a \in [\Leftrightarrow 1, 1]$ analytische Funktionen.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \frac{2T_6'}{a_1 \Leftrightarrow a_2} = F_1(a) + \frac{\kappa D}{2} \\ \Rightarrow \quad & T_6 = F_2(a) + \frac{a_1 \Leftrightarrow a_2}{4} \kappa D a + C_{g,1} \end{aligned}$$

Die Konstante $C_{g,1}$ kann 0 gesetzt werden. Die Funktionen F_i ($i = 3, 4, 5$) bezeichnen nur von a und dem Parameter D abhängige und für $a \in [\Leftrightarrow 1, 1]$ analytische Funktionen.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & T_6 = F_3(a, D) \\ \Rightarrow \quad & \Leftrightarrow \frac{8h'^2}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^3 W^3} g' + \frac{2}{(a_1 \Leftrightarrow a_2) W} g' = F_4(a, D) \\ \Rightarrow \quad & \frac{2n^2 C^2}{(a_1 \Leftrightarrow a_2) W^3} g' = F_4(a, D) \\ \Rightarrow \quad & g(a) = F_5(a, D) + C_{g,2} \end{aligned}$$

Mit der Wahl $C_{g,2} = 0$ ist demnach g eine auf $[\Leftrightarrow 1, 1]$ analytische Funktion, die noch von D abhängt.

Man erhält aus (22) und (25):

Gleichungen des Problems nach Einsetzen der geeigneten Vergleichsfunktion im 1. Fall:

$$(27) \quad \operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u = \Leftrightarrow \frac{\kappa D}{2} \frac{1}{s^{n-1}} \Leftrightarrow \kappa E + O\left(\frac{1}{s^{n-2}}\right)$$

$$(28) \quad \nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma = \left(\frac{a_1 \Leftrightarrow a_2}{4} \kappa D \pm F_2(\pm 1) \right) s + O(s^2).$$

Es kann $D > 0$ so groß gewählt werden, daß

$$\frac{a_1 \Leftrightarrow a_2}{4} \kappa D \pm F_2(\pm 1) > 0.$$

Mit diesem D wird g bestimmt. Es wird E positiv gewählt, sagen wir zunächst $E = 1$. Aufgrund der Abschätzungen (27) und (28) kann $s_0 < s^*$ so klein gewählt werden, daß

$$(29) \quad \operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u \leq 0 \quad \text{in } \Omega_{s_0}$$

$$(30) \quad \nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma \geq 0 \quad \text{auf } \Sigma_{s_0}.$$

Wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der Lösungen v auf Ω_{s_0} (vgl. Beweis zu Satz 4.2) kann $E \geq 1$ so groß gewählt werden, daß

$$(31) \quad u \geq v \quad \text{auf } \Omega_{s_0}.$$

Dies ändert nichts an der Gültigkeit der Ungleichungen (29) und (30), da E in den Resten von (27) und (28) nicht auftritt und die linke Seite von (29) durch diese Wahl höchstens kleiner wird.

Aus den Ungleichungen (29), (30) und (31) folgt durch die Anwendung des Vergleichstheorems (Satz 3.7) und der Tatsache, daß auf $[\frac{1}{2}, 1]$ analytische Funktionen auf diesem Intervall beschränkt sind:

$$(32) \quad v \Leftrightarrow \frac{C}{s^n} \leq \frac{A_1}{s^{n-1}} \quad \text{in } \Omega_{s_0}$$

mit $A_1 = D + E s_0^{n-1} + \max_{a \in [-1, 1]} \{ |h(a)| s_0^{n-2} + |g(a)| s_0^{n-1} \} < \infty$.

Andererseits kann $D < 0$ so klein gewählt werden, daß der Koeffizient von s in (28) negativ wird. Mit diesem D wird erneut g bestimmt. Es wird E negativ gewählt, sagen wir zunächst $E = \frac{1}{2}$. Aufgrund der Abschätzungen (27) und (28) kann dann s_0 so klein gewählt werden, daß

$$(33) \quad \operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u \geq 0 \quad \text{in } \Omega_{s_0}$$

$$(34) \quad \nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma \leq 0 \quad \text{auf } \Sigma_{s_0}.$$

Es kann $E \leq \frac{1}{2}$ so klein gewählt werden, daß

$$(35) \quad u \leq v \quad \text{auf } \Omega_{s_0}.$$

Aus (33), (34) und (35) folgt:

$$(36) \quad v \Leftrightarrow \frac{C}{s^n} \geq \frac{A_2}{s^{n-1}} \quad \text{in } \Omega_{s_0}$$

mit $A_2 = D + E s_0^{n-1} \Leftrightarrow \max_{a \in [-1, 1]} \{ |h(a)| s_0^{n-2} + |g(a)| s_0^{n-1} \} > \frac{1}{2} \infty$.

Durch die Wahl $A = \max\{A_1, \frac{1}{2}A_2\}$ erhält man aus (32) und (36) die Behauptung.

Die Unabhängigkeit der Größen A und s_0 von der speziellen betrachteten Lösung v folgt mit dem gleichen Argument wie im Beweis zu Satz 4.2.

Der Beweis läßt sich nicht auf den Fall $n = 2$ anwenden, da es entscheidend ist, ob der Summand zweithöchster Ordnung von u in (13) von a abhängt oder nicht. Die beteiligten Terme sind dann von etwas anderer Gestalt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit soll dieser Fall gesondert betrachtet werden.

2. Fall: $n = 2$

Für diesen Fall genügt es, eine vereinfachte Vergleichsfunktion zu betrachten.

Vergleichsfunktion im 2. Fall:

$$(37) \quad u = \frac{C}{s^2} + \frac{h(a)}{s} + g(a) + D.$$

Man erhält wie im ersten Fall unter Verwendung von (11), (12):

$$(38) \quad u_{x_1} = \Leftrightarrow \frac{2C}{s^3} + \frac{c_6(a)h' \Leftrightarrow h}{s^2} + O\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$(39) \quad u_{x_2} = \frac{2h'}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \frac{1}{s^3} + \frac{T_1}{s^2} + O\left(\frac{1}{s}\right)$$

mit

$$T_1 = \Leftrightarrow 2Cc_{10}(a) + \frac{2}{a_1 \Leftrightarrow a_2} g' + c_8(a)h'.$$

Unter Verwendung von (38) und (39) folgt:

$$(40) \quad \begin{aligned} 1 + |\nabla u|^2 &= \frac{W^2}{s^6} + \frac{T_2}{s^5} + O\left(\frac{1}{s^4}\right) \\ W &= \sqrt{4C^2 + \left(\frac{2h'}{a_1 \Leftrightarrow a_2}\right)^2} \\ T_2 &= \Leftrightarrow 4C(c_6(a)h' \Leftrightarrow h) + \frac{4h'}{a_1 \Leftrightarrow a_2} T_1 \\ (1 + |\nabla u|^2)^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{W} s^3 \Leftrightarrow \frac{T_2}{2W^3} s^4 + O(s^5). \end{aligned}$$

Aus (38), (39) und (40) folgen:

$$(41) \quad \frac{u_{x_1}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = \Leftrightarrow \frac{2C}{W} + \left(\frac{CT_2}{W^3} + \frac{c_6(a)h' \Leftrightarrow h}{W}\right) s + O(s^2)$$

$$(42) \quad \left(\frac{u_{x_1}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right)_{x_1} = \Leftrightarrow 2Cc_6(a) \left(\frac{1}{W}\right)' \frac{1}{s} + T_3 + O(s)$$

$$\begin{aligned} T_3 &= \frac{CT_2}{W^3} + \frac{c_6(a)h' \Leftrightarrow h}{W} \Leftrightarrow 2Cc_7(a) \left(\frac{1}{W}\right)' \\ &\quad + c_6(a) \left(\frac{CT_2}{W^3} + \frac{c_6(a)h' \Leftrightarrow h}{W}\right)' \end{aligned}$$

$$(43) \quad \frac{u_{x_2}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = \frac{2h'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W} + \left(\frac{T_1}{W} \Leftrightarrow \frac{h'T_2}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W^3}\right) s + O(s^2)$$

$$(44) \quad \left(\frac{u_{x_2}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right)_{x_2} = \frac{4}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \left(\frac{h'}{W}\right)' \frac{1}{s^2} + \frac{T_4}{s} + O(1)$$

$$T_4 = \frac{2}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \left(\frac{T_1}{W} \Leftrightarrow \frac{h'T_2}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W^3}\right)' + c_8(a) \left(\frac{2h'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W}\right)'.$$

Mittels der Gleichungen (42) und (44) kann der Ausdruck $\operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u$ berechnet werden.

Entwicklung für $\operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u$ im 2. Fall:

$$(45) \quad \operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u = \left(\frac{4}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \left(\frac{h'}{W} \right)' \Leftrightarrow \kappa C \right) \frac{1}{s^2} + \left(T_4 \Leftrightarrow 2C c_6(a) \left(\frac{1}{W} \right)' \Leftrightarrow \kappa h \right) \frac{1}{s} \Leftrightarrow \kappa D + O(1),$$

wobei der Term $O(1)$ unabhängig von D ist.

Aus (24) erhält man den Normalenvektor ν für diesen Fall und mittels (41) und (43) folgt:

Entwicklung für $\nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma$ im 2. Fall:

$$(46) \quad \nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma = \left(\pm \frac{2h'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W} \Leftrightarrow \cos \gamma \right) + \left(\pm \frac{4a_{1,2}C}{W} \pm \left(\frac{T_1}{W} \Leftrightarrow \frac{h'T_2}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W^3} \right) \right) s + O(s^2).$$

Die Funktion h und die Konstante C werden zunächst wie im 1. Fall bestimmt. Man erhält ebenfalls (26) bzw. $h(a) = \Leftrightarrow \frac{2}{\kappa} \sqrt{1 \Leftrightarrow a^2 \cos^2 \gamma} + C_{h,2}$ mit der noch frei wählbaren Integrationskonstante $C_{h,2}$.

Die Funktion g wird so bestimmt, daß

$$T_4 \Leftrightarrow 2C c_6(a) \left(\frac{1}{W} \right)' + 2\sqrt{1 \Leftrightarrow a^2 \cos^2 \gamma} \Leftrightarrow \frac{\kappa C_{h,2}}{2} = 0.$$

Es bezeichnen im folgenden die Funktionen F_i ($i = 1, 2, 3$) von $C_{h,2}$, g unabhängige, auf $[\Leftrightarrow 1, 1]$ analytische Funktionen von a :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad T_4 &= F_1(a) + \frac{\kappa C_{h,2}}{2} \\ \Rightarrow \quad \left(\frac{T_1}{W} \Leftrightarrow \frac{h'T_2}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W^3} \right)' &= F_2(a) + \frac{a_1 \Leftrightarrow a_2}{4} \kappa C_{h,2}. \end{aligned}$$

Aus der Integration der letzten Gleichung und der Wahl der Integrationskonstanten $C_{g,1} = 0$ folgt:

$$(47) \quad \frac{T_1}{W} \Leftrightarrow \frac{h'T_2}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W^3} = F_3(a) + \frac{a_1 \Leftrightarrow a_2}{4} \kappa C_{h,2} a.$$

Die Funktionen F_i ($i = 4, \dots, 7$) bezeichnen von g unabhängige, auf $[\Leftrightarrow 1, 1]$ analytische Funktionen:

$$\Rightarrow \quad \frac{T_1}{W} \Leftrightarrow \frac{h'T_2}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W^3} = F_4(a, C_{h,2})$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow & \quad \frac{2g'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W} \Leftrightarrow \frac{8h'^2 g'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^3 W^3} = F_5(a, C_{h,2}) \\
\Rightarrow & \quad g' = F_6(a, C_{h,2}) \\
\Rightarrow & \quad g = F_7(a, C_{h,2}) + C_{g,2},
\end{aligned}$$

das heißt, g ist eine auf $[\Leftrightarrow 1, 1]$ analytische Funktion, die noch von $C_{h,2}$ abhängt. Es kann $C_{g,2} = 0$ gewählt werden.

Mit den bisherigen Wahlen hat die Gleichung (45) die folgende Form:

$$(48) \quad \operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u = \Leftrightarrow \frac{\kappa C_{h,2}}{2} \frac{1}{s} \Leftrightarrow \kappa D + O(1).$$

Aus der Gleichung (46) folgt unter Verwendung des Resultates (47):

$$(49) \quad \nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma = \left(Z^\pm + \frac{a_1 \Leftrightarrow a_2}{4} \kappa C_{h,2} \right) s + O(s^2),$$

wobei Z^\pm zwei Zahlen darstellen, die nicht von $C_{h,2}$ abhängen (für den oberen ($a = 1$) bzw. unteren ($a = \Leftrightarrow 1$) Rand). Es kann folglich $C_{h,2} > 0$ so groß gewählt werden, daß der Koeffizient von s in (49) positiv ist. Mit diesem $C_{h,2}$ kann g bestimmt werden.

Es wird $D > 0$ gewählt, sagen wir zunächst $D = 1$, folglich kann $s_0 < s^*$ so klein gewählt werden, daß

$$(50) \quad \operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u \leq 0 \quad \text{in } \Omega_{s_0}$$

$$(51) \quad \nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma \geq 0 \quad \text{auf } \Sigma_{s_0}.$$

Wegen Satz 4.1 kann $D \geq 1$ so groß gewählt werden, daß

$$(52) \quad u \geq v \quad \text{in } \Omega_{s_0}.$$

Dies beeinflußt nicht die Gültigkeit der Ungleichungen (50) und (51). Aus (50), (51) und (52) folgt

$$(53) \quad u \geq v \quad \text{auf } \Omega_{s_0}.$$

und damit eine obere Schranke für v .

Wie im 1. Fall erhält man eine untere Schranke für v wenn man $C_{h,2}$ und D hinreichend klein wählt, woraus die Behauptung mit einer analogen Definition von A folgt. \square

A.5. Beweis zu Satz 4.3b

(Verallgemeinerung von Satz 4.3a auf unterschiedliche Randkontaktwinkel)

Für den Fall auf $a = \pm 1$ unterschiedlicher, aber jeweils konstanter Randkontaktwinkel $\gamma_{1,2}$ ändert sich im Vergleich zum Beweis zu Satz 4.3a nur der Absolutteil in (25) der auch für alle betrachteten Fälle die gleiche Gestalt hat:

$$(54) \quad \nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma_{1,2} = \left(\pm \frac{2h'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W} \Leftrightarrow \cos \gamma_{1,2} \right) + O(s) \quad \text{auf } \Sigma_{s_0}.$$

Dieser Term bestimmt die Konstanten C , $C_{h,1}$ und damit die Funktion h . Man erhält mittels der Definitionsgleichung für h ($\frac{4}{(a_1 - a_2)^2} \left(\frac{h'}{W}\right)' \Leftrightarrow \kappa C = 0$):

$$(55) \quad \begin{aligned} \frac{a_1 \Leftrightarrow a_2}{2} \kappa C \pm C_{h,1} &= \cos \gamma_{1,2} \\ C &= \frac{\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2}{(a_1 \Leftrightarrow a_2) \kappa} \\ C_{h,1} &= \frac{\cos \gamma_1 \Leftrightarrow \cos \gamma_2}{2} \end{aligned}$$

$$(56) \quad h(a) = \Leftrightarrow \frac{n}{\kappa} \sqrt{1 \Leftrightarrow \left(\frac{\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2}{2} a + \frac{\cos \gamma_1 \Leftrightarrow \cos \gamma_2}{2} \right)^2} + C_{h,2}.$$

Der restliche Beweis verläuft völlig analog zum Beweis von Satz 4.3a. □

A.6. Beweis zu Lemma 4.1 und Satz 4.4

(Existenz von Approximationslösungen und vollständige asymptotische Entwicklung)

Beweis zu Satz 4.4 unter Voraussetzung von Lemma 4.1:

Es werde

- (1) $u = u_k$
- (2) $C = C_{-n}$
- (3) $h(a) = h_{-1}(a)$
- (4) $v = Ds^{k-n+1} + q(a)s^k$
- (5) $w = u + v$

gesetzt, wobei D eine Konstante und $q(a)$ eine auf $[\Leftrightarrow 1, 1]$ analytische Funktion bezeichnet. Die Funktion v wird für den Beweis von Lemma 4.1 so konstruiert, daß w eine neue Approximationslösung ist und für den Beweis von Satz 4.4 so, daß w eine geeignete Vergleichsfunktion darstellt. Dazu werden wie auch schon in den Beweisen zu den Sätzen 4.2 und 4.3 die Ausdrücke $\operatorname{div} Tw \Leftrightarrow \kappa w$ auf Ω_{s_0} und $\nu \circ Tw \Leftrightarrow \cos \gamma_{1,2}$ auf Σ_{s_0} berechnet.

Satz 4.3b entspricht dem Fall $k = 0$ von Satz 4.4, dieser muß deshalb nicht noch einmal bewiesen werden. Es gelte daher im folgenden $k \geq 1$. Satz 4.3b ist weiterhin der Induktionsanfang für den späteren Induktionsbeweis von Lemma 4.1. Zunächst wird aber unter Voraussetzung von Lemma 4.1 Satz 4.4 bewiesen.

Für das Landausche Ordnungssymbol O wird im folgenden vorausgesetzt, daß $F(a, s) = O(s^\beta) \Leftrightarrow |F| \leq cs^\beta$, und c ist unabhängig von $x \in \Omega_{s_0}$ für ein hinreichend kleines s_0 , unabhängig von der Konstanten D und einer später eingeführten Größe η . Des weiteren werde vorausgesetzt, daß

- (6) $q, q', q'' = D \cdot O(1)$
- (7) $|D| \geq 1.$

Bemerkung: Die Bedingung (7) ermöglicht Abschätzungen der Form $D \cdot O(s^\beta) + O(s^\beta) = D \cdot O(s^\beta)$. Man könnte anstelle von (7) auch $|D| \geq \varepsilon$ voraussetzen, wobei ε eine beliebige, aber feste positive Konstante bezeichnet.

Transformiert man das Problem wieder auf krummlinige Koordinaten bezüglich der betrachteten Begrenzungsfunktionen f_1 und f_2 , so erhält man wie im Beweis zu Satz 4.3a die Ableitungsformeln

- (8) $\frac{\partial}{\partial x_1} = (1 + c_1(a)s^{2n-2} + O(s^{2n-1})) \frac{\partial}{\partial s} + \left(\frac{c_2(a)}{s} + c_3(a) + O(s) \right) \frac{\partial}{\partial a}$
- (9) $\frac{\partial}{\partial x_2} = (c_4(a)s^{n-1} + O(s^n)) \frac{\partial}{\partial s} + \left(\frac{2}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \frac{1}{s^n} + \frac{c_5(a)}{s^{n-1}} + O\left(\frac{1}{s^{n-2}}\right) \right) \frac{\partial}{\partial a},$

wobei die $c_i(a)$ wie im Beweis zu Satz 4.3 nicht näher bestimmte, auf $[\Leftrightarrow 1, 1]$ analytische Funktionen bezeichnen, die unabhängig von D und q sind.

Mit diesen Gleichungen folgt:

$$(10) \quad u_{x_1} = \Leftrightarrow n C s^{-n-1} + c_6(a) s^{-n} + O(s^{-n+1})$$

$$(11) \quad u_{x_2} = \frac{2h'}{a_1 \Leftrightarrow a_2} s^{-n-1} + c_7(a) s^{-n} + O(s^{-n+1})$$

$$(12) \quad v_{x_1} = D(k \Leftrightarrow n + 1) s^{k-n} + D \cdot O(s^{k-1})$$

$$(13) \quad v_{x_2} = \frac{2q'}{a_1 \Leftrightarrow a_2} s^{k-n} + D \cdot O(s^{k-n+1}).$$

Um den Ausdruck $\operatorname{div} Tw \Leftrightarrow \kappa w$ unter Ausnutzung von Lemma 4.1 berechnen zu können, wird eine Zerlegung von $\operatorname{div} Tw$ wie in [Mie2] verwendet.

Zerlegung von $\operatorname{div} Tw$:

$$(14) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} Tw &= \left(\frac{w_{x_1}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \sqrt{\frac{1 + |\nabla u|^2}{1 + |\nabla w|^2}} \right)_{x_1} + \left(\frac{w_{x_2}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \sqrt{\frac{1 + |\nabla u|^2}{1 + |\nabla w|^2}} \right)_{x_2} \\ &= \left[\frac{w_{x_1}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \left(1 + \frac{Q}{1 + |\nabla u|^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]_{x_1} + \\ &\quad \left[\frac{w_{x_2}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \left(1 + \frac{Q}{1 + |\nabla u|^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right]_{x_2} \end{aligned}$$

$$(15) \quad Q = 2u_{x_1}v_{x_1} + 2u_{x_2}v_{x_2} + v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2.$$

Mit den Formeln (10) bis (13) folgt:

$$(16) \quad Q = T_1 s^{k-2n-1} + D \cdot O(s^{k-2n}) + D^2 \cdot O(s^{2k-2n})$$

$$T_1 = \frac{8h'q'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \Leftrightarrow 2nCD(k \Leftrightarrow n + 1).$$

Aufgrund der Voraussetzung (6) gilt $T_1 = D \cdot O(1)$.

Es werden nun die bei der Anwendung der Produktregel auf (14) entstehenden Terme entwickelt.

$$1 + |\nabla u|^2 = W^2 s^{-2n-2} + c_8(a) s^{-2n-1} + O(s^{-2n})$$

$$W = \sqrt{n^2 C^2 + \left(\frac{2h'}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \right)^2}$$

$$\frac{1}{1 + |\nabla u|^2} = W^{-2} s^{2n+2} + c_9(a) s^{2n+3} + O(s^{2n+4})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = W^{-1}s^{n+1} + c_{10}(a)s^{n+2} + O(s^{n+3})$$

$$1 + \frac{Q}{1 + |\nabla u|^2} = 1 + \frac{T_1}{W^2}s^{k+1} + D \cdot O(s^{k+2}) + D^2 \cdot O(s^{2k+2})$$

Die Zahlen D und s_0 seien so beschaffen, daß für eine hinreichend kleine positive Größe η (sagen wir zunächst $\eta \leq 1$) gilt

$$(17) \quad |D|s_0^{k+1} \leq \eta.$$

Bemerkung: Analog zur Voraussetzung (7) ermöglicht die Bedingung $\eta \leq 1$ Abschätzungen der Form $O(s^\beta) + \eta O(s^\beta) = O(s^\beta)$. Man könnte dazu auch zunächst $\eta \leq B$ voraussetzen, mit der beliebigen aber festen positiven Konstante B .

Damit folgt:

$$(18) \quad \left(1 + \frac{Q}{1 + |\nabla u|^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{T_1}{2W^2}s^{k+1} + D \cdot O(s^{k+2}) + D^2 \cdot O(s^{2k+2})$$

$$(19) \quad \left(\left(1 + \frac{Q}{1 + |\nabla u|^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)_{x_1} = T_2 s^k + D \cdot O(s^{k+1}) + D^2 \cdot O(s^{2k+1})$$

$$T_2 = \Leftrightarrow \frac{(k+1)T_1}{2W^2} \Leftrightarrow \left(\frac{T_1}{2W^2}\right)' c_2(a)$$

$$(20) \quad \left(\left(1 + \frac{Q}{1 + |\nabla u|^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)_{x_2} = \Leftrightarrow \frac{1}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \left(\frac{T_1}{W^2}\right)' s^{k-n+1} + D \cdot O(s^{k-n+2})$$

$$+ D^2 \cdot O(s^{2k-n+2})$$

$$(21) \quad \frac{w_{x_1}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = \Leftrightarrow \frac{nC}{W} + O(s) + D \cdot O(s^{k+1})$$

$$(22) \quad \frac{w_{x_2}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} = \frac{2h'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W} + O(s) + D \cdot O(s^{k+1})$$

$$(23) \quad \left(\frac{v_{x_1}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right)_{x_1} = \left(\frac{D(k \Leftrightarrow n+1)}{W} s^{k+1} + D \cdot O(s^{k+2})\right)_{x_1}$$

$$= T_3 s^k + D \cdot O(s^{k+1})$$

$$T_3 = D(k \Leftrightarrow n+1) \left(\frac{k+1}{W} + c_2(a) \left(\frac{1}{W}\right)'\right)$$

$$\left(\frac{v_{x_2}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}\right)_{x_2} = \left(\frac{2q'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W} s^{k+1} + D \cdot O(s^{k+2})\right)_{x_2}$$

$$(24) \quad = \frac{4}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \left(\frac{q'}{W}\right)' s^{k-n+1} + D \cdot O(s^{k-n+2}).$$

Aufgrund der speziellen Gestalt der u_k und der Ableitungen (8) und (9) sowie der vorausgesetzten Analytizität der beteiligten Funktionen hat man die Folgerungen

$$\begin{aligned}
& \operatorname{div} T u_k \Leftrightarrow \kappa u_k = O(s^{k-n+1}) \\
\Rightarrow & \operatorname{div} T u_k \Leftrightarrow \kappa u_k = g(a) s^{k-n+1} + O(s^{k-n+2}) \\
& \nu \circ T u_k \Leftrightarrow \cos \gamma_{1,2} = O(s^{k+1}) \\
\Rightarrow & \nu \circ T u_k \Leftrightarrow \cos \gamma_{1,2} = Z^\pm s^{k+1} + O(s^{k+2}),
\end{aligned}$$

wobei $g(a)$ eine auf $[\Leftrightarrow 1, 1]$ analytische Funktion und Z^\pm zwei Zahlen (für den oberen Rand $a = 1$ bzw. unteren Rand $a = \Leftrightarrow 1$) bezeichnen.

Es werde

$$(25) \quad S_1 = \left[\left(\frac{w_{x_1}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)_{x_1} + \left(\frac{w_{x_2}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)_{x_2} \right] \left(1 + \frac{Q}{1 + |\nabla u|^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \kappa u$$

gesetzt. Unter Verwendung der Formeln (18) bis (24), Lemma 4.1 sowie der obigen Folgerung erhält man:

$$\begin{aligned}
(26) \quad S_1 &= \left[\operatorname{div} T u + \frac{4}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \left(\frac{q'}{W} \right)' s^{k-n+1} + D \cdot O(s^{k-n+2}) \right] \left(1 \Leftrightarrow \frac{T_1}{2W^2} s^{k+1} \right. \\
&\quad \left. + D \cdot O(s^{k+2}) + D^2 \cdot O(s^{2k+2}) \right) \Leftrightarrow \kappa u \\
&= \left[\frac{4}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \left(\frac{q'}{W} \right)' \Leftrightarrow \frac{\kappa C T_1}{2W^2} + g(a) \right] s^{k-n+1} + D \cdot O(s^{k-n+2}) \\
&\quad + D^2 \cdot O(s^{2k-n+2}),
\end{aligned}$$

wobei $g(a)$ nach Konstruktion von q , D , η und der Wahl von s_0 unabhängig ist.

Mit der Definition

$$(27) \quad S_2 = \frac{w_{x_1}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \left(1 + \frac{Q}{1 + |\nabla u|^2} \right)^{-\frac{1}{2}}_{x_1} + \frac{w_{x_2}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \left(1 + \frac{Q}{1 + |\nabla u|^2} \right)^{-\frac{1}{2}}_{x_2}$$

folgt

$$(28) \quad S_2 = \Leftrightarrow \frac{2h'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2 W} \left(\frac{T_1}{W^2} \right)' s^{k-n+1} + D \cdot O(s^{k-n+2}) + D^2 \cdot O(s^{2k-n+2}).$$

Aufgrund der Zerlegung (14) erhält man

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} T w \Leftrightarrow \kappa w &= S_1 + S_2 \Leftrightarrow \kappa D s^{k-n+1} \Leftrightarrow \kappa q s^k \\
&= T_4 s^{k-n+1} + D \cdot O(s^{k-n+2}) + D^2 \cdot O(s^{2k-n+2}) \\
T_4 &= \frac{4}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \left(\frac{q'}{W} \right)' \Leftrightarrow \frac{\kappa C T_1}{2W^2} + g(a) \Leftrightarrow \frac{2h'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2 W} \left(\frac{T_1}{W^2} \right)' \\
&\quad \Leftrightarrow \kappa D.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung des Beweises zu Satz 4.3b $(\frac{4}{(a_1 - a_2)^2} (\frac{h'}{W})') = \kappa C)$ läßt sich T_4 vereinfachen:

$$\begin{aligned} T_4 &= \frac{2}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \left(\frac{2q'}{W} \Leftrightarrow \frac{h'T_1}{W^3} \right)' + g(a) \Leftrightarrow \kappa D \\ &= \frac{4n^2 C^2}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \left(\frac{q'}{W^3} \right)' + \frac{4n(k \Leftrightarrow n + 1)CD}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \left(\frac{h'}{W^3} \right)' + g(a) \Leftrightarrow \kappa D. \end{aligned}$$

Damit erhält man:

Entwicklung für $\operatorname{div} Tw \Leftrightarrow \kappa w$:

$$(29) \quad \begin{aligned} \operatorname{div} Tw \Leftrightarrow \kappa w &= \left(\frac{4n^2 C^2}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \left(\frac{q'}{W^3} \right)' + \frac{4n(k \Leftrightarrow n + 1)CD}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \left(\frac{h'}{W^3} \right)' + g(a) \right. \\ &\quad \left. \Leftrightarrow \kappa D \right) s^{k-n+1} + D \cdot O(s^{k-n+2}) + D^2 \cdot O(s^{2k-n+2}). \end{aligned}$$

In zu (29) analoger Weise wird der Ausdruck $\nu \circ Tw$ berechnet.

Zerlegung von Tw :

$$(30) \quad Tw = \begin{pmatrix} \frac{w_{x_1}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \left(1 + \frac{Q}{1 + |\nabla u|^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{w_{x_2}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \left(1 + \frac{Q}{1 + |\nabla u|^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

$$(31) \quad \begin{aligned} Tw &= \begin{pmatrix} \frac{D(k \Leftrightarrow n + 1)}{W} s^{k+1} + D \cdot O(s^{k+2}) + D^2 \cdot O(s^{2k+2}) \\ \frac{2q'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W} s^{k+1} + D \cdot O(s^{k+2}) + D^2 \cdot O(s^{2k+2}) \end{pmatrix} \\ &\quad + Tu \left(1 + \frac{Q}{1 + |\nabla u|^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Für den äußeren Normalenvektor ν auf Σ_{s_0} kann aus dem Beweis zu Satz 4.3a abgelesen werden:

$$(32) \quad \nu = \pm \begin{pmatrix} \Leftrightarrow n a_{1,2} s^{n-1} + O(s^n) \\ 1 + O(s^{2n-2}) \end{pmatrix}.$$

Mittels (31) und Lemma 4.1 folgt hieraus:

$$\nu \circ Tw \Leftrightarrow \cos \gamma_{1,2} = \nu \circ Tu \left(1 + \frac{Q}{1 + |\nabla u|^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \cos \gamma_{1,2} \pm \frac{2q'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W} s^{k+1}$$

$$\begin{aligned}
& + D \cdot O(s^{k+2}) + D^2 \cdot O(s^{2k+2}) \\
(33) \quad & = \left(\pm \frac{2q'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W} \Leftrightarrow \frac{T_1}{2W^2} \cos \gamma_{1,2} + Z^\pm \right) s^{k+1} + D \cdot O(s^{k+2}) \\
& + D^2 \cdot O(s^{2k+2}).
\end{aligned}$$

Die Zahlen Z^\pm sind dabei von q , D , s_0 und η unabhängig. Für den oberen Rand ($a = 1$) ist das positive Zeichen und γ_1 zu nehmen, für den unteren ($a = \Leftrightarrow 1$) das negative Zeichen und γ_2 .

Die Verwendung des Beweises zu Satz 4.3b ($\pm \frac{2h'}{(a_1 - a_2)W} = \cos \gamma_{1,2}$) liefert:

$$\begin{aligned}
\pm \frac{2q'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W} \Leftrightarrow \frac{T_1}{2W^2} \cos \gamma_{1,2} &= \pm \frac{2}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \left(\frac{q'}{W} \Leftrightarrow \frac{4h'^2 q'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2 W^3} \right) \\
&\quad \pm \frac{2nCD(k \Leftrightarrow n + 1)h'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W^3} \\
&= \pm \frac{2n^2 C^2}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \frac{q'}{W^3} \pm \frac{2nCD(k \Leftrightarrow n + 1)h'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W^3}.
\end{aligned}$$

Damit erhält man aus (33):

Entwicklung für $\nu \circ Tw \Leftrightarrow \cos \gamma_{1,2}$:

$$\begin{aligned}
(34) \quad \nu \circ Tw \Leftrightarrow \cos \gamma_{1,2} &= \left(\pm \frac{2n^2 C^2}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \frac{q'}{W^3} \pm \frac{2nCD(k \Leftrightarrow n + 1)h'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W^3} + Z^\pm \right) s^{k+1} \\
&+ D \cdot O(s^{k+2}) + D^2 \cdot O(s^{2k+2}).
\end{aligned}$$

Um nun Satz 4.4 zu beweisen, werden die Größen D und q so bestimmt, daß die Voraussetzungen des Vergleichstheorems erfüllt sind. Wie bereits erwähnt, kann $k \geq 1$ angenommen werden, da der Fall $k = 0$ bereits durch Satz 4.3b bewiesen ist.

Es wird D gewählt:

$$(35) \quad D = D_0 s_0^{-k}$$

mit der frei wählbaren Konstante $D_0 \neq 0$. Die Bedingungen (7) und (17) bleiben erfüllbar für jedes D_0 , wenn s_0 hinreichend klein gewählt wird.

Sei \tilde{v} die Lösung von (3.1), (4.10) für eines der hier betrachteten Gebiete, so ermöglicht die Verwendung von Satz 4.3b die Abschätzung

$$\tilde{v} \leq u + B s^{-n+1} \quad \text{in } \Omega_{s_0,1}$$

für ein hinreichend kleines $s_{0,1} < s^*$ ($s_{0,i} > 0$ im folgenden). B ist eine positive Konstante unabhängig von D_0 , $s_{0,1}$, η , q und \tilde{v} .

Es folgt:

$$\tilde{v} \leq w + B s^{-n+1} \Leftrightarrow D s^{k-n+1} \Leftrightarrow q(a) s^k \quad \text{in } \Omega_{s_0,1}.$$

Für ein hinreichend kleines $s_{0,2} \leq s_{0,1}$ kann unter Verwendung von Voraussetzung (6) geschlossen werden, daß

$$\tilde{v} \leq w + (B \Leftrightarrow D_0) s_0^{-n+1} + c|D_0| \quad \text{auf } , s_0 \quad \forall s_0 \leq s_{0,2}.$$

Die positive Konstante c ist von D_0 , s_0 und η unabhängig. Es wird $D_0 > B > 0$ gewählt, damit kann $s_{0,3} \leq s_{0,2}$ so klein gewählt werden, daß

$$(36) \quad \tilde{v} \leq w \quad \text{auf } , s_0 \quad \forall s_0 \leq s_{0,3}$$

$$(37) \quad D \geq 1 \quad \forall s_0 \leq s_{0,3}$$

gilt. Es wird q so bestimmt, daß

$$(38) \quad \frac{4n^2 C^2}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \left(\frac{q'}{W^3} \right)' + \frac{4n(k \Leftrightarrow n + 1)CD}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \left(\frac{h'}{W^3} \right)' + g(a) \Leftrightarrow \frac{\kappa D}{2} = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert:

$$(39) \quad \frac{2n^2 C^2}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \frac{q'}{W^3} + \frac{2nCD(k \Leftrightarrow n + 1)h'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W^3} = \frac{(a_1 \Leftrightarrow a_2)\kappa D}{4} a + G(a) + C_{q,1}.$$

Die Integrationskonstante $C_{q,1}$ kann gleich null gesetzt werden, ebenso die bei nochmaliger Integration entstehende zweite Integrationskonstante von q ($C_{q,2}$). Die Funktion $G(a)$ ist nach Konstruktion unabhängig von q , D_0 , s_0 , η . Sie ist eine auf $[\Leftrightarrow 1, 1]$ analytische Funktion. Damit ist unter Verwendung der Eigenschaften der Funktion h aus dem Beweis von Satz 4.3b auch q eine solche. Die Bedingung (6) ist ebenfalls erfüllt, womit q allen gemachten Voraussetzungen genügt.

Aus (29) und (38) folgt

$$\operatorname{div} Tw \Leftrightarrow \kappa w = \Leftrightarrow \frac{\kappa D}{2} s^{k-n+1} + \eta_1 + \eta_2,$$

wobei für die Größen η_1 , η_2 gilt

$$\begin{aligned} |\eta_1| &\leq Dc_1 s^{k-n+2} \\ |\eta_2| &\leq D^2 c_2 s^{2k-n+2} \end{aligned}$$

auf Ω_{s_0} für ein hinreichend kleines s_0 . Die Größen c_1 und c_2 bezeichnen positive, von D_0 , s_0 , η unabhängige Konstanten. Folglich kann $s_{0,4} \leq s_{0,3}$ so klein gewählt werden, daß

$$\begin{aligned} \operatorname{div} Tw \Leftrightarrow \kappa w &\leq \Leftrightarrow \frac{\kappa D}{2} s^{k-n+1} + Dc_1 s^{k-n+2} + D^2 c_2 s^{2k-n+2} \\ &\leq Ds^{k-n+1} \left(\Leftrightarrow \frac{\kappa}{2} + c_1 s_0 + Dc_2 s_0^{k+1} \right) \\ (40) \quad &\leq Ds^{k-n+1} \left(\Leftrightarrow \frac{\kappa}{2} + c_1 s_0 + c_2 \eta \right) \end{aligned}$$

auf Ω_{s_0} $\forall s_0 \leq s_{0,4}$.

Aus (34) und (39) folgt in gleicher Weise

$$\nu \circ Tw \Leftrightarrow \cos \gamma_{1,2} = \left(\frac{(a_1 \Leftrightarrow a_2)\kappa D}{4} \pm G(\pm 1) + Z^\pm \right) s^{k+1} + \eta_3 + \eta_4,$$

wobei für die Größen η_3, η_4 gilt

$$\begin{aligned} |\eta_3| &\leq Dc_3 s^{k+2} \\ |\eta_4| &\leq D^2 c_4 s^{2k+2} \end{aligned}$$

auf Σ_{s_0} für ein hinreichend kleines s_0 . Die Größen c_3 und c_4 bezeichnen positive, von D_0, s_0, η unabhängige Konstanten.

Aufgrund der Darstellung (35) kann $s_{0,5} \leq s_{0,4}$ so klein gewählt werden, daß

$$\frac{(a_1 \Leftrightarrow a_2)\kappa D}{8} \pm G(\pm 1) + Z^\pm \geq 0 \quad \forall s_0 \leq s_{0,5}.$$

Damit kann $s_{0,6} \leq s_{0,5}$ so klein gewählt werden, daß

$$\begin{aligned} \nu \circ Tw \Leftrightarrow \cos \gamma_{1,2} &\geq \frac{(a_1 \Leftrightarrow a_2)\kappa D}{8} s^{k+1} \Leftrightarrow Dc_3 s^{k+2} \Leftrightarrow D^2 c_4 s^{2k+2} \\ (41) \quad &\geq Ds^{k+1} \left(\frac{(a_1 \Leftrightarrow a_2)\kappa}{8} \Leftrightarrow c_3 s_0 \Leftrightarrow c_4 \eta \right) \end{aligned}$$

auf $\Sigma_{s_0} \forall s_0 \leq s_{0,6}$.

Es wird η gewählt:

$$(42) \quad \eta = \min \left\{ \frac{\kappa}{4c_2}, \frac{(a_1 \Leftrightarrow a_2)\kappa}{16c_4}, 1 \right\}.$$

Es wird $s_0 \leq s_{0,6}$ so klein gewählt, daß Bedingung (17) erfüllt ist und daß

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{\kappa}{4} + c_1 s_0 &\leq 0 \\ \frac{(a_1 \Leftrightarrow a_2)\kappa}{16} \Leftrightarrow c_3 s_0 &\geq 0 \end{aligned}$$

gilt. Mit diesem s_0 gelten alle gemachten Voraussetzungen (7), (17), und aus den Ungleichungen (36), (40), (41) folgt:

$$(43) \quad \operatorname{div} Tw \Leftrightarrow \kappa w \leq 0 \quad \text{in } \Omega_{s_0}$$

$$(44) \quad w \geq \tilde{v} \quad \text{auf } , s_0$$

$$(45) \quad \nu \circ Tw \Leftrightarrow \cos \gamma_{1,2} \geq 0 \quad \text{auf } \Sigma_{s_0}.$$

Es kann Satz 3.7 angewendet werden:

$$(46) \quad w \geq \tilde{v} \quad \text{in } \Omega_{s_0}.$$

Es folgt die Existenz einer positiven Konstante A_1 mit

$$(47) \quad \tilde{v} \Leftrightarrow u_k \leq A_1 s^{k-n+1} \quad \text{in } \Omega_{s_0}.$$

Völlig analog erhält man eine untere Schranke für \tilde{v} , wenn man das Resultat von Satz 4.3b in der Form

$$\tilde{v} \geq u \Leftrightarrow B s^{-n+1} \quad \text{in } \Omega_{s_0,1}$$

verwendet und $D_0 < \Leftrightarrow B < 0$ wählt.

Es folgt, daß s_0 auch noch so klein gewählt werden kann, daß außer (47) auch noch für eine negative Konstante A_2 gilt:

$$(48) \quad \tilde{v} \Leftrightarrow u_k \geq A_2 s^{k-n+1} \quad \text{in } \Omega_{s_0}.$$

Aus (47) und (48) folgt die Behauptung des Satzes 4.4, wenn man $A = \max\{A_1, \Leftrightarrow A_2\}$ setzt. \square

Beweis zu Lemma 4.1:

Wir kommen nun zum Beweis von Lemma 4.1. Die Bezeichnungen (1) bis (5) bleiben gültig. Das Symbol O bezeichne wieder das gewohnte Landausche Ordnungssymbol ohne die zusätzliche Vereinbarung. Die Voraussetzungen (6), (7) und (17) werden für den Beweis ebenfalls nicht benötigt. Es gelte wieder $k \geq 0$.

Der Beweis erfolgt mittels vollständiger Induktion. Aus dem Beweis zu Satz 4.3 ist ersichtlich, daß mit der Wahl

$$C_{-n} = \frac{\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)\kappa}$$

$$h_{-1}(a) = \Leftrightarrow \frac{n}{\kappa} \sqrt{1 \Leftrightarrow \left(\frac{\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2}{2} a + \frac{\cos \gamma_1 \Leftrightarrow \cos \gamma_2}{2} \right)^2}$$

gilt

$$\operatorname{div} T u_0 \Leftrightarrow \kappa u_0 = O(s^{-n+1})$$

$$\nu \circ T u_0 \Leftrightarrow \cos \gamma_{1,2} = O(s),$$

womit u_0 dem Induktionsanfang genügt.

Es gelte also die Behauptung für ein $k \geq 0$ (Induktionsvoraussetzung), somit genügt es zu zeigen, daß die Behauptung auch für $k+1$ erfüllt ist. Wie im Beweis zu Satz 4.4 erhält man unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung

$$(49) \quad \operatorname{div} T w \Leftrightarrow \kappa w = \left(\frac{4n^2 C^2}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \left(\frac{q'}{W^3} \right)' + \frac{4n(k \Leftrightarrow n+1)CD}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \left(\frac{h'}{W^3} \right)' + g(a) \right. \\ \left. \Leftrightarrow \kappa D \right) s^{k-n+1} + O(s^{k-n+2})$$

$$(50) \quad \nu \circ T w \Leftrightarrow \cos \gamma_{1,2} = \left(\pm \frac{2n^2 C^2}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \frac{q'}{W^3} \pm \frac{2nCD(k \Leftrightarrow n+1)h'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W^3} + Z^\pm \right) s^{k+1} \\ + O(s^{k+2}).$$

Die Größen $g(a)$ und Z^\pm sind dabei wieder von q und D unabhängig.

Es wird q so bestimmt, daß der Koeffizient von s^{k-n+1} in (49) verschwindet:

$$\frac{4n^2C^2}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \left(\frac{q'}{W^3} \right)' + \frac{4n(k \Leftrightarrow n+1)CD}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)^2} \left(\frac{h'}{W^3} \right)' + g(a) \Leftrightarrow \kappa D = 0.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$(51) \quad \frac{2n^2C^2}{a_1 \Leftrightarrow a_2} \frac{q'}{W^3} + \frac{2nCD(k \Leftrightarrow n+1)h'}{(a_1 \Leftrightarrow a_2)W^3} = \frac{(a_1 \Leftrightarrow a_2)\kappa D}{2} a + G(a) + C_{q,1}.$$

Es werden D und $C_{q,1}$ so gewählt, daß der Koeffizient von s^{k+1} in (50) verschwindet:

$$\frac{(a_1 \Leftrightarrow a_2)\kappa D}{2} \pm G(\pm 1) \pm C_{q,1} + Z^\pm = 0.$$

Da das entsprechende Gleichungssystem die reguläre Koeffizientenmatrix $\begin{pmatrix} \frac{(a_1-a_1)\kappa}{2} & 1 \\ \frac{(a_1-a_1)\kappa}{2} & -1 \end{pmatrix}$ hat, ist dies stets möglich.

Mittels (51) wird durch nochmalige Integration q bestimmt. Mit der selben Argumentation wie im Beweis zu Satz 4.4 erfüllt q damit alle Voraussetzungen. Die noch frei wählbare Integrationskonstante $C_{q,2}$ kann, wie bereits erwähnt, gleich null gesetzt werden.

Damit folgt:

$$(52) \quad \operatorname{div} Tw \Leftrightarrow \kappa w = O(s^{k-n+2})$$

$$(53) \quad \nu \circ Tw \Leftrightarrow \cos \gamma_{1,2} = O(s^{k+2}).$$

Mit der Wahl

$$(54) \quad C_{-n+k+1} = D$$

$$(55) \quad h_k(a) = q$$

folgt

$$(56) \quad w = u_{k+1}.$$

Aus (52), (53) und (56) folgt die Behauptung für $k+1$. Die Anwendung des Induktionsprinzips vervollständigt den Beweis.

Die Unabhängigkeit der Größen s_0 , A , h_i und C_i von der speziellen betrachteten Lösung \tilde{v} folgt mit dem gleichen Argument wie im Beweis zu Satz 4.2. \square

A.7. Einige Bemerkungen zur Spurdefinition

Im Gegensatz zur sonstigen Schreibweise verwenden wir nur für diesen Abschnitt die Notation von [EG], da eine größere Anzahl von Sätzen aus diesem Buch zitiert wird, die in dieser Form nicht in [G2] enthalten sind.

Es soll hier zunächst gezeigt werden, daß die Spur von φ_S für eine Caccioppolimenge $S \subseteq Q = \Omega \times \mathbb{R}$ (damit sind insbesondere die Vergleichsmengen zu U mit inbegriffen) auf $\delta Q_T = \partial\Omega \times [\Leftrightarrow T, T]$ sinnvoll definiert ist und daß gilt:

$$(1) \quad \varphi_S|_{\delta Q_T} = \begin{cases} 1 & : x \in \partial_* S \cap \delta Q_T \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} .$$

Damit wären die Funktionale $\mathcal{F}_T[S]$ stets erklärt, was zur Definition der verallgemeinerten Lösung ausreicht.

Die Funktion $Tf \in L^1(\partial\Omega)$ heißt dabei *Spur von $f \in BV(\Omega)$ auf $\partial\Omega$* , wenn gilt:

$$\int_{\Omega} f \operatorname{div} g \, dx = \Leftrightarrow \int_{\Omega} g \circ d[Df] + \int_{\partial\Omega} (g \circ \nu) Tf \, d\mathcal{H}_{n-1}$$

für alle $g \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ (vgl. ([EG], S. 177), wobei ν der äußere Normaleneinheitsvektor zu Ω ist.

Bemerkung: $[Df]$ ist ein signiertes vektorwertiges Maß (Definition siehe [EG], S. 168).

Für unseren Fall hat man zu zeigen

$$(2) \quad \int_{Q_T} \varphi_S \operatorname{div} g \, dx = \Leftrightarrow \int_{Q_T} g \circ d[D\varphi_S] + \int_{\partial Q_T} (g \circ \nu) \varphi_S|_{\partial Q_T} \, d\mathcal{H}_2$$

für alle $g \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ und eine noch zu bestimmende Funktion $\varphi_S|_{\partial Q_T}$. Der Vektor ν ist der äußere Normaleneinheitsvektor zu ∂Q_T .

Sei S wie oben, wir zerlegen S in zwei Caccioppolimengen $S_1 = S \cap Q_T$ und $S_2 = S \setminus Q_T$ und bestimmen die Spuren von φ_{S_1} und φ_{S_2} auf ∂Q_T . Wir betrachten zunächst die Funktion φ_{S_1} , setzen

$$(3) \quad \varphi_{S_1}|_{\partial Q_T} = \begin{cases} 1 & : x \in \partial_* S_1 \cap \delta Q_T \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

und zeigen, daß mit dieser Definition die Spureigenschaft erfüllt ist.

Aus der Beziehung (Bezeichnungen siehe [EG], Kapitel 5.1)

$$(4) \quad d[D\varphi_{S_1}] = \Leftrightarrow \nu_{S_1} d\|\!|D\varphi_{S_1}\!\|$$

(ν_{S_1} der maßtheoretische äußere Normalenvektor von S_1) und der Tatsache, daß $\|\!|D\varphi_{S_1}\!\|$ das auf $\partial_* S_1$ eingeschränkte Hausdorffmaß ist ([EG], S. 209), folgt:

$$(5) \quad \Leftrightarrow \int_{Q_T} g \circ d[D\varphi_{S_1}] = \int_{\partial_* S_1 \cap Q_T} g \circ \nu_{S_1} \, d\mathcal{H}_2.$$

Aus dem Strukturtheorem für Caccioppolimengen ([EG], S. 205) folgt:

$$\nu_{S_1}(x) = \nu(x)$$

für \mathcal{H}_2 -fast alle $x \in \partial_* S_1 \cap \partial Q_T$ und damit:

$$(6) \quad \int_{\partial Q_T} (g \circ \nu) \varphi_{S_1}|_{\partial Q_T} d\mathcal{H}_2 = \int_{\partial_* S_1 \cap \partial Q_T} g \circ \nu_{S_1} d\mathcal{H}_2.$$

Mittels des verallgemeinerten Gauss-Green Theorems ([EG], S. 209), der Beschränktheit der Mengen Q_T und der Tatsache, daß $S_1 \subseteq Q_T$ kann geschlußfolgert werden:

$$(7) \quad \int_{Q_T} \varphi_{S_1} \operatorname{div} g dx = \int_{\partial_* S_1} g \circ \nu_{S_1} d\mathcal{H}_2$$

für alle $g \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

Unter Berücksichtigung von $S_1 \subseteq Q_T$ folgt aus (5) bis (7) die Spureigenschaft (2) für die Funktion φ_{S_1} .

Wir betrachten nun die Funktion φ_{S_2} und setzen

$$(8) \quad \varphi_{S_2}|_{\partial Q_T} = \begin{cases} 1 & : x \in \partial_* S_2 \cap (\Omega \times \{\Leftrightarrow T, T\}) \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}.$$

Damit gilt für alle $g \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$:

$$(9) \quad \int_{Q_T} \varphi_{S_2} \operatorname{div} g dx = 0$$

$$(10) \quad \Leftrightarrow \int_{Q_T} g \circ d[D\varphi_{S_2}] = \int_{\partial_* S_2 \cap (\Omega \times \{-T, T\})} g \circ \nu_{S_2} d\mathcal{H}_2$$

$$\nu_{S_2}(x) = \Leftrightarrow \nu(x) \quad \text{für } \mathcal{H}_2\text{-fast alle } x \in \Omega \times \{\Leftrightarrow T, T\}$$

$$(11) \quad \int_{\partial Q_T} (g \circ \nu) \varphi_{S_2}|_{\partial Q_T} d\mathcal{H}_2 = \Leftrightarrow \int_{\partial_* S_2 \cap (\Omega \times \{-T, T\})} g \circ \nu_{S_2} d\mathcal{H}_2$$

und folglich die Spurdefinition auch für diese Funktion. Die Linearität der Spurabbildung (vgl. [EG], S. 177) liefert deshalb, daß die Funktion

$$(12) \quad \varphi_S|_{\partial Q_T} = \begin{cases} 1 & : x \in \partial_* S_1 \cap \partial Q_T \vee x \in \partial_* S_2 \cap (\Omega \times \{\Leftrightarrow T, T\}) \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

die Spurdefinition für φ_S erfüllt.

Da sich die Mengen $\partial_* S \cap \partial Q_T$ und $\partial_* S_1 \cap \partial Q_T$ höchstens auf einer \mathcal{H}_2 -Nullmenge unterscheiden, gilt (1). \square

Wie bereits erwähnt, muß eine L^1 -Spur von $u \in BV(\Omega)$ auf $\partial\Omega$ für ein Gebiet Ω (hier kann $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ zugelassen werden) mit Spitzen (das heißt kein Lipschitzgebiet) nicht unbedingt existieren. Setzt man jedoch voraus, daß Ω beschränkt ist, mit stückweise glattem (es genügt C^1) Rand und daß u (wesentlich) beschränkt ist, so existiert stets eine solche Spur.

Beweis: Wir approximieren das Gebiet Ω durch stückweise glatte, aber Lipschitzgebiete Ω_n ($n \in \mathbb{N}$) derart, daß

$$\Omega_i \subset \Omega_j \quad \forall i, j \quad i < j$$

$$(13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{m-1}(\partial\Omega \setminus \partial\Omega_n) = 0$$

$$(14) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_{m-1}(\partial\Omega_n \cap \partial\Omega) = 0$$

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}_m(\Omega_n) = \mathcal{H}_m(\Omega).$$

Die Funktionen

$$u_n = \begin{cases} u & : x \in \Omega_n \\ 0 & : x \in \Omega \setminus \Omega_n \end{cases}$$

haben eine L^1 -Spur Tu_n auf $\partial\Omega_n$ (z. B. [EG], S. 177). Mit der Wahl

$$Su_n = \begin{cases} Tu_n & : x \in \partial\Omega_n \cap \partial\Omega \\ 0 & : x \in \partial\Omega \setminus \partial\Omega_n \end{cases}$$

folgt aufgrund der gleichmäßigen Beschränktheit der Funktionen u_n (und damit auch der Spuren Tu_n auf $\partial\Omega_n$), sowie der Eigenschaften (13) und (14), daß die Funktionen $\{Su_n\} \in L^1(\partial\Omega)$ eine Cauchyfolge bilden. Es bleibt zu zeigen, daß deren Grenzwert $Su \in L^1(\Omega)$ die Spureigenschaft

$$(16) \quad \int_{\Omega} u \operatorname{div} g \, dx = \Leftrightarrow \int_{\Omega} g \circ d[Du] + \int_{\partial\Omega} (g \circ \nu) Su \, d\mathcal{H}_{m-1}$$

$\forall g \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ erfüllt.

Es gilt bereits

$$(17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_n} u_n \operatorname{div} g \, dx = \int_{\Omega} u \operatorname{div} g \, dx$$

$$(18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_n} (g \circ \nu) Tu_n \, d\mathcal{H}_{m-1} = \int_{\partial\Omega} (g \circ \nu) Su \, d\mathcal{H}_{m-1}.$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß

$$(19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_n} g \circ d[Du_n] = \int_{\Omega} g \circ d[Du].$$

Der Beweis von (19) erfolgt analog zum Beweis von Theorem 3 in [EG], S. 175. Die Funktionen u_n sind aufgrund der Beschränktheit von u ($|u| \leq C$ f. ü.) Elemente von $BV(\Omega)$. Sei $\varepsilon > 0$ und $U_1 \subset \Omega$ definiert durch

$$U_1 = \left\{ x \in \Omega \quad : \quad \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \frac{1}{k} \right\},$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ so groß gewählt wird, daß

$$(20) \quad \|Du\|(\Omega \setminus U_1) < \varepsilon$$

(aufgrund der inneren Regularität von $\|Du\|$ ist dies stets möglich), sei weiterhin ζ eine C^1 -Abschneidefunktion auf Ω mit $\zeta \equiv 1$ auf U_1 , $0 \leq \zeta \leq 1$ und $\text{supp}\zeta \subset \Omega$, so folgt unter Verwendung der Definition für $[Du_n]$ ([EG, S. 168]):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g \circ d[Du_n] &= \int_{\Omega} \zeta g \circ d[Du_n] + \int_{\Omega} (1 \Leftrightarrow \zeta) g \circ d[Du_n] \\ (21) \qquad \qquad \qquad &= \Leftrightarrow \int_{\Omega} \text{div}(\zeta g) u_n dx + \int_{\Omega} (1 \Leftrightarrow \zeta) g \circ d[Du_n]. \end{aligned}$$

Bemerkung: Man beachte, daß die Anwendung der Definition von $[Du]$ erfordert, daß der Integrand in $C_0^1(\Omega)$ ist. Dies wird gerade durch die Abschneidefunktion garantiert.

Da $u_n \rightarrow u$ in $L^1(\Omega)$ gilt, erhält man:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Leftrightarrow \int_{\Omega} \text{div}(\zeta g) u_n dx &= \Leftrightarrow \int_{\Omega} \text{div}(\zeta g) u dx \\ &= \int_{\Omega} \zeta g \circ d[Du] \\ (22) \qquad \qquad \qquad &= \int_{\Omega} g \circ d[Du] + \int_{\Omega} (\zeta \Leftrightarrow 1) g \circ d[Du]. \end{aligned}$$

Der letzte Term in (22) kann abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (\zeta \Leftrightarrow 1) g \circ d[Du] \right| &\leq \|g\|_{L^\infty} \|Du\|(\Omega \setminus U_1) \\ (23) \qquad \qquad \qquad &\leq C_1 \varepsilon \end{aligned}$$

mit der von ε (und n) unabhängigen Konstante C_1 .

Des weiteren gilt aufgrund der Definition der Funktionen u_n

$$\|Du\|(\Omega) \geq \|Du_n\|(\Omega) \Leftrightarrow C \mathcal{H}_{m-1}(\cdot, n),$$

also $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|Du_n\|(\Omega) \leq \|Du\|(\Omega)$. Andererseits gilt aufgrund der Unterhalbstetigkeit von $\|Du\|$ bezüglich L^1 -Konvergenz ([EG], S. 172, Theorem 1) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \|Du_n\|(\Omega) \geq \|Du\|(\Omega)$, also kann durch Auswahl einer Teilfolge aus $\{u_n\}$ und erneuter Bezeichnung mit $\{u_n\}$ eine Folge konstruiert werden, mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|Du_n\|(\Omega) = \|Du\|(\Omega).$$

Wegen (23) läßt sich damit n so groß wählen, daß der letzte Term in (21) wie folgt abgeschätzt werden kann:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (1 \Leftrightarrow \zeta) g \circ d[Du_n] \right| &\leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \|Du_n\|(\Omega \setminus U_1) \\ (24) \qquad \qquad \qquad &\leq C_2 \varepsilon, \end{aligned}$$

mit der von ε und n unabhängigen Konstante C_2 . Es folgt aus (21) bis (24), daß für jedes $\varepsilon > 0$ die Zahl n so groß gewählt werden kann, daß

$$\left| \int_{\Omega} g \circ d [Du_n] \Leftrightarrow \int_{\Omega} g \circ d [Du] \right| \leq C_3 \varepsilon$$

mit der von ε und n unabhängigen Konstante C_3 , also

$$(25) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g \circ d [Du_n] = \int_{\Omega} g \circ d [Du].$$

Hieraus folgt Gleichung (19), wenn man berücksichtigt, daß wegen

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} g \circ d [Du_n] \Leftrightarrow \int_{\Omega_n} g \circ d [Du_n] \right| &= \left| \int_{\Omega \setminus \Omega_n} g \circ d [Du_n] \right| \\ &\leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \|Du_n\|(\Omega \setminus \Omega_n) \\ &\leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)} C\mathcal{H}_{m-1}(\cdot, n) \end{aligned}$$

gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g \circ d [Du_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_n} g \circ d [Du_n].$$

Aus den Gleichungen (17), (18) und (19) folgt die Behauptung, wenn man die Spurdefinition für u_n auf $\partial\Omega_n$ aufschreibt und den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ durchführt.

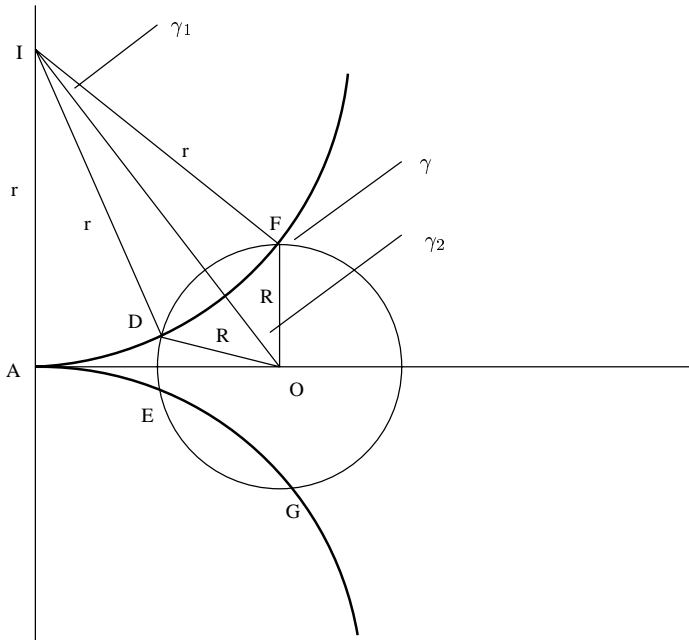
Es ist klar, daß die Spur von u auf $\partial\Omega$ bis auf \mathcal{H}_{m-1} -Nullmengen eindeutig bestimmt ist. Insbesondere existiert also für alle auf Q_T wesentlich beschränkten BV -Funktionen eine L^1 -Spur am Rand δQ_T . \square

Bemerkung: Es ist des weiteren klar, daß eine in diesem Beweis verwendete Approximation (Gleichungen (13) bis (15)) stets existiert. Die Folge $\{\Omega_n\}$ könnte man z. B. schon dadurch erhalten, daß man äußere Spitzen in einer gewissen Umgebung „abschneidet“ und innere Spitzen „überkappt“.

A.8. Rechnung zum Beispiel

Es soll zunächst gezeigt werden, daß auf Ω_0 von der Form von Skizze 8 keine C-singuläre Lösung existieren kann. Es sei dazu $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$. Es soll für ein gegebenes H die Menge Ω_0 (siehe Skizze 8) bestimmt werden und gezeigt werden, daß $\Psi[\Omega_0; H, \gamma, \Omega] > 0$ gilt.

Angenommen Ω_0 sei ein Minimierer von $\Psi[\Omega_0; H, \gamma, \Omega]$. Aus der Winkelbedingung von Satz 6.2 folgt zunächst, daß die beiden Zusammenhangskomponenten von Ω_0 , das sind die Bögen $\text{arc}(D, E)$ und $\text{arc}(F, G)$, Bögen ein- und desselben Kreises mit Radius $R = \frac{1}{2H}$ sein müssen. Wir betrachten zur Beschreibung der Menge Ω_0 die folgende Skizze.



Skizze 10

Aus der Winkelsumme des Dreiecks $\text{fig}(F, I, O)$ folgt:

$$(1) \quad \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma.$$

Da der Bogen $\text{arc}(F, G)$ vollständig in Ω liegen soll (sonst hätte man gerade eine Menge der Form von Skizze 7), muß wegen $\gamma > 0$ gelten:

$$(2) \quad 0 < \gamma_1 < \min\left(\gamma, \frac{\pi}{6}\right).$$

Aus der Berechnung der Höhe im Dreieck $\text{fig}(F, I, O)$ bezüglich der Seite \overline{IO} folgt:

$$(3) \quad r \sin \gamma_1 = R \sin \gamma_2.$$

Es wird nun das Funktional Ψ für die Menge Ω_0 berechnet.

$$(4) \quad |\Sigma_{\Omega_0}| = 4\gamma_1 r$$

$$(5) \quad |, \Omega_0| = R(2\pi \Leftrightarrow 4\gamma_2)$$

$$(6) \quad |\Omega_0| = \pi R^2 \Leftrightarrow r^2 (2\gamma_1 \Leftrightarrow \sin 2\gamma_1) \Leftrightarrow R^2 (2\gamma_2 \Leftrightarrow \sin 2\gamma_2)$$

Aus (4) bis (6) folgt:

$$\begin{aligned}
 \Psi[\Omega_0] &= 4\gamma_1 r \cos \gamma + R(2\pi \Leftrightarrow 4\gamma_2) \Leftrightarrow \pi R + \frac{r^2}{R} (2\gamma_1 \Leftrightarrow \sin 2\gamma_1) \\
 &\quad + R(2\gamma_2 \Leftrightarrow \sin 2\gamma_2) \\
 (7) \quad &= r \left(4\gamma_1 \cos \gamma + (\pi \Leftrightarrow 2\gamma) \frac{R}{r} + 2\gamma_1 \left(\frac{R}{r} + \frac{r}{R} \right) \right. \\
 &\quad \left. \Leftrightarrow \frac{r}{R} \sin 2\gamma_1 \Leftrightarrow \frac{R}{r} \sin 2\gamma_2 \right).
 \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
 \frac{r}{R} \sin 2\gamma_1 + \frac{R}{r} \sin 2\gamma_2 &= 2 \sin (\gamma_1 + \gamma_2) \\
 &= 2 \sin \gamma \\
 \frac{r}{R} &= \frac{\sin (\gamma \Leftrightarrow \gamma_1)}{\sin \gamma_1} \\
 &= \sin \gamma \cot \gamma_1 \Leftrightarrow \cos \gamma \\
 \frac{R}{r} &> \frac{1}{\sin \gamma \cot \gamma_1}
 \end{aligned}$$

läßt sich (7) abschätzen

$$\begin{aligned}
 \Psi[\Omega_0] &> r \left(2\gamma_1 \cos \gamma + (\pi \Leftrightarrow 2\gamma) \frac{R}{r} + 2\gamma_1 \left(\sin \gamma \cot \gamma_1 + \frac{1}{\sin \gamma \cot \gamma_1} \right) \right. \\
 &\quad \left. \Leftrightarrow 2 \sin \gamma \right) \\
 (8) \quad &> 2r \sin \gamma (\gamma_1 \cot \gamma_1 + \gamma_1 \tan \gamma_1 \Leftrightarrow 1).
 \end{aligned}$$

Es wird nun ein technisches Lemma benötigt.

Lemma A.4 (Eine Ungleichung): Für γ_1 gelte (2) so folgt

$$(9) \quad \gamma_1 \cot \gamma_1 + \gamma_1 \tan \gamma_1 > 1.$$

Beweis: Es wird $f(\gamma_1) = \gamma_1 \cot \gamma_1 + \gamma_1 \tan \gamma_1$ gesetzt. Man erhält

$$\begin{aligned}
 (10) \quad \lim_{\gamma_1 \rightarrow 0+0} f(\gamma_1) &= 1 \\
 f'(\gamma_1) &= \cot \gamma_1 + \tan \gamma_1 + \gamma_1 \left(\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \gamma_1} + \frac{1}{\cos^2 \gamma_1} \right) \\
 (11) \quad &= \frac{1}{\sin \gamma_1 \cos \gamma_1} (1 \Leftrightarrow \gamma_1 \cot \gamma_1 + \gamma_1 \tan \gamma_1).
 \end{aligned}$$

Es gilt weiterhin

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow 0+0} \gamma_1 \cot \gamma_1 = 1$$

$$\begin{aligned}
(\gamma_1 \cot \gamma_1)' &= \cot \gamma_1 \Leftrightarrow \frac{\gamma_1}{\sin^2 \gamma_1} \\
&= \frac{1}{\sin^2 \gamma_1} (\cos \gamma_1 \sin \gamma_1 \Leftrightarrow \gamma_1) \\
&< \frac{1}{\sin^2 \gamma_1} (\sin \gamma_1 \Leftrightarrow \gamma_1) \\
&< 0,
\end{aligned}$$

das heißt, man hat

$$(12) \quad \gamma_1 \cot \gamma_1 < 1.$$

Aus (11) und (12) folgt $f'(\gamma_1) > 0$ und mit (10) die Behauptung. \square

Aus (8) folgt mit Lemma A.4

$$(13) \quad \Psi[\Omega_0] > 0.$$

Es kann also keine C-singuläre Lösung auf Ω_0 existieren. Völlig analog kann man Konstellationen ausschließen, in denen eine Menge der Form $\text{fig}(D, E, F, G)$ von Skizze 8 in mehreren Spitzen auftritt.

Es wird nun das Funktional Ψ für die Mengen Ω_0 mit der Form $\text{fig}(D, E, F, G, I, J)$ von Skizze 7 berechnet und die Bedingung (6.31) gestellt. Es gelten von nun an die Bezeichnungen von Skizze 9. Man erhält also aus der Innenwinkelsumme im Viereck $\text{fig}(A, O, D, K)$:

$$(14) \quad \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \gamma.$$

Aus der Zerlegung der Strecke \overline{AK} und der Strecke \overline{AO} folgt:

$$(15) \quad r = r \cos \gamma_1 + R \sin \gamma_2$$

$$(16) \quad x_0 = r \sin \gamma_1 + R \cos \gamma_2.$$

Es wird gesetzt

$$\begin{aligned}
b &= \frac{R}{r} \\
(17) \quad &= \frac{1 \Leftrightarrow \cos \gamma_1}{\sin \gamma_2}.
\end{aligned}$$

Es soll noch gezeigt werden, daß jedem R genau eine Wahl von γ_1 entspricht. Es kann dann γ_1 anstelle von R , und damit auch anstelle von H gewählt werden. Die eine Richtung dieser Äquivalenz ist wegen (17) klar. Aus (17) folgt weiterhin mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, daß es zu jedem R mindestens ein zugehöriges $\gamma_1 \in (0, \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \gamma)$ gibt.

Es wird (15) mit $\cos \gamma_1$ und (16) mit $\sin \gamma_1$ multipliziert, anschließend werden die Gleichungen addiert:

$$(18) \quad r \cos \gamma_1 + x_0 \sin \gamma_1 = r + R \cos \gamma.$$

Es wird (15) mit $\sin \gamma_1$ und (16) mit $\cos \gamma_1$ multipliziert, anschließend werden die Gleichungen subtrahiert:

$$(19) \quad x_0 \cos \gamma_1 \Leftrightarrow r \sin \gamma_1 = R \sin \gamma.$$

Die Gleichungen (18) und (19) werden quadriert und addiert:

$$(20) \quad \begin{aligned} r^2 + x_0^2 &= r^2 + R^2 + 2rR \cos \gamma \\ x_0 &= \sqrt{R^2 + 2Rr \cos \gamma}. \end{aligned}$$

Man beachte, daß wegen der Krümmungsbedingung von Satz 6.2 $x_0 > 0$ gelten muß.

Es wird (18) mit r und (19) mit x_0 multipliziert, die erhaltenen Gleichungen werden addiert:

$$(21) \quad \cos \gamma_1 = \frac{r^2 + R(r \cos \gamma + x_0 \sin \gamma)}{r^2 + x_0^2}.$$

Aus (17) und (21) folgt, daß für jedes R genau ein Winkel $\gamma_1 \in (0, \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \gamma)$ existiert. Damit kann anstelle von R bzw. H auch γ_1 frei gewählt werden und R in Abhängigkeit von γ_1 .

Um tatsächlich eine Menge der Form von Skizze 7 zu erhalten, muß wegen $\gamma_2 > 0$ gelten

$$(22) \quad \gamma_1 \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right] \quad \text{falls } \gamma < \frac{\pi}{3}$$

$$(23) \quad \gamma_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \gamma\right) \quad \text{falls } \gamma \geq \frac{\pi}{3}.$$

Anderenfalls gilt nach dem oben Gesagten $\Omega_0 = \emptyset$ oder $\Omega_0 = \text{fig}(D, E, F, G)$ von Skizze 8, das heißt, keine C-singuläre Lösung existiert.

Es können nun die Größen zur Berechnung von $\Psi[\Omega_0]$ bestimmt werden.

$$(24) \quad |\Sigma_{\Omega_0}| = (\pi \Leftrightarrow 6\gamma_1) r$$

$$(25) \quad |, \Omega_0| = 6\gamma_2 R.$$

Um die Größe $|\Omega_0|$ zu bestimmen, wird zunächst der Flächeninhalt der durch die Bögen $\text{arc}(A, D)$, $\text{arc}(D, E)$ und $\text{arc}(A, E)$ beschriebenen Fläche berechnet. Dazu werden vom Trapez $\text{fig}(D, K, L, E)$ die Kreissektoren $\text{fig}(A, D, K)$ und $\text{fig}(A, L, E)$, sowie das Kreissegment zwischen D und E abgezogen.

$$\begin{aligned} |\text{Trapez fig}(D, K, L, E)| &= 2r^2 \sin \gamma_1 \Leftrightarrow r^2 \sin \gamma_1 \cos \gamma_1 \\ 2 |\text{Sektor fig}(A, D, K)| &= \gamma_1 r^2 \\ |\text{Segment fig}(D, E)| &= \left(\gamma_2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2\gamma_2\right) R^2 \end{aligned}$$

Wegen

$$|\Omega| = \left(\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}\right) r^2$$

erhält man hieraus

$$(26) \quad |\Omega_0| = \left(\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}\right) r^2 \Leftrightarrow 6r^2 \sin \gamma_1 + \frac{3}{2}r^2 \sin 2\gamma_1 + 3\gamma_1 r^2 + 3\gamma_2 R^2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}R^2 \sin 2\gamma_2.$$

Nun kann das Funktional Ψ von Ω_0 berechnet werden:

$$(27) \quad \Psi[\Omega_0] = \frac{r}{b} \left(3b^2 \gamma_2 + b \cos \gamma (\pi \Leftrightarrow 6\gamma_1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}\right) + 6 \sin \gamma_1 \Leftrightarrow \frac{3}{2} \sin 2\gamma_1 \right. \\ \left. \Leftrightarrow 3\gamma_1 + \frac{3}{2}b^2 \sin 2\gamma_2 \right).$$

Die rechte Seite ist wegen (14) und (17) nur von γ_1 abhängig (r ist Parameter). Wir setzen den Term in der äußeren Klammer gleich $f(\gamma_1)$. Es wird nun die Bedingung (6.31) gestellt, dies bedeutet

$$(28) \quad f(\gamma_1) = 0.$$

Es soll untersucht werden, ob diese nichtlineare Gleichung in γ_1 eine Lösung hat. Man erhält zunächst

$$(29) \quad \lim_{\gamma_1 \rightarrow 0+0} f(\gamma_1) = \Leftrightarrow \left(\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}\right) \\ < 0.$$

Um das Verhalten der Funktion f an der rechten Intervallgrenze des Definitionsbereiches bestimmen zu können, ist eine Fallunterscheidung nötig.

1. Fall: $\gamma < \frac{\pi}{3}$

Es folgt

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3b^2 \gamma_2 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2}\right) + 3 \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}b^2 \sin 2\gamma_2 \\ > 3b^2 \gamma_2 + 3 \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{3}}{4}.$$

Hieraus kann mittels $\frac{\gamma_2}{\sin^2 \gamma_2} \geq 1$ geschlußfolgert werden

$$(30) \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) > 3 \left(1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3 \Leftrightarrow \frac{7\sqrt{3}}{4} \\ = \left(3 \Leftrightarrow \sqrt{3}\right) \frac{7 \Leftrightarrow \sqrt{48}}{4} \\ > 0.$$

Mittels Zwischenwertsatz folgt aus (29) und (30), daß (28) mindestens eine Lösung im entsprechenden Definitionsbereich hat.

2. Fall: $\gamma \geq \frac{\pi}{3}$

Man erhält

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \frac{\pi}{2} - \gamma - 0} f(\gamma_1) = +\infty$$

und mit der gleichen Begründung wie oben auch in diesem Fall stets mindestens eine Lösung von (28).

Es soll nun gezeigt werden, daß genau eine Lösung von (28) existiert. Dazu wird die Funktion f auf Monotonie untersucht.

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_2}{d\gamma_1} &= \Leftrightarrow 1 \\ \frac{db}{d\gamma_1} &= \frac{\cos \gamma_2 \Leftrightarrow \sin \gamma}{\sin^2 \gamma_2} \\ \frac{df}{d\gamma_1} &= 2bb' \left(3\gamma_2 + \frac{3}{2} \sin 2\gamma_2 \right) + b^2 (\Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 3 \cos 2\gamma_2) + b' \cos \gamma (\pi \Leftrightarrow 6\gamma_1) \\ &\quad \Leftrightarrow 6b \cos \gamma + 6 \cos \gamma_1 \Leftrightarrow 3 \cos 2\gamma_1 \Leftrightarrow 3 \\ (31) \quad &= T + \frac{\cos \gamma_2 \Leftrightarrow \sin \gamma}{\sin^2 \gamma_2} \cos \gamma (\pi \Leftrightarrow 6\gamma_1), \end{aligned}$$

wobei wegen

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 3 \Leftrightarrow 3 \cos 2\gamma_2 &= \Leftrightarrow 6 \cos^2 \gamma_2 \\ 6 \cos \gamma_1 \Leftrightarrow 3 \cos 2\gamma_1 \Leftrightarrow 3 &= 6 \cos \gamma_1 (1 \Leftrightarrow \cos \gamma_1) \\ &= 6b \cos \gamma_1 \sin \gamma_2 \end{aligned}$$

zur Abkürzung

$$\begin{aligned} (32) \quad T &= \frac{6b}{\sin \gamma_2} \left((\cos \gamma_1 \Leftrightarrow 1) \cos^2 \gamma_2 + \frac{\gamma_2}{\sin \gamma_2} (\cos \gamma_2 \Leftrightarrow \sin \gamma) \right. \\ &\quad \left. + \cos \gamma_2 (\cos \gamma_2 \Leftrightarrow \sin \gamma) \Leftrightarrow \cos \gamma \sin \gamma_2 + \cos \gamma_1 \sin^2 \gamma_2 \right) \end{aligned}$$

gesetzt wurde.

Gleichung (32) läßt sich weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned} (33) \quad T &= \frac{6b}{\sin \gamma_2} \left(\frac{\gamma_2}{\sin \gamma_2} (\cos \gamma_2 \Leftrightarrow \sin \gamma) + \cos \gamma_1 \Leftrightarrow \sin (\gamma + \gamma_2) \right) \\ &= \frac{6b\gamma_2}{\sin^2 \gamma_2} (\cos \gamma_2 \Leftrightarrow \sin \gamma). \end{aligned}$$

Aus (14) und (22), (23) erhält man:

$$\begin{aligned} (34) \quad \gamma_2 &< \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \gamma \\ \cos \gamma_2 &> \sin \gamma. \end{aligned}$$

Aus (31), (33) und (34) folgt:

$$(35) \quad \frac{df}{d\gamma_1} > 0.$$

Die Gleichung (28) hat also genau eine Lösung, damit hat auch (27) genau eine Lösung, und es gibt genau eine Menge Ω_0 der Form $\text{fig}(D, E, F, G, I, J)$ von Skizze 7. Diese kann nun durch näherungsweise Lösen der Gleichung (28) bestimmt werden.

Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen und Symbole

bzw.	: beziehungsweise
f. ü.	: fast überall
o. B. d. A.	: ohne Beschränkung der Allgemeinheit
S.	: Seite
s. o.	: siehe oben
s. u.	: siehe unten
u. a.	: unter anderem
usw.	: und so weiter
vgl.	: vergleiche
z. B.	: zum Beispiel
$\text{arc}(P, Q)$: in Zusammenhang mit Skizzen der durch die Punkte P und Q begrenzte Bogen
(a, s)	: krummlinige Koordinaten
\sim	: asymptotisch äquivalent
β	: Adhäsionskoeffizient
$ \cdot $: entsprechend dimensionaler Inhalt (Länge, Flächeninhalt)
Df	: verallgemeinerter Gradient, Bezeichnung in [G1], [G2] - Zusammenhang mit Bezeichnung in [EG]: $Df = d[Df]$
$[Df]$: signiertes vektorwertiges Maß, Bezeichnung in [EG]
$\ Df\ (\cdot)$: Radonmaß, Bezeichnung in [EG]
$\int Df $: Radonmaß, Bezeichnung in [G2] - Zusammenhang mit Bezeichnung in [EG]: $\int Df = \ Df\ (\cdot)$
dist	: euklidische Abstandsfunktion
$f _{\partial\Omega}$: Spur von f auf dem Rand $\partial\Omega$
f_1, f_2	: zwei reelle Funktionen, die eine Spitze im Koordinatenursprung bilden
$\text{fig}(P_1, \dots, P_n)$: in Zusammenhang mit Skizzen die durch die Punkte P_1 bis P_n umrissene Figur
$\gamma, \gamma_1, \gamma_2$: Randkontaktwinkel
\cdot, A	: $\partial_* A \cap \Omega$
\cdot, s_0	: $\{(a, s) : \Leftrightarrow 1 < a < 1, s = s_0\}$
H	: (vorgegebene) mittlere Krümmung, in der Literatur manchmal auch doppelte mittlere Krümmung
\mathcal{H}_n	: Hausdorffmaß der Dimension n
κ	: Kapillaritätskonstante, $\kappa = \frac{\rho g}{\sigma}$, ρ der lokale Dichteunterschied zwischen der Flüssigkeit und dem angrenzendem Medium, g die Schwerebeschleunigung, σ die Oberflächenspannung

$\subset\subset$: kompakt enthalten in
\circ	: gewöhnliches (euklidisches) Skalarprodukt
ν	: äußerer Normaleneinheitsvektor auf glatten Komponenten von $\partial\Omega$
O, \tilde{O}	: Landausches Ordnungssymbol erster Art, $f(x) = O(g(x))$ $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \leq A$ für $x \rightarrow x_0$, an die Konstante A werden im Text manchmal weitere Bedingungen gestellt
o	: Landausches Ordnungssymbol zweiter Art, $f(x) = o(g(x))$ $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$
Ω	: Gebiet mit stückweise glattem Rand
Ω^*	: eine Teilmenge von Ω , in Kapitel 3 und 4 speziell die Umgebung der Spitze ($\Omega^* = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < x^*, f_2(x_1) < x_2 < f_1(x_1)\}$)
Ω_{s_0}	: Umgebung der Spitze, $\Omega_{s_0} = \{(a, s) : \Leftrightarrow 1 < a < 1, 0 < s < s_0\}$
$\partial\Omega$: Rand von Ω
φ_M	: charakteristische Funktion von M , $\varphi_M = \begin{cases} 1 & : x \in M \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$
Q	: $\Omega \times \mathbb{R}$
Q_T	: $\Omega \times [\Leftrightarrow T, T]$
δQ	: $\partial\Omega \times \mathbb{R}$
δQ_T	: $\partial\Omega \times [\Leftrightarrow T, T]$
Σ_A	: $\partial_* A \cap \partial\Omega$
Σ_{s_0}	: Teil des Randes von Ω , $\Sigma_{s_0} = \{(a, s) : a = \pm 1, 0 < s \leq s_0\}$
$\Sigma_{s_0}^o$: oberer Rand, $\Sigma_{s_0}^o = \Sigma_{s_0} \cap \{(a, s) : a = 1\}$
$\Sigma_{s_0}^u$: unterer Rand, $\Sigma_{s_0}^u = \Sigma_{s_0} \cap \{(a, s) : a = \Leftrightarrow 1\}$
T	: Operator, $Tu = \frac{\nabla u}{\sqrt{1+ \nabla u ^2}}$
U	: Caccioppolimenge, meist Subgraph zu u ($U = \{(x, t) \in Q : t < u(x)\}$)
u, v, w	: Lösung des Kapillarflächenproblems oder Vergleichsfunktion, in Kapitel 5 und 6 verallgemeinerte Lösung oder Funktion
(x_1, x_2)	: kartesische Koordinaten

Literaturverzeichnis

- [BTHSS] Bartels, J., Tenbruggencate, P., Hellwege, K.H., Schäfer, K., Schmidt, E.
Landolt-Börnstein
Zahlenwerte und Funktionen aus Physik, Chemie, Astronomie, Geophysik
und Technik
 II. Band Eigenschaften der Materie in ihren Aggregatzuständen
 3. Teil Schmelzgleichgewichte und Grenzflächenerscheinungen
 Springer-Verlag
 Berlin 1956
- [BG] Bombieri, E., Giusti, E.
Local estimates for the gradient of non-parametric surfaces of prescribed
mean curvature
 Comm. Pure Appl. Math. **26** (1973), S. 381-394
- [CF1] Concus, P., Finn, R.
On capillary free surfaces in the absence of gravity
 Acta Math. **132** (1974), S. 177-198
- [CF2] Concus, P., Finn, R.
On capillary free surfaces in a gravitational field
 Acta Math. **132** (1974), S. 207-223
- [E] Ecker, K.
An interior gradient bound for solutions of equations of capillary type
 Arch. Rat. Mech. Anal. **92** (1986), S. 137-151
- [EG] Evans, L. C., Gariépy, R. F.
Measure theory and fine properties of functions
 CRC Press
 Boca Raton 1992
- [Fin1] Finn, R.
Equilibrium Capillary Surfaces
 Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 284
 Springer-Verlag
 New York 1985
- [Fin2] Finn, R.
Moon surfaces and boundary behaviour of capillary surfaces for perfect
wetting and nonwetting
 Proc. London Math. Soc. **57** (1988), S. 542-576
- [FG] Finn, R., Gerhardt, C.
The internal sphere condition and the capillary problem
 Ann. Mat. Pura Appl. **112** (1977), S. 13-31

- [FH] Finn, R., Hwang, J.-F.
On the comparison principle for capillary surfaces
J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **36** (1989), S. 131-134
- [FN] Finn, R., Neel, R. W.
C-singular solutions of the capillary problem
J. reine angew. Math. **512** (1999), S. 1-25
- [Fio] Fiorenza, R.
Sui problemi di derivata obliqua per le equazioni ellittiche
Ricerche Mat. **8** (1959), S. 83-110
- [GT] Gilbarg, D., Trudinger, N. S.
Elliptic partial differential equations of second order
Springer-Verlag
New York 1977
- [G1] Giusti, E.
Generalized solutions for the mean curvature equation
Pacific J. Math. **88** (1980), S. 297-321
- [G2] Giusti, E.
Minimal surfaces and functions of bounded variation
Birkhäuser
Boston, Basel, Stuttgart 1984
- [LLDR] Lazzer, A. de, Langbein, D., Dreyer, M., Rath, H. J.
Mean curvature of liquid surfaces in cylindrical containers of arbitrary cross-section
Microgravity sci. technol. **IX/3** (1996), S. 208-219
- [LU] Ladyzhenskaya, D. A., Uraltseva, N. N.
Linear and quasilinear elliptic equations
Academic Press
New York 1966
- [L] Lieberman, G. M.
Solvability of quasilinear elliptic equations with nonlinear boundary conditions
Trans. of the Am. Math. Soc. **273** (1982), S. 753-765
- [Mas] Massari, U.
Esistenza e regolarità delle ipersuperfici di curvatura media assegnata in \mathbb{R}^n
Arch. Rat. Mech. Anal. **55** (1974), S. 357-382
- [Mie1] Miersemann, E.
Asymptotic expansion at a corner for the capillary problem: The singular case
Pacific J. Math. **157** (1993), S. 95-107

- [Mie2] Miersemann, E.
On the singular behaviour of fluid in a vertical wedge
Zeitschr. f. Analysis u. ihre Anwend. **9** (1990), S. 467-471
- [Mie3] Miersemann, E.
Zur Gleichung der Fläche mit gegebener mittlerer Krümmung in zweidimensionalen eckigen Gebieten
Math. Nachrichten **110** (1983), S. 231-241
- [Mir1] Miranda, M.
Superficie cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro localmente finito sui prodotti cartesiani
Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **3** (1976), S. 501-548
- [Mir2] Miranda, M.
Superfici minime illimitate
Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **4** (1977), S. 313-322
- [Mur] Murray, J. D.
Asymptotic Analysis
Springer Verlag
New York 1984
- [SW] Scharf, K.-H., Weber, W.
Stoffwechselphysiologie
Schroedel Schulbuchverlag GmbH
Hannover 1987
- [S] Siegel, D.
Height estimates for capillary surfaces
Pacific J. Math. **88** (1980), S. 471-516
- [Sim] Simon, L.
Interior gradient bounds for non-uniformly elliptic equations
Indiana Univ. Math J. **25** (1976), S. 821-855
- [SS] Simon, L., Spruck, J.
Existence and regularity of a capillary surface with prescribed contact angle
Arch. Rat. Mech. Anal. **61** (1976), S. 19-34
- [Ta] Tam, L. F.
The behavior of capillary surfaces as gravity tends to zero
Comm. in PDE, 11(8) (1986), S. 851-901
- [Tr] Trudinger, N. S.
Gradient estimates and mean curvature
Math. Z. **131** (1973), S. 165-175
- [U] Uraltseva, N.
The solvability of the capillary problem

Vestnik Leningrad Univ., No. 19, Mat. Meh. Astronom. Vyp. 4 (1973)

[Z] Zimmermann, M. H.

Xylem structure and the ascent of sap

Springer-Verlag

New York 1983

Zusammenfassung der Ergebnisse der Arbeit

Es wurde zunächst das Problem

- (1) $\operatorname{div} Tu = \kappa u$ in Ω , $\kappa > 0$ konstant,
 (2) $\nu \circ Tu = \cos \gamma$ auf glatten Komponenten von $\partial\Omega$, $\gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

für ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit stückweise glattem Rand und auswärtigen Spitzen betrachtet.

1. Eine Spitze ist gegeben durch die Wahl zweier differenzierbarer Funktionen f_1, f_2 mit $f_1(0) = f_2(0) = f_1'(0) = f_2'(0) = 0$, $f_1(x_1) > f_2(x_1)$ für $x_1 \in (0, x^*)$ ($x^* > 0$).
2. Es existieren klassische Lösungen für Gebiete Ω mit Spitzen, wenn Ω ansonsten einen stückweise C^4 -Rand besitzt, das heißt, $f_1, f_2 \in C^4(0, \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$ (siehe [S], bzw. Kapitel 3.3).
3. In einer gewissen Umgebung der Spitze kann Ω in krummlinigen Koordinaten (a, s) parametrisiert werden. Diese Koordinatentransformation ist durch die Gleichungen

$$(3) \quad x_2 = x_2(a, x_1) = \frac{1+a}{2}f_1(x_1) + \frac{1 \Leftrightarrow a}{2}f_2(x_1) \quad a \in [\Leftrightarrow 1, 1]$$

$$(4) \quad s(x_1, a) = \int_0^{x_1} \sqrt{1 + x_{2,x_1}^2(a, \xi)} d\xi,$$

gegeben.

4. Die Lösung von (1), (2) für Gebiete Ω mit Spitze $\Omega_{s_0} = \{(a, s) : \Leftrightarrow 1 < a < 1, 0 < s < s_0\}$ läßt sich auf den Mengen $,_{s_0} = \{(a, s) : \Leftrightarrow 1 < a < 1, s = s_0\}$ abschätzen (Satz 4.1). Es ist deshalb günstig, das Vergleichsprinzip von CONCUS und FINN in der Form

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div} Tu \Leftrightarrow \kappa u \geq 0 \quad \text{in } \Omega_{s_0} \\ u \leq v \quad \text{auf } ,_{s_0} \\ \nu \circ Tu \Leftrightarrow \cos \gamma \leq 0 \quad \text{auf } \Sigma_{s_0}, \end{array} \right\} \Rightarrow v \geq u \quad \text{in } \Omega_{s_0}$$

(v eine Lösung von (1), (2), u eine Vergleichsfunktion) zu verwenden (Satz 3.7).

5. Es wurden zunächst Abschätzungen des führenden Terms einer asymptotischen Entwicklung der Lösung in Spitzen, gebildet durch spezielle Funktionen f_1, f_2 , aufgestellt. Mit der Vergleichsfunktion $u = Cs^{-\alpha} + h(a)s^{-1} + g(a)s^{\alpha-2} + f(a)s^{2\alpha-3} + D$ kann mit Hilfe des Vergleichstheorems bewiesen werden, daß für die Funktionen $f_1(x_1) = \Leftrightarrow f_2(x_1) = x_1^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$) für die Lösung v von (1), (2) folgt (Satz 4.2a)

$$(5) \quad v \sim \frac{C}{s^\alpha} + \frac{h(a)}{s} \quad s \rightarrow 0,$$

wobei $C = \frac{\cos \gamma}{\kappa}$, $h(a) = \Leftrightarrow_{\kappa}^{\alpha} \sqrt{1 \Leftrightarrow a^2 \cos^2 \gamma}$, „ \sim “ asymptotische Äquivalenz. Die Lösung wächst also mit der Ordnung $\frac{1}{s^{\alpha}}$ bei Annäherung an die Spitze. Diese Resultate sind nur von der Form der Spitze Ω_{s_0} abhängig und nicht von der speziellen Gestalt von Ω , also auch nicht von der speziellen betrachteten Lösung v .

6. Dieses Resultat ließ sich durch einfache Transformationen verallgemeinern. Betrachtet man z. B. das Problem zweier auf den Rändern f_1 und f_2 unterschiedlicher, aber konstanter Randkontaktwinkel γ_1 und γ_2 und $f_1(x_1) = a_1 x_1^{\alpha}$, $f_2(x_1) = a_2 x_1^{\alpha}$. So hat man für den Fall $\gamma_1 < \pi \Leftrightarrow \gamma_2$ („ \leq “ o. B. d. A.) die Relation (5) mit den neuen Bezeichnungen

$$(6) \quad C = \frac{\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2}{(a_1 \Leftrightarrow a_2) \kappa}$$

$$\text{und } h(a) = \Leftrightarrow_{\kappa}^{\alpha} \sqrt{1 \Leftrightarrow \left(\frac{\cos \gamma_1 + \cos \gamma_2}{2} a + \frac{\cos \gamma_1 - \cos \gamma_2}{2} \right)^2} \quad (\text{Satz 4.2b}).$$

7. Interessant ist die Frage, inwiefern die asymptotischen Abschätzungen von einer geringfügigen Störung des Randes abhängig sind. Seien

$$(7) \quad \begin{aligned} f_1(x_1) &= a_1 x_1^n + O(x_1^{n+1}) & n \in \mathbb{N}, \quad n > 1 \\ f_2(x_1) &= a_2 x_1^n + O(x_1^{n+2}) & a_i \in \mathbb{R}, \quad a_1 > a_2 \quad (\text{o. B. d. A.}) \end{aligned}$$

zwei analytische Funktionen, so erhält man

$$(8) \quad v \sim \frac{C}{s^n},$$

wobei für C Gleichung (6) gilt (Satz 4.3a und b). Der führende Term der asymptotischen Entwicklung der Lösung hängt also nur von dem führenden Term der Randkurven f_1 und f_2 ab.

8. Das Problem der mit der asymptotischen Entwicklung (8) verbundenen Abschätzungen besteht darin, daß die Fehler zwar von geringerer Ordnung als die Vergleichsfunktion sind, aber dennoch gegen unendlich gehen können, wenn $s \rightarrow 0$. Eine Abhilfe schafft hier eine vollständige asymptotische Entwicklung, die man unter Verwendung der Resultate (8), die eine verbesserte Abschätzung der Lösung auf $, s_0$ ermöglichen, bestimmt. Man erhält im letzten Fall mit Hilfe eines Induktionsbeweises, wobei (8) den Induktionsanfang darstellt, einer Zerlegung der Ausdrücke $\text{div } Tw$ und Tw und der Wahl einer geeigneten allgemeinen Vergleichsfunktion w (Lemma 4.1 und Satz 4.4):

$$(9) \quad v \sim \sum_{i=-n}^{-2} C_i s^i + \sum_{i=-1}^{\infty} \tilde{h}_i(a) s^i \quad s \rightarrow 0,$$

$\tilde{h}_i(a)$ ($i = \Leftrightarrow 1, 0, \dots$) auf $[\Leftrightarrow 1, 1]$ analytische Funktionen als Lösungen von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, C_i ($i = \Leftrightarrow n, \dots, \Leftrightarrow 2$) Konstanten. Für die Konstante C_{-n} gilt (6). Es ist interessant festzustellen, daß die ersten $n \Leftrightarrow 1$ Glieder der Entwicklung von a unabhängig sind.

Der zweite Teil beschäftigte sich mit dem Kapillarflächenproblem in der Schwerelosigkeit. Hier existiert keine klassische Lösung für Gebiete mit Spitzen. Die Behandlung des Variationsproblems stößt für solche Gebiete ebenfalls an Grenzen, da gewisse Energierme unendlich groß werden könnten. Es werden verallgemeinerte Lösungen untersucht.

9. Für das Kapillarflächenproblem in der Schwerelosigkeit

$$(10) \quad \operatorname{div} Tu = 2H \quad \text{in } \Omega,$$

$$(11) \quad \nu \circ Tu = \beta \quad \text{auf glatten Komponenten von } \partial\Omega,$$

$H, 0 < \beta \leq 1$ konstant existiert keine klassische Lösung, falls Ω auswärtige Spitzen enthält (Lemma 3.2).

10. Die verallgemeinerte Formulierung, zurückgehend auf MIRANDA [Mir2], stellt eine geeignete Verallgemeinerung des Problems für Gebiete mit Spitzen dar. Die Lösungen sind Energieminimierer bezüglich lokaler Störungen (vgl. Kapitel 5.1).
11. Es konnte die Existenz verallgemeinerter Lösungen nicht nur für H, β konstant, sondern für eine große Klasse von Funktionen H, β nachgewiesen werden (Satz 5.2). Der Beweis verallgemeinert eine Methode von GIUSTI [G1] für Gebiete mit glattem Rand auf Gebiete mit stückweise glattem Rand, verwendet jedoch spezielle geometrische Eigenschaften aus dem \mathbb{R}^2 und läßt sich nicht ohne weiteres auf einen höherdimensionalen Fall übertragen.
12. Verallgemeinerte Lösungen sind im allgemeinen nicht eindeutig (Lemma 5.2, siehe auch die Beispiele in [FN]). Das allgemeine Problem, wann verallgemeinerte Lösungen eindeutig sind und wann nicht, bleibt aber ungelöst.
13. Für konstante $H, \beta = \cos \gamma$ wurden verallgemeinerte Lösungen genauer untersucht. Die singulären Mengen

$$P = \{x \in \Omega : u(x) = +\infty\} \quad \text{bzw.}$$

$$N = \{x \in \Omega : u(x) = \Leftrightarrow \infty\}$$

minimieren spezielle Funktionale (Satz 6.1)

$$(12) \quad \Phi[\Omega^*; H, \gamma, \Omega] = |\Omega^*| \Leftrightarrow |\Sigma_{\Omega^*}| \cos \gamma + 2H|\Omega^*| \quad \text{bzw.}$$

$$(13) \quad \Psi[\Omega^*; H, \gamma, \Omega] = |\Omega^*| + |\Sigma_{\Omega^*}| \cos \gamma \Leftrightarrow 2H|\Omega^*|.$$

($\Omega^* \subseteq \Omega$ eine Caccioppolimenge, $|\cdot|_{\Omega^*} = \mathcal{H}_1(\partial_* \Omega^* \cap \Omega)$, $|\Sigma_{\Omega^*}| = \mathcal{H}_1(\partial_* \Omega^* \cap \partial \Omega)$, $|\Omega^*| = \mathcal{H}_2(\Omega^*)$).

14. Man erhält umgekehrt verallgemeinerte Lösungen der Form

$$(14) \quad u(x) = \begin{cases} +\infty & : x \in M \\ \Leftrightarrow \infty & : x \in \Omega \setminus M \end{cases},$$

M ein Minimierer von Φ (Lemma 6.1).

15. Die Minimierer von Φ genügen sehr eingeschränkten geometrischen Bedingungen ([Fin1]). Diese konnten weiter eingeschränkt werden (Lemma 6.2 und 6.3) und dienen zur Suche nach möglichen Minimierern für ein gegebenes Gebiet Ω .

16. Es stellte sich heraus, daß die in [FN] betrachteten C-singulären Lösungen eine weitere Klasse verallgemeinerter Lösungen erzeugen (Satz 6.3). Diese Lösungen führen zu einer Auswahl bestimmter Werte für H . Entsprechend den Beobachtungen in der Praxis (z. B. [LLDR], [Z]) könnten diese Werte als die „physikalisch interessanten“ bezeichnet werden. Diese Hypothese könnte das Problem der fehlenden Bestimmung von H bei Nichtexistenz klassischer Lösungen beseitigen (vgl. Kapitel 6.2).

17. Es wurde eine Strategie erarbeitet, um die verallgemeinerten Lösungen von Punkt 16 für ein gegebenes Gebiet Ω zu konstruieren (Kapitel 6.2).

18. Diese Strategie wurde auf ein Beispiel angewendet, welches von Interesse für die Biologie sein könnte. In diesem Fall ist H sogar eindeutig bestimmt (Kapitel 6.3). Das Ergebnis weist eine sehr gute Übereinstimmung mit den Beobachtungen in [Z] auf.

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Dissertation selbständig und ohne unzulässige fremde Hilfe angefertigt zu haben. Ich habe keine anderen als die angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt und sämtliche Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Schriften entnommen wurden und alle Angaben, die auf mündlichen Auskünften beruhen, als solche kenntlich gemacht. Ebenfalls sind alle von anderen Personen bereitgestellten Materialien oder erbrachten Dienstleistungen als solche gekennzeichnet.

.....

Ort, Datum

.....

Unterschrift

Wissenschaftlicher Werdegang

- 1981 bis 1989 Besuch der polytechnischen Oberschule „Wladimir Komarow“ in Taucha
- 1989 bis 1993 Besuch der Spezialschule mathematisch-naturwissenschaftlich-technischer Richtung (später Gymnasium „Wilhelm Ostwald“) in Leipzig
- Erfolgreiche Teilnahme an diversen Mathematikolympiaden
- Zweimalige erfolgreiche Teilnahme am Wettbewerb „jugend-forscht“ mit den Themen „Mondberghöhenvermessung“ bzw. „Interplanetare Raumflüge und Swing-by-Effekt“
- 1993 bis 1994 Studium an der Universität Leipzig
- 1994 bis 1995 Ableistung des Zivildienstes
- 1995 bis 1999 Fortsetzung des Studiums an der Universität Leipzig, Diplomarbeit zum Thema „Asymptotische Entwicklung der Lösung des Kapillarflächenproblems für ein Eckgebiet im singulären Fall“
- 1999 bis jetzt Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Mathematischen Institut der Universität Leipzig
- Sommer 2001 Forschungsaufenthalt bei Professor J. McCuan (Georgia Institute of Technology, Atlanta) und bei Professor R. Finn (Stanford University)
- jeweils ein Vortrag in Atlanta, Stanford und Potsdam