

Beiträge und Beispiele zur Bures-Geometrie

Von der Fakultät für Mathematik und Informatik
der Universität Leipzig
angenommene

D I S S E R T A T I O N

zur Erlangung des akademischen Grades

DOCTOR RERUM NATURALIUM
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt

von Diplommathematiker Gregor Peltri

geboren am 19. Februar 1969 in Leipzig

Die Annahme der Dissertation haben empfohlen:

Doz. Dr. rer. nat. habil. Peter M. Alberti (Leipzig)

Prof. Dr. Konrad Schmüdgen (Leipzig)

Prof. Dr. Heide Narnhofer (Wien)

Tag der Verteidigung: 23. Januar 2002

Bibliographische Beschreibung:

Peltri, Gregor

Beiträge und Beispiele zur Bures-Geometrie

Universität Leipzig, Diss., 104, 6 S., 66 Lit., 1 Abb.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	5
2	Allgemeine Vereinbarungen	11
2.1	Einige Fakten aus der Operatorentheorie	13
2.2	Die Hilbert-Schmidt-Darstellung	14
3	Elementare Bures-Geometrie	17
3.1	Definition des Bures-Abstandes	18
3.2	Einige Fakten zur Bures-Geometrie	19
3.3	Zur Implementierbarkeit des Bures-Abstandes	23
4	Produkte positiver Operatoren	31
4.1	Die zwei Haupttheoreme	32
4.2	Hilfsresultate, Beweise	35
4.3	Eine Bemerkung zu den Konstanten	41
5	Die Holonomiegruppe im Zustandsraum	47
5.1	Definition der Holonomiegruppe	47
5.2	Beispiele, für die man die Holonomiegruppe angeben kann	52

5.3	Untersuchung von Holonomiegruppen mit Hilfe von Produkten positiver Operatoren	57
6	Radon-Nikodym-Operatoren und ihre Eigenschaften	61
6.1	Radon-Nikodym-Operatoren	62
6.1.1	Radon-Nikodym-Theoreme	62
6.1.2	Radon-Nikodym-Operatoren nach SAKAI	64
6.2	Eigenschaften von Radon-Nikodym-Operatoren	66
6.2.1	Potenzen und Linearkombinationen	66
6.2.2	Störung von Radon-Nikodym-Operatoren	67
6.3	Beispiele von Radon-Nikodym-Operatoren	69
6.3.1	Vorbetrachtung: Der endlichdimensionale Fall	70
6.3.2	Anwendung auf den unendlichdimensionalen Fall	71
6.3.3	Radon-Nikodym-Operatoren mit nur endlich vielen Eigenwerten	73
6.3.4	Diagonalisierbare Radon-Nikodym-Operatoren	74
6.4	Der Zusammenhang von Umkehrbarkeit und Spektrum; ein Gegenbeispiel	76
6.4.1	Unbeschränkte Ähnlichkeit und Spektrum	76
6.4.2	Ein Toeplitzoperator als Gegenbeispiel	78
6.4.3	Diskussion des Beispiels: Spektrum von Toeplitzoperatoren	79
6.5	Die Konstruktion eines Operators mit vorgegebenem Spektrum . .	81
7	Bures-geodätische Bögen	83
7.1	Definitionen	83
7.2	Ergebnisse	91

Kapitel 1

Einführung

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit einigen grundlegenden Fragen zur Bures-Geometrie auf Zustandsräumen von von-Neumann-Algebren. Letztere basiert auf jenem Abstandsbegriff für normale Zustände, der von BURES im Jahre 1969 eingeführt wurde [18]. Die Definition enthielt das Infimum des metrischen Abstandes aller die Zustände implementierenden Vektoren in allen treuen Darstellungen.

ARAKI [8] brachte 1972 diesen Abstand in Verbindung mit SAKAIS Radon-Nikodym-Theorem. UHLMANN [57] betrachtete 1976 die Verallgemeinerung einer Größe, die auch schon BURES in obiger Arbeit verwandt hatte, und gab ihr den Namen *algebraische Übergangswahrscheinlichkeit*. (UHLMANN'S Definition enthielt allerdings das Supremum über alle – also auch nicht-treue – Darstellungen. Dazu siehe den nächsten Absatz.) Es zeigte sich seitdem, daß Bures-Abstand und algebraische Übergangswahrscheinlichkeit eng miteinander verbunden sind; für einen zusammenfassenden Überblick siehe [7].

BURES und ARAKI gaben Situationen an, in denen aus dem Infimum ein Minimum wird. ALBERTI [1] zeigte schließlich, daß das Infimum sogar in *jeder* Darstellung, die für die beiden Zustände implementierende Vektoren *enthält*, dasselbe ist. Man kann sich also auf *eine* geeignet gewählte (treue oder nicht-treue) Darstellung beschränken. Insbesondere ergibt es keinen Unterschied, ob man das Infimum bzw. Supremum über alle oder nur über alle treuen Darstellungen bildet.

Die Paare von Vektoren, mit denen in einer festen Darstellung das Infimum in

der Definition des Bures-Abstandes angenommen wird, spielen im folgenden eine besondere Rolle. Über den Bures-Abstand (oder äquivalent die algebraische Übergangswahrscheinlichkeit) wird so eine Relation zwischen den Mengen der implementierenden Vektoren der zwei Zustände definiert, die man als Vorschrift für einen „Paralleltransport“ deuten könnte.

DITTMANN und RUDOLPH [23], [24] haben den Paralleltransport im endlichdimensionalen Fall betrachtet, und dabei besonders ausführlich den Fall der invertierbaren 2×2 -Matrizen. Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit liegt jedoch im unendlichdimensionalen Fall. Endlichdimensionale Ergebnisse lassen sich dabei nicht ohne weiteres auf Zustände über unendlichdimensionalen von-Neumann-Algebren verallgemeinern. Einerseits versagen manche Methoden, und andererseits treten gewisse Effekte im Endlichdimensionalen überhaupt nicht auf.

Zur Illustration: Während ein treuer Zustand in n Dimensionen einer invertierbaren $n \times n$ -Dichtematrix entspricht, ist im Unendlichdimensionalen der Dichteoperator eines treuen Zustandes ein kompakter Operator, der nicht mehr beschränkt invertierbar ist. Nicht nur, daß der Wertebereich dieses Operators nicht der ganze Hilbertraum ist, ist das Problem, sondern schon allein der Fakt, daß selbst die Wertebereiche von Operatoren, die zu *treuen* Zuständen gehören, unerwartete Eigenschaften haben. Zwei solche Wertebereiche können ineinander enthalten sein, aber auch, von der Null abgesehen, völlig disjunkt. (Letzteres Resultat ist von VON NEUMANN [60]; ein einfaches Beispiel von DIXMIER ist unter [26, Theorem 3.6] angegeben. SCHMÜDGEN [50, Theorems 5.1, 5.2] befaßte sich ebenfalls mit solcherart Beispielen.)

Es folgt eine Übersicht, wie sich die vorliegende Arbeit aufbaut.

In Kapitel 2 werden allgemeine Vereinbarungen getroffen, die für die gesamte Arbeit gelten. Darüber hinaus werden wichtige Resultate aus der Operatorentheorie genannt, die im folgenden häufig benutzt werden. Für nichttriviale Beispiele, die bestimmte Zusammenhänge illustrieren sollen, wird in dieser Arbeit fast immer dieselbe fundamentale Darstellung verwendet: die Hilbert-Schmidt-Darstellung. Diese wird – inklusive der gewählten Bezeichnungen – am Ende von Kapitel 2 beschrieben.

In Kapitel 3 wird zunächst der Bures-Abstand eingeführt und die sich aus diesem ergebende elementare Geometrie auf dem Zustandsraum entwickelt. Dabei wer-

den insbesondere die schon bekannten Fakten genannt, auf die sich die weiteren Untersuchungen stützen. Ein zuvor ungelöstes Problem, nämlich die Frage nach der Implementierbarkeit des Bures-Abstandes bei Vorgabe eines Vektors, wird durch ein Gegenbeispiel gelöst; dieses Beispiel, dessen Konsequenzen ausführlich in [6] diskutiert werden, wird angegeben.

Wie schon erwähnt, kann man über den Bures-Abstand unter gewissen Voraussetzungen im Zustandsraum einen Paralleltransport implementierender Vektoren definieren. In gewisser Analogie zur Differentialgeometrie läßt sich auch hier die Holonomiegruppe definieren. Dies wird dargelegt, und die bekannten Resultate werden genannt.

Es stellt sich heraus, daß für die Identifizierung der Holonomiegruppe die Untersuchung von Produkten positiver Operatoren hilfreich ist. Diesem Thema widmet sich Kapitel 4. Ein selbst erarbeitetes Verfahren liefert Aussagen darüber, welche Operatoren Produkte von positiven Operatoren sind. Diese Ergebnisse werden diskutiert und mit Resultaten aus der Literatur verglichen. Die Untersuchung der Holonomiegruppe war zwar der Anlaß für die Beschäftigung mit Produkten positiver Operatoren; die genannten Ergebnisse sind jedoch auch von eigenständigem Interesse.

Der Begriff der Holonomiegruppe über dem Zustandsraum wird in Kapitel 5 genau definiert. Anschließend werden die bekannten Resultate genannt. Aus den Ergebnissen des vorangehenden Kapitels werden schließlich neue Aussagen zur Holonomiegruppe eines treuen normalen Zustandes abgeleitet. Dieses Problem wird nicht vollständig gelöst, aber es wird in ein operatortheoretisches Problem überführt. Auf diese Weise gewinnt die Untersuchung der Bures-Geometrie eine neue Dimension.

Um den Bures-Abstand zu berechnen, wurden in der Vergangenheit spezielle Formeln entwickelt. Der einfachste Fall, in dem der Bures-Abstand explizit berechnet werden kann, ist der, wenn Absolutstetigkeit nach Sakai vorliegt. Deshalb untersuchen wir in Kapitel 6 speziell die SAKAISche Verallgemeinerung des klassischen Radon-Nikodym-Theorems aus der Maßtheorie und fragen nach den Eigenschaften des Operators, dessen Existenz das Theorem feststellt. Diesen Operator nennen wir Radon-Nikodym-Operator. Es zeigt sich, daß es nützlich ist, wenn man von einem Operator sagen kann, ob er ein Radon-Nikodym-Operator zu einem gegebenen Zustand ist oder nicht. Allgemein ist kein Kriterium bekannt, das diese

Frage entscheidet. Es werden jedoch spezielle Aussagen hergeleitet.

Ein besonders interessanter Fall sind Operatoren, die wir umkehrbare Radon-Nikodym-Operatoren nennen. Diese Operatoren treten auf, wenn man geodätische Bögen im Zustandsraum betrachtet und fragt, ob Strata von wechselseitig zueinander absolutstetigen Zuständen geodätisch konvex sind. Im Fall von Riemannschen Flächen wurde von WHITEHEAD [61], [62] unter anderem gezeigt, daß zu jedem Punkt eine Umgebung existiert, in der sich beliebige zwei Punkte mit einer Geodätischen verbinden lassen, die die Umgebung nicht verläßt. Wenn oben genannte Strata auch diese Eigenschaft hätten, könnten sie als Beispiele für Umgebungen dienen.

Nun läßt sich zwischen umkehrbaren Radon-Nikodym-Operatoren und den Spektra gewisser anderer Operatoren ein Zusammenhang herstellen, der es gestattet, Aussagen über Spektra in Aussagen über die Umkehrbarkeit von Radon-Nikodym-Operatoren zu „übersetzen“. Operatoren, von denen man das Spektrum kennt, sind z. B. bestimmte Toeplitzoperatoren. Dieses Wissen konnte genutzt werden, um ein Beispiel zu konstruieren, in dem die geometrische Konvexität *nicht* vorliegt.

Die Ergebnisse und die Methodik dieses Kapitels sind jedoch von eigenständigem Interesse und deshalb auch ohne nähere Kenntnis der Bures-Geometrie anwendbar. Ein „Nebenprodukt“ bei der Suche nach dem Beispiel war z. B. die Idee, Operatoren mit hinreichend nichttrivialem Spektrum zu konstruieren, indem man die Parameter in den Toeplitzoperatoren geeignet wählt.

In Kapitel 7 werden schließlich Bures-geodätische Bögen betrachtet. Sie beschreiben die Bures-Geometrie auf andere Weise als die Holonomiegruppe. Dennoch ähneln sich die Untersuchungsmethoden. Die bekannten Ergebnisse über geodätische Bögen werden genannt. Anschließend wird unter Verwendung der Ergebnisse des vorangehenden Kapitels das Beispiel angegeben, das die Frage nach der geodätischen Konvexität eines Stratums beantwortet.

An dieser Stelle möchte ich meinem Betreuer, Herrn Doz. Dr. rer. nat. habil. Peter M. Alberti, ganz herzlich danken, ohne dessen Rat und Hilfe diese Arbeit nicht hätte entstehen können. In guter Erinnerung sind mir außerdem die vielen nützlichen Diskussionen, die ich mit Angehörigen des Mathematischen Instituts geführt habe. Speziell im Rahmen der Arbeitstreffen des Graduiertenkollegs „Quanten-

feldtheorie“ ergaben sich für mich wertvolle Hinweise. Dafür und auch für seine sonstige Unterstützung bedanke ich mich beim Sprecher des Graduiertenkollegs, Herrn Prof. Dr. Bodo Geyer. Weiterhin bedanke ich mich bei Herrn Dr. Bernd Crell für einen entscheidenden Literaturhinweis. Unter den Diskussionen mit anderen Graduierten waren die mit Ulrich Steinmetz und Dr. Martin Welk geführten Gespräche besonders fruchtbringend. Letztgenanntem bin ich speziell für seine Hilfe bei der Gestaltung des Beispiels aus Abschnitt 6.4.2 zu Dank verpflichtet. Last but not least bedanke ich mich bei meiner Frau Sylke für ihre Geduld, die sie mir bei der Entstehung dieser Arbeit entgegengebracht hat.

Die Arbeit wurde unterstützt durch ein Promotionsstipendium des Freistaates Sachsen sowie einen Doktorandenförderplatz des Instituts für Theoretische Physik der Universität Leipzig.

Kapitel 2

Allgemeine Vereinbarungen

In diesem Kapitel sollen grundlegende funktionalanalytische Setzungen und Notationen vereinbart werden. Für weitergehende Informationen über von-Neumann-Algebren oder allgemeinere Algebren von linearen Operatoren über Hilberträumen sei auf Standardmonographien wie [47], [39], [56] verwiesen.

Sei \mathcal{H} ein Hilbertraum; dann wird mit $B(\mathcal{H})$ die Algebra der beschränkten linearen Operatoren über \mathcal{H} bezeichnet. Den Einsoperator aus dieser Algebra schreiben wir $\mathbb{1}$. Mit dem Buchstaben M wird im allgemeinen eine *von-Neumann-Algebra* von Operatoren aus $B(\mathcal{H})$ bezeichnet, was bedeutet, sie enthält die $\mathbb{1}$ und ist bezüglich der schwachen Operortopologie abgeschlossen. Der *Kommutant* von M , die Menge aller Operatoren aus $B(\mathcal{H})$, die mit allen Operatoren aus M kommutieren, wird mit M' bezeichnet. Nach dem Doppelkommutantentheorem von VON NEUMANN (siehe z. B. [47, Theorem 1.20.3]) ist eine Operatoralgebra N mit $\mathbb{1} \in N$ genau dann schwach abgeschlossen, wenn $N = N''$ ist.

Durch ein tiefgestelltes $+$ an einer Algebra wie $B(\mathcal{H})$ oder M wird der *positive Kegel* aus $B(\mathcal{H})$ bzw. M bezeichnet, der aus den positiv semidefiniten Operatoren besteht. Das Spektrum eines Operators a sei mit $\text{spec } a$ bezeichnet. Für a aus dem positiven Kegel gilt $\text{spec } a \subseteq [0, \infty[$. Der Operator a ist genau dann invertierbar, wenn $0 \notin \text{spec } a$ ist.

Mit $U(\mathcal{H})$ bzw. $U(M)$ wird die Gruppe der unitären Operatoren aus $B(\mathcal{H})$ bzw. M bezeichnet. Der Definitionsbereich eines unbeschränkten Operators x über \mathcal{H} wird mit $\mathcal{D}(x)$ bezeichnet; ist x beschränkt, gilt immer $\mathcal{D}(x) = \mathcal{H}$. Der Wertebereich

eines beschränkten oder unbeschränkten Operators x über \mathcal{H} , symbolisch $\mathcal{R}(x)$, ist wie folgt definiert:

$$\mathcal{R}(x) := \{\eta \in \mathcal{H} \mid \exists \xi \in \mathcal{D}(x) \text{ mit } x\xi = \eta\}.$$

Der Wertebereich $\mathcal{R}(x)$ ist ein (im allgemeinen *nicht* abgeschlossener) linearer Unterraum von \mathcal{H} .

Ein positives lineares Funktional ω über einer von-Neumann-Algebra M heißt *normal*, wenn es $\omega(\text{lub}_\alpha x_\alpha) = \text{lub}_\alpha \omega(x_\alpha)$ für jedes gleichmäßig beschränkte aufwärts gerichtete Netz $\{x_\alpha\} \subseteq M_+$ erfüllt [47, Definition 1.13.1]. Mit $s(\omega)$ wird der *Träger* eines normalen positiven Funktionals bezeichnet. Es gilt: $p := s(\omega)$ ist der größte Orthoprojektor aus M mit $\omega(p) = 0$ (siehe z. B. [47, Definition 1.14.2]).

Ein positives lineares Funktional mit Funktionalnorm 1 wird *Zustand* genannt.

Wir sagen, daß ein abgeschlossener, dicht definierter Operator T über \mathcal{H} *affiliert* zur von-Neumann-Algebra M ist (und schreiben $T \eta M$), wenn $u^*Tu = T$ für jedes $u \in U(M')$ ist. Dies bedeutet insbesondere, daß jedes $u \in U(M')$ den Bereich $\mathcal{D}(T)$ auf sich selbst abbildet (siehe z. B. [39, Definition 5.6.2]).

Normale Zustände über einer von-Neumann-Algebra M werden mit griechischen Buchstaben wie ω, σ bezeichnet. Ist ω ein normaler Zustand über M und $a \in M$, so definiert $\omega^a(x) := \omega(a^*xa)$ für alle $x \in M$ eine neue normale positive Linearform. Man sagt, ω^a entsteht aus ω durch eine *innere Operation*.

Im Fall, daß ω durch einen Vektor $\xi \in \mathcal{H}$ implementiert wird, d. h., es gilt $\omega(x) = \langle x\xi, \xi \rangle$ für alle $x \in M$, sieht man sofort, daß $\omega^a(x) = \langle xa\xi, a\xi \rangle$ für alle $x \in M$ gilt. Die positive Linearform ω^a wird also durch den Vektor $a\xi \in \mathcal{H}$ implementiert. Wenn man letzteres als Definitionsgleichung für ω^a wählt, bleibt sie sogar in dem Fall sinnvoll, wenn a ein unbeschränkter, zu M affiliierter Operator ist, dessen Definitionsbereich ξ enthält. (Die Wahl eines anderen implementierenden Vektors für ω führt bei dieser Definition auf denselben Zustand, so daß ω^a wohldefiniert ist.)

2.1 Einige Fakten aus der Operatorentheorie

In der vorliegenden Arbeit wird umfassend Gebrauch von Standardsätzen aus der Operatorentheorie gemacht, deren Kenntnis in der Regel vorausgesetzt wird (siehe z. B. [47] und [56]). An einige fundamentale Sätze, die eine wichtige Rolle spielen, sei an dieser Stelle erinnert.

Satz 2.1. *Sei A eine C^* -Algebra mit $\mathbb{1}$. Ein beschränktes lineares Funktional f über A ist genau dann positiv, wenn $\|f\| = f(\mathbb{1})$ ist.*

Zum Beweis siehe z. B. [47, Propositions 1.5.1/1.5.2].

Satz 2.2. *Sei M eine von-Neumann-Algebra über einem Hilbertraum \mathcal{H} . Sei $\varphi \in \mathcal{H}$ beliebig. Mit $p(\varphi)$ bzw. $p'(\varphi)$ sei der Orthoprojektor auf den abgeschlossenen linearen Unterraum*

$$\overline{[M'\varphi]} := \overline{\{y\varphi \mid y \in M'\}} \text{ bzw. } \overline{[M\varphi]} := \overline{\{x\varphi \mid x \in M\}}$$

bezeichnet. Dann gilt $p(\varphi) \in M$ und $p'(\varphi) \in M'$.

Beweis. Sei $z \in M$ beliebig. Dann gilt $z[M\varphi] \subseteq [M\varphi]$ und damit $zp'(\varphi) = p'(\varphi)zp'(\varphi)$. Analog ist $z^*p'(\varphi) = p'(\varphi)z^*p'(\varphi)$ und damit $p'(\varphi)z = p'(\varphi)zp'(\varphi)$. Zusammen ergibt sich $zp'(\varphi) = p'(\varphi)zp'(\varphi) = p'(\varphi)z$. Da z allgemein gewählt war, folgt $p'(\varphi) \in M'$. Die Aussage $p(\varphi) \in M$ beweist man völlig analog unter Vertauschung der Rollen von M und M' . \square

Ein Operator v in einer von-Neumann-Algebra M wird *partielle Isometrie* genannt, wenn $v^*v =: p$ ein Orthoprojektor in M ist. Ebenso kann man fordern, daß $vv^* =: q$ ein Orthoprojektor in M ist. Beide Aussagen sind äquivalent.

Theorem 2.3 (Polarzerlegungstheorem für Funktionale). *Sei M eine von-Neumann-Algebra und f ein normales lineares Funktional über M . Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes positives lineares Funktional ω über M und eine eindeutig bestimmte partielle Isometrie $v \in M$ mit $v^*v = s(\omega)$, so daß*

$$f(x) = \omega(xv) \text{ für alle } x \in M$$

gilt. Dabei wird ω als Modul von f bezeichnet; symbolisch: $|f| := \omega$.

Zum Beweis siehe z. B. [47, Theorem 1.14.4] oder [56, Theorem 4.2].

2.2 Die Hilbert-Schmidt-Darstellung

Zum Schluß dieses Kapitels sei auf folgende nützliche Darstellung, auf die wir im folgenden öfters zurückgreifen werden, hingewiesen. Sei \mathcal{H} ein separabler Hilbertraum, endlich- oder unendlichdimensional. Mit $\operatorname{tr} x$ sei die gewöhnliche Spur von $x \in B(\mathcal{H})$ bezeichnet, falls diese Zahl existiert. Die Menge der *Hilbert-Schmidt-Operatoren* aus $B(\mathcal{H})$ besteht genau aus den Operatoren $\varphi \in B(\mathcal{H})$, für die $\operatorname{tr} \varphi^* \varphi$ endlich ist. Man kann zeigen, daß diese Menge mit dem Skalarprodukt $\langle \varphi, \psi \rangle_{\text{HS}} := \operatorname{tr} \varphi \psi^*$ selbst wieder einen Hilbertraum bildet, der mit \mathcal{H}_{HS} bezeichnet sein möge. Darüber hinaus ist die Menge \mathcal{H}_{HS} ein zweiseitiges Ideal in $B(\mathcal{H})$. Die Standardreferenz für Eigenschaften von Spurklasse- und Hilbert-Schmidt-Operatoren ist [49].

Wir stellen nun die von-Neumann-Algebra $B(\mathcal{H})$ wie folgt über \mathcal{H}_{HS} dar: Ein Element $x \in B(\mathcal{H})$ wirkt auf $\varphi \in \mathcal{H}_{\text{HS}}$, indem φ von links mit x multipliziert wird: $x\varphi := L_x\varphi := x \cdot \varphi$. Wegen der Idealeigenschaft von \mathcal{H}_{HS} ist die rechte Seite wieder ein Hilbert-Schmidt-Operator. Wir bezeichnen die Algebra, die in dieser Darstellung aus $B(\mathcal{H})$ entsteht, mit M . Ist der Hilbertraum \mathcal{H} n -dimensional, ist M ein Typ- I_n -Faktor, anderenfalls ist M ein Typ- I_∞ -Faktor. Man beachte, daß für $n > 1$ die Algebra M über \mathcal{H}_{HS} dann natürlich nicht mehr irreduzibel wirkt. Die Nützlichkeit dieser Darstellung eines Typ-I-Faktors beruht vor allem auf folgenden Tatsachen:

1. Der Kommutant von M innerhalb $B(\mathcal{H}_{\text{HS}})$ besteht genau aus den Rechtsmultiplikationen mit Operatoren aus $B(\mathcal{H})$, d. h., zu jedem $y \in M'$ gibt es genau ein $\tilde{y} \in B(\mathcal{H})$ mit $y\varphi = R_{\tilde{y}}\varphi := \varphi\tilde{y}$ für alle $\varphi \in \mathcal{H}_{\text{HS}}$ und umgekehrt. Auf diese Weise ist M' antiisomorph zur ursprünglichen Algebra $B(\mathcal{H})$. (*Antiisomorph* bedeutet dabei, daß sich bei Produkten die Reihenfolge umkehrt.)
2. In dieser Darstellung wirkt M über \mathcal{H}_{HS} in sogenannter *Standardform*. (Für Details zur hier nicht näher ausgeführten Tomita-Takesaki-Theorie und speziell zu von-Neumann-Algebren in Standardform siehe z. B. [16, Chapter 2.5]. Die Grundlagen zur Theorie von selbstdualen Kegeln wurde unabhängig voneinander in [9], [20] und [29] gelegt. Aus letzterer Arbeit stammt der Begriff „Standardform“.) Als zyklischer und separierender Vektor läßt sich dabei jeder Hilbert-Schmidt-Operator mit trivialem Kern und dichtem

Wertebereich wählen. Wir wählen stets einen *positiven* Hilbert-Schmidt-Operator mit trivialem Kern als zyklischen und separierenden Vektor. (Wegen der Selbstadjungiertheit ist dann die zweite der obigen Bedingungen automatisch erfüllt.)

3. Normale Zustände über $B(\mathcal{H})$ korrespondieren in eineindeutiger Weise mit Dichtematrizen (positiven Spurklasseoperatoren mit Spur 1). Sei ω ein solcher Zustand und seine Dichtematrix ebenfalls mit ω bezeichnet. Dann gilt für alle $x \in B(\mathcal{H})$: $\omega(x) = \text{tr } \omega x = \text{tr } x \sqrt{\omega} \sqrt{\omega} = \langle x \sqrt{\omega}, \sqrt{\omega} \rangle_{\mathcal{H}_{\text{HS}}}$. Dabei sei mit $\sqrt{\omega}$ die eindeutig bestimmte Quadratwurzel des positiven Operators ω gemeint. Da ω ein Spurklasseoperator ist, ist seine Quadratwurzel ein Hilbert-Schmidt-Operator, und obige Ausdrücke sind somit korrekt. Auf diese Weise können wir für jeden normalen Zustand sofort einen Vektor aus \mathcal{H}_{HS} bestimmen, der den Zustand implementiert. Wenn der zyklische und separierende Vektor ein *positiver* Operator ist, ist für jeden normalen Zustand ω über M der eindeutig bestimmte implementierende Vektor aus dem natürlichen positiven Kegel gerade $\sqrt{\omega} \in \mathcal{H}_{\text{HS}}$.

Anmerkung: Im endlichdimensionalen Fall besteht \mathcal{H}_{HS} aus *allen* Matrizen, da die Spurforderung nur im unendlichdimensionalen Fall eine echte Einschränkung liefert. Das ändert aber nichts an der Leistungsfähigkeit dieser Darstellung auch in diesem Fall, da die obigen Eigenschaften uneingeschränkt gelten.

Kapitel 3

Elementare Bures-Geometrie

In der vorliegenden Arbeit soll der Raum der normalen Zustände über einer von-Neumann-Algebra unter *geometrischen* Aspekten betrachtet werden. Als „natürliche“ Topologie bietet sich dabei die von der Funktionalnorm $\|\cdot\|_1$ erzeugte Topologie an. Wählt man eine geeignete Darstellung, in der gewisse normale Zustände von Vektoren aus dem Darstellungsraum implementiert werden, kann man die Zustände auch über die implementierenden Vektoren beschreiben. Der Vorteil besteht darin, daß wir damit die volle Struktur eines Hilbertraumes erhalten. Das Problem, das dabei auftritt, ist aber, daß ein Zustand stets von *mehrerer* Vektoren implementiert werden kann. In einer an die Differentialgeometrie angelehnten Sprechweise bezeichnen wir die Menge aller einen Zustand implementierenden Vektoren als *Faser* über diesem Zustand. Zum Beispiel ist in der klassischen Quantenmechanik die von-Neumann-Algebra ganz $B(\mathcal{H})$, und jeder reine Zustand wird zu gegebenem implementierenden Vektor $\xi \in \mathcal{H}$ auch stets von allen Vektoren $\lambda\xi$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$ implementiert. Der Zustand wird dann mit einem *Strahl* von implementierenden Vektoren identifiziert.

In diesem Kapitel wird der von BURES [18] eingeführte Abstand untersucht. Dieser Abstand und die mit ihm in engem Zusammenhang stehende algebraische Übergangswahrscheinlichkeit werden jeweils über die Fasern implementierender Vektoren definiert und bilden so die Grundlage für die gewünschte geometrische Betrachtung des Zustandsraumes. Elementare Eigenschaften und bekannte Fakten zum Bures-Abstand werden genannt und mit Beispielen illustriert. Schließlich

wird eine Frage zur Implementierbarkeit des Bures-Abstandes mit einem Gegenbeispiel beantwortet.

3.1 Definition des Bures-Abstandes

Wir betrachten eine von-Neumann-Algebra M , die in Standardform über einem Hilbertraum \mathcal{H} wirkt. Das garantiert, daß jeder normale Zustand ω von einem Einheitsvektor $\xi \in \mathcal{H}$ implementiert wird, d. h., es gilt $\omega(x) = \langle x\xi, \xi \rangle$ für alle $x \in M$. Die Menge der normalen Zustände über M sei mit $\mathcal{S}_0(M)$ bezeichnet; die Menge der einen Zustand $\omega \in \mathcal{S}_0(M)$ implementierenden Vektoren mit $\mathcal{S}(\omega)$, d. h., $\mathcal{S}(\omega) := \{\xi \in \mathcal{H} \mid \omega(x) = \langle x\xi, \xi \rangle \text{ für alle } x \in M\}$.

Der *Bures-Abstand* $d_B(\omega, \sigma)$ zwischen zwei Zuständen $\omega, \sigma \in \mathcal{S}_0(M)$ ist dann wie folgt definiert:

$$d_B(\omega, \sigma) := \inf\{\|\varphi - \psi\| \mid \varphi \in \mathcal{S}(\omega), \psi \in \mathcal{S}(\sigma)\}. \quad (3.1)$$

Wir betrachten nun obiges Infimum etwas näher. Es gilt (unter Beibehaltung der Bezeichnungen aus der Definition von d_B):

$$\|\varphi - \psi\|^2 = \langle \varphi - \psi, \varphi - \psi \rangle = \|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2 - 2\Re\langle \varphi, \psi \rangle. \quad (3.2)$$

Es gilt $\|\varphi\|^2 = \|\omega\|_1 = 1$ und $\|\psi\|^2 = \|\sigma\|_1 = 1$, da ω und σ nach Voraussetzung Zustände waren. Deshalb entspricht nach (3.2) dem Infimum aus (3.1) das Supremum über alle Ausdrücke der Art $\Re\langle \varphi, \psi \rangle$. Mit φ implementieren immer auch alle Vektoren der Gestalt $e^{i\alpha}\varphi$, $\alpha \in [0, 2\pi[$, den Zustand ω , so daß für ein α das Skalarprodukt positiv ist. Demzufolge ist

$$\sup\{\Re\langle \varphi, \psi \rangle \mid \varphi \in \mathcal{S}(\omega), \psi \in \mathcal{S}(\sigma)\} = \sup\{|\langle \varphi, \psi \rangle| \mid \varphi \in \mathcal{S}(\omega), \psi \in \mathcal{S}(\sigma)\}. \quad (3.3)$$

Das Quadrat dieses Supremums ist die von UHLMANN in [57] eingeführte *algebraische Übergangswahrscheinlichkeit* zwischen ω und σ , symbolisch $P(\omega, \sigma)$:

$$P(\omega, \sigma) := \sup\{|\langle \varphi, \psi \rangle|^2 \mid \varphi \in \mathcal{S}(\omega), \psi \in \mathcal{S}(\sigma)\}. \quad (3.4)$$

Aus (3.2) und (3.4) zusammen ergibt sich damit folgende Beziehung zwischen dem Bures-Abstand und der algebraischen Übergangswahrscheinlichkeit zwischen zwei normalen Zuständen ω und σ :

$$d_B(\omega, \sigma)^2 = 2(1 - \sqrt{P(\omega, \sigma)}). \quad (3.5)$$

Bemerkung 3.1. BURES definierte in [18] zunächst einen Abstandsbegriff für normale Zustände in W^* -Algebren und zeigte für diesen, daß die Bezeichnung „Abstand“ gerechtfertigt ist, d. h., daß insbesondere die Dreiecksungleichung erfüllt ist. Die BURESSche Definition enthielt gegenüber (3.1) noch das Infimum über alle treuen Darstellungen, in denen ω und σ gleichzeitig von Vektoren implementiert werden.

Der Bures-Abstand d_B und die algebraische Übergangswahrscheinlichkeit P hängen über (3.5) miteinander zusammen. Das bedeutet, daß Ergebnisse für die eine Größe stets auch Ergebnisse für die andere sind. Während sich z. B. ARAKI [8] mit d_B beschäftigt hat, untersuchten UHLMANN [57] und ALBERTI die Größe P . ALBERTI dehnte den Begriff der algebraischen Übergangswahrscheinlichkeit auf C^* -Algebren aus [1] und zeigte, daß die Definition tatsächlich unabhängig von der konkret gewählten Darstellung ist, wenn nur beide Zustände gleichzeitig durch Vektoren implementiert werden [1, Theorem 1]. Damit wurde gezeigt, daß in Definition (3.1) auf das Infimum über alle treuen Darstellungen verzichtet werden kann.

Im allgemeinen ist das Berechnen des Bures-Abstandes für zwei gegebene normale Zustände schwierig. Im Fall der 2×2 -Matrizen wurde eine allgemeine Formel von HÜBNER angegeben [37].

3.2 Einige Fakten zur Bures-Geometrie

In diesem Abschnitt sollen grundlegende Eigenschaften des Bures-Abstandes aufgezählt und mit einfachen Beispielen erläutert werden. Die Sätze gelten in der Regel für beliebige Standardform-von-Neumann-Algebren. Für die *Beispiele*, die der Illustration dienen, sei M stets der Typ-I-Faktor der Linkswirkung aus Abschnitt 2.2.

Zunächst sehen wir uns die Struktur der Faser an.

Satz 3.1. *Seien $\omega \in \mathcal{S}_0(M)$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\omega)$ beliebig gewählt. Dann gilt*

$$\mathcal{S}(\omega) = \{u\varphi \mid u^*u = p'(\varphi), u \in M'\}. \quad (3.6)$$

Bemerkung 3.2. Zur Definition von $p'(\varphi)$ siehe Satz 2.2. Man beachte dabei, daß für einen anderen implementierenden Vektor $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}(\omega)$ durchaus $p'(\tilde{\varphi}) \neq p'(\varphi)$ sein kann.

Beweis von Satz 3.1. Die Inklusion „ \supseteq “ ist leicht zu zeigen. Denn für beliebiges $u \in M'$ mit $u^*u = p'(\varphi)$ und beliebiges $x \in M$ gilt

$$\langle xu\varphi, u\varphi \rangle = \langle u^*xu\varphi, \varphi \rangle = \langle u^*ux\varphi, \varphi \rangle = \langle p'(\varphi)x\varphi, \varphi \rangle = \langle x\varphi, \varphi \rangle = \omega(x),$$

d. h., $u\varphi$ implementiert ω .

Um die Inklusion „ \subseteq “ zu zeigen, sei $\psi \in \mathcal{S}(\omega)$ ein weiterer implementierender Vektor. Für beliebige $x, y \in M$ gilt dann

$$\langle x\varphi, y\varphi \rangle = \langle y^*x\varphi, \varphi \rangle = \omega(y^*x) = \langle y^*x\psi, \psi \rangle = \langle x\psi, y\psi \rangle.$$

Die Zuordnung $u_0 : x\varphi \mapsto x\psi$ zwischen den linearen Räumen $[M\varphi]$ und $[M\psi]$ ist wohldefiniert (denn für $z \in M$ mit $z\varphi = x\varphi$ ist $0 = \langle (x-z)\varphi, (x-z)\varphi \rangle = \langle (x-z)\psi, (x-z)\psi \rangle$ und damit auch $z\psi = x\psi$) und isometrisch. Sie läßt sich in eindeutiger Weise zu einer Isometrie $\tilde{u}_0 : \overline{[M\varphi]} \rightarrow \overline{[M\psi]}$ fortsetzen. Die Setzung $u := p'(\psi)\tilde{u}_0p'(\varphi)$ definiert eine partielle Isometrie in $B(\mathcal{H})$ mit $u^*u = p'(\varphi)$ und $uu^* = p'(\psi)$. Nach Definition gilt $u\varphi = \psi$. Es bleibt damit nur noch zu zeigen, daß $u \in M'$ ist.

Seien dazu $z \in M$ und $\xi \in \mathcal{H}$ beliebig gewählt. Es ist $p'(\varphi)\xi \in \overline{[M\varphi]}$, also existiert eine Folge $\{x_n\}$ von Operatoren aus M mit $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\varphi = p'(\varphi)\xi$. Mit dieser Setzung gilt

$$\begin{aligned} zu\xi &= zp'(\psi)\tilde{u}_0p'(\varphi)\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} zp'(\psi)\tilde{u}_0x_n\varphi = \lim_{n \rightarrow \infty} zp'(\psi)x_n\psi = \lim_{n \rightarrow \infty} p'(\psi)(zx_n)\psi \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} p'(\psi)\tilde{u}_0(zx_n)\varphi = p'(\psi)\tilde{u}_0zp'(\varphi)\xi = p'(\psi)\tilde{u}_0p'(\varphi)z\xi = uz\xi. \end{aligned}$$

Dabei wurde benutzt, daß $p'(\varphi), p'(\psi) \in M'$ sind (siehe Satz 2.2) und damit mit $z \in M$ vertauschen. Da $\xi \in \mathcal{H}$ beliebig war, gilt also $zu = uz$ bzw. $u \in M'$. \square

Beispiel 3.1. Wir wollen das Aussehen der Faser zu einem normalen Zustand an einem Beispiel illustrieren. Sei dazu M der Typ- I_∞ -Faktor aus Abschnitt 2.2. Wir fixieren im zugrundeliegenden Hilbertraum \mathcal{H} eine Orthonormalbasis. Damit wird \mathcal{H} isomorph zum Folgenraum ℓ^2 . Operatoren aus $B(\mathcal{H})$ lassen sich dann in natürlicher Weise als unendlichreihige Matrizen schreiben. Wir definieren einen normalen Zustand ω über M wie folgt:

$$\omega(x) := \text{tr } \nu x \text{ mit } \nu := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Dabei ist ν die Matrix eines Spurklasseoperators über $\mathcal{H} \simeq \mathbb{R}^2$. Wie in Abschnitt 2.2 beschrieben, ist ein implementierender Vektor z. B.

$$\varphi := \sqrt{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Um $p'(\varphi)$ zu bestimmen, betrachten wir den Abschluß des Unterraumes $\{x\varphi \mid x \in M\}$. Dieser besteht genau aus den Operatoren aus $B(\mathcal{H})$, deren Matrixdarstellung in der gewählten Basis in den ersten beiden Spalten nur Nullen enthält. Man überzeugt sich dann leicht davon, daß $p'(\varphi)$ der Orthoprojektor auf den Unterraum von \mathcal{H} ist, der senkrecht zur von den ersten beiden Basisvektoren aufgespannten Ebene ist (wirkend von rechts als Element aus M'). Wir bezeichnen diesen Operator kurz mit P .

Setzt man dies in (3.6) ein, kommen also genau die partiellen Isometrien $u \in M'$ in Betracht, für die $u^*u = P$ in M' gilt. Wegen der *Antiisomorphie* zu $B(\mathcal{H})$ sind das genau die partiellen Isometrien $\tilde{u} \in B(\mathcal{H})$, für die $\tilde{u}\tilde{u}^* = P$ in $B(\mathcal{H})$ gilt, also die den Endbereich $P\mathcal{H}$ haben. In Matrixschreibweise bedeutet dies:

$$\tilde{u} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \leftarrow & & u_3 & & \rightarrow & \\ \leftarrow & & u_4 & & \rightarrow & \\ \leftarrow & & u_5 & & \rightarrow & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

wobei die Zeilenvektoren $\{u_k\}$, $k \geq 3$, ein (nicht notwendig vollständiges) Orthonormalsystem in $\mathcal{H} \simeq \mathbb{R}^2$ bilden.

Damit ist sofort das allgemeine Aussehen eines Elementes $\tilde{\varphi}$ der Faser $\mathcal{S}(\omega)$ klar, und zwar

$$\tilde{\varphi} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \leftarrow & & \frac{1}{\sqrt{2}}u_3 & & \rightarrow & \\ \leftarrow & & \frac{1}{2}u_4 & & \rightarrow & \\ \leftarrow & & \frac{1}{2\sqrt{2}}u_5 & & \rightarrow & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

für beliebige Orthonormalsysteme $\{u_k\}$, $k \geq 3$, in \mathcal{H} .

Ein Element dieser Art ist z. B.

$$\varphi' := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Man überzeugt sich analog zu oben schnell davon, daß in diesem Fall $p'(\varphi') = \mathbf{1} \neq P = p'(\varphi)$ ist.

Eine nützliche Rolle im Zusammenhang mit dem Bures-Abstand spielt das folgende Funktional über M' . Dazu seien zwei normale Zustände ω, σ über M gegeben sowie implementierende Vektoren $\varphi \in \mathcal{S}(\omega), \psi \in \mathcal{S}(\sigma)$. Dann sei

$$h_{\varphi, \psi}(y) := \langle y\varphi, \psi \rangle \text{ für alle } y \in M'. \quad (3.7)$$

Es gilt folgender Satz:

Satz 3.2. *Seien die Setzungen wie oben. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- (1) $h_{\varphi, \psi}$ ist ein positives Funktional über M' .
- (2) $d_B(\omega, \sigma) = \|\varphi - \psi\|$.

Ein wichtiger Spezialfall für die weiteren Betrachtungen ist, wenn einer der beiden normalen Zustände aus dem anderen durch eine innere Operation mit einem positiven Operator hervorgegangen ist; symbolisch $\sigma = \omega^a$ für $a \in M_+$ (siehe Kapitel 2). Ist dann $\varphi \in \mathcal{S}(\omega)$ ein beliebiger implementierender Vektor, folgt aus Satz 3.2 sofort, daß $d_B(\omega, \omega^a) = \|\varphi - a\varphi\|$ ist. Wegen

$$\|\varphi - a\varphi\|^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle + \langle a\varphi, a\varphi \rangle - \langle \varphi, a\varphi \rangle - \langle a\varphi, \varphi \rangle = 1 + 1 - 2\omega(a)$$

(ω und ω^a waren als Zustände, also mit Norm 1, vorausgesetzt) gilt folglich

$$d_B(\omega, \omega^a) = \sqrt{2(1 - \omega(a))}.$$

Der Bures-Abstand kann in diesem Spezialfall also exakt berechnet werden. Darüber hinaus zeigt obige Überlegung, daß zu *jedem* $\varphi \in \mathcal{S}(\omega)$ ein $\psi \in \mathcal{S}(\omega^a)$ existiert, für den das Infimum in (3.1) angenommen wird.

Im allgemeinen Fall kann man zwar zeigen, daß zu gegebenen $\omega, \sigma \in \mathcal{S}_0(M)$ immer ein Paar $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\omega), \psi_0 \in \mathcal{S}(\sigma)$ existiert, für das das Infimum in (3.1) angenommen wird; es kann aber sein, daß zu einem gegebenen anderen $\varphi \in \mathcal{S}(\omega)$ kein $\psi \in \mathcal{S}(\sigma)$ existiert, für den das Infimum angenommen wird. Dieses Phänomen soll im folgenden Abschnitt genauer untersucht werden.

3.3 Zur Implementierbarkeit des Bures-Abstandes

Es ist bekannt (siehe [2], siehe auch [6, Theorem 1.9]), daß in einer beliebigen von-Neumann-Algebra zu je zwei normalen Zuständen ω, σ , für die $\mathcal{S}(\omega)$ und $\mathcal{S}(\sigma)$ beide nichtleer sind, stets $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\omega)$ und $\psi_0 \in \mathcal{S}(\sigma)$ existieren, die $d_B(\omega, \sigma) = \|\psi_0 - \varphi_0\|$ erfüllen.

Speziellere Aussagen lassen sich treffen, wenn wir voraussetzen, daß M eine von-Neumann-Algebra ist, die in *Standardform* über einem Hilbertraum \mathcal{H} wirkt. Dies sei ab jetzt für diesen Abschnitt vereinbart. Über die Standardform ist für jeden normalen Zustand ω genau ein implementierender Vektor aus dem natürlichen positiven Kegel ausgezeichnet, der stets mit ξ_ω bezeichnet sein möge. Für diesen Vektor läßt sich folgende Aussage machen:

Theorem 3.3. *Seien $\omega, \sigma \in \mathcal{S}_0(M)$ beliebig. Dann existiert ein $\psi_0 \in \mathcal{S}(\sigma)$ so, daß $d_B(\omega, \sigma) = \|\xi_\omega - \psi_0\|$ ist.*

Beweise dieses Theorems und der noch folgenden Aussagen dieses Abschnittes finden sich z. B. in [6].

Bemerkung 3.3. Wegen (3.2) in Verbindung mit (3.3) wird damit auch das Supremum in (3.4) angenommen, und zwar von denselben Vektoren wie in Theorem 3.3.

Es läßt sich sogar ein $\psi_0 \in \mathcal{S}(\sigma)$, das obige Bedingung erfüllt, explizit angeben. Bevor wir das tun können, müssen wir jedoch noch einige Bezeichnungen einführen.

Definition 3.1. Seien $\omega, \sigma \in \mathcal{S}_0(M)$ beliebig gegeben. Mit $\omega^\perp \geq 0$ sei eine normale Linearform mit folgenden Eigenschaften bezeichnet:

- Es gilt $s(\omega^\perp) \perp s(\sigma)$.

- Es gilt $\omega^\perp \leq \omega$.
- Für $\nu \in M_{*+}$ mit $s(\nu) \perp s(\sigma)$ und $\nu \leq \omega$ gilt stets $\nu \leq \omega^\perp$.

Die normale positive Linearform $\omega - \omega^\perp$ sei dann mit ω^\parallel bezeichnet. Analog werden σ^\perp und σ^\parallel definiert.

Bemerkung 3.4. Die Zerlegung $\omega = \omega^\parallel + \omega^\perp$ über Standardform-von-Neumann-Algebren geht zurück auf ARAKI. In [8, Theorem 1] wird gezeigt, daß eine normale Linearform ω^\perp gemäß Definition 3.1 in diesem Fall stets existiert und eindeutig bestimmt ist.

Die Bezeichnungen ω^\perp und ω^\parallel könnten suggerieren, daß es für die Bildung dieser Linearformen einzig auf die Eigenschaften von ω ankommt. Dies ist aber nicht der Fall. Vielmehr hängen ω^\parallel und ω^\perp sehr stark von σ ab. Obige Definition ergibt also nur für Paare ω, σ einen Sinn. Auf eine Kenntlichmachung von σ wurde nur aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet.

Ein ψ_0 , das die Bedingung aus Theorem 3.3 erfüllt, sieht dann wie folgt aus:

$$\psi_0 := v_{\psi, \xi_\omega}^* \psi + \xi_{\sigma^\perp}. \quad (3.8)$$

Dabei ist ψ ein beliebiger implementierender Vektor für σ , und $v_{\psi, \varphi}$ ist für beliebige implementierende Vektoren $\varphi \in \mathcal{S}(\omega)$ und $\psi \in \mathcal{S}(\sigma)$ die partielle Isometrie aus der Polarzerlegung des Funktionals $h_{\psi, \varphi}$ (Definition siehe (3.7)) wie folgt:

$$h_{\psi, \varphi} = |h_{\psi, \varphi}|((\cdot)v_{\psi, \varphi}). \quad (3.9)$$

Beispiel 3.2. Ein Beispiel soll illustrieren, was obige Setzungen bedeuten. Wir verwenden wieder die Algebra M der Linkswirkung aus Abschnitt 2.2; diesmal ist der zugrundeliegende Hilbertraum aber nur vierdimensional. Wir wählen eine Basis in \mathcal{H} und setzen bezüglich dieser ω und σ wie folgt:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 130 & 112 & 70 & 40 \\ 112 & 154 & 120 & 70 \\ 70 & 120 & 154 & 112 \\ 40 & 70 & 112 & 130 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \omega := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die implementierenden Vektoren aus dem natürlichen positiven Kegel sind gerade die Quadratwurzeln von σ bzw. ω :

$$\xi_\sigma = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 2 & 1 \\ 5 & 10 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 10 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 10 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}(\sigma) \quad \text{und} \quad \xi_\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}(\omega).$$

Man überlegt sich leicht, daß der Operator $v_{\xi_\sigma, \xi_\omega}^*$ folgendes Aussehen hat:

$$v_{\xi_\sigma, \xi_\omega}^* =: R_u \text{ mit } u = \frac{1}{\sqrt{130}} \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei wirkt dieser Operator, da er aus M' kommt, von *rechts*. Deshalb ist

$$v_{\xi_\sigma, \xi_\omega}^* \xi_\sigma = \xi_\sigma u = \frac{1}{\sqrt{130}} \begin{pmatrix} 130 & 0 & 0 & 0 \\ 112 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 0 \\ 40 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist ein implementierender Vektor für σ^\parallel . Deshalb kann man nun die Matrix von σ^\parallel bestimmen:

$$\sigma^\parallel = \xi_\sigma u u^* \xi_\sigma = \begin{pmatrix} 130 & 112 & 70 & 40 \\ 112 & \frac{6272}{65} & \frac{784}{13} & \frac{448}{13} \\ 70 & \frac{784}{13} & \frac{490}{13} & \frac{280}{13} \\ 40 & \frac{448}{13} & \frac{280}{13} & \frac{160}{13} \end{pmatrix}.$$

Damit läßt sich σ^\perp und durch Wurzelziehen auch ξ_{σ^\perp} angeben:

$$\sigma^\perp = \sigma - \sigma^\parallel = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3738}{65} & \frac{776}{13} & \frac{462}{13} \\ 0 & \frac{776}{13} & \frac{1512}{13} & \frac{1176}{13} \\ 0 & \frac{462}{13} & \frac{1176}{13} & \frac{1530}{13} \end{pmatrix} \text{ und } \xi_{\sigma^\perp} = \sqrt{\sigma^\perp} \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6,66 & 3,43 & 1,21 \\ 0 & 3,43 & 9,15 & 4,56 \\ 0 & 1,21 & 4,56 & 9,77 \end{pmatrix}.$$

Dabei sind von der rechten Matrix nur die Zahlen in der 3×3 -Untermatrix rechts unten gerundet; die Nullen sind *exakt*. Schließlich ist

$$\psi_0 = v_{\xi_\sigma, \xi_\omega}^* \xi_\sigma + \xi_{\sigma^\perp} = \xi_\sigma u + \xi_{\sigma^\perp} \approx \frac{1}{\sqrt{130}} \begin{pmatrix} 130 & 0 & 0 & 0 \\ 112 & 76 & 39 & 14 \\ 70 & 39 & 104 & 52 \\ 40 & 14 & 52 & 111 \end{pmatrix}.$$

Auch hier gilt: Gerundet sind nur die Zahlen in der 3×3 -Untermatrix rechts unten. Da beim algebraischen Ziehen der Quadratwurzel von positiven Matrizen sehr lange Ausdrücke auftreten, schien die Angabe von gerundeten numerischen Werten sinnvoller, um ein Gefühl für die Größenordnung der auftretenden Matrixeinträge zu vermitteln. Für das Rechnen mit Matrizen und dabei speziell das Ziehen der Quadratwurzel wurde das Programm Mathematica[®] verwendet.

Schon dieses relativ niedrigdimensionale Beispiel offenbart die Schwierigkeiten, die auftauchen, wenn man den Vektor ψ_0 konkret angeben möchte. Dies hängt mit der Struktur der Zerlegung von σ in σ^\parallel und σ^\perp zusammen. Denn diese beiden normalen Linearformen stehen im allgemeinen *nicht* senkrecht aufeinander. (Ein Beispiel für $M \simeq M_2(\mathbb{C})$ wurde in [34] angegeben.) Geht man dann zum unendlichdimensionalen Fall über, treten darüber hinaus noch weitere Phänomene auf, wie das folgende Beispiel illustrieren soll.

Wir betrachten wieder den Typ- I_∞ -Faktor M aus Abschnitt 2.2. (Dies bedeutet also, \mathcal{H} ist unendlichdimensional.) Zunächst folgende Beobachtung:

Satz 3.4. *Sei σ ein beliebiger treuer normaler Zustand über dem Typ- I_∞ -Faktor M . Es existiert dann stets ein $\omega \in \mathcal{S}_0(M)$ mit $\dim s(\omega)^\perp = 1$, so daß $\sigma^\perp = 0$ ist.*

Beweis. Wir wählen einen Vektor $\eta \in \mathcal{H}$, der *nicht* im Bild von ξ_σ , aufgefaßt als $B(\mathcal{H})$ -Operator, ist. Da ξ_σ ein Hilbert-Schmidt-Operator – also ein kompakter Operator – ist, läßt sich eine solche Wahl immer treffen. Weiterhin wählen wir einen normalen Zustand ω , für den $s(\omega)^\perp$ genau der Orthoprojektor p auf den von η aufgespannten Unterraum ist. Wegen der Orthogonalitätsbedingung kann σ^\perp nur die Gestalt λp haben, $\lambda \geq 0$. Damit ist $\xi_{\sigma^\perp} = \sqrt{\lambda}p$. Wegen $\sigma^\perp \leq \sigma$ muß aber nach [26, Theorem 2.1] auch $\mathcal{R}(\xi_{\sigma^\perp}) \subseteq \mathcal{R}(\xi_\sigma)$, aufgefaßt als Operatoren über \mathcal{H} , gelten, was als einzige Möglichkeit $\lambda = 0$ und damit $\sigma^\perp = 0$ nach sich zieht. \square

Beispiel 3.3. Seien nun ω, σ wie in obigem Satz gewählt. Wir wählen ein Orthonormalsystem für \mathcal{H} , in dem die Matrix von ω Diagonalgestalt hat, wobei links oben eine Null steht. Man überlegt sich dann leicht, daß die partielle Isometrie $v_{\xi_\sigma, \xi_\omega}^* = R_u$ ist, wobei u in der gewählten Basis eine unendlichreihige Matrix ist, deren erste Spalte nur aus Nullen besteht. Daraus folgt, daß $\psi_0 = \xi_\sigma u + \xi_{\sigma^\perp} = \xi_\sigma u$ ebenfalls in der linken Spalte nur Nullen enthält. Damit ist $p'(\psi_0)$ *echt* kleiner als $\mathbb{1}$.

Nun wollen wir folgende Frage untersuchen: Seien normale Zustände ω, σ gegeben. Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\omega)$ ein beliebiger implementierender Vektor. Unter welchen Umständen existiert dann ein $\psi \in \mathcal{S}(\sigma)$, so daß $d_B(\omega, \sigma) = \|\varphi - \psi\|$ ist?

Kriterien, wann die Frage positiv bzw. negativ beantwortet werden kann, existieren für den Fall von allgemeinen von-Neumann-Algebren [6]. Für den Typ- I_∞ -Faktor läßt sich das Problem jedoch relativ leicht bearbeiten und bietet dabei nützliche Einblicke in die Natur der Bures-Geometrie. Deshalb soll die Frage hier für diesen Spezialfall erörtert werden.

Sei also M wieder der Typ- I_∞ -Faktor aus Abschnitt 2.2. Seien normale Zustände ω, σ über M beliebig, aber fest gewählt. Diese Zustände korrespondieren wieder in der üblichen Weise zu Dichtematrizen, die der Einfachheit halber genauso bezeichnet seien. Wir wählen zunächst spezielle implementierende Vektoren, und zwar $\xi_\omega := \sqrt{\omega} \in \mathcal{S}(\omega)$, $\xi_\sigma := \sqrt{\sigma} \in \mathcal{S}(\sigma)$. Die Besonderheit dieser Vektoren besteht darin, daß sie gleichzeitig *positive* Hilbert-Schmidt-Operatoren sind.

Aus diesen speziellen Vektoren erhalten wir jeden beliebigen Vektor aus $\mathcal{S}(\omega)$ bzw. $\mathcal{S}(\sigma)$ durch Anwendung einer partiellen Isometrie aus M' . In der gewählten Darstellung hat jeder implementierende Vektor somit die Gestalt $\xi_\omega v$ bzw. $\xi_\sigma u$ mit partiellen Isometrien $u, v \in B(\mathcal{H})$, die $vv^* = s(\omega)$ bzw. $uu^* = s(\sigma)$ erfüllen, vgl. Punkt 1 in Abschnitt 2.2. Wir wählen nun einen beliebigen implementierenden Vektor $\xi_\omega v \in \mathcal{S}(\omega)$. Die obige Frage lautet dann äquivalent: Wann existiert ein $\xi_\sigma u \in \mathcal{S}(\sigma)$ mit u wie oben, so daß $d_B(\omega, \sigma) = \|\xi_\omega v - \xi_\sigma u\|$ ist?

Wegen Satz 3.2 ist dies gleichbedeutend mit der Positivität des Funktionals $h_{\xi_\omega v, \xi_\sigma u}$. In unserer Darstellung gilt

$$h_{\xi_\omega v, \xi_\sigma u} = \text{tr } \xi_\omega v(\cdot)(\xi_\sigma u)^* = \text{tr } \xi_\omega v(\cdot)u^* \xi_\sigma = \text{tr } u^* \xi_\sigma \xi_\omega v(\cdot). \quad (3.10)$$

(Man beachte dabei die Positivität von ξ_σ .) Nun gilt $h_{\xi_\omega v, \xi_\sigma u} \geq 0 \iff u^* \xi_\sigma \xi_\omega v \geq 0$. Für festes v mit $vv^* = s(\omega)$ ist also zu untersuchen, ob es ein u mit $uu^* = s(\sigma)$ gibt, so daß der Ausdruck $u^*(\xi_\sigma \xi_\omega v)$ ein positiver Operator über \mathcal{H} ist.

Nun existiert wegen der Polarzerlegung sicher ein \tilde{u} mit $\tilde{u}\tilde{u}^* = l(\xi_\sigma \xi_\omega v)$ und $\tilde{u}^*\tilde{u} = r(\xi_\sigma \xi_\omega v)$, so daß $\tilde{u}^*(\xi_\sigma \xi_\omega v) \geq 0$ ist. Dabei möge $l(\cdot)$ bzw. $r(\cdot)$ den Links- bzw. Rechtsträger des Operators in Klammern bezeichnen – also den Orthoprojektor auf den Abschluß des Bildes bzw. den Orthoprojektor auf das orthogonale Komplement des Kerns. (Für die algebraische Definition von Links- bzw. Rechtsträger siehe z. B. [47, Definition 1.10.3].) Wir betrachten nun mehrere Fälle.

Fall 1: $\dim r(\xi_\sigma \xi_\omega) \mathcal{H} =: k < \infty$.

Das bedeutet sofort $\dim l(\xi_\sigma \xi_\omega) \mathcal{H} = k$ und $\dim r(\xi_\sigma \xi_\omega v) \mathcal{H} = k$. Die partielle Isometrie \tilde{u} aus der Polarzerlegung ist zu einem unitären Operator u' erweiterbar. Dann ist $s(\omega)u'$ eine partielle Isometrie, die die oben gestellte Frage positiv beantwortet.

Fall 2: $\dim r(\xi_\sigma \xi_\omega) \mathcal{H} = \infty$.

Es gilt $r(\xi_\sigma \xi_\omega) \leq r(\xi_\omega)$. Sei $m := \dim(r(\xi_\omega) - r(\xi_\sigma \xi_\omega)) \mathcal{H}$ (endlich oder unendlich). Dann hat $r(\xi_\sigma \xi_\omega v) \mathcal{H}$ *mindestens* Kodimension m . Weiterhin gilt $\dim l(\xi_\sigma \xi_\omega) \mathcal{H} =$

∞ und $l(\xi_\sigma \xi_\omega) \leq l(\xi_\sigma)$. Sei $n := \dim(l(\xi_\sigma) - l(\xi_\sigma \xi_\omega))\mathcal{H}$ (wieder endlich oder unendlich). Dann hat $l(u^* \xi_\sigma \xi_\omega v)\mathcal{H}$ *mindestens* Kodimension n , wenn $uu^* = s(\omega)$ ist.

Gilt nun $n \leq m$, existiert folglich *immer* ein u mit den geforderten Eigenschaften, das die obige Frage positiv beantwortet. Gilt jedoch $n > m$, so existieren stets implementierende Vektoren $\xi_\omega v \in \mathcal{S}(\omega)$, für die sich *kein* solches u finden läßt. Letzteres ist genau dann der Fall, wenn die Kodimension von $r(\xi_\sigma \xi_\omega v)\mathcal{H}$ echt kleiner als n ist.

Die eben gewonnenen Aussagen lassen sich wie folgt in Aussagen über die Kerne von gewissen Operatoren über \mathcal{H} äquivalent umformulieren:

Es ist nämlich

$$\begin{aligned} \ker \xi_\sigma \xi_\omega &= r(\xi_\sigma \xi_\omega)^\perp \mathcal{H}, & \ker \xi_\omega \xi_\sigma &= r(\xi_\omega \xi_\sigma)^\perp \mathcal{H} = l(\xi_\sigma \xi_\omega)^\perp \mathcal{H}, \\ \ker \xi_\omega &= r(\xi_\omega)^\perp \mathcal{H}, & \ker \xi_\sigma &= r(\xi_\sigma)^\perp \mathcal{H} = l(\xi_\sigma)^\perp \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Damit ist m die Kodimension von $\ker \xi_\sigma \xi_\omega$ bezüglich $\ker \xi_\omega$ und n die Kodimension von $\ker \xi_\omega \xi_\sigma$ bezüglich $\ker \xi_\sigma$.

Aus diesen Überlegungen läßt sich nun folgender Satz ableiten:

Satz 3.5. *Sei M die Algebra der Linkswirkung von $B(\mathcal{H})$ auf den Hilbertraum der Hilbert-Schmidt-Operatoren gemäß Abschnitt 2.2. Es existiert ein Paar von Zuständen ω, σ über M so, daß es zu gegebenem $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}(\omega)$ kein $\tilde{\psi} \in \mathcal{S}(\sigma)$ gibt, für das $h_{\tilde{\psi}, \tilde{\varphi}} \geq 0$ gilt.*

Beweis. Wir wählen eine Basis in \mathcal{H} und setzen bezüglich dieser

$$\sigma := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{32} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \omega := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{8} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Zugehörige implementierende Vektoren $\psi \in \mathcal{S}(\sigma)$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\omega)$ sind z. B.

$$\psi := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4\sqrt{2}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Man sieht leicht: $p'(\psi) = \mathbb{1}$, und $p'(\varphi)$ ist der Orthoprojektor auf den Unterraum von \mathcal{H} , der senkrecht zur von den ersten zwei Basisvektoren aufgespannten Ebene ist (wirkend von rechts als Element aus M'). Wir setzen $p'(\varphi) =: P \in M' \simeq \mathbb{B}(\mathcal{H})$. Es gilt nun nach Formel (3.6)

$$\mathcal{S}(\sigma) = \{\psi u \mid uu^* = \mathbb{1}\} \quad \text{und} \quad \mathcal{S}(\omega) = \{\varphi v \mid vv^* = P\}. \quad (3.11)$$

(Elemente aus M' wirken in dieser Darstellung von *rechts*.)

Das Funktional $h_{\psi u, \varphi v} \in M'_*$ sieht dann wie folgt aus:

$$h_{\psi u, \varphi v} = \text{tr } \psi u(\cdot)(\varphi v)^* = \text{tr } \psi u(\cdot)v^*\varphi^* = \text{tr } v^*\varphi^*\psi u(\cdot). \quad (3.12)$$

Es gilt $h_{\psi u, \varphi v} \geq 0 \iff v^*\varphi^*\psi u \geq 0 \iff u^*\psi^*\varphi v \geq 0$.

Wir wählen nun ein konkretes v mit $v^*v = \mathbb{1}$. Die Matrix von v in der gewählten Basis sei dabei:

$$v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Wir setzen $\tilde{\varphi} := \varphi v$. Wir suchen nun für diesen konkreten implementierenden Vektor ein u entsprechend (3.11) so, daß das Funktional aus (3.12) positiv ist. Es ist aber

$$A := \psi^*\tilde{\varphi} = \psi^*\varphi v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{16} & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Man sieht leicht $\ker A = \{0\}$ und $\overline{\mathcal{R}(A)} = P\mathcal{H}$. Gesucht ist ein Operator u entsprechend (3.11), mit dem $u^*A \geq 0$ ist. Angenommen, wir hätten ein u mit dieser Eigenschaft. Wenn $B := u^*A \geq 0$ ist, gilt speziell $B = B^*$ oder $u^*A = A^*u$ oder $A = uA^*u$. Da A einen trivialen Kern hat, muß dies auch für u gelten. Das bedeutet $u^*u = \mathbb{1}$. Zusammen mit (3.11) ergibt sich, daß u unitär ist. Wegen $u^*A = B$ ist auch $\ker B = \{0\}$. Da B selbstadjungiert ist, ist damit $\overline{\mathcal{R}(B)} = \mathcal{H}$. Da u unitär ist, gilt auch $\overline{\mathcal{R}(uB)} = \mathcal{H}$. Das ist aber ein Widerspruch wegen $A = uB$.

Folglich gibt es zu $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}(\omega)$ *keinen* Vektor $\tilde{\psi} \in \mathcal{S}(\sigma)$, für den das Funktional $h_{\tilde{\psi}, \tilde{\varphi}} \in M'_*$ positiv ist. □

Kapitel 4

Produkte positiver Operatoren

In diesem Kapitel wird untersucht, unter welchen Bedingungen sich Operatoren aus einer von-Neumann-Algebra als Produkt positiver Operatoren derselben Algebra darstellen lassen [44], [43]. Motiviert wurde dies durch den Versuch, die Holonomiegruppe eines treuen normalen Zustandes zu bestimmen (siehe nächstes Kapitel). Einer der wenigen handhabbaren Fälle führte direkt zum Produkt positiver Operatoren und der Frage, welche Operatoren dies liefert.

Dieses Problem ist aber auch dann interessant, wenn man nicht nach dem Nutzen für die Bestimmung von Holonomiegruppen fragt. Leider haben die Sätze über Produkte positiver Operatoren bzw. Matrizen bis jetzt keinen Eingang in einschlägige Lehrbücher gefunden. Aus diesem Grund beschäftigen wir uns an dieser Stelle ausführlich mit dem Thema.

Produkte positiver Operatoren waren in den vergangenen Jahren der Gegenstand mehrerer Arbeiten. Eine ausführlichere Betrachtung dazu folgt weiter unten. Hat man eine Operatoralgebra M gegeben, wird man unter anderem auf folgende Aufgaben geführt:

1. Man charakterisiere die Menge der endlichen Produkte von invertierbaren positiven Operatoren aus M !
2. Man gebe eine positive Zahl N an, so daß jedes Element aus dieser Menge als Produkt von höchstens N positiven invertierbaren Operatoren aus M darstellbar ist!

3. Man finde die kleinste solche Zahl N !

Die Suche nach Antworten auf diese Fragen für verschiedene Algebren führte zu verschiedenen Ansätzen und Methoden, die sich zumeist nicht für alle Probleme gleichzeitig eignen. Die Beweise der folgenden Haupttheoreme sind z. B. ausschließlich für die Aufgaben 1 und 2 geeignet; für Aufgabe 3 liefern sie nur unbefriedigend hohe Schranken.

Statt dessen haben die Beweise Anlaß zu einer durchaus sinnvollen Nebenbedingung an obenstehende Aufgaben gegeben. Dazu sei für eine von-Neumann-Algebra M und reelles $c > 1$ folgende Bezeichnung vereinbart:

$$M_+[c] := \{a \in M_+ \mid \text{spec } a \subseteq [\frac{1}{c}, c]\}. \quad (4.1)$$

Die Notation $[c]$ an einer von-Neumann-Algebra soll dabei *immer* an die Einschränkung hinsichtlich dieser Spektrumseigenschaft erinnern, folglich auch bei z. B. $B(\mathcal{H})_+[c]$. Es ist klar, daß alle Operatoren aus $M_+[c]$ invertierbar sind. Die Nebenbedingung besteht nun darin, daß wir dieselben Probleme wie oben untersuchen, aber Produkte nicht von beliebigen invertierbaren positiven Operatoren aus M , sondern von solchen aus $M_+[c]$ für gewisses vorgegebenes $c > 1$ betrachten.

4.1 Die zwei Haupttheoreme

Theorem 4.1 ([44, Theorem 1],[43, Theorem 1]). *Sei \mathcal{H} ein unendlichdimensionaler separabler Hilbertraum. Dann existieren globale Konstante $N \in \mathbb{N}$ und $c > 1$ so, daß jedes $u \in U(\mathcal{H})$ in der Form*

$$u = a_N \cdots a_2 a_1$$

geschrieben werden kann, wobei $a_1, \dots, a_N \in B(\mathcal{H})_+[c]$ sind.

Definition 4.1 ([16, Seite 150]). Eine von-Neumann-Algebra M , die über einem Hilbertraum \mathcal{H} wirkt, heißt *hyperfinit*, falls es Faktoren $\{M_j\}_{j=0}^\infty$ gibt, für die folgendes gilt:

- $M_j \simeq M_{n_j}(\mathbb{C}) \forall j$ mit $\{n_j\} \subseteq \mathbb{N}$ und $2 \leq n_1 < n_2 < \dots$,

- $\mathbb{1}_M \in M_j \forall j$ und
- $M_j \subseteq M_{j+1} \forall j$,

und $\overline{\bigcup_{j=1}^{\infty} M_j}^{\text{st}} = M$. Dabei bezeichne $M_n(\mathbb{C})$ die volle Algebra aller $n \times n$ -Matrizen.

Theorem 4.2 ([44, Theorem 2],[43, Theorem 2]). *Sei M eine hyperfinite von-Neumann-Algebra, die über einem separablen Hilbertraum wirkt. Dann existieren globale Konstante $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ und $c > 1$ so, daß für jedes $\varphi \in [0, 2\pi[$ der Operator $e^{i\varphi} \mathbb{1}_M \in M \cap M'$ in der Form*

$$e^{i\varphi} \mathbb{1}_M = a_{\tilde{N}} \cdots a_2 a_1$$

geschrieben werden kann, wobei $a_1, \dots, a_{\tilde{N}} \in M_+[c]$ sind.

Bemerkung 4.1. Es kann sogar eine stärkere Aussage als jene in Theorem 4.2 bewiesen werden. Aus dem Beweis folgt, daß die Zerlegung schon existiert, wenn M nur eine hyperfinite von-Neumann-Algebra *enthält*. Das gilt nach dem Halbierungslemma immer dann, wenn M keinen direkten Summanden vom Typ I_n hat (Anmerkung von STØRMER in MR 96f:46110). Siehe dazu z. B. [40], [21].

Bemerkung 4.2. Die Hyperfinitheit einer von-Neumann-Algebra M ist ein Ausdruck dafür, daß M sowohl unendlichdimensional ist als auch „hinreichend“ nichtkommutativ. Weder für eine endlichdimensionale noch für eine abelsche von-Neumann-Algebra kann Theorem 4.2 gelten.

Bemerkung 4.3. Es existieren noch weitere Ergebnisse zu Produkten von speziellen Matrizen bzw. Operatoren, wie z. B. positive oder hermitesche, die mit den obenstehenden Ergebnissen in enger Beziehung stehen. Im folgenden wird ein kurzer Überblick gegeben.

Im Kontext von von-Neumann-Algebren bewies STØRMER 1965 ein Lemma, das die Zerlegung von $i\mathbb{1}$ in eine Summe zweier Produkte von jeweils vier selbstadjungierten Operatoren angibt (siehe [55, Lemma 2.13]). In Spezialfällen gibt es sogar eine Zerlegung von $i\mathbb{1}$ in ein Produkt von drei selbstadjungierten Operatoren.

1968 und 1970 untersuchte BALLANTINE Produkte positiver $n \times n$ -Matrizen über den reellen [10] bzw. den komplexen Zahlen [11]. Im zweiten Artikel wird gezeigt, daß jede invertierbare komplexe Matrix mit positiver Determinante das Produkt von höchstens fünf positiven invertierbaren Matrizen ist. SOUROUR gab in [54] einen kürzeren Beweis

dafür an, indem er ein allgemeineres Ergebnis über die Faktorisierung von Matrizen verwendete.

Schließlich erweiterte WU 1988 einerseits Ballantines Ergebnis auf positiv *semidefinite* Matrizen [64] und andererseits auf den Fall von Operatoren über einem unendlichdimensionalen Hilbertraum [63]. In letzterem Artikel geht er auch auf die Frage ein, wie viele positive Operatoren höchstens nötig sind, um jeden invertierbaren Operator zu erzeugen. Aus der Konstruktion der Beweise (mittels Polarzerlegung) ergab sich dort die Zahl 17. PHILLIPS [45] gelang es zu beweisen, daß tatsächlich schon 7 Operatoren genügen.

Ein ausführlicher Übersichtsartikel, der sich mit gelösten und ungelösten Problemen bei Produkten von symmetrischen, hermiteschen, positiven und normalen Matrizen beschäftigt, ist [32]. Dort wird auch der Fall der beschränkten Operatoren über unendlichdimensionalen Hilberträumen betrachtet. Eine weitere Übersicht speziell über den unendlichdimensionalen Fall bietet [65].

Im Unterschied zu obigen Theoremen wird in keinem der genannten Artikel auf eine Normbeschränkung der zu multiplizierenden Operatoren eingegangen. Der Autor wurde von WU [66] jedoch darauf hingewiesen, daß sich aus dem Beweis in [63] implizit ergibt, daß die dort konstruierten Operatoren sämtlich aus $M_+[c]$ kommen für genügend großes c . Vermutlich ließe sich so auch zumindest ein Teil der anderen genannten Ergebnisse verschärfen. Es bleibt jedoch festzustellen, daß zum Problem der Normen der positiven Operatoren in den zitierten Arbeiten keine Aussagen gemacht wurden. (Eine genauere Betrachtung der Auswirkungen einer Normschränke folgt im Abschnitt 4.3.)

Eine weitere Besonderheit findet sich in der Aussage von Theorem 4.2. Dieses Theorem gilt tatsächlich für *alle* hyperfiniten von-Neumann-Algebren, was unter anderem auch den Fall eines Typ-II₁-Faktors einschließt. Alle oben genannten Ergebnisse gelten dagegen *nur* in echt infiniten von-Neumann-Algebren wie z. B. $B(\mathcal{H})$ für einen unendlichdimensionalen separablen Hilbertraum. Das liegt darin begründet, daß in irgendeiner Form das Theorem von HALMOS/KAKUTANI (siehe Satz 4.5) verwendet wurde, welches sich direkt nur auf echt infinite von-Neumann-Algebren verallgemeinern läßt (siehe [27]). Als offenes Problem wurde in [45, Question 9] gerade die Frage nach der Menge der endlichen Produkte von positiven invertierbaren Operatoren in einem Typ-II₁-Faktor gestellt. Theorem 4.2 in Verbindung mit Bemerkung 4.1 zeigt, daß zumindest alle komplexen Vielfachen der $\mathbb{1}$ dazugehören.

4.2 Hilfsresultate, Beweise

Bevor wir die Theoreme beweisen können, müssen wir uns einige Hilfsresultate beschaffen. Wir fangen mit 2×2 -Matrizen an.

Satz 4.3. *Sei $M_2(\mathbb{C})$ die volle Algebra aller 2×2 -Matrizen mit komplexen Eintragungen und $M_2(\mathbb{C})_+$ der Kegel der positiven Matrizen. Dann existieren globale Konstante $N' \in \mathbb{N}$ und $c > 1$ so, daß jedes $u \in \text{SU}(2)$ in der Form*

$$u = a_{N'} \cdots a_2 a_1$$

geschrieben werden kann, wobei $a_1, \dots, a_{N'} \in M_2(\mathbb{C})_+[c]$ sind.

Beweis. Sei $a \in M_2(\mathbb{C})_+$ invertierbar und $a \neq \lambda \mathbb{1}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Dann existiert ein $v \in \text{SU}(2)$ so, daß a nicht mit vav^* kommutiert. Sei $u := a(vav^*)|a(vav^*)|^{-1}$. (Dabei sei hier und im folgenden für eine Matrix oder einen Operator b mit $|b|$ der Modul aus der Polarzerlegung bezeichnet, der durch $\sqrt{b^*b}$ definiert ist.) Nach dem Polarzerlegungstheorem ist u unitär und ungleich $\mathbb{1}$. Weil v normal ist, kann es als $v = w \text{diag}[e^{i\varphi}, e^{-i\varphi}] w^*$ für gewisses $w \in \text{U}(2)$ und $\varphi \in]0, 2\pi[$ geschrieben werden. Setze nun für $\varepsilon \in [0, \varphi]$

$$\begin{aligned} v_\varepsilon &:= w \text{diag}[e^{i\varepsilon}, e^{-i\varepsilon}] w^* \text{ und} \\ u_\varepsilon &:= a(v_\varepsilon a v_\varepsilon^*) |a(v_\varepsilon a v_\varepsilon^*)|^{-1}. \end{aligned}$$

Es ist $u_0 = \mathbb{1}$ und $u_\varphi = u \neq \mathbb{1}$, und die Abbildung $[0, \varphi] \rightarrow \text{SU}(2), \varepsilon \mapsto u_\varepsilon$ ist stetig.

Das Spektrum einer Matrix ist eine stetige Funktion ihrer Eintragungen, und das gilt folglich auch für dessen Realteil. Weil alle Matrizen u_ε aus $\text{SU}(2)$ sind, sind ihre Spektra von der Form $\{e^{i\vartheta}, e^{-i\vartheta}\}$ für gewisses reelles ϑ , was bedeutet, daß beide Spektralwerte stets gleichen Realteil haben. Diesen wollen wir im folgenden kurz als „Realteil des Spektrums“ bezeichnen.

Sei x der Realteil des Spektrums von u . (Man beachte: Wegen $u \neq \mathbb{1}$ ist $x < 1$.) Wenn ε von 0 zu φ übergeht, überstreicht $\Re(\text{spec } u_\varepsilon)$ mindestens das volle Intervall $[x, 1]$. Sei $\psi := \text{Arccos } x$, dann gibt es für jedes $\vartheta \in [0, \psi]$ ein $\varepsilon(\vartheta) \in [0, \varphi]$ so, daß $\text{spec } u_{\varepsilon(\vartheta)} = \{e^{i\vartheta}, e^{-i\vartheta}\}$ ist. Aus der Konstruktion folgt damit sofort, daß jede Matrix aus $\text{SU}(2)$, deren Spektrum $\{e^{i\vartheta}, e^{-i\vartheta}\}$ ist mit $\vartheta \in [0, \psi]$, in der Form $ab|ab|^{-1}$ für gewisse $a, b \in M_2(\mathbb{C})_+$ geschrieben werden kann.

Sei nun $k := \left\lceil \frac{2\pi}{\psi} \right\rceil + 1$. (Die Klammern stehen für den größten ganzzahligen Anteil.) Jetzt können wir wie folgt jede Matrix aus $SU(2)$ als Produkt von $N' := 3k$ positiven Matrizen schreiben: Sei also $u' \in SU(2)$ beliebig gegeben. Für gewisses $w' \in U(2)$ und gewisses $\varrho \in [0, 2\pi[$ ist $u' = w' \text{diag}[e^{i\varrho}, e^{-i\varrho}] w'^*$. Wegen $\frac{\varrho}{k} \in [0, \psi]$ gibt es $a, b \geq 0$ mit $ab|ab|^{-1} = \text{diag}[e^{i\frac{\varrho}{k}}, e^{-i\frac{\varrho}{k}}]$. Dann ist aber $(ab|ab|^{-1})^k = \text{diag}[e^{i\varrho}, e^{-i\varrho}]$ und schließlich $u' = (w'aw'^* w'bw'^* w'|ab|^{-1}w'^*)^k$.

Da auch die Norm einer Matrix und die ihres Inversen stetige Funktionen der Eintragungen sind, ist es leicht zu sehen, daß es für diese Werte für alle $v_\varepsilon av_\varepsilon^*$ und alle $|a(v_\varepsilon av_\varepsilon^*)|^{-1}$ obere Schranken \tilde{c}, \tilde{d} geben muß. Die globale Konstante c kann dann gleich $\max\{\tilde{c}, \tilde{d}\}$ gewählt werden. \square

Sei \mathcal{H} nun ein separabler unendlichdimensionaler Hilbertraum. Sei $U_d(\mathcal{H})$ diejenige Untermenge von $U(\mathcal{H})$, die genau die Operatoren enthält, die ein vollständiges Orthonormalsystem von Eigenvektoren besitzen. Das sind mit anderen Worten also die unitär diagonalisierbaren Matrizen. Es gilt folgender Satz:

Satz 4.4. *Sei \mathcal{H} ein unendlichdimensionaler separabler Hilbertraum. Dann existieren globale Konstante $N'' \in \mathbb{N}$ und $c > 1$ so, daß jedes $u \in U_d(\mathcal{H})$ in der Form*

$$u = a_{N''} \cdots a_2 a_1$$

geschrieben werden kann, wobei $a_1, \dots, a_{N''} \in B(\mathcal{H})_+[c]$ sind.

Beweis. Sei ein beliebiges $u \in U_d$ wie folgt gegeben: $u = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus e^{i\varphi_k} p_k$, wobei $\{p_k\}$ eine Folge aufeinander senkrecht stehender eindimensionaler Orthoprojektoren ist, die sich zu $\mathbb{1}$ aufaddieren. Wegen der Definition von U_d ist eine solche Darstellung immer möglich. Wir definieren nun zwei weitere Operatoren $v(u), w(u) \in U_d(\mathcal{H})$ wie folgt: Wir bilden Vektoren $\vec{\chi} := (\chi_1, \chi_2, \dots), \vec{\psi} := (\psi_1, \psi_2, \dots)$ mit $\chi_k, \psi_k \in [0, 2\pi[$ und folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} \chi_{2k-1} + \chi_{2k} \bmod 2\pi &= 0 \text{ für alle } k = 1, 2, \dots; \\ \psi_1 = 0, \psi_{2k} + \psi_{2k+1} \bmod 2\pi &= 0 \text{ für alle } k = 1, 2, \dots \text{ mit} \\ \chi_k + \psi_k \bmod 2\pi &= \varphi_k \text{ für alle } k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Um das zu erreichen, setzen wir nacheinander $\chi_1 := \varphi_1, \psi_2 := \varphi_1 + \varphi_2 \bmod 2\pi, \chi_3 := \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \bmod 2\pi$ und so weiter. Wir definieren nun

$$v(u) := \sum_{k=1}^{\infty} \oplus e^{i\chi_k} p_k \text{ und } w(u) := \sum_{k=1}^{\infty} \oplus e^{i\psi_k} p_k.$$

Wegen der speziellen Wahl von $\vec{\chi}$ und $\vec{\psi}$ ergibt das

$$v(u)w(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \oplus e^{i\varphi_k} p_k = u.$$

Das bedeutet, wenn wir sowohl $v(u)$ als auch $w(u)$ als Produkt positiver invertierbarer Operatoren mit den geforderten Eigenschaften schreiben können, ist der Satz bewiesen. Da aber beide Operatoren nach Konstruktion direkte Summen von $SU(2)$ -Matrizen sind (bei $w(u)$ kommt noch eine eindimensionale Komponente dazu), ist das nach Satz 4.3 garantiert. Wir nehmen einfach für jeden 2×2 -Block die Zerlegung, die uns Satz 4.3 liefert, und bilden deren direkte Summe. Dies liefert uns die gewünschte Zerlegung.

Zu den Konstanten läßt sich sagen: Als Zahl N'' aus Satz 4.4 kann dann das Doppelte der Zahl N' aus Satz 4.3 gewählt werden – im Fall, man käme mit weniger Faktoren aus, kann man immer mit einer geeigneten Anzahl von Einheitsmatrizen auffüllen –; c kann gleich der Konstanten aus Satz 4.3 gewählt werden, da die Norm einer direkten Summe von Operatoren das Supremum der Normen der Ausgangsoperatoren nicht übersteigt und Analoges für die Norm der Inversen gilt. \square

Bemerkung 4.4. Die Argumentation aus dem vorangegangenen Beweis läßt sich leicht auf den Fall eines n -dimensionalen Hilbertraumes \mathcal{H} übertragen. Auch dort finden wir für jede Matrix $u \in \mathbf{SU}(n)$ höchstens N'' positive invertierbare Matrizen aus $B(\mathcal{H})_+[c]$, deren Produkt u ist. Das liegt daran, daß in einem endlichdimensionalen Hilbertraum *jede* unitäre Matrix unitär diagonalisierbar ist. Die Einschränkung auf $\mathbf{SU}(n)$ ist nötig, weil das Produkt positiver Matrizen immer eine positive Determinante hat.

Schließlich bleibt noch zu untersuchen, ob *jeder* unitäre Operator das Produkt von positiven invertierbaren Operatoren ist. Dafür verwenden wir ein Resultat von HALMOS und KAKUTANI [33], das auch in [30, Problem 112] zu finden ist. Der Beweis dort ist nicht lang und wird hier kurz wiedergegeben.

Satz 4.5 (Halmos/Kakutani). *Jeder unitäre Operator über einem unendlichdimensionalen Hilbertraum ist das Produkt von höchstens vier Symmetrien, d. h. unitären hermiteschen Operatoren.*

Beweis. Wir stellen \mathcal{H} zunächst als direkte Summe einer Folge $\{\mathcal{H}_n\}$ von Unterräumen gleicher Dimension dar, von denen jeder den gegebenen Operator u reduziert. Dabei laufe der Index n über die ganzen Zahlen.

Wir definieren relativ zur fixierten Zerlegung $\mathcal{H} = \sum_n^\oplus \mathcal{H}_n$ einen Rechtsshift als unitären Operator s mit $s\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{n+1}$ und einen Linksshift als unitären Operator t mit $t\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{n-1}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Wegen der Dimensionsgleichheit der \mathcal{H}_n ist die Existenz dieser Shifts garantiert. Wenn s ein beliebiger Rechtsshift ist, setzen wir $t = s^*u$. Wegen $t\mathcal{H}_n = s^*u\mathcal{H}_n = s^*\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{n-1}$ für alle n , ist t folglich ein Linksshift. Wegen $u = st$ ist also jeder unitäre Operator das Produkt von zwei Shifts; der Beweis ist geführt, wenn wir zeigen, daß jeder Shift das Produkt von zwei Symmetrien ist.

Weil das Inverse (äquivalent: das Adjungierte) eines Linksshifts ein Rechtsshift ist, genügt es, Rechtsshifts zu betrachten. Sei also s ein Rechtsshift; sei p der Operator, der gleich s^{1-2n} auf \mathcal{H}_n ist, und q der Operator, der gleich s^{-2n} auf \mathcal{H}_n ist ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Es ist leicht zu sehen, daß p und q Symmetrien sind. Wenn $\varphi \in \mathcal{H}_n$ ist, dann ist $q\varphi = s^{-2n}\varphi \in s^{-2n}\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{-n}$, so daß $pq\varphi = ps^{-2n}\varphi = s^{1-2(-n)}s^{-2n}\varphi = s\varphi$ ist. \square

Wir verfügen jetzt über alle Hilfsmittel, um die Theoreme 4.1 und 4.2 beweisen zu können.

Beweis von Theorem 4.1. Jede Symmetrie ist ein Element von $U_d(\mathcal{H})$, denn jede Symmetrie ist die Differenz zweier Orthoprojektoren, von denen einer das orthogonale Komplement des anderen ist. Folglich können wir Satz 4.4 auf jede der Symmetrien von Satz 4.5 anwenden und erhalten die gewünschte Zerlegung. Man sieht sofort, daß c aus Satz 4.4 direkt übernommen und $N := 4N''$ gesetzt werden kann. \square

Beweis von Theorem 4.2. Es ist bekannt, daß in einer hyperfiniten von-Neumann-Algebra, die wie im Theorem gegeben ist, $n_j | n_{j+1} \forall j$ gilt. Sei $k_1 := n_1$ und $k_j := \frac{n_j}{n_{j-1}}$ für $j \geq 2$. O. B. d. A. können wir $k_j \geq 3 \forall j$ setzen. (Falls notwendig, wird die Typfolge $\{n_j\}$ weiter ausgedünnt.)

In M existieren Systeme von zueinander orthogonalen und zueinander äquivalenten (im MURRAY/VON-NEUMANN-Sinne) Orthoprojektoren $\{p_i\}_{i=1}^{k_1} \subseteq M_1$, $\{p_{ij}\}_{i=1, j=1}^{k_1, k_2} \subseteq M_2$, $\{p_{ijk}\}_{i=1, j=1, k=1}^{k_1, k_2, k_3} \subseteq M_3, \dots$ mit $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} = \mathbb{1}_M$, $p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{ik_2} = p_i$, $p_{ij1} + p_{ij2} + \dots + p_{ijk_3} = p_{ij}$ usw.

Jetzt definieren wir Orthoprojektoren P_i und P'_i wie folgt:

$$\begin{aligned} P_1 &:= p_1 + p_2 + \cdots + p_{k_1-2}, & P'_1 &:= p_{k_1-1}; \\ P_2 &:= p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \cdots + p_{k_1 k_2-2}, & P'_2 &:= p_{k_1 k_2-1}; \\ P_3 &:= p_{k_1 k_2+1} + p_{k_1 k_2+2} + \cdots + p_{k_1 k_2 k_3-2}, & P'_3 &:= p_{k_1 k_2 k_3-1} \text{ usw.} \end{aligned}$$

Wir setzen schließlich $Q_1 := P_1 + P'_1$, $Q_2 := P_2 + P'_2$, $Q_3 := P_3 + P'_3$ usw. und $Q'_1 := P'_1 + P_2$, $Q'_2 := P'_2 + P_3$, $Q'_3 := P'_3 + P_4$ usw.

Seien für den Moment $\varphi, \varphi_2, \varphi_4, \dots \in [0, 2\pi[$ und darüber hinaus $\psi_1, \psi_3, \psi_5, \dots \in [0, 2\pi[$ beliebig gegeben. Sei $\vec{\varphi} := (\varphi, \varphi_2, \varphi_4, \dots)$ und $\vec{\psi} := (\psi_1, \psi_3, \psi_5, \dots)$.

Es ist $M_1 \simeq M_{n_1}(\mathbb{C})$ und $Q_1 \in M_1$, wir können also $Q_1 M_1 Q_1$ in $M_{n_1}(\mathbb{C})$ einbetten; folglich ist $Q_1 M_1 Q_1 \simeq M_{k_1-1}(\mathbb{C})$. Satz 4.4/Bemerkung 4.4 liefert $a_1^1(\varphi), \dots, a_{N''}^1(\varphi) \in M_{k_1-1}(\mathbb{C})_+[c]$ mit

$$a_{N''}^1(\varphi) \cdots a_1^1(\varphi) = \text{diag}[e^{i\varphi}, e^{i\varphi}, \dots, e^{i\varphi}, e^{i\varphi_1}], \quad \varphi_1 := -(k_1 - 2)\varphi \text{ mod } 2\pi.$$

(Die Wahl von φ_1 macht gerade die Determinante zu 1.) Wegen $Q_1 M_1 Q_1 \simeq M_{k_1-1}(\mathbb{C})$ können wir $a_1^1(\varphi), \dots, a_{N''}^1(\varphi)$ als Elemente von $(Q_1 M_1 Q_1)_+[c]$ auffassen, und so können wir schreiben $a_{N''}^1(\varphi) \cdots a_1^1(\varphi) = e^{i\varphi} P_1 \oplus e^{i\varphi_1} P'_1$.

Genauso ist $M_2 \simeq M_{n_2}(\mathbb{C})$ und $Q_2 \in M_2$, folglich können wir $Q_2 M_2 Q_2$ in $M_{n_2}(\mathbb{C})$ einbetten, und es ist $Q_2 M_2 Q_2 \simeq M_{k_2-1}(\mathbb{C})$. Wieder existieren $a_1^2(\varphi_2), \dots, a_{N''}^2(\varphi_2) \in M_{k_2-1}(\mathbb{C})_+[c]$ mit

$$a_{N''}^2(\varphi_2) \cdots a_1^2(\varphi_2) = \text{diag}[e^{i\varphi_2}, e^{i\varphi_2}, \dots, e^{i\varphi_2}, e^{i\varphi_3}], \quad \varphi_3 := -(k_2 - 2)\varphi_2 \text{ mod } 2\pi.$$

(Auch hier macht die Setzung von φ_3 gerade die Determinante zu 1.) Wegen $Q_2 M_2 Q_2 \simeq M_{k_2-1}(\mathbb{C})$ können wir wieder $a_1^2(\varphi_2), \dots, a_{N''}^2(\varphi_2)$ als Elemente von $(Q_2 M_2 Q_2)_+[c]$ auffassen, und so können wir schreiben $a_{N''}^2(\varphi_2) \cdots a_1^2(\varphi_2) = e^{i\varphi_2} P_2 \oplus e^{i\varphi_3} P'_2$.

Verfahren wir weiter, erhalten wir auf diese Weise schließlich $a_i^j(\varphi_{2(j-1)}) \in Q_j M_j Q_j \subseteq Q_j M Q_j \quad \forall i, j$. Alle diese Operatoren sind durch c beschränkt und wirken für verschiedene j auf wechselseitig orthogonalen Unterräumen von \mathcal{H} . Deshalb ist für jedes i der folgende Operator wohldefiniert: $a_i(\vec{\varphi}) := a_i^1(\varphi) \oplus \sum_{j=2}^{\infty} a_i^j(\varphi_{2(j-1)})$. Für diese Operatoren haben wir $a_i(\vec{\varphi}) \in M_+[c]$ und

$$a_{N''}(\vec{\varphi}) \cdots a_1(\vec{\varphi}) = e^{i\varphi} P_1 \oplus e^{i\varphi_1} P'_1 \oplus e^{i\varphi_2} P_2 \oplus e^{i\varphi_3} P'_2 \oplus \cdots$$

Wir wenden nun analoge Betrachtungen für die Algebren $Q'_j M Q'_j$ an. Analog wie oben ist $M_2 \simeq M_{n_2}(\mathbb{C})$ und $Q'_1 \in M_2$, folglich können wir $Q'_1 M_2 Q'_1$ in $M_{n_2}(\mathbb{C})$ einbetten; wir haben also $Q'_1 M_2 Q'_1 \simeq M_{2k_2-2}(\mathbb{C})$. Das bedeutet, es existieren $b_1^1(\psi_1), \dots, b_{N''}^1(\psi_1) \in M_{2k_2-2}(\mathbb{C})_+[c]$ mit

$$b_{N''}^1(\psi_1) \cdots b_1^1(\psi_1) = \text{diag}[\underbrace{e^{i\psi_1}, \dots, e^{i\psi_1}}_{k_2\text{-mal}}, \underbrace{e^{i\psi_2}, \dots, e^{i\psi_2}}_{(k_2-2)\text{-mal}}], \quad \psi_2 := -\frac{k_2}{k_2-2}\psi_1 \pmod{2\pi}.$$

(Wieder ist ψ_2 so gewählt, daß die Diagonalmatrix Determinante 1 hat.) Weil $Q'_1 M_2 Q'_1 \simeq M_{2k_2-2}(\mathbb{C})$ ist, können wir $b_1^1(\psi_1), \dots, b_{N''}^1(\psi_1)$ als Elemente von $(Q'_1 M_2 Q'_1)_+[c]$ betrachten und schreiben $b_{N''}^1(\psi_1) \cdots b_1^1(\psi_1) = e^{i\psi_1} P'_1 \oplus e^{i\psi_2} P_2$.

Genauso ist auch $M_3 \simeq M_{n_3}(\mathbb{C})$ und $Q'_2 \in M_3$, folglich können wir $Q'_2 M_3 Q'_2$ in $M_{n_3}(\mathbb{C})$ einbetten. Wieder ist $Q'_2 M_3 Q'_2 \simeq M_{2k_3-2}(\mathbb{C})$. Es existieren Operatoren $b_1^2(\psi_3), \dots, b_{N''}^2(\psi_3) \in M_{2k_3-2}(\mathbb{C})_+[c]$ mit

$$b_{N''}^2(\psi_3) \cdots b_1^2(\psi_3) = \text{diag}[\underbrace{e^{i\psi_3}, \dots, e^{i\psi_3}}_{k_3\text{-mal}}, \underbrace{e^{i\psi_4}, \dots, e^{i\psi_4}}_{(k_3-2)\text{-mal}}], \quad \psi_4 := -\frac{k_3}{k_3-2}\psi_3 \pmod{2\pi}.$$

(Auch hier ist ψ_4 so gewählt, daß die Diagonalmatrix Determinante 1 hat.) Wegen $Q'_2 M_3 Q'_2 \simeq M_{2k_3-2}(\mathbb{C})$ können wir $b_1^2(\psi_3), \dots, b_{N''}^2(\psi_3)$ als Elemente von $(Q'_2 M_3 Q'_2)_+$ betrachten und schreiben $b_{N''}^2(\psi_3) \cdots b_1^2(\psi_3) = e^{i\psi_3} P'_2 \oplus e^{i\psi_4} P_3$.

Setzt man diese Schritte fort, erhalten wir schließlich eine Familie von Operatoren $\{b_i^j(\psi_{2j-1})\}$, die $b_i^j(\psi_{2j-1}) \in Q'_j M_{j+1} Q'_j \subseteq Q'_j M Q'_j \quad \forall i, j$ erfüllen. Diese Operatoren sind alle durch c beschränkt und wirken für verschiedene j auf wechselseitig orthogonalen Unterräumen von \mathcal{H} . Folglich ergibt die Setzung $b_i(\vec{\psi}) := P_1 \oplus \sum_{j=1}^{\infty} b_i^j(\psi_{2j-1})$ einen Ausdruck, der als beschränkter Operator einen Sinn ergibt. Es ist $b_i(\vec{\psi}) \in M_+[c]$ und

$$b_{N''}(\vec{\psi}) \cdots b_1(\vec{\psi}) = P_1 \oplus e^{i\psi_1} P'_1 \oplus e^{i\psi_2} P_2 \oplus e^{i\psi_3} P'_2 \oplus e^{i\psi_4} P_3 \oplus \dots .$$

Für gegebenes φ definieren wir nun $\{\varphi_j\}, \{\psi_k\}$ sukzessive wie folgt: $\psi_1 := \varphi - \varphi_1 \pmod{2\pi}$, $\varphi_2 := \varphi - \psi_2 \pmod{2\pi}$, $\psi_3 := \varphi - \varphi_3 \pmod{2\pi}$, $\varphi_4 := \varphi - \psi_4 \pmod{2\pi}$ usw. Auf diese Weise erhalten wir schließlich

$$a_{N''}(\vec{\varphi}) \cdots a_1(\vec{\varphi}) b_{N''}(\vec{\psi}) \cdots b_1(\vec{\psi}) = e^{i\varphi} \mathbb{1}_M.$$

Die Konstante \tilde{N} im Theorem kann man folglich als das Doppelte von N'' aus Satz 4.4 wählen; c bleibt auch diesmal unverändert. \square

4.3 Eine Bemerkung zu den Konstanten

In diesem Abschnitt sollen die Konstanten N , N' , N'' und \tilde{N} quantifiziert werden. Da das ursprüngliche Interesse nur dem Nachweis der *Existenz* dieser Konstanten galt, wurden in den Beweisen keine größeren Anstrengungen dazu unternommen, diese so klein wie möglich zu halten. Trotzdem sollen dem Leser die in obigen Beweisen auftretenden konkreten Zahlen genannt werden.

Es lassen sich für z.B. $c := 25^4 = 390625$ folgende Werte wählen: $N' = 5$ (Satz 4.3), $N'' = 10$ (Satz 4.4/Bemerkung 4.4), $\tilde{N} = 20$ (Theorem 4.2) und $N = 40$ (Theorem 4.1). Dabei ergeben sich ausgehend von N' alle weiteren Konstanten unmittelbar aus den Beweisen. Die Werte für N' und für c werden weiter unten begründet.

Zunächst einige allgemeine Betrachtungen. Ist der zugrundeliegende Hilbertraum endlichdimensional, kommen als Produkte positiver Operatoren (in diesem Fall Matrizen) nur Matrizen mit positiver Determinante in Frage. (Ist die Dimension gleich 1, der kommutative Fall, gilt dies nur für $\mathbb{1}$, und die Frage nach Zerlegungen wird trivial.) Im unendlichdimensionalen Hilbertraum kann man diese Bedingung nicht unmittelbar verallgemeinern; es zeigt sich im Gegenteil, daß sich dann *alle* invertierbaren Operatoren als Produkt von positiven Operatoren schreiben lassen.

Dabei kommt der Zerlegung von *unitären* Operatoren in ein Produkt von positiven Operatoren eine zentrale Bedeutung zu. Denn mit der Polarzerlegung hat man dann sofort die Zerlegung von beliebigen Operatoren. Zur Betrachtung von Normschränken für die positiven Operatoren ist die Beschränkung auf unitäre Operatoren sogar notwendig, da diese alle Norm 1 haben. Denn allgemein kann ein Produkt von N Operatoren aus $M_+[c]$ maximal Norm c^N haben, so daß niemals alle beliebigen Operatoren erzeugt werden können.

In [11] wurde die Menge aller Produkte von k positiven invertierbaren Matrizen mit \mathcal{P}^k bezeichnet. Sei analog dazu die Menge aller Produkte von k Matrizen aus $M_n(\mathbb{C})_+[c]$ mit $\mathcal{P}^k[c]$ bezeichnet. Dieselben Bezeichnungen sollen auch in den Fällen verwendet werden, in denen der zugrundeliegende Raum unendlichdimensional ist und in denen statt Matrizen Operatoren aus $B(\mathcal{H})$ betrachtet werden.

BALLANTINE zeigte in [11], daß jede invertierbare komplexe Matrix mit positiver Determinante das Produkt von höchstens fünf invertierbaren positiven Matrizen

ist. Fordert man jedoch, daß die Faktoren aus $M_n(\mathbb{C})_+[c]$ mit „zu kleinem“ $c > 1$ kommen, kann man unter Umständen nicht mehr jede unitäre Matrix erzeugen, wie folgende Überlegung zeigt:

Angenommen, wir haben eine Zerlegung von $-\mathbf{1}$ in ein Produkt von fünf Matrizen aus $M_n(\mathbb{C})_+[c]$. Dabei muß n gerade sein, da anderenfalls die Determinante nicht positiv sein könnte. Ist ξ_0 ein beliebiger Einheitsvektor, müßte er durch fünfmalige Anwendung einer Matrix aus $M_n(\mathbb{C})_+[c]$ in $-\xi_0$ übergehen. Es gilt $\|(-\xi_0) - \xi_0\| = 2$. Für beliebiges $a \in M_n(\mathbb{C})_+[c]$ und jeden Vektor ξ ist $\|a\xi - \xi\| \leq \|a - \mathbf{1}\|\|\xi\| = (c-1)\|\xi\|$. Seien nun $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5$ die Bilder von ξ_0 bei sukzessiver Anwendung der Matrizen aus der gegebenen Zerlegung von $-\mathbf{1}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|\xi_1 - \xi_0\| &\leq c - 1 &\Rightarrow \|\xi_1\| &\leq c \\ \|\xi_2 - \xi_1\| &\leq (c-1)\|\xi_1\| \leq (c-1)c &\Rightarrow \|\xi_2\| &\leq (c-1)c + c = c^2 \\ \|\xi_3 - \xi_2\| &\leq (c-1)\|\xi_2\| \leq (c-1)c^2 &\Rightarrow \|\xi_3\| &\leq (c-1)c^2 + c^2 = c^3 \\ \|\xi_4 - \xi_3\| &\leq (c-1)\|\xi_3\| \leq (c-1)c^3 &\Rightarrow \|\xi_4\| &\leq (c-1)c^3 + c^3 = c^4 \\ \|\xi_5 - \xi_4\| &\leq (c-1)\|\xi_4\| \leq (c-1)c^4 \\ &\Rightarrow \|\xi_5 - \xi_0\| &\leq (c-1)(1 + c + c^2 + c^3 + c^4) &= c^5 - 1 \end{aligned}$$

Für $c < \sqrt[5]{3} \approx 1,2457$ ergibt das einen Widerspruch.

Haben die Matrizen in der Zerlegung in einer festen Basis *nur* reelle Eintragungen, kann man auch wie folgt argumentieren: Sei $a \in M_n(\mathbb{C})_+[c]$ eine solche Matrix. Sei ξ ein beliebiger Vektor mit *reellen* Eintragungen. Dann hat $a\xi$ ebenfalls reelle Eintragungen. Sei ϑ der Winkel zwischen ξ und $a\xi$ im \mathbb{R}^n . Dann gilt $\cos \vartheta = \frac{\langle a\xi, \xi \rangle}{\|a\xi\|\|\xi\|} = \frac{\|\sqrt{a}\xi\|^2}{\|a\xi\|\|\xi\|}$. Das Minimum dieses Wertes für alle Vektoren ξ ist gleich dem folgenden Minimum für alle Vektoren $\eta := \sqrt{a}\xi$:

$$\cos \vartheta = \frac{\|\eta\|^2}{\|\sqrt{a}\eta\|\|\sqrt{a}^{-1}\eta\|} \geq \frac{2c}{c^2 + 1}. \quad (4.2)$$

Die Ungleichung aus (4.2) ist dabei eine Form von KANTOROVICH'S Ungleichung (siehe [35, Theorem 7.4.39, Problem 8 aus 7.4]). Einen Winkel von 180° kann man nicht mehr erreichen, wenn $\frac{2c}{c^2+1} > \cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ oder $c < \frac{4+\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}} \approx 1,9626$ ist.

Folglich könnte man fragen, welches zu gegebenem c das kleinste N' ist, für das Satz 4.3 gilt. Wenn wir umgekehrt hinreichend großes c zulassen, ist $N' = 5$ in

Satz 4.3 möglich, wie man durch eine leichte Abänderung des Beweises sehen kann:

Wir betrachten statt Termen der Art $a(vav^*)|a(vav^*)|^{-1}$ nun Terme folgender Form:

$$(v^3av^{*3})(v^2av^{*2})(vav^*)a|(v^3av^{*3})(v^2av^{*2})(vav^*)a|^{-1} =: u.$$

Wird z. B. $a := \text{diag}[25, 1]$ und $v := \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$ gesetzt, und durchläuft t dabei das Intervall von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, so realisiert $\text{spec } u$ alle möglichen Spektren von $\text{SU}(2)$ -Matrizen. Das sieht man wie folgt:

Ist $a' := \text{diag}[1, 0]$, kann die partielle Isometrie aus der Polarzerlegung von $(v^3a'v^{*3})(v^2a'v^{*2})(va'v^*)a'$ auf eindeutige Weise zu folgender $\text{SU}(2)$ -Matrix erweitert werden: $\begin{pmatrix} \cos 3t & \sin 3t \\ -\sin 3t & \cos 3t \end{pmatrix}$ für $t \in [0, \frac{\pi}{2}[$, und diese Matrix ist gleichzeitig der punktweise Limes (bezüglich t) von u für $a := \text{diag}[k, 1]$, wenn k gegen Unendlich geht. Die Konvergenz ist um so besser, je näher t bei 0 ist. Die Zahl 25 wurde numerisch gefunden. Damit erklären sich auch die angegebenen Werte vom Anfang dieses Abschnittes. Ein Nebenprodukt dieser Rechnungen war die folgende Identität, die durch geeignetes Runden von numerisch gefundenen Zahlen zustande kam:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ -9 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{346}{15} & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{163}{164840} & \frac{30}{4121} \\ \frac{30}{4121} & \frac{467}{8242} \end{pmatrix}$$

Dabei wurde für das Rechnen mit Matrizen das Programm Mathematica[®] verwendet. HALMOS gibt in [32] folgende Zerlegung an:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{13}{2} & -5 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & \frac{13}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{25}{8} & -\frac{11}{2} \\ -\frac{11}{2} & 10 \end{pmatrix}$$

Letzteres Beispiel ist in dem Sinne schöner, dass die beteiligten Matrizen Einträge mit kleineren Nennern haben. Außerdem hat *jede* Matrix Determinante 1.

Fragt man sich, welche unitären Matrizen das Produkt von vier positiven invertierbaren Matrizen aus $M_n(\mathbb{C})_+[c]$ sind, tritt in scharfer Form die einschränkende Wirkung von c hervor. Aus [11] ist bekannt: *Alle* invertierbaren Matrizen mit positiver Determinante, die *nicht* komplexe Vielfache von $\mathbb{1}$ sind, sind Produkt von vier positiven invertierbaren Matrizen. Nicht-positive Vielfache von $\mathbb{1}$ sind dagegen niemals Produkt von vier positiven invertierbaren Matrizen, wie man sich wie folgt überlegen kann: Angenommen, es gälte $a_4a_3a_2a_1 = \lambda\mathbb{1}$ mit invertierbaren $a_j \in M_n(\mathbb{C})_+$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann wäre $a_4a_3 = \lambda a_1^{-1}a_2^{-1}$, es gilt aber

$\text{spec } a_4 a_3 \subseteq]0, \infty[$ und $\text{spec } a_1^{-1} a_2^{-1} \subseteq]0, \infty[$, was nur dann kein Widerspruch ist, wenn $\lambda > 0$ ist. (Dieses Argument findet sich auch schon in [54] und [45].)

Wir definieren für den Rest dieses Abschnittes folgende Menge \mathcal{A} .

Ist der zugrundeliegende Hilbertraum unendlichdimensional, sei \mathcal{A} die Menge der beschränkten und beschränkt invertierbaren Operatoren, die *kein* negatives Vielfaches der $\mathbb{1}$ sind. Ist der zugrundeliegende Hilbertraum endlichdimensional, wird zusätzlich gefordert, daß die Matrizen positive Determinante haben. Damit gilt trivialerweise $\mathcal{P}^4[c_1] \subseteq \mathcal{P}^4[c_2] \subseteq \mathcal{A}$ für $1 < c_1 \leq c_2$. Die letzte Inklusion muß dabei schon aus dem Grund echt sein, daß $\mathcal{P}^4[c_2]$ nur Elemente mit Norm nicht größer als c_2^4 enthalten kann, während die Elemente von \mathcal{A} keiner Normbeschränkung unterliegen. Aber es existieren auch Elemente aus \mathcal{A} mit Norm 1, die nicht in $\mathcal{P}^4[c_2]$ liegen, wie der folgende Satz aussagt.

Satz 4.6. *Unabhängig davon, ob der zugrundeliegende Hilbertraum \mathcal{H} endlich- oder unendlichdimensional ist, gibt es für beliebiges reelles $c > 1$ stets eine volle Normumgebung von $-\mathbb{1}$ innerhalb $B(\mathcal{H})$, die disjunkt mit $\mathcal{P}^4[c]$ ist.*

Beweis. Angenommen, wir hätten eine Zerlegung des Operators $-\mathbb{1} + e$ mit einem zunächst beliebigen $e \in B(\mathcal{H})$ in ein Produkt von vier Operatoren $a_4, a_3, a_2, a_1 \in B(\mathcal{H})_+[c]$. Das bedeutet $a_4 a_3 = -a_1^{-1} a_2^{-1} + e a_1^{-1} a_2^{-1}$. Das Spektrum von $-a_1^{-1} a_2^{-1}$ liegt in $]-\infty, 0[$. Wegen $a_1^{-1}, a_2^{-1} \in B(\mathcal{H})_+[c]$ ist $\text{spec } a_1^{-1} a_2^{-1} \subseteq [c^{-2}, c^2]$. Sei λ ein beliebiger Spektralwert von $a_1^{-1} a_2^{-1}$. Daraus folgt

$$-a_1^{-1} a_2^{-1} + \lambda \mathbb{1} = (a_4 a_3 + \lambda \mathbb{1}) - e a_1^{-1} a_2^{-1} \text{ ist nicht invertierbar.} \quad (4.3)$$

Sei nun $\xi \in \mathcal{H}$ ein beliebiger Einheitsvektor. Sei $\eta := a_3 \xi$. Wir wählen ein Orthonormalsystem, in dem η nur in der ersten Komponente einen positiven Eintrag hat; alle anderen Einträge seien Null. Den ersten Eintrag nennen wir y . Wegen $a_3 \in B(\mathcal{H})_+[c]$ gilt $c^{-1} \leq y \leq c$. Die ersten Komponenten von ξ und $a_4 \eta$ im gewählten Orthonormalsystem seien mit x bzw. z bezeichnet. Da a_3 und a_4 jeweils aus $B(\mathcal{H})_+[c]$ sind, ist

$$c^{-1} \leq xy = \langle \xi, a_3 \xi \rangle \leq c \text{ und } c^{-2} \leq yz = \langle \eta, a_4 \eta \rangle \leq c^2$$

und damit

$$x \geq c^{-2} \text{ und } z \geq c^{-3}.$$

Deshalb ist

$$\|a_4 a_3 \xi + \lambda \xi\| \geq z + \lambda x \geq c^{-3} + \lambda c^{-2} \geq c^{-3} + c^{-4}.$$

Das Spektrum des Operators a_4a_3 liegt in $]0, \infty[$. Folglich ist $a_4a_3 + \lambda\mathbb{1}$ invertierbar. Da ξ ein beliebiger Einheitsvektor war, ist $\|(a_4a_3 + \lambda\mathbb{1})^{-1}\| \leq (c^{-3} + c^{-4})^{-1}$. Diese Schranke gilt global für beliebige $a_3, a_4 \in B(\mathcal{H})_+[c]$ und $\lambda \in [c^{-2}, c^2]$. Daraus folgt aber weiterhin, daß $(a_4a_3 + \lambda\mathbb{1}) - ea_1^{-1}a_2^{-1}$ garantiert invertierbar ist, wenn $\|ea_1^{-1}a_2^{-1}\| < c^{-3} + c^{-4}$ ist (Konstruktion des Inversen über die Neumannsche Reihe). Dies ist wegen $\|a_1^{-1}a_2^{-1}\| \leq c^2$ erfüllt, wenn man e so wählt, daß $\|e\| < c^{-5} + c^{-6}$ ist. Damit ergibt sich dann ein Widerspruch zu (4.3). Die Argumentation läßt sich für jeden Operator $-\mathbb{1} + e$ mit $\|e\| < c^{-5} + c^{-6}$ führen, womit die Aussage des Satzes bewiesen ist. \square

Bemerkung 4.5. Im endlichdimensionalen Fall kann man auf Eigenvektoren zurückgreifen. Das läßt folgende Abänderung obigen Beweises zu, die gut illustriert, daß die Besonderheit von vier positiven Operatoren gerade darin besteht, sich in zweimal zwei Operatoren zerlegen zu lassen und für deren Wirkung man gerade noch Aussagen – wie z. B. solche über das Spektrum – treffen kann. Schon Produkte von drei positiven Operatoren haben gänzlich andere Eigenschaften.

Angenommen, wir hätten eine Zerlegung der Matrix $-\mathbb{1} + e$ mit $\|e\| < \varepsilon$ in ein Produkt von vier Matrizen $a_4, a_3, a_2, a_1 \in M_n(\mathbb{C})_+[c]$. Das bedeutet $a_4a_3 = -a_1^{-1}a_2^{-1} + ea_1^{-1}a_2^{-1}$. Das Spektrum von $-a_1^{-1}a_2^{-1}$ liegt in $]-\infty, 0[$. Sei ξ der Einheitseigenvektor von $a_1^{-1}a_2^{-1}$ zu einem beliebigen Eigenwert $\lambda > 0$. Wegen $a_2^{-1}, a_1^{-1} \in M_n(\mathbb{C})_+[c]$ ist $c^{-2} \leq \lambda \leq c^2$. Damit ergibt sich

$$a_4a_3\xi = -\lambda\xi + \lambda e\xi \text{ oder } (a_4a_3 + \lambda\mathbb{1})\xi = \lambda e\xi. \quad (4.4)$$

Sei nun $\eta := a_3\xi$. Wir wählen ein Orthonormalsystem, in dem η nur in der ersten Komponente einen positiven Eintrag hat; alle anderen Einträge seien Null. Den ersten Eintrag nennen wir y . Wegen $a_3 \in M_n(\mathbb{C})_+[c]$ gilt $c^{-1} \leq y \leq c$. Die ersten Komponenten von ξ und $a_4\eta$ im gewählten Orthonormalsystem seien mit x bzw. z bezeichnet. Da a_3 und a_4 jeweils aus $M_n(\mathbb{C})_+[c]$ sind, ist

$$c^{-1} \leq xy = \langle \xi, a_3\xi \rangle \leq c \text{ und } c^{-2} \leq yz = \langle \eta, a_4\eta \rangle \leq c^2$$

und damit

$$x \geq c^{-2} \text{ und } z \geq c^{-3}.$$

Deshalb ist

$$\|a_4a_3\xi + \lambda\xi\| \geq z + \lambda x \geq c^{-3} + \lambda c^{-2} \geq \lambda(c^{-5} + c^{-2}).$$

Wenn wir die Matrix e also so wählen, daß ihre Norm kleiner als $c^{-5} + c^{-2}$ ist, erhalten wir einen Widerspruch zu (4.4).

Fassen wir zusammen: Zunächst sei \mathcal{H} endlichdimensional. Ballantine zeigte $\mathcal{P}^4 = \mathcal{A}$. Daraus folgt sofort

$$\mathcal{P}^5 = \mathcal{P}^6 = \dots = \{x \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det x > 0\},$$

denn jede solche Matrix x läßt sich als $x = (-p)^{-1}p$ mit einer beliebigen positiven Matrix p , für die $-p \in \mathcal{A}$ ist, schreiben.

Kommen wir nun zu den Mengen *mit* Normbeschränkungen: Satz 4.6 sagt unter anderem folgendes aus:

$$(\mathcal{A} \cap U(\mathcal{H})) \setminus \mathcal{P}^4[c] \neq \emptyset \text{ für alle } c.$$

Aus obigen Betrachtungen (ab Seite 42) folgt weiterhin, daß für $\mathcal{P}^5[c]$ folgendes gilt:

$$\begin{array}{ll} U(\mathcal{H}) \setminus \mathcal{P}^5[c] \neq \emptyset & \text{für } c < c_1 \text{ und} \\ \mathcal{P}^5[c] \supseteq U(\mathcal{H}) & \text{für } c \geq c_2 \end{array}$$

Dabei kann man z. B. $c_1 = \sqrt[5]{3}$ setzen. Eine interessante Frage ist die nach dem größten möglichen c_1 bzw. nach dem kleinsten möglichen c_2 , mit dem obige Aussagen gelten. Eine (grobe) obere Schranke ist offenbar, wie schon oben erwähnt, $c_2 = 25^4 = 390625$.

Nun der unendlichdimensionale Fall. Hier zeigte Wu [63, Lemma 2.8]

$$\mathcal{P}^{16} \supseteq U(\mathcal{H}) \implies \mathcal{P}^{17} = \mathcal{P}^{18} = \dots = B(\mathcal{H});$$

PHILLIPS verbesserte den Wert 16 auf 6 und zeigte [45]

$$\mathcal{P}^6 \supseteq U(\mathcal{H}) \implies \mathcal{P}^7 = \mathcal{P}^8 = \dots = B(\mathcal{H}).$$

Die Mengen \mathcal{P}^k für $1 < k < 7$ sind nicht bekannt.

Bezieht man die Normbeschränkungen ein, ist für jedes c nach Satz 4.6 $(\mathcal{A} \cap U(\mathcal{H})) \setminus \mathcal{P}^4[c] \neq \emptyset$. Andererseits ist nach dem Beweis von Lemma 2.7 in [63] sicher $\mathcal{P}^{16}[c] \supseteq U(\mathcal{H})$ für genügend großes c . Auch hier kann man nach dem kleinsten solchen c fragen, für das diese Inklusion gültig bleibt.

Kapitel 5

Die Holonomiegruppe im Zustandsraum

Für von-Neumann-Algebren mit separablem Prädual ist eine Darstellung, in der *alle* normalen Zustände von Vektoren implementiert werden können, z. B. die *Standardform* mit einem zyklischen und separierenden Vektor Ω . Der zu Ω gehörige natürliche positive Kegel enthält zu jedem normalen Zustand *genau einen* implementierenden Vektor. Dies ermöglicht also eine globale Zuordnung eines implementierenden Vektors für jeden normalen Zustand. Im folgenden soll jedoch ein anderer Ansatz verfolgt werden. Gesucht ist keine globale, sondern eine lokale Zuordnung. Genauer gesagt: Wir suchen einen möglichst natürlichen *Zusammenhang* zwischen den Fasern. Ein solcher Zusammenhang, der sich aus dem von BURES [18] eingeführten Abstandsbegriff ableiten läßt, ist der von UHLMANN [58] vorgeschlagene Paralleltransport. Dessen Eigenschaften sollen im folgenden untersucht werden. Die Setzungen und Ergebnisse sind hauptsächlich [2] und [3] entnommen.

5.1 Definition der Holonomiegruppe

Wir führen zunächst eine Halbordnung \ll für Paare normaler positiver Linearformen über M ein wie folgt. Seien $\{\mu, \nu\}$ und $\{\omega, \sigma\}$ zwei solche Paare. Dann ist

$$\{\mu, \nu\} \ll \{\omega, \sigma\} : \iff \mu \leq \omega, \nu \leq \sigma \text{ und } P(\mu, \nu) = P(\omega, \sigma). \quad (5.1)$$

Es gilt folgendes Lemma:

Lemma ([2, Lemma 2.1]). *Zu gegebenem $\{\omega, \sigma\} \in M_{*+} \times M_{*+}$ gibt es genau ein \ll -minimales Paar $\{\mu, \nu\}$ mit $\{\mu, \nu\} \ll \{\omega, \sigma\}$.*

Bemerkung 5.1. In [2] wurde die Halbordnung \ll für lineare Funktionale über C^* -Algebren eingeführt. Die entsprechenden Sätze gelten dann auch in dem allgemeineren Kontext. Wir beschränken uns jedoch hier auf den Spezialfall der von-Neumann-Algebren.

Sei im folgenden für zwei normale positive Linearformen μ, ν der Ausdruck $\mu \perp \nu$ eine Kurzschreibweise für die Orthogonalität ihrer Träger: $s(\mu) \perp s(\nu)$. Es existiert folgende Charakterisierung \ll -minimaler Paare:

Theorem 5.1 ([2, Theorem 5.3]). *Ein Paar $\{\omega, \sigma\}$ normaler positiver Linearformen über M ist genau dann \ll -minimal, wenn für alle normalen positiven Linearformen $\tilde{\omega}, \tilde{\sigma}$ mit*

$$0 \leq \tilde{\omega} \leq \omega, \quad 0 \leq \tilde{\sigma} \leq \sigma \quad \text{und} \quad \tilde{\sigma} \perp \omega, \quad \tilde{\omega} \perp \sigma$$

immer $\tilde{\omega} = \tilde{\sigma} = 0$ folgt.

Bemerkung 5.2. Dieses Resultat charakterisiert das Wesen eines \ll -minimalen Paares $\{\omega, \sigma\}$: Wenn wir die Linearformen nach ARAKI [8] in „Parallel-“ und „Orthogonalteil“ zerlegen: $\omega = \omega^{\parallel} + \omega^{\perp}$, $\sigma = \sigma^{\parallel} + \sigma^{\perp}$ (siehe Definition 3.1), dann bedeutet \ll -Minimalität nichts anderes, als daß die \perp -Teile $\omega^{\perp}, \sigma^{\perp}$ verschwinden.

Beispiel 5.1 (Beispiele für \ll -minimale Paare). Seien ω und σ zwei normale positive Linearformen. Die Gleichheit der Träger, also $s(\omega) = s(\sigma)$, ist *hinreichend* dafür, daß $\{\omega, \sigma\}$ ein \ll -minimales Paar ist. Begründung: In diesem Fall ist sicher $\omega^{\perp} = \sigma^{\perp} = 0$. Dies gilt damit speziell auch für zwei *treue* normale positive Linearformen.

Gilt $\sigma = \omega^a$ mit einem invertierbaren $a \in M_+$, so ist $\{\omega, \sigma\}$ ebenfalls \ll -minimal [2, Example 6.2(1)].

Bemerkung 5.3. Abgesehen von diesen sehr speziellen Fällen kann die Entscheidung darüber, ob ein gegebenes Paar normaler positiver Linearformen \ll -minimal ist, schwierig zu treffen sein.

Im endlichdimensionalen Fall jedoch ist die Frage der \ll -Minimalität allein aus Eigenschaften der Träger $s(\omega)$ und $s(\sigma)$ heraus zu entscheiden. So gilt z. B. im *Endlichdimensionalen* Folgendes: Sei σ eine *treue* normale positive Linearform. Dann bildet $\{\omega, \sigma\}$ genau dann ein \ll -minimales Paar, wenn ω auch *treu* ist.

Im unendlichdimensionalen Fall muß dies nicht mehr gelten. Als Gegenbeispiel dafür dient z. B. das Paar aus Satz 3.4. Obwohl ω keinen vollen Träger hat, ist das Paar \ll -minimal. Natürlich existieren aber dennoch normale positive Linearformen $\tilde{\omega}$ mit $\dim s(\tilde{\omega})^\perp = 1$, für die $\{\tilde{\omega}, \sigma\}$ *nicht* \ll -minimal ist. Die \ll -Minimalität dieses Paares hängt vom Zusammenspiel von *Lage* der Eigenbasen zueinander und *Asymptotik* der Folgen der Eigenwerte unter Berücksichtigung der Vielfachheit ab. Gegenüber dem endlichdimensionalen Fall treten also völlig neue Effekte auf.

Sei nun $\{\omega, \sigma\} \subseteq \mathcal{S}_0(M)$ ein \ll -minimales Paar. Wir betrachten für $\varphi \in \mathcal{S}(\omega), \psi \in \mathcal{S}(\sigma)$ das Funktional $h_{\psi, \varphi}$ über M' aus (3.7). Es zeigt sich (siehe [2, Theorem 5.1]), daß zu gegebenem $\varphi \in \mathcal{S}(\omega)$ *genau ein* $\psi \in \mathcal{S}(\sigma)$ existiert, so daß $h_{\psi, \varphi}$ ein *positives* Funktional ist, und umgekehrt zu jedem $\psi \in \mathcal{S}(\sigma)$ auch genau ein $\varphi \in \mathcal{S}(\omega)$, mit dem $h_{\psi, \varphi}$ ein *positives* Funktional wird. Eine hinreichende und notwendige Bedingung für diese Eindeutigkeit ist gerade die \ll -Minimalität des Zustandspaares.

Für \ll -minimale Paare $\{\omega, \sigma\} \subseteq \mathcal{S}_0(M)$ geben die Funktionale $h_{\psi, \varphi}$ damit Anlaß zu folgender Relation:

$$\psi \parallel \varphi \iff h_{\psi, \varphi} \text{ ist ein positives Funktional.} \quad (5.2)$$

Die Relation \parallel ist (als Relation über \mathcal{H} aufgefaßt) reflexiv und symmetrisch, aber im allgemeinen *nicht* transitiv.

Aus dem vorigen Abschnitt zum Bures-Abstand folgt: Für $\psi \parallel \varphi$ ist $d_B(\omega, \sigma) = \|\varphi - \psi\|$ und $P(\omega, \sigma) = \langle \psi, \varphi \rangle^2$. Das stellt den Bezug zwischen der Relation \parallel und der Bures-Metrik sowie der algebraischen Übergangswahrscheinlichkeit her. Das Funktional $h_{\psi, \varphi}$ und mit ihm die Relation \parallel sind tief mit dem Begriff der Positivität in M verbunden, wie das folgende wichtige Beispiel zeigt.

Beispiel 5.2. Wir betrachten $\{\omega, \omega^a\}$ mit $\omega \in \mathcal{S}_0(M)$ und *invertierbarem* $a \in M_+$. Wie in Beispiel 5.1 erwähnt, bildet $\{\omega, \omega^a\}$ ein \ll -minimales Paar. Man sieht leicht, daß dann für jedes $\varphi \in \mathcal{S}(\omega)$ der Vektor $a\varphi \in \mathcal{S}(\omega^a)$ genau derjenige Vektor ist, der $a\varphi \parallel \varphi$ erfüllt.

Wir wollen nun über \parallel einen Paralleltransport zwischen zwei Fasern definieren. Aus dem oben Gesagten ergibt sich aber, daß dies nicht für jedes Paar normaler Zustände, sondern nur für \ll -minimale Paare möglich ist. Deshalb führen wir einen neuen Begriff ein.

Definition 5.1. Eine Untermenge $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{S}_0(M)$ heißt *||-konform*, wenn jedes Paar von Zuständen aus \mathcal{K} \ll -minimal ist.

Bemerkung 5.4. Die Bezeichnung „||-konform“ ist keine Standardbezeichnung. Sie wurde hier nur eingeführt, um die folgenden Diskussionen kurz zu halten. Der Name wurde gewählt, da innerhalb einer solchen Menge die Relation $\|$ zwischen *beliebigen* Fasern anwendbar ist. Dies ist die Voraussetzung, um durch $\|$ einen Zusammenhang zwischen den Fasern zu definieren.

Aus dem Lemma von Zorn folgt, daß zu einer gegebenen ||-konformen Menge \mathcal{K} eine sie umfassende maximale ||-konforme Menge $\tilde{\mathcal{K}}$ existiert. Diese maximalen Mengen sollten eine wichtige Rolle spielen, wenn man die Geometrie des Zustandsraumes untersucht. Es wäre also wünschenswert, mehr über solche maximalen Mengen zu wissen.

Im Endlichdimensionalen ist die Frage nach den maximalen Mengen einfach zu beantworten. Eine *notwendige* Bedingung dafür, daß zwei Zustände ω und σ ein \ll -minimales Paar bilden, ist, daß sie gleichen Rang (als Matrizen) haben. Im Unendlichdimensionalen fehlt der Begriff des Rangs; deshalb läßt sich z. B. diese Bedingung nicht verallgemeinern. Dennoch gibt es auch im Endlichdimensionalen im allgemeinen zu einem gegebenen Zustand *mehrere* maximale ||-konforme Mengen. Eine wichtige Ausnahme ist folgender Fall:

Startet man mit $\mathcal{K} = \{\omega\}$, wobei ω ein *treuer* Zustand ist, ist die \mathcal{K} umfassende maximale Menge $\tilde{\mathcal{K}}$ eindeutig bestimmt, und zwar ist dies die Menge *aller* treuen Zustände. (Begründung: Nicht-treue Zustände bilden schon mit ω kein \ll -minimales Paar, und andererseits sind je zwei treue Zustände immer ein \ll -minimales Paar, siehe Beispiel 5.1.) Das ist die Ursache für die Affinität zu differentialgeometrischen Betrachtungen, wie sie DITTMANN und RUDOLPH ausgeführt haben [23], [24].

Startet man mit $\mathcal{K} = \{\omega'\}$, wobei ω' nicht treu ist, ist die \mathcal{K} umfassende maximale Menge $\tilde{\mathcal{K}}$ *nicht mehr* eindeutig bestimmt. Ist z. B. der Träger $s(\omega') =: p$ eindimensional, und $\tilde{\mathcal{K}}$ ist eine solche Menge, kann man dieser einen Zustand σ mit $s(\sigma) =: q$ und $pq \neq qp$ entnehmen. Dann betrachten wir einen Zustand σ' , dessen eindimensionaler Träger q' mit $q'q = 0$ ist. Es gilt sicher $\sigma' \notin \tilde{\mathcal{K}}$, aber $\{\omega', \sigma'\}$ bilden ein \ll -minimales Paar, und keine *diese* Menge umfassende maximale Menge kann gleich $\tilde{\mathcal{K}}$ sein.

Im Fall des Typ- I_∞ -Faktors soll wieder das Beispiel aus Satz 3.4 zur Illustration dienen. Wir starten mit $\mathcal{K} = \{\sigma\}$ und treuem normalem σ aus Satz 3.4. Eine \mathcal{K} umfassende maximale Menge $\tilde{\mathcal{K}}$ ist z. B. die Menge *aller* treuen normalen Zustände. (Begründung wie im endlichdimensionalen Fall.) Aber auch $\mathcal{K}' = \{\omega, \sigma\}$ mit ω bezüglich σ wie in Satz 3.4 ist eine ||-konforme Menge, und keine *diese* Menge umfassende maximale

Menge kann gleich $\tilde{\mathcal{K}}$ sein. Also ist im Unendlichdimensionalen selbst für einen *treuen* normalen Zustand die ihn enthaltende maximale Menge nicht eindeutig bestimmt.

Für \ll -minimale Paare definiert also die Relation \parallel einen Zusammenhang zwischen zwei Fasern implementierender Vektoren, d. h. eine Vorschrift, die jedem Vektor einer Faser genau einen Vektor der anderen Faser zuordnet. Betrachten wir als Beispiel das *Innere* des Zustandsraumes über $M_n(\mathbb{C})$, also die *treuen* Zustände. Wie schon in Bemerkung 5.3 erwähnt, gilt diese Vorschrift dann *global* und liefert damit einen Zusammenhang im Sinne der Differentialgeometrie. Im endlichdimensionalen Fall wurde dieser Zusammenhang von UHLMANN eingeführt und von ihm [58], [59] sowie von DITTMANN und RUDOLPH [23], [24] untersucht. Im folgenden betrachten wir den unendlichdimensionalen Fall, in dem, wie schon oben erwähnt, in der Regel Effekte auftreten, die es bei endlicher Dimension nicht gibt.

In gewisser Analogie zur Differentialgeometrie soll nun der Begriff der Holonomiegruppe eingeführt werden.

Wir betrachten dazu einen *Weg* γ in $\mathcal{S}_0(M)$, der eine endliche Folge $\{\omega_j \mid j = 0, 1, \dots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, von normalen Zuständen über M ist, so daß jeweils $\{\omega_k, \omega_{k+1}\}$ \ll -minimal ist für $0 \leq k \leq n - 1$. Aus dem oben Gesagten folgt damit, daß für gegebenes $\varphi \in \mathcal{S}(\omega)$ in eindeutiger Weise Vektoren $\varphi_j \in \mathcal{S}(\omega_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$ existieren, so daß $\varphi_0 = \varphi$ und $\varphi_k \parallel \varphi_{k+1}$ für $0 \leq k \leq n - 1$ gilt. Wir setzen schließlich $\varphi(\gamma) := \varphi_n$.

Für $\omega := \omega_0 = \omega_n$ ist der Weg geschlossen und wird ω -Loop genannt. Dann definiert die Abbildung $\mathcal{S}(\omega) \ni \varphi \mapsto \varphi(\gamma) \in \mathcal{S}(\omega)$ einen Automorphismus im vollständigen metrischen Raum $\mathcal{S}(\omega)$. Der Sonderfall $n = 0$ führt zum trivialen ω -Loop und zum identischen Automorphismus. Die *Holonomiegruppe* von ω , symbolisch $G_0(\omega)$, ist dann die Untergruppe aller Automorphismen von $\mathcal{S}(\omega)$, für die ein ω -Loop existiert, der diesen erzeugt.

Die Nicht-Transitivität der Relation \parallel ist die Ursache dafür, daß im allgemeinen die Holonomiegruppe eines normalen Zustandes nichttrivial ist. Das gilt immer dann, wenn M nichtkommutativ ist. Das bedeutet, der Transport von implementierenden Vektoren entlang Loops führt zu einem Effekt von Anholonomie in der Faser $\mathcal{S}(\omega)$ über ω , d. h., $\varphi \neq \varphi(\gamma)$.

Sei γ ein ω -Loop. Es stellt sich heraus, daß für einen gegebenen Vektor $\varphi \in \mathcal{S}(\omega)$

jeder Automorphismus der Holonomiegruppe als Wirkung eines gewissen unitären Operators aus dem Kommutanten M' geschrieben werden kann. Ist ω *treu*, ist dieser Operator eindeutig bestimmt [3, Lemma 8.2]. Die Gruppe aller dieser Operatoren wurde in [2] als ω -Phasen-Gruppe in φ bezeichnet. Sie ist antiisomorph zur Holonomiegruppe von ω . Auf diese Weise läßt sich die Holonomiegruppe auch über Operatoren aus der ω -Phasen-Gruppe beschreiben, was sich oft einfacher machen läßt.

5.2 Beispiele, für die man die Holonomiegruppe angeben kann

Bisher kennt man die Holonomiegruppe nur in einigen wenigen wichtigen Fällen. Wenn die von-Neumann-Algebra *kommutativ* ist, ist die Holonomiegruppe eines jeden normalen Zustands trivial. Abgesehen davon, kennt man die Holonomiegruppe in nichtkommutativen Algebren nur für normale Zustände mit endlichdimensionalem Träger über $B(\mathcal{H})$ mit $\dim \mathcal{H}$ endlich oder unendlich. Wünschenswert wäre zumindest, die Holonomiegruppe von beliebigen Zuständen über $B(\mathcal{H})$ mit unendlichdimensionalem Hilbertraum zu kennen. Aber dafür existieren im besten Falle nur Abschätzungen.

Im folgenden werden die bekannten Aussagen zur Holonomiegruppe kurz wiedergegeben. Grundlegende Arbeiten dazu waren [58], [59], [23] und [24]. In [3, Theorem 11.5] wird die Holonomiegruppe eines Zustandes über einer endlichdimensionalen von-Neumann-Algebra vollständig klassifiziert. Ist $M \simeq M_n(\mathbb{C})$, dann ist $G_0(\omega) \simeq SU(n)$ für treues ω und $G_0(\omega) \simeq U(k)$ für $\dim s(\omega) = k < n$. Ist $M \simeq B(\mathcal{H})$ mit separablem Hilbertraum \mathcal{H} , ist $G_0(\omega) \simeq U(\dim s(\omega))$, falls $s(\omega)$ endlichdimensional ist. Man sieht leicht, daß alle normalen Zustände mit unendlichdimensionalem Träger wechselseitig isomorphe Holonomiegruppen haben. Es genügt in diesem Fall also, die Holonomiegruppe eines *treuen* normalen Zustandes zu bestimmen.

Genau dieser Fall wurde in [42] untersucht. Dabei war M wie in Abschnitt 2.2 die Algebra der Linkswirkung von $B(\mathcal{H})$ auf den Hilbertraum der Hilbert-Schmidt-Operatoren \mathcal{H}_{HS} . Ist nun ω ein beliebiger *treuer* normaler Zustand über M , so

entspricht ihm in eindeutiger Weise eine Dichtematrix aus $B(\mathcal{H})$, die wir der Einfachheit halber wieder mit ω bezeichnen. Dann gilt $\omega^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{H}_{\text{HS}}$ und $\omega^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{S}(\omega)$.

Da ω treu ist, bilden die Eigenvektoren von $\omega^{\frac{1}{2}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem für \mathcal{H} . Bezüglich dieses fixierten Orthonormalsystems betten wir die endlichdimensionalen Gruppen $SU(n)$, $n \in \mathbb{N}$, in $B(\mathcal{H})$ wie folgt ein: Eine Matrix aus $SU(n)$ soll in dem von den ersten n Eigenvektoren von $\omega^{\frac{1}{2}}$ aufgespannten Unterraum von \mathcal{H} wirken und auf dem orthogonalen Komplement wie die Identität.

Dann gilt offensichtlich: Die ω -Phasen-Gruppe in $\omega^{\frac{1}{2}}$ umfaßt $\bigcup_{n=0}^{\infty} SU(n)$. In [42] wurde gezeigt: Die ω -Phasen-Gruppe in $\omega^{\frac{1}{2}}$ ist in $\overline{\bigcup_{n=0}^{\infty} SU(n)}^{\text{st}}$ enthalten.

Dabei ist die starke Konvergenz, bezüglich derer der Abschluß gebildet wird, wie folgt zu verstehen: Für $x_n \in SU(n)$, $n = 1, 2, \dots$, und $x \in B(\mathcal{H})$ gilt $x_n \xrightarrow{\text{st}} x : \iff \|ax_n - ax\|_{\text{HS}} \rightarrow 0$ für alle $a \in \mathcal{H}_{\text{HS}}$, denn die ω -Phasen-Gruppe besteht aus Elementen aus M' , und diese wirken auf \mathcal{H}_{HS} -Vektoren durch Rechtsmultiplikation.

Wir wollen nun den starken Abschluß näher untersuchen. Man sieht leicht, daß alle Operatoren im Abschluß die Bedingung $xx^* = \mathbb{1}$ erfüllen müssen. Zur Begründung beachte man, daß aus $\|ax_n - ax\|_{\text{HS}} \rightarrow 0$ für alle $a \in \mathcal{H}_{\text{HS}}$ immer $\|(x_n - x)^*\eta\| \rightarrow 0$ folgt für alle $\eta \in \mathcal{H}$, denn der Operator a , dessen Matrix in der ersten Zeile η^* und sonst Nullen enthält, ist ein spezieller Hilbert-Schmidt-Operator, und für diesen gilt $\|ax_n\|_{\text{HS}} = \|x_n^*a^*\|_{\text{HS}} = \|x_n^*\eta\|$ sowie $\|ax\|_{\text{HS}} = \|x^*a^*\|_{\text{HS}} = \|x^*\eta\|$. Daraus und aus $\|x_n^*\eta\| = \|\eta\|$ für alle $\eta \in \mathcal{H}$ folgt weiter $\|x^*\eta\| = \|\eta\|$ für alle $\eta \in \mathcal{H}$, also ist x^* isometrisch, was zu zeigen war.

Daß diese Bedingung auch hinreichend ist, ist die Aussage des folgenden Satzes:

Satz 5.2. *Der obige starke Abschluß enthält alle partiellen Isometrien x mit $xx^* = \mathbb{1}$.*

Beweis. Sei $x \in B(\mathcal{H})$ mit $xx^* = \mathbb{1}$ beliebig vorgegeben. Betrachte x in Matrixschreibweise bezüglich der gegebenen Orthonormalbasis $\{e_j\}$ von \mathcal{H} . Die (unendlichreihigen) Zeilen von x mögen $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots$ heißen. Wegen $xx^* = \mathbb{1}$ bilden sie ein (nicht notwendig vollständiges) Orthonormalsystem für \mathcal{H} .

Wir führen nun folgende Schreibweise ein: Für einen Zeilenvektor $\vec{y} = (y^1 \ y^2 \ y^3 \ \dots)$ und $a, b \in \mathbb{N} \cup \infty$, $a \leq b$ bezeichnen wir mit $[\vec{y}]_a^b$ den Zeilenvektor $(0 \ 0 \ \dots \ 0 \ y^a \ y^{a+1} \ \dots \ y^b \ 0 \ 0 \ \dots)$.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, vorgegeben. Ziel ist es, die Matrix

$$x = \begin{pmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} & x_1^n & x_1^{n+1} & x_1^{n+2} & \cdots \\ x_2^1 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} & x_2^n & x_2^{n+1} & x_2^{n+2} & \cdots \\ x_3^1 & \cdots & x_3^{n-2} & x_3^{n-1} & x_3^n & x_3^{n+1} & x_3^{n+2} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ x_n^1 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} & x_n^n & x_n^{n+1} & x_n^{n+2} & \cdots \\ x_{n+1}^1 & \cdots & x_{n+1}^{n-2} & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^n & x_{n+1}^{n+1} & x_{n+1}^{n+2} & \cdots \\ x_{n+2}^1 & \cdots & x_{n+2}^{n-2} & x_{n+2}^{n-1} & x_{n+2}^n & x_{n+2}^{n+1} & x_{n+2}^{n+2} & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

schrittweise in eine Matrix

$$x_{(n)} = \begin{pmatrix} x_1^1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} & r_1^n & 0 & 0 & \cdots \\ x_2^1 & \cdots & x_2^{n-2} & r_2^{n-1} & r_2^n & 0 & 0 & \cdots \\ x_3^1 & \cdots & r_3^{n-2} & r_3^{n-1} & r_3^n & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ r_n^1 & \cdots & r_n^{n-2} & r_n^{n-1} & r_n^n & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

abzuändern. Wir gehen dabei zeilenweise vor und bezeichnen die abgeänderte j -te Zeile mit \vec{y}_j . Die Vorschrift lautet im einzelnen:

\vec{y}_1 : Wir ändern $\vec{x}_1 = [\vec{x}_1]_1^{n-1} + [\vec{x}_1]_n^\infty$ zu $\vec{y}_1 := [\vec{x}_1]_1^{n-1} + [\vec{r}_1]_n^n$. Dabei möge $[\vec{r}_1]_n^n$ so gewählt werden, daß \vec{y}_1 wieder ein Einheitsvektor ist.

\vec{y}_2 : Wir wählen eine unitäre Drehung über \mathcal{H} , die das Vektorenpaar $([\vec{x}_1]_{n-1}^\infty, [\vec{x}_2]_{n-1}^\infty)$ so in die von e_{n-1} und e_n aufgespannte Ebene dreht, daß $[\vec{x}_1]_{n-1}^\infty$ in $[\vec{y}_1]_{n-1}^n$ übergeht. Das ist möglich, da nach Konstruktion beide gleiche Norm haben. Wir bezeichnen das Bild von $[\vec{x}_2]_{n-1}^\infty$ mit $[\vec{r}_2]_{n-1}^n$ und setzen $\vec{y}_2 := [\vec{x}_2]_1^{n-2} + [\vec{r}_2]_{n-1}^n$. Dabei ist wieder

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}_2, \vec{x}_2 \rangle &= \langle \vec{y}_2, \vec{y}_2 \rangle \text{ und} \\ \langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle &= \langle [\vec{x}_1]_1^{n-2}, [\vec{x}_2]_1^{n-2} \rangle + \langle [\vec{x}_1]_{n-1}^\infty, [\vec{x}_2]_{n-1}^\infty \rangle \\ &= \langle [\vec{x}_1]_1^{n-2}, [\vec{x}_2]_1^{n-2} \rangle + \langle [\vec{y}_1]_{n-1}^n, [\vec{y}_2]_{n-1}^n \rangle = \langle \vec{y}_1, \vec{y}_2 \rangle. \end{aligned}$$

\vec{y}_3 : Wir wählen eine unitäre Drehung über \mathcal{H} , die das Vektorentripel $([\vec{x}_1]_{n-2}^\infty, [\vec{x}_2]_{n-2}^\infty, [\vec{x}_3]_{n-2}^\infty)$ so in den von e_{n-2} , e_{n-1} und e_n aufgespannten Raum

dreht, daß $[\vec{x}_1]_{n-2}^\infty$ in $[\vec{y}_1]_{n-2}^n$ und $[\vec{x}_2]_{n-2}^\infty$ in $[\vec{y}_2]_{n-2}^n$ übergeht. Das ist möglich, da nach Konstruktion die Normen und Skalarprodukte jeweils gleich sind: $\langle [\vec{x}_i]_{n-2}^\infty, [\vec{x}_j]_{n-2}^\infty \rangle = \langle [\vec{y}_i]_{n-2}^n, [\vec{y}_j]_{n-2}^n \rangle$, $i, j \in \{1, 2\}$; Argumente wie oben. Wir bezeichnen das Bild von $[\vec{x}_3]_{n-2}^\infty$ mit $[\vec{r}_3]_{n-2}^n$ und setzen $\vec{y}_3 := [\vec{x}_3]_1^{n-3} + [\vec{r}_3]_{n-2}^n$. Auch hier sorgt die Konstruktion wieder für $\langle [\vec{x}_i]_{n-2}^\infty, [\vec{x}_j]_{n-2}^\infty \rangle = \langle [\vec{y}_i]_{n-2}^n, [\vec{y}_j]_{n-2}^n \rangle$, $i, j \in \{1, 2, 3\}$.

$\vec{y}_4, \dots, \vec{y}_{n-1}$: Diese Vektoren werden analog zu \vec{y}_3 konstruiert.

\vec{y}_n : $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_{n-1})$ bilden nach Konstruktion ein Orthonormalsystem in dem von $\{e_i\}_{i=1}^n$ aufgespannten Raum. Wir wählen $\vec{y}_n := [\vec{r}_n]_1^n$ so, daß ein vollständiges, positiv orientiertes (d. h. mit Determinante +1) Orthonormalsystem für diesen Raum entsteht.

Wir setzen schließlich die unendlichreihe Matrix $x_{(n)}$ wie folgt:

$$x_{(n)} := \begin{pmatrix} y_{(n)} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix},$$

wobei in der j -ten Zeile von $y_{(n)}$ gerade der Vektor $[\vec{y}_j]_1^n$ steht.

Der Einfachheit halber werden die Matrizen $x_{(n)}$ und $y_{(n)}$ wieder mit x_n bzw. y_n bezeichnet. Für jede natürliche Zahl n ist nun die Matrix x_n in $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{SU}(n)$. Wir wollen zeigen: In obigem Sinne konvergieren die x_n gegen x . Wir verwenden der Einfachheit halber auch für *Spaltenvektoren* η wieder die Schreibweise $[\eta]_a^b$ mit der analogen Bedeutung, wie sie für *Zeilenvektoren* galt – $[\eta]_a^b$ stimmt von der a -ten bis einschließlich der b -ten Komponente mit η überein und enthält sonst nur Nullen.

1. Schritt: Wir zeigen $\|(x_n^* - x^*)\eta\| \rightarrow 0$ für beliebiges $\eta \in \mathcal{H}$. O. B. d. A. sei $\|\eta\| = 1$.

Dafür zeigen wir zunächst: Für beliebiges, aber festes k gilt $[(x_n^* - x^*)\eta]_1^k \rightarrow 0$ komponentenweise und daher, weil k endlich ist, auch gleichmäßig für alle Komponenten von 1 bis k :

Sei $x^* = (x_{jl})$, $x_n^* = (y_{jl})$, $\eta = (b_j)$, $(x_n^* - x^*)\eta = (c_j)$. Für $1 \leq j \leq k$ ist

$$c_j = (y_{j,n-j+1} - x_{j,n-j+1})b_{n-j+1} + \dots + (y_{jn} - x_{jn})b_n - x_{j,n+1}b_{n+1} - x_{j,n+2}b_{n+2} - \dots,$$

denn $y_{jl} = x_{jl}$ für $1 \leq l \leq n - j$ nach Konstruktion. Daraus folgt

$$|c_j| \leq |y_{j,n-j+1}| |b_{n-j+1}| + \dots + |y_{jn}| |b_n| + \|[\eta]_{n-j+1}^\infty\| \leq |b_{n-j+1}| + \dots + |b_n| + \|[\eta]_{n-j+1}^\infty\|.$$

Da $\{b_l\}$ aber eine l^2 -Folge ist, geht die rechte Summe für $n \rightarrow \infty$ gegen 0.

Nun existiert für vorgegebenes $0 < \varepsilon < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ein $k \in \mathbb{N}$ mit $\|[x^*\eta]_{k+1}^\infty\| < \varepsilon$. Zu diesem k existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|[(x_n^* - x^*)\eta]_1^k\| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Daraus folgt $|\|[x_n^*\eta]_1^k\| - \|[x^*\eta]_1^k\|| < \varepsilon$. Wegen $\|x_n^*\eta\| = \|x^*\eta\| = \|\eta\| = 1$ folgt

$$\begin{aligned} \|[x_n^*\eta]_1^k\| > \sqrt{1 - \varepsilon^2} &\Rightarrow \|[x_n^*\eta]_1^k\| > \sqrt{1 - \varepsilon^2} - \varepsilon \\ &\Rightarrow \|[x_n^*\eta]_{k+1}^\infty\| < \sqrt{1 - (\sqrt{1 - \varepsilon^2} - \varepsilon)^2} = \sqrt{2\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\|[(x_n^* - x^*)\eta]_{k+1}^\infty\| \leq \|[x_n^*\eta]_{k+1}^\infty\| + \|[x^*\eta]_{k+1}^\infty\| < \varepsilon + \sqrt{2\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}}.$$

Damit ist für alle $n \geq n_0$

$$\|(x_n^* - x^*)\eta\|^2 \leq \|[(x_n^* - x^*)\eta]_1^k\|^2 + \|[(x_n^* - x^*)\eta]_{k+1}^\infty\|^2 < \varepsilon^2 + \left(\varepsilon + \sqrt{2\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}}\right)^2.$$

2. Schritt: Mit $\|(x_n^* - x^*)\eta\| \rightarrow 0$ für alle $\eta \in \mathcal{H}$ gilt auch $\|(xx_n^* - xx^*)\eta\| \rightarrow 0$, d. h., xx_n^* geht stark gegen $xx^* = 1$. Jeder normale Zustand ist stark stetig über $B(\mathcal{H})_1$ (Einheitskugel in $B(\mathcal{H})$), also gilt speziell $\text{tr } a^*a\mathbb{1} - \text{tr } a^*axx_n^* \rightarrow 0$ für alle $a \in \mathcal{H}_{\text{HS}}$. Da $\text{tr } a^*a \geq 0$ ist, gilt auch $\text{tr } a^*a - \Re \text{tr } a^*axx_n^* \rightarrow 0$. Es ist aber

$$\begin{aligned} \langle a(x_n - x), a(x_n - x) \rangle_{\text{HS}} &= \text{tr } a(x_n - x)(x_n - x)^*a^* \\ &= \text{tr } a\mathbb{1}a^* + \text{tr } a\mathbb{1}a^* - \text{tr } ax_nx^*a^* - \text{tr } axx_n^*a^* \\ &= \text{tr } a^*a(2 \cdot \mathbb{1} - x_nx^* - xx_n^*) \\ &= 2 \text{tr } a^*a - 2\Re \text{tr } a^*axx_n^* \rightarrow 0 \quad \forall a \in \mathcal{H}_{\text{HS}}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 5.5. Die ω -Phasen-Gruppe ist eine Untergruppe von $U(\mathcal{H})$. Nach Satz 5.2 umfaßt der starke Abschluß ganz $U(\mathcal{H})$; mit diesem Ergebnis sieht man also, daß die Abschätzung der ω -Phasen-Gruppe von oben in [42] keine echte Einschränkung liefert.

Umgekehrt läßt sich jedoch aus obigem Beweis *nicht* schlußfolgern, daß die ω -Phasen-Gruppe für treues ω gleich $U(\mathcal{H})$ ist. Die Vorgehensweise in [42] führt zum starken Grenzwert *bestimmter* $SU(n)$ -Folgen; im Beweis wurden dagegen Folgen konstruiert, denen keine konvergierenden Loops im Zustandsraum entsprechen müssen.

5.3 Untersuchung von Holonomiegruppen mit Hilfe von Produkten positiver Operatoren

In diesem Abschnitt sollen weitergehende Aussagen über die Holonomiegruppe eines treuen normalen Zustandes gewonnen werden. Zu diesem Zweck verwenden wir die zwei Haupttheoreme aus Kapitel 4.

Zunächst betrachten wir den Fall des Typ- I_∞ -Faktors M aus Abschnitt 2.2.

Theorem 5.3. *Sei M der Typ- I_∞ -Faktor wie oben beschrieben. Sei ω ein treuer normaler Zustand über M . Sei $\sqrt{\omega}$ die Quadratwurzel der Dichtematrix von ω . Dann ist $\varphi := \sqrt{\omega} \in \mathcal{S}(\omega)$, und die ω -Phasen-Gruppe von ω in φ enthält jeden unitären Operator, der mit $\sqrt{\omega}$ als Hilbert-Schmidt-Operator kommutiert, d. h. jedes $R_u \in M'$ mit $u\sqrt{\omega} = \sqrt{\omega}u$.*

Beweis. Sei $u \in B(\mathcal{H})$ ein unitärer Operator, der mit $\sqrt{\omega}$ kommutiert. Nach Theorem 4.1 gibt es positive invertierbare Operatoren $a_1, \dots, a_N \in B(\mathcal{H})$ mit $a_N \cdots a_1 = u$. Wir betrachten folgenden Weg: $\gamma : \omega \rightarrow \omega^{a_1} \rightarrow \omega^{a_2 a_1} \rightarrow \dots \rightarrow \omega^{a_N \cdots a_1} = \omega^u$. Alle Paare benachbarter Linearformen sind nach [2, Example 6.2(1)] \ll -minimal. Da u mit $\sqrt{\omega}$ kommutiert, vertauscht es auch mit ω , und wir haben $\omega^u = \omega(u^*(\cdot)u) = \text{tr } \omega u^*(\cdot)u = \text{tr } u \omega u^*(\cdot) = \text{tr } u u^* \omega(\cdot) = \text{tr } \omega(\cdot) = \omega$, d. h., γ ist ein Loop. Nun ist $\varphi(\gamma) = a_N \cdots a_1 \varphi = u \sqrt{\omega} = \sqrt{\omega} u = R_u \varphi$, wie sich aus Beispiel 5.2 ergibt. Da $R_u \in M'$ ist, muß dies das eindeutig bestimmte Element aus der ω -Phasen-Gruppe für γ sein. \square

Der oben erwähnte Operator $\sqrt{\omega} = \omega^{\frac{1}{2}}$ ist ein Hilbert-Schmidt-Operator über \mathcal{H} . Da er zu einem treuen normalen Zustand ω gehört, ist sein Kern trivial, und er ist folglich invertierbar. Das Inverse ist ein unbeschränkter, abgeschlossener, selbstadjungierter Operator über \mathcal{H} und sei mit $\omega^{-\frac{1}{2}}$ bezeichnet. Als Definitionsbereich $\mathcal{D}(\omega^{-\frac{1}{2}})$ wählen wir den maximal möglichen, nämlich $\mathcal{R}(\omega^{\frac{1}{2}})$.

Lemma. *Seien M und ω wie im vorigen Theorem gegeben. Die ω -Phasen-Gruppe im implementierenden Vektor $\omega^{\frac{1}{2}}$ enthält alle unitären Operatoren R_u , für die sowohl $\omega^{\frac{1}{2}} u \omega^{-\frac{1}{2}}$ als auch $\omega^{\frac{1}{2}} u^* \omega^{-\frac{1}{2}}$, beide definiert auf $\mathcal{D}(\omega^{-\frac{1}{2}})$, abschließbare Operatoren über \mathcal{H} sind.*

Beweis. Alles, was wir zu tun haben, ist, einen ω -Loop γ mit $\omega^{\frac{1}{2}}(\gamma) = R_u \omega^{\frac{1}{2}}$ zu finden. Da nach Voraussetzung $\omega^{\frac{1}{2}} u \omega^{-\frac{1}{2}}$ abschließbar ist, existiert eine Polarzerlegung des Abschlusses dieses Operators wie folgt: $\overline{\omega^{\frac{1}{2}} u \omega^{-\frac{1}{2}}} = v |\overline{\omega^{\frac{1}{2}} u \omega^{-\frac{1}{2}}}|$ mit einer gewissen partiellen Isometrie $v \in B(\mathcal{H})$. Da $\omega^{-\frac{1}{2}}$ abgeschlossen und $\omega^{\frac{1}{2}} u^*$ beschränkt ist, haben wir $(\omega^{\frac{1}{2}} u^* \omega^{-\frac{1}{2}})^* = \omega^{-\frac{1}{2}} u \omega^{\frac{1}{2}}$, siehe [41, §5.10.III.ε)], und der Operator auf der rechten Seite ist dicht definiert. Folglich ist der Wertebereich $\mathcal{R}(\omega^{-\frac{1}{2}} u^* \omega^{\frac{1}{2}})$ dicht in \mathcal{H} . Analog ist, da $\omega^{\frac{1}{2}} u^* \omega^{-\frac{1}{2}}$ dicht definiert ist, $\mathcal{R}(\omega^{\frac{1}{2}} u \omega^{-\frac{1}{2}})$ dicht in \mathcal{H} . Folglich ist v ein unitärer Operator.

Es ist $|\overline{\omega^{\frac{1}{2}} u \omega^{-\frac{1}{2}}}| \omega^{\frac{1}{2}} = v^* \overline{\omega^{\frac{1}{2}} u \omega^{-\frac{1}{2}}} \omega^{\frac{1}{2}} = v^* \omega^{\frac{1}{2}} u \omega^{-\frac{1}{2}} \omega^{\frac{1}{2}} = v^* \omega^{\frac{1}{2}} u$ und $\omega^{\frac{1}{2}} v^* \omega^{\frac{1}{2}} u = \omega^{\frac{1}{2}} |\overline{\omega^{\frac{1}{2}} u \omega^{-\frac{1}{2}}}| \omega^{\frac{1}{2}} \geq 0$. Da $\omega^{\frac{1}{2}} v^* \omega^{\frac{1}{2}} u$ positiv ist, ist die Linearform $h_{\omega^{\frac{1}{2}}, v^* \omega^{\frac{1}{2}} u}(\cdot) = \langle v^* \omega^{\frac{1}{2}} u(\cdot), \omega^{\frac{1}{2}} \rangle_{\text{HS}} = \text{tr} \omega^{\frac{1}{2}} v^* \omega^{\frac{1}{2}} u(\cdot)$ ebenfalls positiv, und folglich ist $\omega^{\frac{1}{2}} \|v^* \omega^{\frac{1}{2}} u$.

Seien nun $a_1, \dots, a_N \in B(\mathcal{H})_+$ so gegeben, daß $a_N \cdots a_1 = v$ ist. Wir betrachten den Loop $\gamma : \omega \rightarrow \omega^{v^*} \rightarrow \omega^{a_1 v^*} \rightarrow \omega^{a_2 a_1 v^*} \rightarrow \dots \rightarrow \omega^{a_N \cdots a_1 v^*} = \omega$. Da die a_1, \dots, a_N positiv sind, ist für $\varphi = \varphi_0 := \omega^{\frac{1}{2}}$, $\varphi_1 := v^* \omega^{\frac{1}{2}} u$, $\varphi_k := a_{k-1} \cdots a_1 v^* \omega^{\frac{1}{2}} u$, $k = 2, 3, \dots, N+1$, jeweils $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\omega)$, $\varphi_1 \in \mathcal{S}(\omega^{v^*})$, $\varphi_k \in \mathcal{S}(\omega^{a_{k-1} \cdots a_1 v^*})$, $k = 2, 3, \dots, N+1$, und $\varphi_k \parallel \varphi_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, N$.

Folglich ist $\varphi(\gamma) = a_N \cdots a_1 v^* \omega^{\frac{1}{2}} u = v v^* \omega^{\frac{1}{2}} u = \omega^{\frac{1}{2}} u = R_u \omega^{\frac{1}{2}}$, oder R_u ist die ω -Phase des Loops γ . \square

Bemerkung 5.6. Durch dieses Lemma wird das Problem, die Holonomiegruppe von ω zu finden, in ein Problem der Operatortheorie transformiert. Man beachte, daß das Lemma nur eine hinreichende Bedingung liefert.

Allgemeiner kann man folgendes sagen:

Theorem 5.4. *Sei M eine hyperfinite von-Neumann-Algebra im Sinne von Definition 4.1, die über einem separablen Hilbertraum wirkt. Sei ω ein beliebiger treuer normaler Zustand über M und $\varphi \in \mathcal{S}(\omega)$. Die ω -Phasen-Gruppe in φ enthält alle unitären Operatoren, die Vielfache von $\mathbb{1}$ sind.*

Beweis. Da es nach Theorem 4.2 für jedes $\lambda \in [0, 2\pi[$ invertierbare Operatoren $a_1, \dots, a_{\tilde{N}} \in M_+$ mit $a_{\tilde{N}} \cdots a_1 = e^{i\lambda} \mathbb{1}$ gibt, können wir ähnlich wie im Beweis von Theorem 5.3 einen ω -Loop konstruieren, der φ auf $e^{i\lambda} \varphi$ abbildet. Da $e^{i\lambda} \mathbb{1}$ immer ein unitäres Element aus M' für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist, ist alles gezeigt. \square

Bemerkung 5.7. Das letzte Theorem sagt aus, daß in allen hyperfiniten von-Neumann-Algebren die volle unitäre Gruppe $U(1)$ in der Holonomiegruppe eines treuen normalen

Zustandes isomorph enthalten ist. Analog zu Bemerkung 4.1 gilt dieses Theorem auch, wenn M nur eine hyperfinite von-Neumann-Algebra enthält. Dies trifft speziell auf alle Faktoren mit Ausnahme der Typ- I_n -Faktoren zu. Der Fall der Typ- I_n -Faktoren ist aber schon vollständig gelöst (siehe den Anfang von Abschnitt 5.2) mit dem Ergebnis, daß hier genau dann die volle Gruppe $U(1)$ in der Holonomiegruppe eines normalen Zustandes isomorph enthalten ist, wenn der Zustand *nicht* treu ist.

Das bedeutet zusammengefaßt: Sei M ein beliebiger Faktor, aber *nicht* vom Typ I_1 . Die Holonomiegruppe eines *reinen* Zustandes ist isomorph zu $U(1)$ (siehe [3, Theorem 11.2]). Ist M vom Typ I_n , so ist $U(1)$ in der Holonomiegruppe jedes *nicht* treuen Zustandes enthalten. Ist M nicht vom Typ I_n , so ist $U(1)$ in der Holonomiegruppe jedes *treuen* normalen Zustandes enthalten.

Kapitel 6

Radon-Nikodym-Operatoren und ihre Eigenschaften

Neben der Holonomiegruppe wollen wir auch noch einen anderen geometrischen Aspekt des Zustandsraumes untersuchen, und zwar die Frage, wie die bezüglich der Bures-Metrik kürzesten Bögen im Zustandsraum aussehen. Da der Zustandsraum im allgemeinen sehr groß ist, wurden von ALBERTI [4] in Analogie zum endlichdimensionalen Fall als ausgezeichnete Untermengen des Zustandsraumes z. B. die sogenannten *Strata* betrachtet. Es stellte sich die Frage, ob diese Strata geodätisch konvex sind. Da die Definition der Strata eng mit Radon-Nikodym-Operatoren zusammenhängt, war zu erwarten, daß eine genauere Untersuchung von Eigenschaften von Radon-Nikodym-Operatoren uns die Mittel gibt, die Frage positiv zu beantworten oder ein Gegenbeispiel zu konstruieren.

Für dieses Kapitel gilt, ähnlich wie für Kapitel 4, daß die Ergebnisse durchaus von eigenständigem Interesse sein können – unabhängig von unserer konkreten Motivation von den Bures-geodätischen Bögen her. Eine konkrete Anwendung ist z. B. die Konstruktion eines Operators mit hinreichend nichttrivialem Spektrum, die am Ende des Kapitels angegeben ist.

6.1 Radon-Nikodym-Operatoren

6.1.1 Radon-Nikodym-Theoreme

Zunächst wollen wir an das klassische Radon-Nikodym-Theorem der Maßtheorie erinnern.

Theorem 6.1. *Sei (X, \mathcal{A}) ein meßbarer Raum, und seien μ und ν σ -finite positive Maße auf (X, \mathcal{A}) . Wenn ν absolutstetig gegenüber μ ist, dann existiert eine Funktion g aus $L^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R})$ bzw. aus $L^1(X, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{C})$, die $\nu(A) = \int_A g \, d\mu$ für alle $A \in \mathcal{A}$ erfüllt. Die Funktion g ist eindeutig bis auf μ -fast-überall-Gleichheit.*

Das obige Theorem wurde aus [19, Theorem 4.2.2] zitiert. Zu beachten ist der Begriff der Absolutstetigkeit. Im Theorem bedeutet er: Aus $\mu(A) = 0$ folgt stets $\nu(A) = 0$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Das ist die übliche Definition aus der Maßtheorie.

Das Radon-Nikodym-Theorem gilt im allgemeinen *nicht* mehr, wenn man eine der Voraussetzungen wegläßt. Eine ausführliche Betrachtung der Bedeutung dieser Voraussetzungen findet der Leser z. B. in [31].

Ist nun (X, m) ein Maßraum mit $m(X) = 1$, so betrachten wir die von-Neumann-Algebra $M := L^\infty(X, m)$ der Multiplikationsoperatoren über dem Hilbertraum $\mathcal{H} := L^2(X, m)$. Die Setzung $\omega(a) := \int a \, dm$ für alle $a \in M$ definiert einen normalen Zustand über M . Ist nun m' ein weiteres Maß auf X , das gegenüber m absolutstetig (im Maßtheoriesinne) ist, und setzen wir $\sigma(a) := \int a \, dm'$ für alle $a \in M$, dann gilt

$$\sigma(a) = \int a \, dm' = \int ag \, dm = \omega(ag) \text{ für ein } g \in L^1(X, m).$$

Zu beachten ist dabei, daß $g \in L^1(X, m)$, also in der Regel *nicht* aus M ist.

Es ist bekannt, daß *jede* kommutative von-Neumann-Algebra $*$ -isomorph zu $L^\infty(X, m)$ ist, wobei (X, m) die disjunkte Vereinigung endlicher Maßräume wie oben ist. In diesen Maßräumen gilt das Radon-Nikodym-Theorem uneingeschränkt [52], [51], [53]. Möchte man das Radon-Nikodym-Theorem für nichtkommutative von-Neumann-Algebren verallgemeinern, muß man unter anderem festlegen, auf welche Seite man das Element g schreibt; im kommutativen Fall stellt sich diese Frage nicht.

Es folgen drei Theoreme, die das klassische Radon-Nikodym-Theorem jeweils auf verschiedene Art verallgemeinern.

Theorem 6.2 (Dye,[25]). *Sei M eine von-Neumann-Algebra, die σ -finit (d. h., jede Kollektion wechselseitig disjunkter Projektoren aus M ist höchstens abzählbar) und finit ist (d. h., kein Projektor aus M kleiner als $\mathbb{1}$ ist äquivalent zur Identität). Seien normale Zustände ω, σ wie folgt gegeben: Aus $\omega(x) = 0$ für $x \geq 0$ folgt stets $\sigma(x) = 0$. Dann existiert ein $a \in M$ mit $\sigma = \omega^a$.*

Dieses Theorem hält sich sehr dicht an den klassischen Fall. Die starke Aussage ist, daß der Operator a in M selbst liegt; er definiert also eine *innere* Operation. Diese Aussage läßt sich nur erhalten, indem man an M zusätzliche Forderungen stellt.

Für alles, was folgt, wird in von-Neumann-Algebren ein Begriff von Absolutstetigkeit vereinbart, der etwas spezieller ist, als es die Voraussetzung in obigem Theorem besagt.

Definition 6.1. Seien ω, σ zwei normale positive Funktionale über einer von-Neumann-Algebra M . Dann heißt σ *absolutstetig* gegenüber ω , symbolisch $\sigma \ll \omega$, wenn es eine Zahl $\lambda \in \mathbb{R}_+$ gibt, so daß $\sigma(x) \leq \lambda\omega(x)$ für alle $x \in M_+$ gilt.

Bemerkung 6.1. Man beachte, daß das Symbol „ \ll “ in dieser Arbeit in *zwei* Bedeutungen vorkommt. Es läßt sich jedoch in jedem konkreten Fall stets eindeutig sagen, welche Bedeutung das Symbol hat. Steht es zwischen *Paaren* normaler positiver Linearformen, bedeutet es die Halbordnung nach (5.1); steht es zwischen *einzelnen* Linearformen, bedeutet es Absolutstetigkeit im Sinne der vorangehenden Definition.

Theorem 6.3 (Sakai,[46]). *Sei M eine beliebige von-Neumann-Algebra. Seien ω, σ zwei normale Zustände mit $\sigma \ll \omega$. Dann existiert ein $a \in M_+$ mit $\sigma = \omega^a$.*

Hier erhält man die gegenüber dem klassischen Theorem stärkere Aussage $a \in M_+$ durch den enger gefaßten Begriff der Absolutstetigkeit.

Theorem 6.4 (Araki,[8]). *Sei M eine beliebige σ -finite von-Neumann-Algebra. Seien ω, σ zwei normale Zustände, ω dabei treu. Dann existiert ein $a \in M, a = a^*, a \geq 0$ mit $\sigma = \omega^a$.*

Dieses Theorem verzichtet auf die Forderung irgendeiner Beziehung zwischen den zwei Zuständen und garantiert die Existenz eines zu M affilierten Operators a .

Man beachte dabei, daß der Zustand ω^a hier nur über einen implementierenden Vektor ξ für ω definiert werden kann und das Theorem damit implizit aussagt, daß ξ im Definitionsbereich von a liegt (siehe dazu auch Kapitel 2).

In Analogie zur Maßtheorie bezeichnet man die Theoreme als *Radon-Nikodym-Theoreme* und den zugehörigen Operator a als *Radon-Nikodym-Operator*. Wegen der Nichtkommutativität der Algebra (zumindest im allgemeinen) gibt es auch Aussagen, wann ω und σ der Beziehung $\sigma = \omega(a(\cdot)) + \omega((\cdot)a)$ mit einem gewissen Operator a genügen. Diese Verallgemeinerung des Radon-Nikodym-Theorems der Maßtheorie wird *Jordan-Form* oder *von Jordanscher Form* genannt. Sie steht in engem Zusammenhang mit der Operatorgleichung $AX - XB = Y$. Zu dieser Gleichung siehe z. B. den Übersichtsartikel [12]. Wir beschäftigen uns im folgenden aber ausschließlich mit der in den zitierten Theoremen angegebenen Form (sogenannte *quadratische Form*).

6.1.2 Radon-Nikodym-Operatoren nach Sakai

Speziell wollen wir uns mit SAKAIS Radon-Nikodym-Theorem beschäftigen und dabei die Frage untersuchen, wie zu einem gegebenen treuen normalen Zustand die Klasse der Radon-Nikodym-Operatoren aussieht. Dafür treffen wir folgende Vereinbarungen:

Gegeben sei eine von-Neumann-Algebra M , die in Standardform über einem Hilbertraum \mathcal{H} mit zyklischem und separierendem Vektor Ω wirkt. Der Raum der normalen Zustände über M sei mit $\mathcal{S}_0(M)$ bezeichnet. Die obige Bedingung garantiert, daß für jeden Zustand $\omega \in \mathcal{S}_0(M)$ die Menge der implementierenden Vektoren $\mathcal{S}(\omega)$ nicht leer ist, also mindestens ein $\varphi \in \mathcal{S}(\omega)$ mit $\omega(x) = \langle x\varphi, \varphi \rangle$ für alle $x \in M$ existiert.

Im folgenden bezeichne M_+ den Kegel der Operatoren a , die $a \geq 0$ erfüllen. Mit $U(M)$ wird die Gruppe der unitären Operatoren aus M bezeichnet. Die Absolutstetigkeit \ll sei wie in Definition 6.1 definiert. Gilt für $\omega, \sigma \in \mathcal{S}_0(M)$ sowohl $\omega \ll \sigma$ als auch $\sigma \ll \omega$, schreiben wir $\omega \approx \sigma$ und sagen, ω und σ sind *wechselseitig* absolutstetig zueinander. Man überprüft leicht, daß \ll eine Ordnungsrelation und \approx eine Äquivalenzrelation ist.

Da die von-Neumann-Algebra M in Standardform vorliegt, können wir fragen,

was das Radon-Nikodym-Theorem von SAKAI auf der Ebene der implementierenden Vektoren bedeutet. Für *treue* Zustände $\omega, \sigma \in \mathcal{S}_0(M)$ bedeutet dies folgendes: Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\omega)$. Die Bedingung $\sigma \ll \omega$ impliziert die Existenz eines Operators $\tilde{z} \in M'$, so daß $\tilde{z}\varphi \in \mathcal{S}(\sigma)$ ist. (Zur Konstruktion dieses Operators geht man ähnlich vor wie bei der Konstruktion des Operators u im Beweis von Satz 3.1. Wir verzichten hier auf die Details.) Die Menge aller implementierenden Vektoren für σ ist gerade $\{u\tilde{z} \mid u \in U(M')\}$. Nach Theorem 6.3 ist aber auch $a\varphi$ ein implementierender Vektor für σ . Es existiert also ein $z \in M'$, $z = u_0\tilde{z}$ für ein gewisses $u_0 \in U(M')$, mit $a\varphi = z\varphi$. Das rechtfertigt folgende Definition:

Definition 6.2. Sei ein treuer Zustand $\omega \in \mathcal{S}_0(M)$ mit implementierendem Vektor $\varphi \in \mathcal{S}(\omega)$ gegeben. Ein Operator $a \in M_+$ heißt genau dann *Radon-Nikodym-Operator* für ω , wenn ein $z \in M'$ existiert, so daß $a\varphi = z\varphi$ ist. Er heißt *umkehrbarer Radon-Nikodym-Operator* für ω , wenn darüber hinaus sowohl a als auch z in M_+ bzw. M' invertierbar sind.

Bemerkung 6.2. Der Begriff „Radon-Nikodym-Operator“ bezieht sich hier ausschließlich auf Theorem 6.3. Die Bezeichnung „umkehrbar“ ist *keine* Standardbezeichnung; sie wurde mangels einer besseren knappen Benennung von Operatoren mit der geforderten Eigenschaft gewählt.

Bemerkung 6.3. Bei dieser Definition spielt die konkrete Wahl des implementierenden Vektors keine Rolle, da sich diese nur um Elemente aus $U(M')$ unterscheiden. Ist die geforderte Gleichung also für *einen* Vektor erfüllt, ergeben sich sofort Gleichungen für alle anderen Vektoren.

Bemerkung 6.4. Ist a ein Radon-Nikodym-Operator für ω , so definiert ω^a ein zu ω absolutstetiges Funktional. Alle λa , $\lambda > 0$, sind ebenfalls Radon-Nikodym-Operatoren für ω ; für ein λ_0 ist $\omega^{\lambda_0 a}$ ein zu ω absolutstetiger Zustand. Ist a sogar ein umkehrbarer Radon-Nikodym-Operator für ω , gilt auch $\omega \ll \omega^{\lambda_0 a}$ und damit $\omega \approx \omega^{\lambda_0 a}$. Um letzteres zu sehen, betrachtet man einfach $(\lambda_0 a)^{-1}$ als Radon-Nikodym-Operator für $\omega^{\lambda_0 a}$.

Problem. Die Fragen, die im weiteren untersucht werden sollen, sind: Wie sieht zu gegebenem treuen $\omega \in \mathcal{S}_0(M)$ die Menge der Radon-Nikodym-Operatoren aus? Sofort klar ist, daß sie einen Kegel bilden, d. h., Addition und Multiplikation mit positiven Zahlen führen nicht aus der Menge heraus. Gibt es aber ein handhabbares Kriterium, das für einen beliebigen Operator aus M_+ entscheidet, ob er Radon-Nikodym-Operator für ein gegebenes treues $\omega \in \mathcal{S}_0(M)$ ist?

Noch schwieriger scheint sich die Menge der umkehrbaren Radon-Nikodym-Operatoren für einen gegebenen treuen normalen Zustand bestimmen zu lassen. Unter welchen Nebenbedingungen führt hier Addition nicht aus der Menge heraus?¹

6.2 Eigenschaften von Radon-Nikodym-Operatoren

6.2.1 Potenzen und Linearkombinationen

Wir halten zunächst die schon erwähnte Eigenschaft fest.

Satz 6.5. *Seien a, b Radon-Nikodym-Operatoren für $\omega \in \mathcal{S}_0(M)$. Dann ist auch $\lambda a + \mu b$ für beliebige $\lambda, \mu \geq 0$ jeweils ein Radon-Nikodym-Operator für ω .*

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\omega)$. Nach Voraussetzung existieren $y, z \in M'$ mit $a\varphi = z\varphi$ bzw. $b\varphi = y\varphi$. Damit ist aber auch $(\lambda a + \mu b)\varphi = (\lambda z + \mu y)\varphi$. Dabei ist $\lambda z + \mu y \in M'$ und wegen der Nichtnegativität von λ, μ auch $\lambda a + \mu b \in M_+$. \square

Leicht zu zeigen ist auch folgende Eigenschaft umkehrbarer Radon-Nikodym-Operatoren:

Satz 6.6. *Sei a ein umkehrbarer Radon-Nikodym-Operator für $\omega \in \mathcal{S}_0(M)$. Dann ist auch a^n für jedes $n \in \mathbb{Z}$ ein umkehrbarer Radon-Nikodym-Operator für ω .*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt $a\varphi = z\varphi$ für ein invertierbares $z \in M'$. Daraus folgt $aa\varphi = az\varphi = za\varphi = zz\varphi$, d. h., a^2 ist ein Radon-Nikodym-Operator für ω . Genauso zeigt man dies für a^n mit positivem n . Weiterhin gilt $z^{-1}a^{-1}a\varphi = z^{-1}a^{-1}z\varphi$, also $a^{-1}\varphi = z^{-1}\varphi$ (alle Inversen existieren nach Voraussetzung). Mit der gleichen Überlegung wie oben folgt, daß alle a^n mit negativem n Radon-Nikodym-Operatoren für ω sind. Zusammengenommen ergibt dies die Behauptung. \square

Im folgenden werden wir hauptsächlich *umkehrbare* Radon-Nikodym-Operatoren untersuchen. Dabei steht die Frage im Vordergrund, ob zu gegebenem treuen normalen Zustand die Menge der umkehrbaren Radon-Nikodym-Operatoren *konvex* in $B(\mathcal{H})$ ist. Eine erste Aussage liefert folgender Satz.

¹Für Diskussionen zu diesem Thema bin ich Herrn Prof. Dr. Shōichirō Sakai dankbar [48].

Satz 6.7. Sei a ein umkehrbarer Radon-Nikodym-Operator zu treuem $\omega \in \mathcal{S}_0(M)$. Dann existieren $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < 1$ so, daß für alle $\lambda \in [0, \lambda_1[\cup]\lambda_2, 1]$ der Operator $\lambda a + (1 - \lambda)\mathbb{1}$ auch ein umkehrbarer Radon-Nikodym-Operator ist.

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\omega)$. Nach Voraussetzung existiert $z \in M'$ mit $a\varphi = z\varphi$. Dabei sind a und z jeweils invertierbar. Betrachte nun die Gleichung $(\lambda a + (1 - \lambda)\mathbb{1})\varphi = (\lambda z + (1 - \lambda)\mathbb{1})\varphi$. Für alle $\lambda \in [0, 1]$ ist $\lambda a + (1 - \lambda)\mathbb{1} \in M_+$ invertierbar. Um die Aussage des Satzes zu zeigen, reicht es folglich, die Invertierbarkeit von $\lambda z + (1 - \lambda)\mathbb{1} \in M'$ zu untersuchen.

Wir setzen $\lambda_1 := \frac{1}{1 + \|z\|}$. Für $\lambda \in [0, \lambda_1[$ ist damit $\lambda\|z\| < 1 - \lambda$ oder $\|\lambda z\| < \|((1 - \lambda)\mathbb{1})^{-1}\|^{-1}$, so daß die Neumannsche Reihe für das Inverse von $\lambda z + (1 - \lambda)\mathbb{1}$ konvergiert.

Wir setzen $\lambda_2 := \frac{1}{1 + \|z^{-1}\|^{-1}}$. Für $\lambda \in]\lambda_2, 1]$ ist dann $\lambda\|z^{-1}\|^{-1} > 1 - \lambda$ oder $\|(\lambda z)^{-1}\|^{-1} > \|(1 - \lambda)\mathbb{1}\|$, so daß auch hier die Neumannsche Reihe für das Inverse von $\lambda z + (1 - \lambda)\mathbb{1}$ konvergiert. \square

Aus dem Satz läßt sich zunächst nur ableiten, daß auf der Strecke zwischen a und $\mathbb{1}$ wenigstens in einer Umgebung der Endpunkte die Radon-Nikodym-Operatoren umkehrbar sind. Für die *gesamte* Strecke ist dies noch offen.

6.2.2 Störung von Radon-Nikodym-Operatoren

Eine andere Frage, mit der wir uns beschäftigen wollen, lautet: *Wenn* die gesamte Strecke nur umkehrbare Radon-Nikodym-Operatoren enthält, kann man sie unter Umständen leicht stören, ohne daß sich an dieser Eigenschaft etwas ändert?

Die Antwort ist positiv. Dazu benötigen wir aber noch eine weitere Definition.

Definition 6.3. Sei $\omega \in \mathcal{S}_0(M)$ mit implementierendem Vektor $\varphi \in \mathcal{S}(\omega)$ gegeben. Ein selbstadjungierter Operator $b \in M$ heißt *verallgemeinerter Radon-Nikodym-Operator* für ω , wenn ein Operator $y \in M'$ existiert, der die Gleichung $b\varphi = y\varphi$ erfüllt.

Bemerkung 6.5. Auch dies ist *kein* Standardbegriff. Operatoren mit dieser Eigenschaft werden im folgenden Satz benötigt. Da der Operator b , wenn er positiv ist, ein Radon-Nikodym-Operator im eigentlichen Sinne ist, lag diese Benennung nahe.

Satz 6.8. Sei a ein umkehrbarer Radon-Nikodym-Operator für treues $\omega \in \mathcal{S}_0(M)$. Sei für jedes $\lambda \in [0, 1]$ der Operator $\lambda a + (1 - \lambda)\mathbb{1}$ ein umkehrbarer Radon-Nikodym-Operator. Für jeden verallgemeinerten Radon-Nikodym-Operator b für ω existiert dann ein $\varepsilon(b) > 0$ so, daß für alle $\varepsilon \in [0, \varepsilon(b)[$ und für alle $\lambda \in [0, 1]$ die Operatoren $\lambda(a + \varepsilon b) + (1 - \lambda)\mathbb{1}$ umkehrbare Radon-Nikodym-Operatoren sind.

Beweis. Sei $\varphi \in \mathcal{S}(\omega)$. Nach Voraussetzung existiert $z \in M'$ mit $(\lambda a + (1 - \lambda)\mathbb{1})\varphi = (\lambda z + (1 - \lambda)\mathbb{1})\varphi$. Dabei sind die Operatoren für alle $\lambda \in [0, 1]$ jeweils invertierbar. Man überlegt sich leicht, daß dies speziell bedeutet, daß das Spektrum von z keine Zahlen ≤ 0 enthält. Für a galt dies wegen der geforderten Positivität ohnehin. Weiterhin existiert ein $y \in M'$ mit $b\varphi = y\varphi$. Betrachte nun die Gleichung

$$(\lambda(a + \varepsilon b) + (1 - \lambda)\mathbb{1})\varphi = (\lambda(z + \varepsilon y) + (1 - \lambda)\mathbb{1})\varphi.$$

Von den Operatoren beider Seiten ist die Invertierbarkeit zu zeigen; von dem auf der linken Seite darüber hinaus noch die Positivität.

Beginnen wir mit der linken Seite. Es gilt

$$\lambda(a + \varepsilon b) + (1 - \lambda)\mathbb{1} = (\lambda a + (1 - \lambda)\mathbb{1}) + \lambda\varepsilon b.$$

Die Invertierbarkeit dieses Operators ist garantiert, wenn

$$\|\lambda\varepsilon b\| < \|(\lambda a + (1 - \lambda)\mathbb{1})^{-1}\|^{-1}$$

ist. Nun ist

$$\|(\lambda a + (1 - \lambda)\mathbb{1})^{-1}\|^{-1} = \lambda \left\| \left(a + \frac{1-\lambda}{\lambda} \mathbb{1} \right)^{-1} \right\|^{-1} \text{ für } \lambda \neq 0.$$

Rechts steht aber die inverse Norm der Resolvente von a im Punkt $-\frac{1-\lambda}{\lambda}$. Damit ist dieser Ausdruck stetig in λ für $\lambda \in]0, 1]$. Da für $\lambda \rightarrow +0$ der Ausdruck $\|(\lambda a + (1 - \lambda)\mathbb{1})^{-1}\|^{-1}$ gegen 1 geht (gilt für beliebige beschränkte Operatoren), ist er also stetig für $\lambda \in [0, 1]$. Damit gibt es eine untere Schranke $\varepsilon_1 > 0$ mit

$$\varepsilon_1 < \|(\lambda a + (1 - \lambda)\mathbb{1})^{-1}\|^{-1} \text{ für alle } \lambda \in [0, 1].$$

Für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_1 \|b\|^{-1}$ ist damit

$$\|\lambda\varepsilon b\| < \varepsilon_1 < \|(\lambda a + (1 - \lambda)\mathbb{1})^{-1}\|^{-1}$$

und folglich $\lambda(a + \varepsilon b) + (1 - \lambda)\mathbb{1}$ für alle $\lambda \in [0, 1]$ invertierbar.

Die Positivität dieses Operators folgt unmittelbar: Da b nach Voraussetzung selbstadjungiert war, ist es auch $\lambda(a + \varepsilon b) + (1 - \lambda)\mathbb{1}$. Die Invertierbarkeit für alle $\lambda \in [0, 1]$ ist, wie oben schon erwähnt, eine hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß keine Zahlen ≤ 0 im Spektrum von $\lambda(a + \varepsilon b)$ sind. Damit ist bereits $\lambda(a + \varepsilon b) \geq 0$, woran die Addition von $(1 - \lambda)\mathbb{1}$ nichts ändert.

Die Invertierbarkeit des Operators auf der rechten Seite zeigt man völlig analog, indem man a mit z und b mit y austauscht. Wegen der Voraussetzungen im Satz enthält die Resolventenmenge von z die gesamte nichtpositive reelle Achse, so daß sich alle Argumente genauso anwenden lassen. Es ergibt sich dabei ein $\varepsilon_2 > 0$ mit

$$\varepsilon_2 < \|(\lambda z + (1 - \lambda)\mathbb{1})^{-1}\|^{-1} \text{ für alle } \lambda \in [0, 1].$$

Für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_2\|y\|^{-1}$ ist damit

$$\|\lambda \varepsilon y\| < \varepsilon_1 < \|(\lambda z + (1 - \lambda)\mathbb{1})^{-1}\|^{-1}$$

und folglich $\lambda(z + \varepsilon y) + (1 - \lambda)\mathbb{1}$ für alle $\lambda \in [0, 1]$ invertierbar. Um die Behauptung des Satzes zu erfüllen, setzen wir schließlich $\varepsilon(b) := \min\{\varepsilon_1\|b\|^{-1}, \varepsilon_2\|y\|^{-1}\}$. \square

6.3 Beispiele von Radon-Nikodym-Operatoren

In diesem Abschnitt wollen wir Beispiele von umkehrbaren Radon-Nikodym-Operatoren erzeugen. Zu diesem Zweck sei M der Typ-I-Faktor aus Abschnitt 2.2.

Sei nun ein treues $\omega \in \mathcal{S}_0(M)$ beliebig, aber fest gewählt. Dieser Zustand entspricht in natürlicher Weise einer Dichtematrix (positiver Spurklasseoperator mit Spur 1). Dessen Quadratwurzel φ ist ein auf 1 normierter Hilbert-Schmidt-Operator, der ω implementiert. Weiterhin sei $a \in M_+$ ein umkehrbarer Hilbert-Schmidt-Operator für ω . Das bedeutet, es gilt $a \cdot \varphi = \varphi \cdot z$, wobei z ein gewisser invertierbarer Operator aus $B(\mathcal{H})$ ist. (Elemente aus dem Kommutanten wirken von rechts.)

6.3.1 Vorbetrachtung: Der endlichdimensionale Fall

Sei zunächst der zugrundeliegende Hilbertraum \mathcal{H} endlichdimensional: $\dim \mathcal{H} =: n < \infty$. Während sich im allgemeinen wenig über den Zusammenhang von a und z sagen läßt, haben wir hier das Hilfsmittel der Determinante. Da außerdem im endlichdimensionalen Fall φ invertierbar ist, können wir schreiben:

$$z = \varphi^{-1}a\varphi; \quad \det z = \det(\varphi^{-1}a\varphi) = \det(\varphi\varphi^{-1}a) = \det a$$

Noch allgemeiner gilt: Die Matrizen a und z haben dieselben Eigenwerte $t_1 \geq \dots \geq t_n$, da Eigenwerte mit Ausnahme der Null (die hier nicht auftritt) unter zyklischer Vertauschung eines Produkts von Matrizen erhalten bleiben. Um Aussagen über die Matrixnorm von z und z^{-1} treffen zu können, betrachten wir nun die sogenannten *Singulärwerte* von z . Diese sind gleich den Eigenwerten von $|z|$ (des *Moduls* von z) aus der Polarzerlegung $z = u|z|$. Sie seien mit s_1, \dots, s_n bezeichnet und so geordnet, daß $s_1 \geq \dots \geq s_n$ gilt. Für nähere Informationen zur Polarzerlegung und zu Singulärwerten und ihren Eigenschaften sei auf [35] und [36] verwiesen.

Nun gilt $\det z = \det u \det |z|$, da aber $\det z = \det a > 0$ und $\det |z| > 0$ ist, muß folglich auch $\det u > 0$ sein. Weil aber u unitär ist, bleibt nur $\det u = 1$ als einzige Möglichkeit. Zusammengefaßt heißt das:

$$s_1 s_2 \cdots s_n = \det |z| = \det z = t_1 t_2 \cdots t_n.$$

Setzen wir uns nun zwei reelle Zahlen $m < 1 < M$, von denen wir verlangen, daß sie als untere bzw. obere Schranke für die Singulärwerte von z dienen, mit anderen Worten also, daß folgende Ungleichung gilt:

$$M \geq s_1 \geq t_1 \geq t_2 \geq \cdots \geq t_n \geq s_n \geq m.$$

(Die Ungleichungen $s_1 \geq t_1$ und $t_n \geq s_n$ sind trivialerweise immer erfüllt.)

Betrachten wir nun die Operatoren $a_\lambda := \lambda a + (1 - \lambda)\mathbb{1}$ für $\lambda \in [0, 1]$. Mit $z_\lambda := \lambda z + (1 - \lambda)\mathbb{1}$ gilt $a_\lambda \varphi = \varphi z_\lambda$ für alle $\lambda \in [0, 1]$. Wie sehen nun für festes $\lambda \in [0, 1]$ die Eigen- und die Singulärwerte von z_λ aus? Die Eigenwerte t'_1, \dots, t'_n von a_λ sind einfach gleich $\lambda t_1 + (1 - \lambda), \dots, \lambda t_n + (1 - \lambda)$. Die Singulärwerte von z_λ seien zunächst mit $s'_1 \geq \dots \geq s'_n$ bezeichnet. Dabei ist $s'_1 = \|z_\lambda\|$ die Norm von z_λ und $s'_n = \|z_\lambda^{-1}\|^{-1}$ die inverse Norm von z_λ^{-1} . Deshalb ist $s'_1 \leq \lambda s_1 + (1 - \lambda)$.

Um den kleinsten Singulärwert s'_n abzuschätzen, bedient man sich der Identität $t'_1 t'_2 \cdots t'_n = s'_1 s'_2 \cdots s'_n$ und benutzt für $k = 1, 2, \dots, n-1$ die Abschätzung der Singulärwerte $s'_k \leq \lambda s_k + (1 - \lambda)$. Diese Ungleichung folgt z. B. unmittelbar aus [36, Theorem 3.3.16 (a)].

Auf diese Weise ergibt sich

$$s'_n = \frac{t'_1 \cdots t'_n}{s'_1 \cdots s'_{n-1}} \geq \frac{(\lambda t_1 + 1 - \lambda) \cdots (\lambda t_n + 1 - \lambda)}{(\lambda s_1 + 1 - \lambda) \cdots (\lambda s_{n-1} + 1 - \lambda)} \geq \frac{m^n}{M^{n-1}}. \quad (6.1)$$

Die Besonderheit dieser Abschätzung liegt darin, daß sie nicht mehr von λ abhängt. Dies bedingt, daß jene Zahl, die sozusagen die Umkehrbarkeit des Radon-Nikodym-Operators a_λ (gleichbedeutend mit der Invertierbarkeit von z_λ) „mißt“, eine bestimmte untere Schranke nicht unterschreitet. Dabei hängt diese Schranke *nicht* von λ und auch nicht von der konkreten Wahl von a bzw. z , sondern nur von den vorher gesetzten Schranken m und M sowie von der Dimension n ab. Wie sich später zeigen wird, wäre es wünschenswert, die Ungleichung in bezug auf die Dimension so scharf wie möglich zu machen, um den unendlichdimensionalen Fall besser behandeln zu können. Mit einfachen Überlegungen lassen sich auch die Exponenten verkleinern (der Übergang jeweils gleich zu m bzw. M ist sehr „großzügig“), die prinzipiell exponentielle Abhängigkeit von der Dimension ließ sich jedoch nicht beseitigen.

6.3.2 Anwendung auf den unendlichdimensionalen Fall

Die gefundene Abschätzung läßt sich nun auf folgende Weise für den unendlichdimensionalen Fall anwenden: Dazu sei der Hilbertraum \mathcal{H} jetzt unendlichdimensional; die Klasse der Hilbert-Schmidt-Operatoren ist dann eine echte Teilmenge von $B(\mathcal{H})$. Ansonsten werden die Bezeichnungen beibehalten. Konkret sei $\omega \in S_0(M)$ ein treuer normaler Zustand mit implementierendem Vektor φ . Wir wählen nun als Orthonormalsystem in \mathcal{H} die Eigenbasis von φ , bezeichnet mit e_1, e_2, \dots , und zwar so, daß die zugehörigen Eigenwerte monoton nicht wachsend geordnet sind. (Da φ als Hilbert-Schmidt-Operator im speziellen kompakt ist, läßt er sich auf diese Weise „diagonalisieren“.) Diese Basis wird fixiert.

Sei nun $a \in B(\mathcal{H})_+$ ein invertierbarer Operator, der die Eigenschaft besitzt, bezüglich $\{e_k\}$ Blockgestalt mit Blockgröße höchstens $n \in \mathbb{N}$ zu haben. In Formeln ausgedrückt: $a = \sum p_j a p_j$, wobei jedes p_j ein Orthoprojektor ist, der auf einen

von höchstens n Basisvektoren aufgespannten Unterraum projiziert. Dabei wird noch $p_j p_{j'} = 0 \forall j, j' \in \mathbb{N}$ gefordert. Da a invertierbar sein soll, muß $\sum p_j = \mathbb{1}$ sein. Dann gilt folgende Aussage:

Theorem 6.9. *Seien a, φ wie oben definiert. Wenn a ein umkehrbarer Radon-Nikodym-Operator für ω ist, so gilt dies auch für jeden Operator der Gestalt $\lambda a + (1 - \lambda)\mathbb{1}$, $\lambda \in [0, 1]$.*

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt: Es existiert ein invertierbares $z \in B(\mathcal{H})$ mit $a\varphi = \varphi z$. Insbesondere bedeutet dies wegen der Beschränktheit von z , daß das Bild des Operators $a\varphi$ vollständig im Definitionsbereich des unbeschränkten Operators φ^{-1} liegt, der Ausdruck $\varphi^{-1}a\varphi$ also überall definiert (und gleich z) ist. Da nach Konstruktion alle p_j mit φ vertauschen (über \mathcal{H}), hat auch z die Gestalt $z = \sum p_j z p_j$.

Wir wählen ein $\lambda \in [0, 1]$ fest. Sei wie oben $a_\lambda := \lambda a + (1 - \lambda)\mathbb{1}$ und $z_\lambda := \lambda z + (1 - \lambda)\mathbb{1}$. Es gilt auch $a_\lambda = \sum a_{\lambda(j)}$ und $z_\lambda = \sum z_{\lambda(j)}$ mit $a_{\lambda(j)} := p_j a_\lambda p_j$, $z_{\lambda(j)} := p_j z_\lambda p_j$. Zu zeigen bleibt lediglich die Invertierbarkeit von z_λ ; alle anderen Forderungen an umkehrbare Radon-Nikodym-Operatoren sind offensichtlich erfüllt.

Sei nun $M := \|z\|, m := \|z^{-1}\|^{-1}$. Da z die direkte orthogonale Summe von $z_{(j)} := p_j z p_j$ ist, gilt $M = \sup \|z_{(j)}\|, m = \inf \|z_{(j)}^{-1}\|^{-1}$ und im speziellen für die Eigen- und Singulärwerte *jedes* $z_{(j)}$ (Bezeichnungen wie oben) $M \geq s_1 \geq t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq t_k \geq s_k \geq m$, wenn $k := \dim p_j \mathcal{H} \leq n$ ist.

Der Hilbertraum $p_j \mathcal{H}$ ist endlichdimensional, und so sind alle Voraussetzungen erfüllt, die für obige Abschätzungen der Singulärwerte von z bzw. $z_{(j)}$ gemacht wurden.

Wegen $m \leq \|z_{(j)}^{-1}\|^{-1}, \|z_{(j)}\| \leq M$ folgt damit für $s'_{k(j)}$, den kleinsten Singulärwert von $z_{\lambda(j)}$:

$$s'_{k(j)} \geq \frac{m^n}{M^{n-1}} \text{ bzw. } \|z_{\lambda(j)}^{-1}\|^{-1} \geq \frac{m^n}{M^{n-1}}.$$

Diese Ungleichung gilt für *jedes* $j \in \mathbb{N}$. Da z_λ die direkte orthogonale Summe der $\{z_{(j)}\}$ ist, gilt

$$\|z_\lambda^{-1}\|^{-1} \geq \frac{m^n}{M^{n-1}}.$$

Da $\lambda \in [0, 1]$ beliebig war, bedeutet dies, daß alle $\{z_\lambda\}$ invertierbar sind, woraus die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 6.6. Aus dem Beweis geht hervor, daß die Forderung danach, daß die Blöcke von a eine maximale Größe n nicht übersteigen, nicht fallengelassen werden kann, solange die Abschätzung (6.1) für $n \rightarrow \infty$ gegen Null geht.

6.3.3 Radon-Nikodym-Operatoren mit nur endlich vielen Eigenwerten

Betrachten wir nun einen anderen Spezialfall. Dazu sei zu $\omega \in \mathcal{S}_0(M)$ ein Radon-Nikodym-Operator $a \in B(\mathcal{H})_+$ gegeben, der nur endlich viele verschiedene Spektralwerte $\{\lambda_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}_+$ hat. Die zugehörigen Spektralprojektoren seien mit $\{q_j\}_{j=1}^n$ bezeichnet. Damit gilt

$$a = \sum_{j=1}^n \lambda_j q_j, \quad q_j q_k = \delta_{jk} q_j, \quad \sum_{j=1}^n q_j = \mathbb{1}. \quad (6.2)$$

Satz 6.10. *Sei a wie in (6.2) gegeben. Wenn für jedes $1 \leq j \leq n$ der Operator $\varphi^{-1} q_j \varphi$ auf ganz \mathcal{H} definiert und damit beschränkt ist, dann ist a ein (immer auch umkehrbarer) Radon-Nikodym-Operator für ω .*

Beweis. Zu zeigen ist wieder die Beschränktheit und Invertierbarkeit der Operatoren aus M' . Es gilt

$$\varphi^{-1} a \varphi = \varphi^{-1} \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j q_j \right) \varphi = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi^{-1} q_j \varphi,$$

wobei das „Herausziehen“ der Summe nach Voraussetzung erlaubt ist. Der Operator rechts ist beschränkt und invertierbar mit dem Inversen $\sum_{j=1}^n \lambda_j^{-1} \varphi^{-1} q_j \varphi$. \square

Erstaunlicherweise gilt neben obigem Satz auch folgende Umkehrung:

Theorem 6.11. *Sei a wie in (6.2) gegeben. Wenn a ein nicht notwendig umkehrbarer Radon-Nikodym-Operator für ω ist, also $\varphi^{-1} a \varphi$ beschränkt ist, erfüllen alle q_j die Voraussetzung von Satz 6.10, und damit ist a insbesondere auch ein umkehrbarer Radon-Nikodym-Operator für ω .*

Beweis. Analog zum Beweis von Satz 6.6 sieht man, daß mit a auch alle Potenzen $a^n, n \in \mathbb{N}$ Radon-Nikodym-Operatoren für ω sind (ohne die Forderung der

Umkehrbarkeit). Wir betrachten folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cccccc}
 \lambda_1 q_1 & + & \lambda_2 q_2 & + & \cdots & + & \lambda_n q_n & = & a \\
 \lambda_1^2 q_1 & + & \lambda_2^2 q_2 & + & \cdots & + & \lambda_n^2 q_n & = & a^2 \\
 \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
 \lambda_1^n q_1 & + & \lambda_2^n q_2 & + & \cdots & + & \lambda_n^n q_n & = & a^n
 \end{array} \tag{6.3}$$

Da nach Voraussetzung alle λ_j paarweise verschieden sind, gilt dies auch für alle λ_j^k für festes k , und die Zeilen von (6.3) sind linear unabhängig. Folglich gibt es reelle Zahlen $\{\mu_k\}_{k=1}^n$, so daß folgendes gilt:

$$\mu_1 a + \mu_2 a^2 + \cdots + \mu_n a^n = q_1.$$

Damit ist $\varphi^{-1} q_1 \varphi = \varphi^{-1} (\mu_1 a + \mu_2 a^2 + \cdots + \mu_n a^n) \varphi = \mu_1 \varphi^{-1} a \varphi + \mu_2 \varphi^{-1} a^2 \varphi + \cdots + \mu_n \varphi^{-1} a^n \varphi$, da man, weil alle a^k Radon-Nikodym-Operatoren für ω sind, die Klammer auflösen kann. Da rechts die endliche Summe beschränkter Operatoren steht, muß auch $\varphi^{-1} q_1 \varphi$ beschränkt sein.

Analog verfährt man mit den Orthoprojektoren q_2, \dots, q_n . Der Rest ergibt sich nach Satz 6.10. \square

6.3.4 Diagonalisierbare Radon-Nikodym-Operatoren

Nach diesen doch erstaunlichen Ergebnissen für Radon-Nikodym-Operatoren mit nur endlich vielen Spektralwerten kann man sich der „nächstschwierigeren“ Klasse widmen, nämlich den Operatoren mit unendlich vielen verschiedenen Eigenwerten, aber einem vollständigen System von Eigenvektoren (mit anderen Worten den diagonalisierbaren Operatoren). Welche Eigenschaften bleiben bei diesem Übergang erhalten? Gelten vielleicht Satz 6.10 und Theorem 6.11 weiter? Leider ließ sich für Theorem 6.11 keine Entscheidung treffen, aber im Fall von Satz 6.10 kann man die Frage negativ beantworten, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 6.1. Im folgenden sei vorausgesetzt, daß die Eigenwerte von $\varphi \in B(\mathcal{H})$ mindestens wie $1/2^{n^2}$ fallen. Falls das von vornherein noch nicht der Fall war, wird dazu von der (gegen Null konvergierenden) Folge der Eigenwerte eine geeignete Auswahlfolge mit obiger Eigenschaft gebildet. In diesem Fall führen wir die weiteren Überlegungen auf dem von den zugehörigen Eigenvektoren aufgespannten Unterraum durch; das orthogonale Komplement soll dann von den zu konstruierenden Operatoren wie der Einsoperator behandelt werden.

Für die folgenden Konstruktionen stellt die Forderung keine Einschränkung der Allgemeinheit dar. Um konkret rechnen zu können, werden die Operatoren als unendlichreihige Matrizen dargestellt. Auf diese Weise sei

$$\varphi = c \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2^4} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2^9} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $c := \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k^2}} \right)^{-\frac{1}{2}}$, so daß $\|\varphi\|_{\text{HS}} = 1$ ist. Wir betrachten weiter

$$a = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix}} & & & \\ & 0 & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix}} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Die Matrix a hat also eine spezielle Gestalt. In jedem Block steht dieselbe 2×2 -Matrix mit den Eigenwerten 2 und 4. Wir bezeichnen die zugehörigen Eigenvektoren mit $\{q_{2k-1}, q_{2k}\}$ im k -ten Block, dann ergibt sich

$$a = 2Q_1 + 4Q_2 \text{ mit } Q_1 := \sum_{k=1}^{\infty} q_{2k-1}, Q_2 := \sum_{k=1}^{\infty} q_{2k}.$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß alle Orthoprojektoren q_k Radon-Nikodym-Operatoren für ω sind, weil $\varphi^{-1}q_k\varphi$ für alle $k \in \mathbb{N}$ beschränkt ist. *Aber:* Weder a noch a^{-1} ist ein solcher, denn

$$\varphi^{-1}a\varphi = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 3 & 2^{-3} \\ 2^3 & 3 \end{matrix}} & & & \\ & 0 & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 3 & 2^{-7} \\ 2^7 & 3 \end{matrix}} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

ist unbeschränkt.

Bemerkung 6.7. Aus der Umkehrung von Satz 6.10 folgt, daß weder Q_1 noch Q_2 Radon-Nikodym-Operatoren für ω sein können. Auf diese Weise haben wir also nichttriviale Beispiele von Nicht-Radon-Nikodym-Operatoren erhalten (nichttrivial in dem Sinne, daß sie Summe von *unendlich vielen* Radon-Nikodym-Operatoren sind).

6.4 Der Zusammenhang von Umkehrbarkeit und Spektrum; ein Gegenbeispiel

Für den gesamten Abschnitt gelten folgende Vereinbarungen: Der Hilbertraum \mathcal{H} sei unendlichdimensional und separabel, und die von-Neumann-Algebra M sei der Typ- I_∞ -Faktor aus Abschnitt 2.2. Mit ω sei stets ein *treuer* normaler Zustand über M bezeichnet. Er entspricht in natürlicher Weise einer Dichtematrix über \mathcal{H} ; ihre Quadratwurzel φ wird als implementierender Vektor für ω ausgewählt.

6.4.1 Unbeschränkte Ähnlichkeit und Spektrum

Betrachten wir zunächst einen beliebigen Radon-Nikodym-Operator a für ω . Nach der Definition existiert ein $z \in M' (\simeq B(\mathcal{H}))$ mit $a\varphi = \varphi z$. Das bedeutet $z = \varphi^{-1}a\varphi$. Dabei ist φ^{-1} mit $\mathcal{D}(\varphi^{-1}) := \mathcal{R}(\varphi)$ ein *unbeschränkter* selbstadjungierter Operator [22].

Wenn a ein *umkehrbarer* Radon-Nikodym-Operator ist, muß z nicht nur beschränkt, sondern auch beschränkt invertierbar sein. Die Eigenschaft von a , ein (umkehrbarer) Radon-Nikodym-Operator zu sein, hängt also von der Beschränktheit (des Inversen) des Operators z ab, der aus a durch eine „unbeschränkte Ähnlichkeitsoperation“ hervorgeht.

Interessiert man sich nun für die Frage, ob zu gegebenem umkehrbarem Radon-Nikodym-Operator a die Operatoren $\lambda a + (1 - \lambda)\mathbb{1}$ für $\lambda \in [0, 1]$ ebenfalls umkehrbare Radon-Nikodym-Operatoren sind, fragt man also nach der Invertierbarkeit von $\lambda z + (1 - \lambda)\mathbb{1}$ oder, für $\lambda \neq 0$ äquivalent, nach der Invertierbarkeit von $z + \frac{1-\lambda}{\lambda}\mathbb{1}$. Der Faktor vor $\mathbb{1}$ durchläuft für $\lambda \in]0, 1]$ die gesamte nichtnegative reelle Achse. Wir fragen mit anderen Worten also nach dem Teil des Spektrums von z , der auf der nichtpositiven reellen Achse liegt.

Wir wissen von a nach Voraussetzung, daß sein Spektrum ein beschränktes Gebiet in $]0, \infty[$ ist. Wäre die Ähnlichkeitsoperation zwischen a und z beschränkt, würde diese Aussage auch für z gelten, und wir würden wissen, daß in $] -\infty, 0[$ kein Spektralwert läge – mit allen Folgerungen, die sich daraus für die Umkehrbarkeit von Radon-Nikodym-Operatoren ergeben.

Die Gleichheit der Spektren von a und z läßt sich im Gegensatz zur klassischen Ähnlichkeit *nicht* zeigen – die dort verwendeten Methoden versagen in unserem Fall. Man kann aber unter bestimmten Umständen für die uns besonders interessierenden *reellen* Spektralwerte eine Inklusion ableiten.

Satz 6.12. *Seien die Voraussetzungen dieses Abschnittes erfüllt. Sei a ein Radon-Nikodym-Operator für ω und z der Operator aus M' , der $a\varphi = \varphi z$ erfüllt. Dann gilt $\text{spec } a \subseteq \text{spec } z$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $z = \varphi^{-1}a\varphi$ und $z^* = \overline{\varphi a \varphi^{-1}} = \overline{\varphi^2(\varphi^{-1}a\varphi)\varphi^{-2}} = \overline{\varphi^2 z \varphi^{-2}}$. Dabei bedeutet der Strich den (eindeutigen) Abschluß des entsprechenden zunächst nur auf einem dichten Bereich definierten Operators zu einem beschränkten Operator. Hier wie auch im folgenden wird stets vorausgesetzt, daß $\mathcal{D}(\varphi^{-t}) := \mathcal{R}(\varphi^t)$ für $t \in [0, 2]$ ist. Die Definitionsbereiche sind jeweils dicht, da ω nach Voraussetzung *treu* ist.

Sei $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\lambda \in \varrho(z)$ (Resolventenmenge). Damit ist auch $\lambda \in \varrho(z^*)$, und $(z - \lambda\mathbb{1})^{-1}$ sowie $(z^* - \lambda\mathbb{1})^{-1}$ sind in $B(\mathcal{H})$. Es gilt

$$\varphi^2(z - \lambda\mathbb{1})\varphi^{-2} = \varphi^2 z \varphi^{-2} - \lambda\mathbb{1}.$$

Die linke Seite ist also auf $\mathcal{D}(\varphi^{-2})$ definiert und beschränkt. Weiter ist

$$\varphi^2(z - \lambda\mathbb{1})^{-1}\varphi^{-2}\varphi^2(z - \lambda\mathbb{1})\varphi^{-2} = \mathbb{1}|_{\mathcal{D}(\varphi^{-2})},$$

damit also $\varphi^2(z - \lambda\mathbb{1})^{-1}\varphi^{-2}$ Inverses von $\varphi^2(z - \lambda\mathbb{1})\varphi^{-2}$ auf $\mathcal{R}(\varphi^2(z - \lambda\mathbb{1})\varphi^{-2})$. Da $z - \lambda\mathbb{1}$ aber nach Voraussetzung *auf* \mathcal{H} abbildet, ist dieser Wertebereich gleich $\mathcal{R}(\varphi^2)$, also dicht.

Ein Inverses von $\overline{\varphi^2(z - \lambda\mathbb{1})\varphi^{-2}} = \overline{\varphi^2 z \varphi^{-2}} - \lambda\mathbb{1} = z^* - \lambda\mathbb{1}$ ist aber auch $(z^* - \lambda\mathbb{1})^{-1}$, das nach Voraussetzung in $B(\mathcal{H})$ liegt.

Es ist also $(z - \lambda\mathbb{1})^{-1} \in B(\mathcal{H})$ und $(z^* - \lambda\mathbb{1})^{-1} = \overline{\varphi^2(z - \lambda\mathbb{1})^{-1}\varphi^{-2}} \in B(\mathcal{H})$ und damit nach [38, Lemma 3.6] auch $\overline{\varphi^t(z - \lambda\mathbb{1})^{-1}\varphi^{-t}} \in B(\mathcal{H})$ für alle $t \in [0, 2]$.

Wir betrachten $t := 1$. Damit ist $\overline{\varphi(z - \lambda \mathbb{1})^{-1} \varphi^{-1}} \in B(\mathcal{H})$. Analog wie oben zeigt man: $\overline{\varphi(z - \lambda \mathbb{1})^{-1} \varphi^{-1}}$ ist Inverses von $\overline{\varphi(z - \lambda \mathbb{1}) \varphi^{-1}} = \overline{\varphi z \varphi^{-1}} - \lambda \mathbb{1} = a - \lambda \mathbb{1}$, also ist $\lambda \in \varrho(a)$.

Damit wurde gezeigt, daß $\varrho(z) \cap \mathbb{R}_+ \subseteq \varrho(a) \cap \mathbb{R}_+$ gilt. Daraus folgt $\text{spec } z \supseteq \text{spec } z \cap \mathbb{R}_+ \supseteq \text{spec } a \cap \mathbb{R}_+ = \text{spec } a$. \square

Die Frage, die sich unmittelbar nach diesem Satz stellt, ist, ob man die umgekehrte Inklusion der Spektren zeigen kann. Denn a und z scheinen ja in gewisser Weise dual zueinander zu sein. Der entscheidende Unterschied zwischen ihnen ist aber, daß a *positiv* und damit selbstadjungiert ist; von z dagegen weiß man a priori gar nichts. Der Beweis machte sich gerade die Selbstadjungiertheit von a zunutze. Auf diese Weise ist ein einparametriger Weg (via $\varphi^{-t} a \varphi^t$) von z^* über a nach z gegeben, und es lassen sich nach obigem Resultat aus dem Wissen über die auf der reellen Achse gleichen Resolventenmengen von z und z^* Aussagen über die Resolventenmenge von a treffen.

Daß die Spektren von a und z im allgemeinen *nicht* gleich sind und *wie* sie konkret in \mathbb{C} liegen können, wird das folgende Beispiel zeigen.

6.4.2 Ein Toeplitzoperator als Gegenbeispiel

Der Zustand ω werde von folgendem Hilbert-Schmidt-Operator implementiert:

$$\varphi = \sqrt{\frac{9}{11}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \left(\frac{2}{11}\right)^{\frac{1}{2}} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{2}{11} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Der folgende Toeplitzoperator a ist ein umkehrbarer Radon-Nikodym-Operator für ω :

$$a = \begin{pmatrix} 4592 & 654\sqrt{22} & 924 & 22\sqrt{22} & 0 & \cdots \\ 654\sqrt{22} & 4592 & 654\sqrt{22} & 924 & 22\sqrt{22} & \cdots \\ 924 & 654\sqrt{22} & 4592 & 654\sqrt{22} & 924 & \cdots \\ 22\sqrt{22} & 924 & 654\sqrt{22} & 4592 & 654\sqrt{22} & \cdots \\ 0 & 22\sqrt{22} & 924 & 654\sqrt{22} & 4592 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

denn der zugehörige Operator z in M' ist invertierbar:

$$z = \varphi^{-1}a\varphi = \begin{pmatrix} 4592 & 1308 & 168 & 8 & 0 & \cdots \\ 7194 & 4592 & 1308 & 168 & 8 & \cdots \\ 5082 & 7194 & 4592 & 1308 & 168 & \cdots \\ 1331 & 5082 & 7194 & 4592 & 1308 & \cdots \\ 0 & 1331 & 5082 & 7194 & 4592 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Der Operator z hat nun aber die Eigenschaft, daß für jedes $\lambda \in \mathbb{R}_+ \setminus \left\{ \left(\frac{27}{7} \right)^3 \right\}$ der Operator $z + \lambda \mathbb{1}$ invertierbar ist, für $\lambda = \left(\frac{27}{7} \right)^3$ jedoch nicht!

Das Besondere an diesem Beispiel (von dessen Art man nun beliebig viele konstruieren kann): *Genau* ein Punkt der negativen Achse ist im Spektrum von z enthalten. Übersetzt heißt dies: Die Strecke zwischen a und $\mathbb{1}$ besteht mit Ausnahme genau eines Punktes aus umkehrbaren Radon-Nikodym-Operatoren; im Ausnahmepunkt ist der Radon-Nikodym-Operator *nicht* umkehrbar.

6.4.3 Diskussion des Beispiels: Spektrum von Toeplitzoperatoren

Um zu verstehen, warum das Beispiel „funktioniert“, muß man mehr über das Spektrum von Toeplitzoperatoren wissen. Ist ein solcher Operator gegeben,

$$T(a) := \begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & a_{-3} & \cdots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \cdots \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_{-1} & \cdots \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

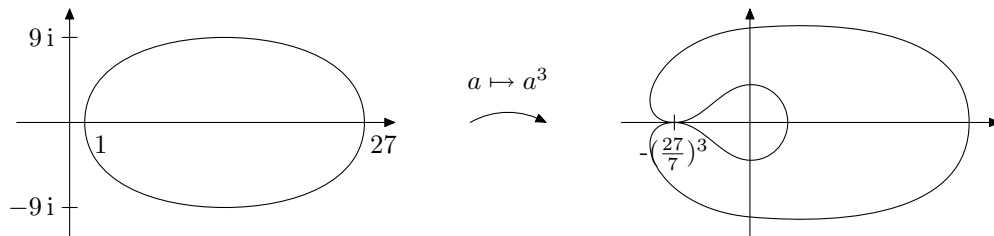
und die durch $a(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ gegebene Funktion stetig auf dem Einheitskreis S , dann ist das Spektrum von $T(a)$ die Vereinigung von $a(S)$ und denjenigen Punkten von $\mathbb{C} \setminus a(S)$, die eine Windungszahl $\neq 0$ bezüglich der (natürlich orientierten) Kurve $a(S)$ haben [28].

Eine ausführliche Behandlung von Toeplitzoperatoren findet der Leser in [14] und, vollständig überarbeitet, in [15]. Ein Übersichtsartikel, in dem das oben erwähnte

Resultat ebenfalls aufgeführt ist, ist [13]. Wir haben uns in der Bezeichnungsweise [13] angeschlossen. Aus dem Kontext sollte stets klar sein, wann mit a und z die oben diskutierten Operatoren und wann komplexe Zahlen gemeint sind.

Im Spezialfall $a_n = 0$ für alle $|n| \geq 2$ reduziert sich $a(z)$ auf die Form $a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1z$, und das Spektrum von $T(a)$ ist eine (volle) Ellipse. Eine elementare analytisch-geometrische Rechnung zeigt, daß für $a_{-1} := 2$, $a_0 := 14$, $a_1 := 11$ die Ellipse folgende Lage hat: Mittelpunkt bei $(14, 0)$, große Halbachse auf der reellen Achse mit Länge 13, kleine Halbachse mit Länge 9. Die obere Tangente vom Ursprung an die Ellipse hat dann gerade einen Winkel von 60° und berührt diese im Punkt $(\frac{27}{14}, \frac{27\sqrt{3}}{14})$.

Diese spezielle Lage führt nun dazu, daß $T(a^3)$ ($= z$, unser Beispiel) ein Spektrum hat, das die negative reelle Achse gerade in dem einen Punkt $-(\frac{27}{7})^3$ berührt.



Bemerkung 6.8. Die Inklusion aus Satz 6.12 gilt natürlich immer noch. Aber man sieht, daß sie in diesem Fall echt ist und beim Übergang von a zu z das Spektrum die reelle Achse verläßt. Wenn die Null außerhalb liegt, kann man folglich immer durch hinreichend vielfaches Potenzieren der zugrundeliegenden Funktion einen Toeplitzoperator erhalten, der weiterhin invertierbar ist, dessen Spektrum aber in der komplexen Ebene die Null vollständig umschließt.

Bemerkung 6.9. Wichtig ist bei allen diesen Beispielen, daß sowohl a als auch z Toeplitzoperatoren sind. Das ist garantiert, wenn einer von beiden Operatoren diese Eigenschaft hat und φ wie oben Diagonalgestalt hat mit Eigenwerten, die eine geometrische Folge bilden. Dann können wir unter gewissen Umständen die Spektren konkret angeben. Das heißt aber keineswegs, daß für *allgemeine* treue normale Zustände solche Radon-Nikodym-Operatoren nicht existieren. Es ist dann nur ungleich schwerer, sie zu finden.

6.5 Die Konstruktion eines Operators mit vorgegebenem Spektrum

Wir betrachten jetzt einen unendlichdimensionalen separablen Hilbertraum \mathcal{H} und die volle Algebra $B(\mathcal{H})$. Untersucht werden soll, ob zu einer gewissen vorgegebenen Menge G in der komplexen Ebene ein Operator aus $B(\mathcal{H})$ konstruiert werden kann, dessen Spektrum gerade G ist.

Das kann wegen der bekannten Eigenschaften der Spektren natürlich nicht für jede Menge G möglich sein. Das Wissen um das Spektrum von gewissen Toeplitzoperatoren bietet jedoch die Möglichkeit, für einige nichttriviale Klassen von Mengen G die entsprechenden Operatoren zu konstruieren.

Das Spektrum eines beliebigen Toeplitzoperators zu bestimmen, ist im allgemeinen eine schwierige Aufgabe – siehe z. B. [13]. Der „einfachste“ Fall ist (Bezeichnungen wie in Unterabschnitt 6.4.3), wenn die durch $a(z) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ gegebene Funktion stetig auf dem Einheitskreis S ist. Die Beschreibung des Spektrums in diesem Fall geht zurück auf GOHBERG [28].

Doch auch dieser Spezialfall liefert schon interessante Beispiele für Spektren. Man muß dazu überlegen (mit Hilfe der Sätze der Funktionentheorie), ob und gegebenenfalls wie sich der Rand eines gegebenen Gebietes in \mathbb{C} durch eine komplexe Funktion aus der Einheitskreislinie erzeugen läßt.

Wir wollen zur Illustration einige Beispiele betrachten. Die gewünschte Stetigkeit auf dem Einheitskreis ist z. B. garantiert, wenn nur endlich viele der a_n ungleich Null sind, obige Summe also nur endlich viele Summanden hat. Wie in obigem Beispiel benutzt, ist das Bild von S unter $a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1z^1$ für reelle a_n eine (eventuell entartete) Ellipse. Ihre Hauptachsen sind parallel zur reellen bzw. zur imaginären Achse. Der Mittelpunkt der Ellipse ist bei $(a_0, 0)$, und die Halbachsen haben folgende Länge: $|a_{-1} + a_1|$ für die zur reellen Achse parallele und $|a_{-1} - a_1|$ für die zur imaginären Achse parallele. Durch Addition einer komplexen Zahl verschiebt man die Ellipse; durch Multiplikation mit einer komplexen Zahl wird die Ellipse gedreht (Drehzentrum der Nullpunkt).

Auf diese Weise sieht man: Jede Ellipse in der komplexen Ebene ist Bild von S unter $a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1z^1$ für geeignete *komplexe* a_n . Der Toeplitzoperator mit die-

sen a_n als Eintragungen hat damit als Spektrum genau das Innere der gegebenen Ellipse.

Ausgehend von einer beliebigen Ellipse kann man nun über weitere komplexe Funktionen diese beliebig deformieren. Einzige Bedingung: Die Stetigkeit der Gesamtabbildung Einheitskreis \rightarrow Ellipse \rightarrow deformierte Ellipse darf nicht verlorengehen. Wie in obigem Beispiel kann man mit einer Ellipse starten, deren eine Hauptachse vollständig auf der positiven reellen Achse liegt. Durch Anwenden der Funktion z^n deformiert sich die Ellipse. Ist der Exponent genügend groß, schneidet die resultierende Kurve die negative reelle Achse mehrmals.

Diese neue Funktion hat wieder nur endlich viele a_n ungleich Null. Der entsprechende Toeplitzoperator T hat dann ein Spektrum, das vollständig in einem Kreisring um den Nullpunkt liegt. Genauer: Es gibt $r_1 > r_2 > 0$ so, daß für jedes $\lambda \in [0, 2\pi[$ der Schnitt von $\text{spec } T$ mit dem Strahl $re^{i\lambda}$, $r \geq 0$, eine ganze Strecke enthält und vollständig in dem Kreisring um Null mit den Radien r_1 und r_2 liegt. Der auf diese Weise erzeugte Operator T hat also ein Spektrum, das zwar zusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend ist.

In obigem Beispiel wurde die Lage der Ellipse sorgfältig gewählt, so daß beim Potenzieren mit 3 die entstehende Kurve die imaginäre Achse gerade *berührt*. Das Spektrum des Toeplitzoperators, der dieser Funktion entspricht, liegt auch in einem Kreisring. Es hat aber eine „Einschnürung“ an der Stelle, wo es die negative reelle Achse schneidet. Durch Multiplikation oder Addition einer komplexen Zahl läßt sich diese Einschnürung beliebig drehen oder verschieben.

Diese Beispiele mögen genügen, um zu illustrieren, wie man vorgehen kann, wenn man Operatoren konstruieren will, die ein vorgegebenes Spektrum besitzen.

Kapitel 7

Bures-geodätische Bögen

In diesem Kapitel sollen Bures-geodätische Bögen untersucht werden. Differentialgeometrische Betrachtungen des Zustandsraumes wurden, im endlichdimensionalen Fall, schon von DITTMANN und RUDOLPH [23], [24] angestellt. Später wurde dieses Konzept von ALBERTI auf unendlichdimensionale von-Neumann-Algebren ausgedehnt [4].

Für das gesamte Kapitel setzen wir voraus, daß die von-Neumann-Algebra M in Standardform über einem Hilbertraum \mathcal{H} mit zyklischem und separierendem Vektor Ω wirkt. Wie bisher sei dann zu $\omega \in \mathcal{S}_0(M)$ der eindeutig bestimmte implementierende Vektor aus dem natürlichen positiven Kegel mit ξ_ω bezeichnet.

7.1 Definitionen

Da der Raum der normalen Zustände über einer von-Neumann-Algebra bezüglich der Bures-Metrik von sehr komplexer Struktur ist, versucht man, zwecks Vereinfachung in ihm möglichst weniger komplexe Untermengen als „natürlich“ auszuzeichnen. Wie schon in Kapitel 5 (ab Seite 49) erwähnt, läßt sich über $\|\cdot\|$ nicht für jedes Paar normaler Zustände ein Paralleltransport implementierender Vektoren definieren. Dies gilt aber, wenn beide Zustände aus einer $\|\cdot\|$ -konformen Menge stammen. Also könnten die maximalen $\|\cdot\|$ -konformen Mengen Kandidaten für eine Unterteilung des Raums der normalen Zustände sein. Eine möglichst „natürliche“ Unterteilung von $\mathcal{S}_0(M)$ in paarweise disjunkte maximale $\|\cdot\|$ -konforme

Mengen zu finden, ist jedoch nicht einfach (siehe Bemerkung 5.4).

Ein anderer Weg wurde von ALBERTI [4] beschritten. Wir führen in diesem Zusammenhang den Begriff des *Stratums* ein.

Definition 7.1. Sei $\omega \in \mathcal{S}_0(M)$ beliebig. Als *Stratum* von ω bezeichnen wir die Menge $\Gamma(\omega)$ aller zu ω wechselseitig absolutstetigen Zustände:

$$\Gamma(\omega) := \{\sigma \in \mathcal{S}_0(M) \mid \omega \approx \sigma\}$$

Bemerkung 7.1. Mit $\Gamma(\omega)$ wird also die Äquivalenzklasse von ω bezüglich \approx bezeichnet. Nach Theorem 6.3 existieren für $\omega \approx \sigma$ Operatoren $a, a' \in M_+$ mit $\sigma = \omega^a$ und $\omega = \sigma^{a'}$. Das bedeutet nach [2, Example 6.2(1)], daß $\sigma^\perp = 0$ und $\omega^\perp = 0$ und $\{\omega, \sigma\}$ folglich ein \ll -minimales Paar ist. Damit haben wir gezeigt, daß jedes Stratum eine $\|\cdot\|$ -konforme Menge ist. In der Regel ist ein Stratum jedoch keine *maximale* $\|\cdot\|$ -konforme Menge, wie man sich wie folgt überlegen kann:

Sei M der Typ- I_∞ -Faktor aus Abschnitt 2.2 und $\varphi \geq 0$ der implementierende Vektor eines *treuen* normalen Zustandes ω . Nun ist φ also ein Hilbert-Schmidt-Operator über \mathcal{H} . Ein gegenüber ω absolutstetiger treuer normaler Zustand σ wird von einem Vektor $\psi \in \mathcal{H}_{\text{HS}}$ mit $\psi = a\varphi = \varphi z$ mit $a \in \mathcal{B}(\mathcal{H})_+, z \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ implementiert. Nach [26, Theorem 2.1] folgt daraus $\mathcal{R}(a\varphi) \subseteq \mathcal{R}(\varphi)$. Soll auch umgekehrt ω gegenüber σ absolutstetig sein, folgert man analog $\mathcal{R}(\varphi) \subseteq \mathcal{R}(a\varphi)$; zusammen also $\mathcal{R}(a\varphi) = \mathcal{R}(\varphi)$. Dies veranschaulicht die wechselseitige Absolutstetigkeit auf der Ebene von Wertebereichen von Operatoren.

Die Operatoren a und φ aus Beispiel 6.1 haben jedoch nicht diese Eigenschaft, denn wenn ein $z \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit $a\varphi = \varphi z$ existierte, wäre $z = \varphi^{-1}a\varphi$. Dieser Operator ist aber unbeschränkt. Andererseits implementiert $a\varphi$ tatsächlich eine *treue* normale positive Linearform (die Normierung auf 1 wird durch einen geeigneten Faktor erreicht), und damit haben wir einen treuen normalen Zustand konstruiert, der nicht absolutstetig zu ω ist. Da alle treuen normalen Zustände eine $\|\cdot\|$ -konforme Menge bilden (siehe Bemerkung 5.4), kann das Stratum zu ω also keine maximale $\|\cdot\|$ -konforme Menge sein.

Wir wollen nun definieren, was wir unter einem geodätischen Bogen verstehen.

Definition 7.2. Seien $\omega, \sigma \in \mathcal{S}_0(M)$ und $\psi \in \mathcal{S}(\sigma)$ gleich dem speziellen ψ_0 aus (3.8), für das $d_{\mathcal{B}}(\omega, \sigma) = \|\psi - \xi_\omega\|$ ist. Als *geodätischen Bogen von ω nach σ* bezeichnen wir eine Abbildung $\mathcal{C}^{\omega, \sigma} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}_0(M), t \mapsto \omega_t$, die wie folgt definiert ist: Sei

$$\varphi_t := t\psi + \left(-t\sqrt{P(\omega, \sigma)} + \sqrt{1 - t^2(1 - P(\omega, \sigma))} \right) \xi_\omega. \quad (7.1)$$

Dann wird $\omega_t \in \mathcal{S}_0(M)$ definiert über die Forderung $\varphi_t \in \mathcal{S}(\omega_t)$.

Bemerkung 7.2. Der Faktor in 7.1 vor φ ist bedingt durch die Forderung $\|\varphi_t\| = 1$. Man hätte alternativ auch $\tilde{\varphi}_t := \lambda_t(t\psi + (1-t)\varphi)$ mit $\lambda_t := \frac{1}{\|t\psi + (1-t)\varphi\|}$ setzen können. Die von $\tilde{\varphi}_t$ implementierten Zustände bilden dann lediglich eine andere Parametrisierung des geodätischen Bogens $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$.

Aus [3, Theorem 9.8] folgt unmittelbar die Rechtfertigung der Bezeichnung „geodätisch“. Da aber einerseits in der zitierten Arbeit das Augenmerk nicht auf solchen Bögen lag und es andererseits keinen allzu großen Aufwand erfordert, werden wir dies im folgenden herleiten. Methodisch und inhaltlich halten wir uns dabei strikt an den entsprechenden Abschnitt der Vorlesung [5].

Zunächst betrachten wir Stetigkeitseigenschaften des Bures-Abstandes. Über die Beziehung (3.5) ergeben sich daraus sofort Stetigkeitseigenschaften der algebraischen Übergangswahrscheinlichkeit, siehe dazu auch [7].

Satz 7.1. *Für $\omega, \sigma \in \mathcal{S}_0(M)$ gilt stets*

$$\frac{1}{2}\|\omega - \sigma\|_1 \leq d_B(\omega, \sigma) \leq \sqrt{\|\omega - \sigma\|_1}. \quad (7.2)$$

Beweis. Aus der modularen Theorie [9], [20], [29] ist folgendes bekannt:

$$\|\xi_\omega - \xi_\sigma\|^2 \leq \|\omega - \sigma\|_1 \leq \|\xi_\omega - \xi_\sigma\| \|\xi_\omega + \xi_\sigma\|. \quad (7.3)$$

(Zum Beweis siehe z. B. [17, Theorem 2.5.31].) Daraus folgt sofort $d_B(\omega, \sigma) \leq \|\xi_\omega - \xi_\sigma\| \leq \sqrt{\|\omega - \sigma\|_1}$. Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben und $\varphi \in \mathcal{S}(\omega)$ und $\psi \in \mathcal{S}(\sigma)$ mit $\|\varphi - \psi\| < d_B(\omega, \sigma) + \varepsilon$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|\omega - \sigma\|_1 &= \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x\varphi, \varphi \rangle - \langle x\psi, \psi \rangle| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x\varphi, \varphi - \psi \rangle - \langle x(\psi - \varphi), \psi \rangle| \\ &\leq \|\varphi\| \|\varphi - \psi\| + \|\psi - \varphi\| \|\psi\| = 2\|\varphi - \psi\| < 2d_B(\omega, \sigma) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Da ε beliebig war, ist der Beweis komplett. \square

Satz 7.2. *Ein geodätischer Bogen ist eine C^∞ -Kurve.*

Beweis. Seien die Bezeichnungen wie in Definition 7.2 gewählt. Es gilt $h_{\varphi_t, \varphi} \geq 0$ für alle $0 \leq t \leq 1$, denn $h_{\psi, \varphi} \geq 0$ nach Voraussetzung und $h_{\varphi, \varphi} \geq 0$, und φ_t ist eine Linearkombination mit nichtnegativen Koeffizienten. Also ist

$$\begin{aligned} \sqrt{P(\omega_t, \omega)} &= \langle \varphi_t, \varphi \rangle = t\sqrt{P(\sigma, \omega)} - t\sqrt{P(\omega, \sigma)} + \sqrt{1 - t^2(1 - P(\omega, \sigma))} \\ &= \sqrt{1 - t^2(1 - P(\omega, \sigma))}. \end{aligned}$$

Falls $P(\omega, \sigma) \neq 1$ ist, ist $\sqrt{P(\omega_t, \omega)}$ streng monoton fallend, d. h., $\omega_t \neq \omega_s$ für alle $t \neq s$. Da $\{\omega, \sigma\}$ nach Voraussetzung \ll -minimal waren, ist $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$ unendlich oft differenzierbar. \square

Wir führen nun eine weitere Abstandsfunktion ein. Und zwar sei für beliebige $\omega, \sigma \in \mathcal{S}_0(M)$

$$d(\omega, \sigma) := \inf \left\{ \frac{1}{2} \| \langle (\cdot) \varphi, \varphi \rangle - \langle (\cdot) \psi, \psi \rangle \|_1 \mid \varphi \in \mathcal{S}(\omega), \psi \in \mathcal{S}(\sigma) \right\}, \quad (7.4)$$

wobei (\cdot) jeweils ganz $B(\mathcal{H})$ durchläuft.¹

Bevor wir zeigen, daß der Begriff „Abstand“ gerechtfertigt ist, wollen wir diese Funktion näher untersuchen. Wir benötigen zunächst folgendes Lemma:

Lemma. *Seien $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ Einheitsvektoren und p bzw. q die eindimensionalen Orthoprojektoren auf $[\xi]$ bzw. $[\eta]$. Für $r, s > 0$ gilt immer:*

$$\|rp - sq\|_1 = \sqrt{(r+s)^2 - 4rs|\langle \xi, \eta \rangle|^2}$$

Beweis. Wir setzen $x := rp - sq = ae + be'$, wobei letzteres die Spektraldarstellung sei mit $e \perp e'$ und $a \geq 0 \geq b$. Es ist $\|x\|_1 = a - b$ und $r - s = \text{tr } x = a + b$ und folglich

$$\begin{aligned} \text{tr } x^2 &= a^2 + b^2 = r^2 + s^2 - 2rs \text{tr } pq = (r-s)^2 + 2rs - 2rs|\langle \xi, \eta \rangle|^2 \\ &= (a+b)^2 + 2rs - 2rs|\langle \xi, \eta \rangle|^2 \end{aligned}$$

und damit $0 = 2ab + 2rs - 2rs|\langle \xi, \eta \rangle|^2$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|x\|_1^2 &= (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = r^2 + s^2 - 2rs|\langle \xi, \eta \rangle|^2 + 2rs - 2rs|\langle \xi, \eta \rangle|^2 \\ &= (r+s)^2 - 4rs|\langle \xi, \eta \rangle|^2. \end{aligned}$$

\square

Damit gilt für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$:

$$\| \langle (\cdot) \varphi, \varphi \rangle - \langle (\cdot) \psi, \psi \rangle \|_1 = \sqrt{(\|\varphi\|^2 + \|\psi\|^2)^2 - 4|\langle \varphi, \psi \rangle|^2}. \quad (7.5)$$

Begründung: Setze $r := \|\varphi\|^2$ und $s := \|\psi\|^2$.

¹Man beachte, daß in [2] bereits ein Abstand wie in (7.4), allerdings *ohne* den Faktor $\frac{1}{2}$, definiert wurde. Dieser Abstand wurde dort – abweichend von der in der Literatur gebräuchlichen Bezeichnungsweise – Bures-Abstand genannt.

Damit haben wir folgende Formel für d :

$$d(\omega, \sigma) = \sqrt{1 - P(\omega, \sigma)}. \quad (7.6)$$

(Man beachte dabei, daß nach Voraussetzung ω, σ Zustände sind, also $\|\omega\|_1 = \|\sigma\|_1 = 1$ gilt.) Nach (3.5) ist $d_B(\omega, \sigma) = \sqrt{2} \sqrt{1 - \sqrt{P(\omega, \sigma)}}$. Damit gilt

$$d(\omega, \sigma) = \sqrt{1 - \sqrt{P(\omega, \sigma)}} \sqrt{1 + \sqrt{P(\omega, \sigma)}} = d_B(\omega, \sigma) \sqrt{\frac{1 + \sqrt{P(\omega, \sigma)}}{2}}$$

und unter nochmaligem Einsetzen von (3.5)

$$d(\omega, \sigma) = d_B(\omega, \sigma) \sqrt{1 - \frac{d_B(\omega, \sigma)^2}{4}}. \quad (7.7)$$

Bemerkung 7.3. Wegen (7.5) in Verbindung mit Bemerkung 3.3 sieht man unmittelbar, daß auch das Infimum in (7.4) stets angenommen wird, und zwar wieder mit denselben Vektoren wie in Theorem 3.3.

Nun wollen wir zeigen, daß der Begriff „Abstand“ gerechtfertigt ist. Sei im folgenden für $\varphi \in \mathcal{H}$ mit f_φ die Vektorform $\langle (\cdot)\varphi, \varphi \rangle$ über $B(\mathcal{H})$ bezeichnet. Seien $\omega, \sigma, \nu \in \mathcal{S}_0(M)$ beliebig. Für gegebenes $\varepsilon > 0$ existieren dann $\varphi \in \mathcal{S}(\omega), \psi \in \mathcal{S}(\sigma), \eta \in \mathcal{S}(\nu)$ mit

$$\frac{1}{2} \|f_\varphi - f_\psi\|_1 \leq d(\omega, \sigma) + \varepsilon \text{ und } \frac{1}{2} \|f_\psi - f_\eta\|_1 \leq d(\sigma, \nu) + \varepsilon.$$

Wegen der Dreiecksungleichung für die Funktionalnorm ist dann

$$\frac{1}{2} \|f_\varphi - f_\eta\|_1 \leq \frac{1}{2} \|f_\varphi - f_\psi\|_1 + \frac{1}{2} \|f_\psi - f_\eta\|_1 \leq d(\omega, \sigma) + d(\sigma, \nu) + 2\varepsilon.$$

Da ε beliebig klein sein kann, gilt

$$d(\omega, \nu) = \inf \left\{ \frac{1}{2} \|f_\varphi - f_\eta\|_1 \mid \varphi \in \mathcal{S}(\omega), \eta \in \mathcal{S}(\nu) \right\} \leq d(\omega, \sigma) + d(\sigma, \nu),$$

d. h., die Dreiecksungleichung ist gezeigt. Die Symmetrie von d in beiden Argumenten ist offensichtlich und ebenso $d(\omega, \omega) = 0$. Sei nun $d(\omega, \sigma) = 0$ für $\omega, \sigma \in \mathcal{S}_0(M)$. Wegen Bemerkung 7.3 existieren dann $\varphi \in \mathcal{S}(\omega), \psi \in \mathcal{S}(\sigma)$ mit $\|f_\varphi - f_\psi\|_1 = 0$. Daraus folgt $\varphi = z\psi$ mit einer komplexen Zahl z vom Betrag 1. Dann ist aber $\omega = \sigma$. Damit ist alles gezeigt, und die Bezeichnung „Abstand“ für d ist gerechtfertigt.

Sei nun \mathcal{C} eine beliebige stetige Kurve in $\mathcal{S}_0(M)$. Mit $\theta(\mathcal{C})$ sei die Kurvenlänge bezüglich d bezeichnet, mit $\theta_B(\mathcal{C})$ die Länge bezüglich d_B .

Satz 7.3. Falls \mathcal{C} kompakt ist, gilt $\theta(\mathcal{C}) = \theta_{\mathbb{B}}(\mathcal{C})$.

Beweis. Nach (7.7) ist $\frac{d(\omega, \sigma)}{d_{\mathbb{B}}(\omega, \sigma)} = \sqrt{1 - \frac{d_{\mathbb{B}}(\omega, \sigma)^2}{4}} \leq 1$ für beliebige Zustände auf \mathcal{C} und damit $\theta(\mathcal{C}) \leq \theta_{\mathbb{B}}(\mathcal{C})$. Andererseits ist wegen der Kompaktheit \mathcal{C} gleichmäßig stetig in d_1 (dem durch die Funktionalnorm induzierten Abstand), d. h., zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta(\varepsilon) > 0$ so, daß $\|\omega_t - \omega_s\|_1 < \varepsilon^2$ für alle $|t - s| < \delta(\varepsilon)$ ist. Damit ist für diese t, s auch $d_{\mathbb{B}}(\omega_t, \omega_s) \leq \sqrt{\|\omega_t - \omega_s\|_1} < \varepsilon$ und damit $\frac{d(\omega_t, \omega_s)}{d_{\mathbb{B}}(\omega_t, \omega_s)} \geq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$, woraus schließlich $\theta(\mathcal{C}) \geq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \theta_{\mathbb{B}}(\mathcal{C})$ folgt. \square

Wir haben damit gezeigt, daß *infinitesimal* die Abstände d und $d_{\mathbb{B}}$ gleich sind. Die kürzesten Kurven bezüglich d sind folglich immer auch die kürzesten Kurven bezüglich $d_{\mathbb{B}}$ und umgekehrt. Der neue Abstand d wurde lediglich deshalb eingeführt, weil man mit ihm wesentlich einfacher rechnen kann als mit $d_{\mathbb{B}}$.

Theorem 7.4. Für alle stetigen Kurven \mathcal{C} in $\mathcal{S}_0(M)$ zwischen ω und σ gilt $\theta(\mathcal{C}^{\omega, \sigma}) \leq \theta(\mathcal{C})$.

Das Theorem rechtfertigt also die Bezeichnung „geodätischer Bogen“ für $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$. Zum Beweis benötigen wir noch einige Sätze.

Satz 7.5. Sei eine stetige Kurve $\mathcal{C}_{\Phi} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}_0(M), t \mapsto \nu_t$ wie folgt definiert: Sei $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}, t \mapsto \psi_t$ stetig mit Einheitsvektoren ψ_t und $\psi_0 \in \mathcal{S}(\omega), \psi_1 \in \mathcal{S}(\sigma)$. Dann sei ν_t jeweils derjenige Zustand, der von ψ_t implementiert wird. Es gilt

$$(1) \theta(\mathcal{C}^{\omega, \sigma}) = \arcsin d(\omega, \sigma) \text{ und}$$

$$(2) \theta(\mathcal{C}^{\omega, \sigma}) \leq \overline{\lim}_{\tau = \{t_0, \dots, t_{n_{\tau}}\}} \sum_{i=0}^{n_{\tau}-1} \|\psi_{t_i} - \psi_{t_{i+1}}\|,$$

wobei τ das gerichtete Netz aller endlichen Partitionen des Einheitsintervalls durchläuft.

Beweis. Seien mit ω_t und φ_t die entsprechenden Zustände bzw. implementierenden Vektoren von $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$ gemäß Definition 7.2 bezeichnet. Es gilt $d_{\mathbb{B}}(\omega_t, \omega_s) = \|\varphi_t - \varphi_s\|$ wegen $h_{\varphi_t, \varphi_s} \geq 0$ und damit $\theta(\mathcal{C}^{\omega, \sigma}) = \theta_{\mathbb{B}}(\mathcal{C}^{\omega, \sigma}) = \overline{\lim}_{\tau} \sum \|\varphi_{t_i} - \varphi_{t_j}\|$.

Sei $b(t) := -t\sqrt{P(\omega, \sigma)} + \sqrt{1 - t^2(1 - P(\omega, \sigma))}$. Wir betrachten $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \vec{r}_t := (b(t) + t\sqrt{P(\omega, \sigma)}, t\sqrt{1 - P(\omega, \sigma)}, 0)$. Dies ist eine stetige differenzierbare Kurve auf S^2 . Man überzeugt sich schnell davon, daß sie die Punkte $(1, 0, 0)$ und $(\sqrt{P(\omega, \sigma)}, 1 - \sqrt{P(\omega, \sigma)}, 0)$ auf einem Großkreis verbindet. Ihre euklidische Länge ist $l_2(\gamma) = \arcsin \sqrt{1 - P(\omega, \sigma)} = \arcsin d(\omega, \sigma)$.

Sei $\eta \in \mathcal{H}$ der Einheitsvektor mit $\eta \perp \xi_\sigma$ und $\psi = \sqrt{P(\omega, \sigma)}\xi_\omega + \sqrt{1 - P(\omega, \sigma)}\eta$, wobei ψ der Vektor aus Definition 7.2 ist. Dann ist $\omega_t = (b(t) + t\sqrt{P(\omega, \sigma)})\xi_\omega + t\sqrt{1 - P(\omega, \sigma)}\eta$, woraus zusammen mit dem oben Genannten $\theta(\mathcal{C}^{\omega, \sigma}) = l_2(\gamma) = \arcsin d(\omega, \sigma)$ folgt.

Sei nun γ' die euklidisch kürzeste Kurve auf S^2 zwischen $(1, 0, 0)$ und $(|\langle \psi_1, \psi_0 \rangle|, \sqrt{1 - |\langle \psi_1, \psi_0 \rangle|^2}, 0)$. Wegen $\psi_0 \in \mathcal{S}(\omega)$ und $\psi_1 \in \mathcal{S}(\sigma)$ ist $|\langle \psi_1, \psi_0 \rangle| \leq \sqrt{P(\omega, \sigma)}$. Deshalb ist $l_2(\gamma') = \arcsin \sqrt{1 - |\langle \psi_1, \psi_0 \rangle|^2} \geq l_2(\gamma)$.

Wir wählen nun einen Einheitsvektor η' mit $\eta' \perp \psi_0$ und $\psi_1 = \langle \psi_1, \psi_0 \rangle \psi_0 + \sqrt{1 - |\langle \psi_1, \psi_0 \rangle|^2} \eta'$. Dann existiert eine stetige Familie $\{\eta_t\} \subseteq \mathcal{H}$ mit $\psi_t = x(t)\psi_0 + y(t)\eta' + \eta_t$ und $\eta_t \perp \psi_0$ sowie $\eta_t \perp \eta'$.

Sei $\gamma'' : [0, 1] \rightarrow S^2, t \mapsto \vec{r}_t'' := (|x(t)|, |y(t)|, \|\eta_t\|)$. Diese Kurve verbindet auch die Punkte $(1, 0, 0)$ und $(|\langle \psi_1, \psi_0 \rangle|, \sqrt{1 - |\langle \psi_1, \psi_0 \rangle|^2}, 0)$, kann aber nicht kürzer als die Geodätische γ' sein. Also gilt $l_2(\gamma'') \geq l_2(\gamma')$.

Für alle $t, s \in [0, 1]$ ist

$$\begin{aligned} \|\psi_t - \psi_s\|^2 &= |x(t) - x(s)|^2 + |y(t) - y(s)|^2 + \|\eta_t - \eta_s\|^2 \\ &\geq (|x(t)| - |x(s)|)^2 + (|y(t)| - |y(s)|)^2 + \|\|\eta_t\| - \|\eta_s\|\|^2 \\ &= \|\vec{r}_t'' - \vec{r}_s''\|^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\overline{\lim}_\tau \sum \|\varphi_{t_i} - \varphi_{t_{i+1}}\| \geq l_2(\gamma'') \geq l_2(\gamma') \geq l_2(\gamma) = \theta(\mathcal{C}^{\omega, \sigma})$. \square

Satz 7.6. Für $\omega, \sigma \in \mathcal{S}_0(M)$ sei $\mathfrak{d}(\omega, \sigma) := \arcsin d(\omega, \sigma)$. Es gilt: \mathfrak{d} ist eine Abstandsfunktion auf $\mathcal{S}_0(M)$.

Beweis. Es ist $\mathfrak{d}(\omega, \sigma) = 0 \Leftrightarrow d(\omega, \sigma) = 0 \Leftrightarrow \omega = \sigma$. Es reicht also, die Dreiecksungleichung für \mathfrak{d} zu zeigen. Weil \mathfrak{d} bezüglich d und damit auch bezüglich d_1 (dem von der Funktionalnorm induzierten Abstand) stetig ist (die Äquivalenz von d und d_1 folgt aus (7.2) und (7.7)) und die treuen Zustände dicht in $\mathcal{S}_0(M)$ liegen, genügt es, die Dreiecksungleichung für *treue* Zustände zu zeigen.

Seien nun $\omega, \sigma, \nu \in \mathcal{S}_0(M)$ treu. Seien $P' := P(\omega, \sigma)$ und $P'' := P(\sigma, \nu)$ sowie $\psi' \in \mathcal{S}(\sigma)$ das spezielle ψ_0 aus (3.8) bezüglich ξ_ω und $\psi'' \in \mathcal{S}(\nu)$ das spezielle ψ_0 aus (3.8) bezüglich ξ_σ . Es existiert ein $w \in M'$ mit $w^*w = 1$ und $\psi' = w\xi_\sigma$. Wir definieren eine Abbildung $\Phi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}, t \mapsto \varphi_t$ mit $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\omega)$ und $\varphi_1 \in \mathcal{S}(\nu)$ wie folgt:

$$\varphi_t := \begin{cases} 2t\psi' + b'(2t)\xi_\omega & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ w((2t-1)\psi'' + b''(2t-1)\xi_\sigma) & \text{für } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

mit $b'(s) := -s\sqrt{P'} + \sqrt{1-s^2(1-P')}$ und $b''(s) := -s\sqrt{P''} + \sqrt{1-s^2(1-P'')}$. Sei nun ω_t jeweils der von φ_t implementierte Zustand und $\mathcal{C} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}_0(M), t \mapsto \omega_t$. Dann ist $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\omega, \sigma} \cup \mathcal{C}^{\sigma, \nu}$. Nach Satz 7.5 ist

$$\begin{aligned} \mathfrak{d}(\omega, \nu) = \theta(\mathcal{C}^{\omega, \nu}) &\leq \overline{\lim}_\tau \sum \|\varphi_{t_i} - \varphi_{t_{i+1}}\| \\ &\leq \overline{\lim}_{[0, \frac{1}{2}]} \sum \|\varphi_{t_i} - \varphi_{t_{i+1}}\| + \overline{\lim}_{[\frac{1}{2}, 1]} \sum \|\varphi_{t_j} - \varphi_{t_{j+1}}\| \\ &= \theta(\mathcal{C}^{\omega, \sigma}) + \theta(\mathcal{C}^{\sigma, \nu}) = \mathfrak{d}(\omega, \sigma) + \mathfrak{d}(\sigma, \nu). \end{aligned}$$

□

Lemma. Sei $\mathcal{C} : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}_0(M), t \mapsto \nu_t$ beliebig. Es gilt $\theta(\mathcal{C}) = \overline{\lim}_\tau \sum \theta(\mathcal{C}^{\nu_{t_i}, \nu_{t_{i+1}}})$.

Beweis. Für $x \leq \frac{1}{2}$ ist $0 \leq \arcsin x - x \leq \frac{x^3}{1-x^2} \leq 2x^3$. Damit ist $0 \leq \theta(\mathcal{C}^{\nu_t, \nu_s}) - d(\nu_t, \nu_s) \leq 2d(\nu_t, \nu_s)^3$ für alle t, s mit hinreichend kleinem Abstand. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von \mathcal{C} über $[0, 1]$ gilt

$$0 \leq \sum \theta(\mathcal{C}^{\nu_{t_i}, \nu_{t_{i+1}}}) - \sum d(\nu_{t_i}, \nu_{t_{i+1}}) \leq 2 \left(\sum d(\nu_{t_i}, \nu_{t_{i+1}}) \right) \sup d(\nu_{t_i}, \nu_{t_{i+1}})^2 \rightarrow 0,$$

und damit ist das Lemma bewiesen. □

Beweis von Theorem 7.4. Aus den vorangehenden Sätzen folgt

$$\theta(\mathcal{C}_\Phi) = \overline{\lim} \sum \theta(\mathcal{C}^{\nu_{t_i}, \nu_{t_{i+1}}}) = \overline{\lim} \sum \mathfrak{d}(\nu_{t_i}, \nu_{t_{i+1}}) \geq \mathfrak{d}(\omega, \sigma) = \theta(\mathcal{C}^{\omega, \sigma}),$$

und damit ist das Theorem bewiesen. □

Zusammen mit Satz 7.3 ist damit die Bezeichnung *(Bures-)geodätischer Bogen* für $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$ gerechtfertigt. Der geodätische Abstand zwischen zwei Zuständen wird dabei gerade von der Abstandsfunktion \mathfrak{d} angegeben. Man beachte jedoch, daß aus obigem Beweis *nicht* folgt, daß ein geodätischer Bogen der einzige Bogen kürzester Länge ist. Im allgemeinen existieren mehrere kürzeste Bögen, von denen $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$ einer ist.

7.2 Ergebnisse

In diesem Abschnitt werden wir die Ergebnisse aus Kapitel 6 anwenden. Zu diesem Zweck stellen wir jetzt einen Zusammenhang zwischen Radon-Nikodym-Operatoren und dem Stratum zu einem treuen normalen Zustand her. Es gilt folgender Satz:

Satz 7.7. *Sei $\omega \in \mathcal{S}_0(M)$ ein beliebiger treuer Zustand. Das Stratum $\Gamma(\omega)$ besteht genau aus denjenigen Zuständen, die von Vektoren $a\xi_\omega$ implementiert werden, wobei $a \in M_+$ ein umkehrbarer Radon-Nikodym-Operator gemäß Definition 6.2 ist.*

Beweis. In Bemerkung 6.4 wurde schon abgeleitet, daß für einen umkehrbaren Radon-Nikodym-Operator $a \in M_+$ die Beziehung $\omega \approx \omega^a$ gilt.

Umgekehrt folgt aus $\sigma \ll \omega$ für einen weiteren treuen normalen Zustand σ nach Theorem 6.3, daß dann ein $a \in M_+$ mit $\sigma = \omega^a$ existiert. Wie vor Definition 6.2 argumentiert, bedeutet dies, daß a ein Radon-Nikodym-Operator ist. Analog, wenn $\omega \ll \sigma$ ist, gibt es ein $a' \in M_+$ mit $\omega = \sigma^{a'}$. Damit existieren $z, z' \in M'$ mit $a\xi_\omega = z\xi_\sigma$ und (da dieser Vektor σ implementiert) $a'(a\xi_\omega) = z'(z\xi_\sigma)$. Nun gilt für $a\xi_\omega \in \mathcal{S}(\sigma)$ sowohl $a\xi_\omega \parallel \xi_\sigma$ als auch $a\xi_\omega \parallel a'a\xi_\omega$. Beide Vektoren auf der rechten Seite implementieren ω . Da ω und σ beide treu sind, bilden sie ein \ll -minimales Paar. Wegen der Eindeutigkeit der Relation \parallel für \ll -minimale Paare muß folglich $a'a\xi_\omega = \xi_\sigma$ sein. Weil $p(\xi_\omega) = \mathbb{1}$ und $p'(\xi_\sigma) = \mathbb{1}$ ist, folgt $a'a = \mathbb{1}$ und $z'z = \mathbb{1}$. Aus Symmetriegründen ist auch $zz' = \mathbb{1}$, und damit ist gezeigt, daß sowohl $a \in M_+$ als auch $z \in M'$ invertierbar sind. \square

Nun formulieren wir das Hauptproblem, mit dem wir uns im Rest dieses Kapitels beschäftigen wollen.

Problem. Es seien im weiteren folgende Vereinbarungen getroffen: ω und σ seien zwei wechselseitig absolutstetige *treue* normale Zustände über M . Wir betrachten den geodätischen Bogen $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$ zwischen ω und σ und fragen, unter welchen Umständen dieser Bogen vollständig im Stratum $\Gamma(\omega)$ verläuft oder dieses verläßt. Äquivalent formuliert: Unter welchen Umständen ist das Stratum $\Gamma(\omega)$ bezüglich der Bures-Geometrie geodätisch konvex?

Für Riemannsche Flächen wurden ähnliche Fragen bereits von WHITEHEAD [61], [62] untersucht. In der ersten Arbeit wird gezeigt, daß „einfache konvexe“ Umgebungen zu jedem nichtsingulären Punkt existieren. Dabei bedeutet „einfach“, daß nicht mehr als eine, und „konvex“, daß wenigstens eine Geodätische beliebige zwei Punkte verbindet. In der zweiten Arbeit wird die Frage untersucht, wann Gebiete von den Geodätischen durch einen gegebenen Punkt vollständig überdeckt werden.

Analoge Fragen – wie z. B. die nach der „Konvexität“ von Strata im Sinne der Bures-Metrik – lassen sich nun auch für den Zustandsraum stellen. Da im Endlichdimensionalen die Strata geodätisch konvex sind, bestand die Hoffnung, daß dies auch für unendlichdimensionale von-Neumann-Algebren der Fall sein könnte. In diesem Fall wären sie Kandidaten für eine geeignete, zur Bures-Geometrie kompatible Unterteilung des Zustandsraumes.

Um das Problem zu bearbeiten, werden wir unmittelbar die Sätze aus Kapitel 6 anwenden, indem wir sie in die „Sprache“ der geodätischen Bögen übersetzen.

In unserem speziellen Fall ist der Vektor ψ aus Definition 7.2 gleich $a\xi_\omega$, wobei a der umkehrbare Radon-Nikodym-Operator aus Theorem 6.3 ist. Der Zustand ω_t auf dem geodätischen Bogen zwischen ω und σ wird also von dem Vektor

$$\varphi_t := ta\xi_\omega + b(t)\xi_\omega = (ta + b(t)\mathbb{1})\xi_\omega \quad (7.8)$$

mit $b(t) := -t\sqrt{P(\omega, \sigma)} + \sqrt{1 - t^2(1 - P(\omega, \sigma))}$ implementiert.

Wie schon erwähnt, ist die Gestalt des Faktors $b(t)$ bedingt durch die Forderung $\|\varphi_t\| = 1$ und damit $\|\omega_t\|_1 = 1$ ist. Man kann sich leicht überlegen, daß über

$$\varphi_\lambda := c_\lambda(\lambda a + (1 - \lambda)\mathbb{1})\xi_\omega \quad (7.9)$$

mit $c_\lambda := \|(\lambda a + (1 - \lambda)\mathbb{1})\xi_\omega\|^{-1}$, wobei λ von 0 bis 1 läuft, eine andere Parametrisierung desselben Bogens definiert wird. Wo es uns gegeben erscheint, werden wir auch von dieser Form Gebrauch machen. Wir halten uns dabei an folgende Konvention: Heißt der Index t , ist der Bogen über (7.8) definiert; heißt er λ , beziehen wir uns auf die Form von (7.9).

Satz 7.8. *Sei $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$ über (7.8) definiert. Für jeden Zustand ω_t auf $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$ gilt $\omega_t \ll \omega$ und $\omega_t \ll \sigma$.*

Beweis. Es gilt: a und $\mathbb{1}$ sind Radon-Nikodym-Operatoren für ω . Wegen $t \geq 0$ und $b(t) \geq 0$ für alle Punkte auf dem Bogen ist nach Satz 6.5 auch $ta + b(t)\mathbb{1}$ ein Radon-Nikodym-Operator für ω . Nach Bemerkung 6.4 gilt folglich $\omega_t \ll \omega \approx \sigma$. \square

Die Aussage des Satzes ist: Alle Zustände auf dem Bogen sind zu den Endpunkten absolutstetig. Es stellt sich die Frage, ob auch die umgekehrte Relation gilt. Relativ schnell sieht man nur, daß letzteres wenigstens für diejenigen Zustände auf dem Bogen gilt, die nahe genug an den Endpunkten liegen.

Satz 7.9. *Sei $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$ über (7.9) definiert. Es existieren $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < 1$ so, daß für alle $\lambda \in [0, \lambda_1[\cup]\lambda_2, 1]$ die Zustände ω_t auf $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$ im Stratum $\Gamma(\omega)$ liegen.*

Beweis. Die Aussage des Satzes folgt unmittelbar aus Satz 6.7 und Bemerkung 6.4. \square

Bemerkung 7.4. Aus dem Beweis von Satz 6.7 kann man konkret ablesen, für welche Werte von λ_1 und λ_2 die Aussage des Satzes in jedem Fall gilt, und zwar für $\lambda_1 = \frac{1}{1 + \|z\|}$ und $\lambda_2 = \frac{1}{1 + \|z^{-1}\| - 1}$. Je kleiner $\|z\|$ bzw. $\|z^{-1}\|$ ist, desto weiter kann man sich also auf $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$ von ω bzw. σ entfernen, ohne dabei das Stratum $\Gamma(\omega)$ zu verlassen. Möglicherweise verläßt man auch „hinter“ diesen konkreten Schranken das Stratum nicht; darüber liefert der Beweis aber keine Aussage.

Nun untersuchen wir, was man für Aussagen gewinnen kann, wenn man annimmt, daß der geodätische Bogen das Stratum an wenigstens *einer* Stelle verläßt.

Satz 7.10. *Sei $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$ über (7.9) definiert. Möge für ein $\lambda_0 \in]0, 1[$ der Zustand ω_{λ_0} nicht im Stratum $\Gamma(\omega)$ liegen, d. h., es gilt $\omega_{\lambda_0} \not\ll \omega$. Dann gilt $\omega_{\lambda_0} \not\ll \omega_\lambda$ für alle $\lambda \in [0, 1] \setminus \{\lambda_0\}$.*

Beweis. Der Zustand ω_{λ_0} wird von dem Vektor $\varphi_{\lambda_0} = a_{\lambda_0}\xi_\omega$ mit $a_{\lambda_0} := c_{\lambda_0}(\lambda_0 a + (1 - \lambda_0)\mathbb{1})$ implementiert. Dabei gilt $a_{\lambda_0}\xi_\omega = z_{\lambda_0}\xi_\omega$ mit $z_{\lambda_0} := c_{\lambda_0}(\lambda_0 z + (1 - \lambda_0)\mathbb{1})$, und $a_{\lambda_0} \in M_+$ ist invertierbar, $z_{\lambda_0} \in M'$ dagegen nicht.

Der geodätische Bogen $\mathcal{C}^{\omega_{\lambda_0}, \omega}$ besteht aus Zuständen ω'_μ , die durch Vektoren der Gestalt $c'_\mu(\mu a_{\lambda_0}^{-1} + (1 - \mu)\mathbb{1})\varphi_{\lambda_0}$ implementiert werden. (Die c'_μ sind dabei wieder die Vorfaktoren, die Norm 1 liefern.) Denn es müssen wegen der Eigenschaften geodätischer Bögen dieselben Zustände wie die auf $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$ zwischen ω und ω_{λ_0} sein (wenn auch der Bogen dabei in der umgekehrten Richtung durchlaufen wird).

Angenommen, für ein $\mu \in]0, 1]$ gilt $\omega_{\lambda_0} = \omega'_0 \gg \omega'_\mu$. Das hieße, es existiert ein $z' \in M'$ mit $c'_\mu(\mu a_{\lambda_0}^{-1} + (1 - \mu)\mathbb{1})\varphi_{\lambda_0} = z'\varphi_{\lambda_0}$.

Daraus folgte aber $a_{\lambda_0}^{-1}\varphi_{\lambda_0} = (\frac{1}{c'_\mu\mu}z' - \frac{1-\mu}{\mu}\mathbb{1})\varphi_{\lambda_0}$ oder $\omega_{\lambda_0} \gg \omega$, was im Widerspruch zu der Voraussetzung im Satz steht.

Analog verfährt man mit dem Abschnitt zwischen ω_{λ_0} und σ auf $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$ durch Vertauschen der Rollen von ω und σ . \square

Bemerkung 7.5. Aus dem Satz folgt sofort: Für je zwei Zustände $\omega_{\lambda_0}, \omega_{\lambda_1}$ auf $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$ mit $\omega_{\lambda_0} \not\gg \omega$, $\omega_{\lambda_1} \not\gg \omega$ gilt dann immer $\omega_{\lambda_0} \not\gg \omega_{\lambda_1}$ und $\omega_{\lambda_1} \not\gg \omega_{\lambda_0}$. Mit anderen Worten: Verläßt $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$ an mehr als einem Punkt das Stratum $\Gamma(\omega)$, so erfüllen die Zustände außerhalb untereinander überhaupt keine Absolutstetigkeitsbeziehung mehr.

Nun wollen wir Klassen von Fällen angeben, in denen sich die Frage in unserem obigen Problem entscheiden läßt. Zu diesem Zweck beschränken wir uns ab jetzt darauf, daß M ein Typ-I-Faktor ist, und verwenden wieder die Hilbert-Schmidt-Darstellung aus Abschnitt 2.2.

Satz 7.11. *Ist M ein Typ-I_n-Faktor mit $n \in \mathbb{N}$, so ist das Stratum $\Gamma(\omega)$ für treues $\omega \in \mathcal{S}_0(M)$ geodätisch konvex, d. h., kein geodätischer Bogen zwischen ω und σ mit $\omega \approx \sigma$ verläßt $\Gamma(\omega)$.*

Beweis. Seien die Bezeichnungen wie oben gewählt. Es bleibt einzig zu zeigen, daß $\lambda z + (1 - \lambda)\mathbb{1}$ für $0 \leq \lambda \leq 1$ invertierbar ist. Im endlichdimensionalen Fall folgt das aber sofort aus der Invertierbarkeit von z . \square

Mehr ist zum endlichdimensionalen Fall nicht zu sagen. Es verbleibt also der Fall, daß M ein Typ-I_∞-Faktor ist. Die folgenden Sätze beziehen sich auf diesen Fall.

Theorem 7.12. *Sei $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$ ein geodätischer Bogen, wobei $\sigma = \omega^a$ ist und $a \in M_+$ eine spezielle Blockgestalt wie in der Voraussetzung von Theorem 6.9 hat. Dann gilt: Ist $\omega \approx \sigma$, liegt ganz $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$ im Stratum $\Gamma(\omega)$.*

Beweis. Die Aussage folgt unmittelbar aus Theorem 6.9 in Verbindung mit Bemerkung 6.4. \square

Theorem 7.13. *Sei $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$ ein geodätischer Bogen, wobei $\sigma = \omega^a$ ist und $a \in M_+$ nur endlich viele verschiedene Spektralwerte hat (wie in der Voraussetzung von*

Satz 6.10). Dann folgt aus $\sigma \ll \omega$ sofort $\omega \approx \sigma$, und ganz $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$ liegt im Stratum $\Gamma(\omega)$.

Beweis. Nach Theorem 6.11 folgt $\omega \approx \sigma$ aus $\sigma \ll \omega$. Außerdem erfüllen alle Eigenvektoren q_j die Voraussetzung von Satz 6.10. Mit ihnen gilt das aber auch für alle Operatoren der Form $\lambda a + (1 - \lambda)\mathbb{1}$, d. h., es gilt $\omega_\lambda \approx \omega$ für alle $0 \leq \lambda \leq 1$. \square

Nach diesen Sätzen, die aussagen, wann die Frage in obigem Problem positiv beantwortet werden kann, nun ein Gegenbeispiel.

Theorem 7.14. *In einem Typ- I_∞ -Faktor M gibt es treue Zustände $\omega, \sigma \in \mathcal{S}_0(M)$ mit $\omega \approx \sigma$, für die der geodätische Bogen $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$ das Stratum $\Gamma(\omega)$ verläßt.*

Beweis. Wir definieren $\varphi \in \mathcal{H}$, $\omega \in \mathcal{S}_0(M)$, $a \in M_+$ und $z \in M'$ wie in Abschnitt 6.4.2. Sei $\sigma := \omega^a$. Dann werden die Zustände auf $\mathcal{C}^{\omega, \sigma}$ von folgenden Vektoren implementiert: $c_\lambda(\lambda a + (1 - \lambda)\mathbb{1})\varphi = c_\lambda(\lambda z + (1 - \lambda)\mathbb{1})\varphi$. Es gilt aber nach Abschnitt 6.4.3 für $\lambda_0 := \frac{1}{(\frac{27}{7})^3 + 1}$, daß $\lambda_0 z + (1 - \lambda_0)\mathbb{1} \in M'$ nicht invertierbar ist. Damit ist $\omega_{\lambda_0} \not\approx \omega$. \square

Bemerkung 7.6. Das oben angegebene Beispiel hat die Besonderheit, daß *genau ein* Punkt des geodätischen Bogens nicht zum Stratum gehört. Wie schon in Abschnitt 6.4.2 gesagt, kann man nun mit Hilfe von Toeplitzoperatoren beliebige Beispiele konstruieren, bei denen z. B. ein oder auch mehrere disjunkte Abschnitte des Bogens nicht mehr zum Stratum gehören. Insbesondere ist damit gezeigt, daß ein Stratum im unendlich-dimensionalen Fall im allgemeinen nicht geodätisch konvex ist.

Quellenverzeichnis

- [1] Peter M. Alberti. A Note on the Transition Probability over C^* -Algebras. *Lett. Math. Phys.*, **7**:25–32, 1983. MR 84c:46065.
- [2] Peter M. Alberti. A Study on the Geometry of Pairs of Positive Linear Forms, Algebraic Transition Probability and Geometrical Phase over Non-Commutative Operator Algebras (I). *Z. Anal. Anw.*, **11**(3):293–334, 1992. MR 95h:46078.
- [3] Peter M. Alberti. A Study on the Geometry of Pairs of Positive Linear Forms, Algebraic Transition Probability and Geometrical Phase over Non-Commutative Operator Algebras (II). *Z. Anal. Anw.*, **11**(4):455–488, 1992. MR 95h:46079.
- [4] Peter M. Alberti. Bures' Metric on the Normal State Space of von-Neumann Algebras and Differentiability. *Universität Leipzig, NTZ-Preprint 17/1997*, 1997. <http://www.uni-leipzig.de/~ntz/abs/papers/ntz1797.tex>.
- [5] Peter M. Alberti. Geometrie von Zustandsräumen und Radon-Nikodym-Theoreme. Vorlesung an der Universität Leipzig, April–Juli 2000.
- [6] Peter M. Alberti and Gregor Peltri. On Bures Distance over Standard-Form von-Neumann Algebras. [arXiv:math.OA/0008164](https://arxiv.org/abs/math.OA/0008164), 2000.
- [7] Peter M. Alberti and Armin Uhlmann. On Bures Distance and $*$ -Algebraic Transition Probability between Inner Derived Positive Linear Forms over W^* -Algebras. *Acta Appl. Math.*, **60**:1–37, 2000. MR 2001e:46102.
- [8] Huzihiro Araki. Bures Distance Function and a Generalization of Sakai's Non-commutative Radon-Nikodym Theorem. *Publ. RIMS*, **8**(2):335–362, 1972. MR 48 #12072.

- [9] Huzihiro Araki. Some properties of modular conjugation operator of von Neumann algebras and a non-commutative Radon-Nikodym theorem with a chain rule. *Pacific J. Math.*, **50**:309–354, 1974. MR 50 #2929.
- [10] Charles S. Ballantine. Products of Positive Definite Matrices. III. *J. Algebra*, **10**:174–182, 1968. MR 38 #5816.
- [11] Charles S. Ballantine. Products of Positive Definite Matrices. IV. *Lin. Alg. Appl.*, **3**:79–114, 1970. MR 41 #1766.
- [12] Rajendra Bhatia and Peter Rosenthal. How and Why to Solve the Operator Equation $AX - XB = Y$. *Bull. London Math. Soc.*, **29**(1):1–21, 1997. MR 97k:47016.
- [13] Albrecht Böttcher. Toeplitz operators with piecewise continuous symbols—a neverending story? *Jber. d. Dt. Math.-Verein.*, **97**:115–129, 1995. MR 96i:47044.
- [14] Albrecht Böttcher and Bernd Silbermann. *Invertibility and Asymptotics of Toeplitz Matrices*. Akademie-Verlag, Berlin, 1983. MR 85g:47037.
- [15] Albrecht Böttcher and Bernd Silbermann. *Analysis of Toeplitz Operators*. Akademie-Verlag, Berlin, 1989. MR 92e:47001.
- [16] Ola Bratteli and Derek W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, volume I of *Texts and Monographs in Physics*. Springer-Verlag, New York – Heidelberg, 1979. MR 81a:46070.
- [17] Ola Bratteli and Derek W. Robinson. *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, volume I of *Texts and Monographs in Physics*. Springer-Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 1987. MR 88d:46105.
- [18] Donald Bures. An Extension of Kakutani’s Theorem on Infinite Product Measures to the Tensor Product of Semifinite w^* -Algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **135**:199–212, 1969. MR 38 #5014.
- [19] Donald L. Cohn. *Measure Theory*. Birkhäuser-Verlag, Boston – Basel – Stuttgart, 1980. MR 81k:28001.

- [20] Alain Connes. Caractérisation des espaces vectoriels ordonnés sous-jacents aux algèbres de von Neumann. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **24**(4):121–155, 1974. MR 51 #13705.
- [21] Alain Connes and Erling Størmer. Homogeneity of the State Space of Factors of Type III₁. *J. Funct. Anal.*, **28**:187–196, 1978. MR 57 #10435.
- [22] Edward Brian Davies. *One-Parameter Semigroups*. London Mathematical Society Monographs, 15. Academic Press, London – New York, 1980. 82i:47060.
- [23] Jochen Dittmann and Gerd Rudolph. A Class of Connections Governing Parallel Transport along Density Matrices. *J. Math. Phys.*, **33**(12):4148–4154, 1992. MR 93k:53076.
- [24] Jochen Dittmann and Gerd Rudolph. On a Connection Governing Parallel Transport along 2×2 Density Matrices. *J. Geom. Phys.*, **10**(1):93–106, 1992. MR 93h:53024.
- [25] H. A. Dye. The Radon-Nikodým Theorem for Finite Rings of Operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **72**:243–280, 1952. MR 13,662b.
- [26] P. A. Fillmore and J. P. Williams. On Operator Ranges. *Advances in Mathematics*, **7**:254–281, 1971. MR 45 #2518.
- [27] Peter A. Fillmore. On Products of Symmetries. *Canad. J. Math.*, **18**:897–900, 1966. MR 33 #4696.
- [28] И. Ц. Гохберг. Об одном применении теории нормированных колец к сингулярным интегральным уравнениям. *Успехи математических наук*, **7**(2):149–156, 1952. MR 14,54a.
- [29] Uffe Haagerup. The standard form of von Neumann algebras. *Math. Scand.*, **37**(2):271–283, 1975. MR 53 #11387.
- [30] Paul R. Halmos. *A Hilbert Space Problem Book*. D. van Nostrand, Princeton, New Jersey – Toronto – London, 1967. MR 34 #8178.
- [31] Paul R. Halmos. *Measure Theory*. Graduate Texts in Mathematics 18. Springer-Verlag, New York – Heidelberg – Berlin, 1974. MR 11,504d.

- [32] Paul R. Halmos. Bad Products of Good Matrices. *Lin. Multilinear Alg.*, **29**:1–20, 1991. MR 92e:15021.
- [33] Paul R. Halmos and Shizuo Kakutani. Products of Symmetries. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **64**:77–78, 1958. MR 20 #6658.
- [34] Volker Heinemann. *Geometrie und Transformation von Paaren positiver Linearformen über C^* -Algebren*. Dissertation, Universität Leipzig, Mathematisches Institut, 1991.
- [35] Roger A. Horn and Charles R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge – London – New York – New Rochelle – Melbourne – Sydney, 1985. MR 87e:15001.
- [36] Roger A. Horn and Charles R. Johnson. *Topics in matrix analysis*. Cambridge University Press, Cambridge – New York – Port Chester – Melbourne – Sydney, 1991. MR 92e:15003.
- [37] Matthias Hübner. *Metrische und Holonomieeigenschaften von geometrischen Phasen und Dichtematrizen*. Dissertation, Universität Leipzig, Fachbereich Physik, 1991.
- [38] Richard V. Kadison. Similarity of Operator Algebras. *Acta math.*, **141**:147–163, 1978. MR 80d:47069.
- [39] Richard V. Kadison and John R. Ringrose. *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras*, volume I Elementary Theory. Academic Press, Inc., New York – London – Paris – San Diego – San Francisco – São Paulo – Sydney – Toronto, 1983. MR 85j:46099.
- [40] F. J. Murray and J. von Neumann. On Rings of Operators. IV. *Ann. Math.*, **44**:716–808, 1943. MR 5,101a.
- [41] M. A. Neumark. *Normierte Algebren*. Hochschulbücher für Mathematik 92. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1990. MR 90m:46004a.
- [42] Gregor Peltri. Rechnungen zur Holonomiegruppe in AFD-Faktoren. Diplomarbeit, Universität Leipzig, Mathematisches Institut, 1992.

- [43] Gregor Peltri. A Remark on the Holonomy Group of a Normal State over a Hyperfinite von Neumann Algebra. *Rep. Math. Phys.*, **36**(2/3):421–431, 1995. MR 97d:46066.
- [44] Gregor Peltri. On the Decomposition of Unitary Operators into a Product of Finitely Many Positive Operators. *Z. Anal. Anw.*, **14**(2):235–248, 1995. MR 96f:46110.
- [45] N. Christopher Phillips. Every Invertible Hilbert Space Operator Is a Product of Seven Positive Operators. *Canad. Math. Bull.*, **38**(2):230–236, 1995. MR 96h:47044.
- [46] Shôichirô Sakai. A Radon-Nikodym Theorem in W^* -Algebras. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **71**:149–151, 1965. MR 30 #5180.
- [47] Shôichirô Sakai. *C^* -Algebras and W^* -Algebras*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 60. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1971. MR 56 #1082.
- [48] Shôichirô Sakai. Persönliche Mitteilung, November 1998.
- [49] Robert Schatten. *Norm Ideals of Completely Continuous Operators*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 27. Springer-Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg, 1960. MR 22 #9878.
- [50] Konrad Schmüdgen. On Domains of Powers of Closed Symmetric Operators. *J. Operator Theory*, **9**(1):53–75, 1983. Errata in *J. Operator Theory*, **12**(1):199, 1984; MR 85h:47030a, 85h:47030b.
- [51] I. E. Segal. Decompositions of operator algebras. II. Multiplicity theory. *Mem. Amer. Math. Soc.*, **1951**(9):66 pp., 1951. MR 13,472b.
- [52] I. E. Segal. Equivalence of measure spaces. *Amer. J. Math.*, **73**:275–313, 1951. MR 12,809f.
- [53] I. E. Segal. A non-commutative extension of abstract integration. *Ann. Math.*, **57**(3):401–457, May 1953. Correction in *Ann. Math.*, **58**:595–596, 1953; MR 14,991f, 15,204h.
- [54] A. R. Sourour. A Factorization Theorem for Matrices. *Lin. Multilinear Alg.*, **19**:141–147, 1986. MR 87j:15028.

- [55] Erling Størmer. On the Jordan Structure of C^* -Algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **120**:438–447, 1965. MR 32 #2930.
- [56] Masamichi Takesaki. *Theory of Operator Algebras*, volume I. Springer-Verlag, New York – Heidelberg – Berlin, 1979. MR 81e:46038.
- [57] Armin Uhlmann. The “Transition Probability” in the State Space of a $*$ -Algebra. *Rep. Math. Phys.*, **9**(2):273–279, 1976. MR 54 #11072.
- [58] Armin Uhlmann. Parallel Transport and Holonomy along Density Operators. In H. D. Doebner and J. D. Henning, editors, *Proceedings of the XV International Conference on Differential-Geometric Methods in Theoretical Physics (Clausthal, 1986)*, pages 246–254, Singapore, 1987. World Sci. Publishing. MR 91g:81036.
- [59] Armin Uhlmann. A Gauge Field Governing Parallel Transport along Mixed States. *Lett. Math. Phys.*, **21**(3):229–236, 1991. MR 93f:81074.
- [60] J. von Neumann. Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen. *J. Reine Angew. Math.*, **161**:208–236, 1929.
- [61] J. H. C. Whitehead. Convex Regions in the Geometry of Paths. *Quart. J. Math., Oxford Ser.*, **3**:33–42, 1932.
- [62] J. H. C. Whitehead. On the Covering of a Complete Space by the Geodesics through a Point. *Ann. Math.*, **36**(3):679–704, 1935.
- [63] Pei Yuan Wu. Products of Normal Operators. *Can. J. Math.*, **40**(6):1322–1330, 1988. MR 90d:47039.
- [64] Pei Yuan Wu. Products of Positive Semidefinite Matrices. *Lin. Alg. Appl.*, **111**:53–61, 1988. MR 90b:15010.
- [65] Pei Yuan Wu. The Operator Factorization Problems. *Lin. Alg. Appl.*, **117**:35–63, 1989. MR 90g:47031.
- [66] Pei Yuan Wu. Persönliche Mitteilung, Juli 1995.

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Dissertation selbständig und ohne unzulässige fremde Hilfe angefertigt zu haben. Ich habe keine anderen als die angeführten Quellen und Hilfsmittel benutzt und sämtliche Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten oder unveröffentlichten Schriften entnommen wurden, und alle Angaben, die auf mündlichen Auskünften beruhen, als solche kenntlich gemacht. Ebenfalls sind alle von anderen Personen bereitgestellten Materialien oder erbrachten Dienstleistungen als solche gekennzeichnet.

Leipzig, den 4. Mai 2001

Tabellarischer Lebenslauf

Name	Gregor Peltri
geboren am	19. Februar 1969
in	Leipzig
September 1975–Juli 1985	zehnklassige Schule in Leipzig
September 1985–Juli 1987	Spezialklasse für Mathematik und Physik der Martin-Luther-Universität Halle; Abitur
September 1987–August 1992	Studium der Mathematik an der Universität Leipzig; Diplom
September 1992–August 1995	Promotionsstipendium des Freistaates Sachsen
Oktober 1995–Juli 1996	Grundwehrdienst
seit August 1996	Koordinator des Graduiertenkollegs „Quantenfeldtheorie“ an der Universität Leipzig

Leipzig, den 4. Mai 2001

Zusammenfassung der wissenschaftlichen Ergebnisse der Dissertation

Beiträge und Beispiele zur Bures-Geometrie

der Fakultät für Mathematik und Informatik
der Universität Leipzig

eingereicht von
Dipl.-Math. Gregor Peltri

angefertigt an der
Universität Leipzig, Mathematisches Institut

Mai 2001

1. In der Dissertation beschäftige ich mich mit einigen grundlegenden Fragen zur *Bures-Geometrie* auf Zustandsräumen von von-Neumann-Algebren. Letztere basiert auf jenem Abstandsbegriff für normale Zustände, der von BURES im Jahre 1969 eingeführt wurde [6]. Im Jahre 1972 stellte ARAKI [4] ein Radon-Nikodym-Theorem für normale Zustände auf, in dem in natürlicher Weise dieser Abstand von BURES auftritt. Vier Jahre später betrachtete UHLMANN [12] die Verallgemeinerung einer Größe, die auch schon BURES in obigem Artikel verwandt hatte, und gab ihr den Namen *algebraische Übergangswahrscheinlichkeit*. Es zeigte sich seitdem, daß Bures-Abstand, algebraische Übergangswahrscheinlichkeit und Radon-Nikodym-Theoreme eng miteinander verbunden sind; für einen zusammenfassenden Überblick siehe [3]. In der Dissertation werden Ergebnisse zu mehreren Aspekten der Bures-Geometrie erarbeitet.

2. Eigenschaften des Bures-Abstandes wurden seit dessen Einführung in verschiedenen Arbeiten untersucht. Nach BURES kann dieser Abstand z. B. definiert werden als Infimum über die Abstände implementierender Vektoren der betrachteten zwei Zustände bezüglich einer hinreichend großen treuen Darstellung. Schon BURES und ARAKI gaben in den genannten Arbeiten Situationen an, in denen aus dem Infimum in der Definition des Bures-Abstandes ein Minimum wird. Im Jahre 1983 zeigte ALBERTI [1] schließlich, daß das Infimum sogar in *jeder* Darstellung, die für die beiden Zustände implementierende Vektoren enthält, dasselbe ist. Man kann sich also auf *eine* geeignet gewählte (treue oder nicht-treue) Darstellung beschränken. Insbesondere ergibt es keinen Unterschied, ob man das Infimum bzw. Supremum über alle oder nur über alle treuen Darstellungen bildet. (Die „ursprünglichen“ Definitionen von Bures-Abstand bzw. algebraischer Übergangswahrscheinlichkeit hatten die Extrema über unterschiedliche Mengen gebildet – eine Tatsache, die sich nun als unerheblich herausstellte.)

3. Die Paare von Vektoren, mit denen in einer festen Darstellung das Infimum in der Definition des Bures-Abstandes angenommen wird, spielen in der Dissertation eine besondere Rolle. Über den Bures-Abstand (oder äquivalent die algebraische Übergangswahrscheinlichkeit) wird so eine Relation zwischen den Mengen der implementierenden Vektoren der zwei Zustände definiert, die man als Vorschrift für einen „Paralleltransport“ deuten könnte. DITTMANN und RUDOLPH [7], [8] haben den Paralleltransport im endlichdimensionalen Fall betrachtet, und dabei besonders ausführlich den Fall der invertierbaren 2×2 -Matrizen. Der Schwerpunkt der Dissertation liegt jedoch im unendlichdimensionalen Fall. Endlichdimensionale Ergebnisse lassen sich dabei nicht ohne weiteres auf Zustände über unendlichdimensionalen von-Neumann-Algebren verallgemeinern. Einerseits versagen manche Methoden, und andererseits treten gewisse Effekte im Endlichdimensionalen überhaupt nicht auf.

4. In einem einführenden Kapitel der Dissertation werden zunächst allgemeine Vereinbarungen getroffen. Darüber hinaus werden wichtige Resultate aus der Operatorentheorie genannt, auf die häufig zurückgegriffen wird. Für nichttriviale Beispiele, die bestimmte Zusammenhänge illustrieren sollen, wird in der Dissertation fast immer dieselbe fundamentale Darstellung verwendet: die Hilbert-Schmidt-Darstellung. Diese wird – inklusive der gewählten Bezeichnungen – ausführlich beschrieben. Anschließend wird der Bures-Abstand eingeführt und die sich aus diesem ergebende elementare Geometrie auf dem Zustandsraum ent-

wickelt. Dabei werden insbesondere die schon bekannten Fakten genannt, auf die sich die weiteren Untersuchungen stützen. Es wird die Frage nach der *Implementierbarkeit* des Bures-Abstandes gestellt. Damit ist folgendes gemeint: Zu gegebenen normalen Zuständen ω, σ über einer von-Neumann-Algebra M mit implementierenden Vektoren φ bzw. ψ sagen wir, daß φ und ψ den Bures-Abstand implementieren, wenn der metrische Abstand der Vektoren $\|\varphi - \psi\|$ gleich dem Bures-Abstand $d_B(\omega, \sigma)$ ist. Es war schon bekannt, daß sich für jedes Paar normaler Zustände der Bures-Abstand implementieren läßt. Offen blieb dabei die Frage, ob dies auch richtig bleibt, wenn man einen Vektor vorgibt. Diese offene Frage wird durch Satz 3.5 negativ beantwortet. Der Beweis stützt sich auf ein Gegenbeispiel. Das Ergebnis wurde in [2] veröffentlicht.

5. Wie schon erwähnt, kann man über den Bures-Abstand unter gewissen Voraussetzungen im Zustandsraum einen Paralleltransport implementierender Vektoren definieren. In gewisser Analogie zur Differentialgeometrie läßt sich auch hier die Holonomiegruppe definieren. Dies wird dargelegt, und die bekannten Resultate werden genannt. Es stellt sich heraus, daß zur Identifizierung der Holonomiegruppe die Untersuchung von Produkten positiver Operatoren hilfreich ist. Diesem Thema widmet sich ein eigenes Kapitel. Ein selbst erarbeitetes Verfahren liefert Aussagen darüber, welche Operatoren Produkte von positiven Operatoren sind [10], [9]. Diese Ergebnisse werden diskutiert und mit Resultaten aus der Literatur (z. B. [5], [15], [11]) verglichen. Die Untersuchung der Holonomiegruppe war zwar der Anlaß für die Beschäftigung mit Produkten positiver Operatoren; die genannten Ergebnisse können jedoch auch von eigenständigem Interesse sein.

6. Der Begriff der Holonomiegruppe über dem Zustandsraum wird in einem weiteren Kapitel genau definiert. Anschließend werden die bekannten Resultate genannt. Aus den Ergebnissen des vorangehenden Kapitels werden schließlich neue Aussagen zur Holonomiegruppe eines treuen normalen Zustandes abgeleitet. Dieses Problem wird zwar nicht vollständig gelöst, aber es wird in eine rein operatortheoretische Aufgabe überführt, die nun für sich unabhängig betrachtet werden könnte. Auf diese Weise gewinnt die Untersuchung der Bures-Geometrie eine neue Dimension.

7. Um den Bures-Abstand zu berechnen, wurden in der Vergangenheit spezielle Formeln entwickelt. Der einfachste Fall, in dem der Bures-Abstand explizit berechnet werden kann, ist der, wenn Absolutstetigkeit nach SAKAI vorliegt. Deshalb wird speziell die SAKAISCHE Verallgemeinerung des klassischen Radon-

Nikodym-Theorems aus der Maßtheorie untersucht und dabei nach den Eigenschaften des Operators, dessen Existenz das Theorem feststellt, gefragt. Diesen Operator nennen wir Radon-Nikodym-Operator. Es zeigt sich, daß es nützlich ist, wenn man von einem Operator sagen kann, ob er ein Radon-Nikodym-Operator zu einem gegebenen Zustand ist oder nicht. Allgemein ist kein Kriterium bekannt, das diese Frage entscheidet. Es werden jedoch spezielle Aussagen hergeleitet.

8. Ein besonders interessanter Fall sind Operatoren, die wir umkehrbare Radon-Nikodym-Operatoren nennen. Diese Operatoren treten auf, wenn man geodätische Bögen im Zustandsraum betrachtet und fragt, ob Strata von wechselseitig zueinander absolutstetigen Zuständen geodätisch konvex sind. Im Fall von Riemannschen Flächen wurde von WHITEHEAD [13], [14] unter anderem gezeigt, daß zu jedem Punkt eine Umgebung existiert, in dem sich beliebige zwei Punkte mit einer Geodätischen verbinden lassen, die die Umgebung nicht verläßt. Wenn oben genannte Strata auch diese Eigenschaft hätten, könnten sie als Beispiele für Umgebungen dienen.

9. Es läßt sich zwischen umkehrbaren Radon-Nikodym-Operatoren und dem Spektrum eines anderen Operators ein Zusammenhang herstellen, der es gestattet, Aussagen über das Spektrum in Aussagen über die Umkehrbarkeit von Radon-Nikodym-Operatoren zu „übersetzen“. Operatoren, von denen man das Spektrum kennt, sind z. B. bestimmte Toeplitzoperatoren. Dieses Wissen konnte genutzt werden, um ein Beispiel zu konstruieren, in dem die geometrische Konvexität *nicht* vorliegt. Die Ergebnisse und die Methodik dieses Kapitels können jedoch von eigenständigem Interesse sein und könnten deshalb auch ohne näheren Bezug auf die Bures-Geometrie anwendbar und nützlich sein. Ein „Nebenprodukt“ bei der Suche nach dem Beispiel war z. B. die Idee, Operatoren mit hinreichend nichttrivialem Spektrum zu konstruieren, indem man die Parameter in den Toeplitzoperatoren geeignet wählt.

10. Im letzten Kapitel werden schließlich Bures-geodätische Bögen betrachtet. Neben der Holonomiegruppe beschreiben diese Bögen einen weiteren, anderen fundamentalen Aspekt der Bures-Geometrie. Dennoch ähneln sich die Untersuchungsmethoden. Die bekannten Ergebnisse über geodätische Bögen werden genannt. Anschließend wird unter Verwendung der Ergebnisse des vorangehenden Kapitels das Beispiel angegeben, das die Frage nach der geodätischen Konvexität eines Stratum beantwortet.

Literaturverzeichnis

- [1] Peter M. Alberti. A Note on the Transition Probability over C^* -Algebras. *Lett. Math. Phys.*, **7**:25–32, 1983. MR 84c:46065.
- [2] Peter M. Alberti and Gregor Peltri. On Bures Distance over Standard-Form von-Neumann Algebras. [arXiv:math.0A/0008164](https://arxiv.org/abs/math/0008164), 2000.
- [3] Peter M. Alberti and Armin Uhlmann. On Bures Distance and $*$ -Algebraic Transition Probability between Inner Derived Positive Linear Forms over W^* -Algebras. *Acta Appl. Math.*, **60**:1–37, 2000. MR 2001e:46102.
- [4] Huzihiro Araki. Bures Distance Function and a Generalization of Sakai's Non-commutative Radon-Nikodym Theorem. *Publ. RIMS*, **8**(2):335–362, 1972. MR 48 #12072.
- [5] Charles S. Ballantine. Products of Positive Definite Matrices. IV. *Lin. Alg. Appl.*, **3**:79–114, 1970. MR 41 #1766.
- [6] Donald Bures. An Extension of Kakutani's Theorem on Infinite Product Measures to the Tensor Product of Semifinite w^* -Algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **135**:199–212, 1969. MR 38 #5014.
- [7] Jochen Dittmann and Gerd Rudolph. A Class of Connections Governing Parallel Transport along Density Matrices. *J. Math. Phys.*, **33**(12):4148–4154, 1992. MR 93k:53076.
- [8] Jochen Dittmann and Gerd Rudolph. On a Connection Governing Parallel Transport along 2×2 Density Matrices. *J. Geom. Phys.*, **10**(1):93–106, 1992. MR 93h:53024.

- [9] Gregor Peltri. A Remark on the Holonomy Group of a Normal State over a Hyperfinite von Neumann Algebra. *Rep. Math. Phys.*, **36**(2/3):421–431, 1995. MR 97d:46066.
- [10] Gregor Peltri. On the Decomposition of Unitary Operators into a Product of Finitely Many Positive Operators. *Z. Anal. Anw.*, **14**(2):235–248, 1995. MR 96f:46110.
- [11] N. Christopher Phillips. Every Invertible Hilbert Space Operator Is a Product of Seven Positive Operators. *Canad. Math. Bull.*, **38**(2):230–236, 1995. MR 96h:47044.
- [12] Armin Uhlmann. The “Transition Probability” in the State Space of a *-Algebra. *Rep. Math. Phys.*, **9**(2):273–279, 1976. MR 54 #11072.
- [13] J. H. C. Whitehead. Convex Regions in the Geometry of Paths. *Quart. J. Math., Oxford Ser.*, **3**:33–42, 1932.
- [14] J. H. C. Whitehead. On the Covering of a Complete Space by the Geodesics through a Point. *Ann. Math.*, **36**(3):679–704, 1935.
- [15] Pei Yuan Wu. Products of Normal Operators. *Can. J. Math.*, **40**(6):1322–1330, 1988. MR 90d:47039.