UNIVERSITÄT LEIPZIG
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

Elliptische und parabolische Probleme mit nichtlokalen Abhängigkeiten

Diplomarbeit

Leipzig, 08. Juli 2002

vorgelegt von

Pavel Pavlov
geboren am: 06.05.1965

Studiengang Diplom-Mathematik

Zusammenfassung

In den letzten Jahren gewannen die Biotechnologien immer mehr an Bedeutung. Es wird sogar erwartet, daß der nächste Durchbruch in der gesellschaftlichen und wissenschaftlichen Entwicklung nach der IT-Revolution auf dem Gebiet der Biologie und Genetik stattfinden wird. Diese Arbeit versucht Einblick in die Methodik der Populationsmodellierung aus dem Blickwinkel der Funktionalanalysis zu verschaffen. Wir überlegen uns ein Modell, bei dem die Diffusionsgeschwindigkeit im Punkt $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ von einem anderen Ort $\varphi(x)$ abhängt. Die Funktion $\varphi : \Omega \to \Omega$ sei als meßbar vorausgesetzt. Es ist nicht einfach, so eine Abhängigkeit zu modellieren. Dies könnte sozialer Druck, Attraktivität, Haß etc. sein. Nichtlokale Modelle finden auch Verwendung bei der morphogenetischen Entwicklung von Zellen. Dabei entstehen räumliche Muster, deren Vielfalt man aus der Tierwelt kennt.

In dem ersten Kapitel wird ein Nichteindeutigkeitsresultat genannt, das als Gegenbeispiel dienen soll und einen Aufschluß darüber liefert, aus welchen Gründen ein nichtlokales Problem mehrere voneinander verschiedene Lösungen besitzen kann.

Wir werden die Frage nach Existenz und Eindeutigkeit von schwachen Lösungen elliptischer partieller Differentialgleichungen untersuchen, die den stationären Fall nach Einstellen des Gleichgewichts beschreiben. Nachdem die Existenz unter sehr allgemeinen Bedingungen für den elliptischen Fall gezeigt wird, gehen wir zu der Eindeutigkeit über. Wir bringen einen Beweis unter gewissen Glattheitsvoraussetzungen.

Selbstverständlich ist auch das parabolische Analogon der Modellgleichung von Wichtigkeit. Die parabolischen Differentialgleichungen können beispielsweise die zeitliche Entwicklung von Populationen modellieren. Für die Untersuchung des parabolischen Falls werden wir spezielle Funktionenräume und Integrale einführen. Wir werden den Zugang zu vektorwertigen Distributionen aufbauen und dann die dargestellte Theorie zum Beweis von Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen instationärer Probleme einsetzen. In der Arbeit wird auch die Existenz schwacher Lösungen parabolischer Differentialgleichungen bewiesen. Dann betrachten wir die Frage der Eindeutigkeit bei parabolischen Problemen.

Zum Schluß werden Phänomene aus der Biologie und aus der Physik genannt, die mittels nichtlokaler parabolischer Differentialgleichungen modelliert werden können.

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis

$\lvert\alpha\rvert$	Betrag des Multiindex α, $\lvert\alpha\rvert := \alpha_1 + ... + \alpha_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i$
$B_R(x_0)$	Kugel mit Radius R und Mittelpunkt x_0
cyclic-AMP	zyklisches Adenosinmonophosphat
$C^\infty(\Omega)$	Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen der Art $\Omega \to \mathbb{R}$
$C^\delta(\Omega)$	Raum der hölderstetigen Funktionen mit dem Hölderexponenten δ
$C^{1,\delta}(\Omega)$	Raum der stetigen Funktionen mit hölderstetiger Ableitung der Klasse $C^\delta(\Omega)$
conv M	Konvexe Hülle von der Menge M
$\mathcal{D}(\Omega)$	Raum der Testfunktionen mit kompaktem Träger in Ω
$\mathcal{D}'(\Omega)$	Raum der Distributionen auf Ω
δ_x	Dirac-Delta-Distribution
DGLn	Differentialgleichungen
diam Ω	Durchmesser der Menge Ω
$\mathrm{dist}(\Omega', \Omega)$	Abstand zwischen den Mengen Ω' und Ω
div	Divergenz, div $u := \sum_{i=1}^n \partial u_i / \partial x_i$
$\partial\Omega$	Rand von Ω
D^α	Ableitung der Ordnung α, wobei α Multiindex ist
EZM	extrazellulare Matrix
$H^{m,p}(\Omega)$	Sobolevraum
$H_0^{m,p}(\Omega)$	Abschluß von $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H^{m,p}(\Omega)$
$H^1(\Omega)$	Der Sobolevraum $H^{1,2}(\Omega)$
$H^1(a, b; V, V')$	Raum der Bochner-meßbaren Funktionen $L^2(a, b; V)$, deren Zeitableitungen in $L^2(a, b; V')$ liegen
$\mathcal{L}^p(\Omega)$	Raum der integrierbaren Funktionen
$L^p(\Omega)$	Raum der Äquivalenzklassen integrierbarer Funktionen
$L^p(a, b; V)$	Raum der Bochner-meßbaren Funktionen
$L^1_{loc}(\Omega)$	Raum der (Äquivalenzklassen von) lokal integrierbaren Funktionen
$\mathrm{mes}(\Omega)$	Maß der Menge Ω
$\lvert\Omega\rvert$	Maß von Ω, nur im Abschnitt 2.3 für bessere Übersichtlichkeit, sonst wird die sugestive Bezeichnung $\mathrm{mes}(\Omega)$ verwendet
V'	Dualraum von V
χ_B	Charakteristische Funktion der Menge B
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Dualitätsklammer, die Wirkung einer Distribution
$(\cdot, \cdot)_H$	Skalarprodukt im Hilbertraum H
$\partial_i u, u_{x_i}$	partielle Ableitung von u, $(\partial/\partial x_i)u$
∇	Gradient, $\nabla u := (\partial u/\partial x_1, ..., \partial u/\partial x_n)$
Δ	Laplace-Operator, $\Delta := \sum_{i=1}^n \partial^2/\partial x_i^2$
$x_n \rightharpoonup x$	konvergiert schwach
$x_n \rightharpoonup^* x$	konvergiert schwach*
$\hookrightarrow$	stetige Einbettung
$\lVert \cdot \rVert_X$	Norm in X
$\subset\subset$	kompakt enthalten

Kapitel 1

Vorkommen nichtlokaler Probleme in der Biologie

1.1 Einführung in die Modellierung biologischer Probleme für Populationen

Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^3$, z.B. könnte Ω eine Petri-Schale sein, die eine Nährlösung und eine Kolonie von Bakterien enthält. Die Konzentration der Bakterien an der Stelle (x_1, x_2, x_3) bezeichnen wir mit $u(x_1, x_2, x_3)$. Wir werden drei Aspekte des Lebens in der Mikrowelt Ω betrachten: Geburt, Absterben und Migration, die auch Diffusion genannt wird. Das bedeutet, in Ω kommen neue Bakterien zur Welt, was immer dieser Prozeß sein mag, andere sterben ab und andere wiederum bewegen sich von einem Ort zum anderen. Analysieren wir die Diffusion. Sei mit $\vec{j}$ der Strom dieser Migration bezeichnet. Nach dem *Fick*schen Gesetz (oder Gesetz von *Fourier* oder auch *Darcy*) ist der Strom $\vec{j}$ proportional zum Gradienten der Konzentration:

$$\vec{j} = -a\nabla u \qquad \text{mit } a > 0$$

Wir werden uns überlegen, was in einem Volumen $V \subseteq \Omega$ mit der äußeren Normalen $\vec{n}$ geschieht. Der Fluß durch den Rand ∂V von V wird gegeben durch

$$\int_{\partial V} \vec{j} \cdot \vec{n} \; d\sigma(x) \; ,$$

wobei $d\sigma$ das Flächenelement von ∂V bezeichnet. Es ist plausibel anzunehmen, daß die Sterberate (und die Geburtsrate, falls vorhanden) in Ω proportional zur Konzentration u ist. Der Proportionalitätsfaktor sei mit λ bezeichnet. Somit stellen wir fest, daß das Absterben im Volumen V durch

$$\lambda \int_V u \, dv$$

gegeben wird. Hier steht $dv := dx_1 dx_2 dx_3$ für das Volumenelement im $\mathbb{R}^3$. Sei mit $f = f(x_1, x_2, x_3, t)$ die Dichte der Bakterien notiert, die von außen zugeliefert wurden. Dann wird in V die Menge $\int_V f \, dv$ auftauchen.

Das Leben ist ein zeitabhängiges Phänomen. Überlegen wir uns den Fall, in dem sich die Konzentration mit der Zeit ändert. Unter diesen Bedingungen ist es realistisch anzunehmen, daß die Geburtsdichte f ebenso von der Zeit abhängt: $f = f(x,t)$. Die Gesamtänderung der Population im Volumen $V \subseteq \Omega$ zur Zeit t wird gegeben durch

$$\int\limits_V f(x,t)dv - \lambda \int\limits_V u(x,t)dv + \int\limits_{\partial V} a(\nabla u \cdot \vec{n})\, d\sigma \ .$$

Vorausgesetzt, u sei glatt, so erhalten wir nach dem Satz von *Gauß*

$$\int\limits_{\partial V} a(\nabla u.n)\, d\sigma = \int\limits_V \operatorname{div}(a\nabla u)\, dv \ , \tag{1.1}$$

wobei für einen Vektor $w = (w_1, w_2, w_3)$ die Divergenz von w durch

$$\operatorname{div} w := \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial w_i}{\partial x_i}$$

bezeichnet wird. Wenn man den Satz von Gauß anwendet, erhält man für die Gesamtänderung

$$\int\limits_V f(x,t)\ dv - \lambda \int\limits_V u(x,t)\ dv + \int\limits_V \operatorname{div}(a\nabla u)\ dv.$$

Andererseits kann man diese Änderung auch als

$$\lim_{\tau\to 0} \int\limits_V \frac{u(x,t+\tau) - u(x,t)}{\tau}\ dv = \int\limits_V \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)\ dv$$

ausdrücken. So erhalten wir die Beziehung:

$$\int\limits_V u_t\ dv = \int\limits_V (\operatorname{div}(a\nabla u) - \lambda u(x,t) + f(x,t))\ dv \ .$$

Weil es für beliebiges Teilgebiet V von Ω gelten muß, schließen wir, daß die Zeitentwicklung der Konzentration u im Gebiet Ω durch

$$u_t = \operatorname{div}(a\nabla u) - \lambda u + f$$

beschrieben wird. Zusammen mit den Anfangsbedingungen für eine feste Endzeit T und Anfangszustand $u_0 = u_0(x), x \in \Omega$ erhalten wir das lineare parabolische Problem

$$\begin{aligned} u_t = \operatorname{div}(a\nabla u) - \lambda u + f \quad & \text{in} \quad \Omega \times (0,\mathrm{T}) \\ u(x,t) = 0 \quad & \text{auf} \quad \partial\Omega \times (0,\mathrm{T}) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad & \text{in} \quad \Omega \ . \end{aligned} \tag{1.2}$$

Wenn die physikalischen Größen a, λ, f zusätzlich noch von der Konzentration u abhängen, so müssen wir das nichtlineare Problem

$$\begin{aligned} u_t = \operatorname{div}(a(x,u,t)\nabla u) - \lambda(x,u,t)u + f(x,u,t) \quad & \text{in} \quad \Omega \times (0,\mathrm{T}) \\ u(x,t) = 0 \quad & \text{auf} \quad \partial\Omega \times (0,\mathrm{T}) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad & \text{in} \quad \Omega \end{aligned}$$

untersuchen. So ein nichtlineares Modell erhalten wir z. B. unter der Annahme, daß die Geschwindigkeit $\vec{v}$ mit wachsender Konzentration u abnimmt und die Geburtsdichte f ähnliches Verhalten aufweist.

Bemerkung: Wenn $\lambda = 0$ gilt und die Größe a einen konstanten Wert für alle $x \in \Omega$ hat, so bekommen wir aus (1.2) die *Wärmeleitungsgleichung* mit der (Wärme-)Quelle f:

$$u_t - a\Delta u = f$$

Die partielle Differentialgleichung

$$u_t - a\Delta u = 0$$

ist unter dem Namen *Diffusionsgleichung* bekannt.

Überlegen wir uns die einfache Situation, in der sich die drei Erscheinungen Geburt, Absterben und Migration auf so eine Art und Weise ausgleichen, daß die Konzentration unserer Kolonie überall in Ω unverändert mit der Zeit bleibt. Dann müssen wir Gleichgewicht der Population in jedem beliebigen Volumen $V \subset \Omega$ haben

$$-\int\limits_{\partial V} a(\nabla u \cdot n)\, d\sigma + \lambda \int\limits_{V} u\, dv = \int\limits_{V} f\, dv\ .$$

Die letzte Gleichung kann nach dem Satz von *Gauß* umgeschrieben werden als

$$\int\limits_{V} (-\mathrm{div}(a\nabla u) + \lambda u)\, dv = \int\limits_{V} f\, dv \qquad \text{für alle } \mathrm{V} \subseteq \Omega\ . \tag{1.3}$$

Weil es für beliebige Volumen V in Ω gelten muß, bekommen wir das Problem

$$\begin{aligned} -\,\mathrm{div}(a\nabla u) + \lambda u = f \quad &\text{in} \quad \Omega \\ u = 0 \quad &\text{auf} \quad \partial\Omega\ . \end{aligned} \tag{1.4}$$

Die Randbedingung $u = 0\ |_{\partial\Omega}$ bedeutet, daß die Konzentration auf dem Rand verschwinden muß.

1.2 Beispiele für nichtlokale Abhängigkeiten

Bei der Herleitung des vorletzten Populationsmodells vom vorigen Abschnitt sind wir davon ausgegangen, daß der Diffusionskoeffizient a im Punkt $x \in \Omega$ von der Konzentration an dieser Stelle abhängt. Es sind aber auch Modelle bekannt, zum Beispiel in [Chi/Lov 97], bei denen die Bewegung von dem globalen Zustand des gesamten Mediums gesteuert wird

$$a = a(\int\limits_{\Omega} u(x,t)\ dx)\ .$$

Eine andere Erklärung für die Bedeutsamkeit dieser globalen Abhängigkeit liegt darin, daß Meßvorgänge, die zur Bestimmung physikalischer Größen durchgeführt werden, niemals in einem Punkt gemacht werden können, sondern einen Mittelwert in der Umgebung dieses Punktes darstellen, also werden die Meßergebnisse durch lokale Mittelwerte festgelegt. Es ist auch denkbar, daß der Diffusionskoeffizient a von einem Teilgebiet $V \subset \Omega$ bestimmt wird:

$$a = a(\int_V u(x,t)\, dx) \qquad V \subset \Omega,$$

oder an der Stelle $x \in \Omega$ sogar von einem anderen Punkt $\varphi(x)$ abhängt:

$$a = a(\varphi(x))$$

mit gegebener Funktion $\varphi : \Omega \to \Omega$. Dies kann z.B. Anziehung oder Abstoßung zwischen unterschiedlichen Spezies darstellen. Es ist nicht einfach, so einen Einfluß zu modellieren. Das kann sozialer Druck, Anziehung oder Haß sein. In den nächsten zwei Abschnitten werden wir als Motivation konkrete Beispiele für nichtlokale Erscheinungen aus dem realen Leben nennen.

1.2.1 Chemotaxis

Eine Vielzahl von Insekten und Tierarten greifen auf ihren hochentwickelten Geruchssinn zurück, um Informationen zwischen den einzelnen Individuen der Art zu vermitteln. Chemische Substanzen, die in diesem Prozeß einbezogen werden, nennt man *Pheromone*. Das Weibchen der Seidenraupe von der Art *Bombix mori* sondert das Pheromon *Bombicol* ab, um das Männchen sexuell anzuziehen, dessen Geruchssinn einen bemerkenswert effizienten Filter aufweist, mit dem die Konzentration an Bombicol gemessen wird. Das Männchen bewegt sich dann in Richtung der steigenden Konzentration. Das gleiche Verhalten wird auch bei der Motte der Art *Hyalophora cecropia* (Abbildung 1.1) beobachtet, nur mit einem anderen Pheromon als Informationsträger. Die Antennen dieser Motte sind so sensibel, daß sie in der Lage sind, einzelne Moleküle des Pheromons aufzusammeln und abzuzählen, um die Konzentration in der umgebenden Luft zu bestimmen.

Der scharf entwickelte Geruchssinn von vielen Tiefseefischarten ist sehr wichtig, insbesondere für Kommunikation und Jagd. Beim Modellieren dieser von chemischen Stoffen gesteuerten Bewegung, die *Chemotaxis* genannt wird, ist zu berücksichtigen, daß sie im Gegensatz zur gewöhnlichen Diffusion in Richtung der steigenden Konzentration erfolgt. Chemotaxis ist nicht nur in der Tier- und Insektenökologie wichtig. Auch in biologischen Prozessen sind zahlreiche Beispiele bekannt, wo dieses Phänomen eine Rolle spielt. Wenn eine bakterielle Infektion in den Körper eindringt, kann sie durch eine von Chemotaxis gesteuerte Zellenbewegungen gegen die Infektionsquelle abgewehrt werden. In [Lau/Kel 79] und [Tra/Lau 86] wird nachgewiesen, daß die weißen Blutkörperchen sich in Richtung eines bakteriellen Erregerherdes fortbewegen einfach dem Gradienten der Infektion folgend. Ein weitgehend untersuchtes Chemotaxis-Phänomen, bei dem einzellige Amöben in Richtung der steigenden Konzentration des Stoffs *cyclic-AMP* streben, der selbst von Amöben produziert wird, hat man bei der Art *Dictyostelium discoideum* beobachtet. Interessante wellenähnliche Muster wurden festgestellt, die in Abbildung 1.2 dargestellt werden.

1.2.2 Räumliche Muster und Formen bei embryonaler Entwicklung

Die Entwicklung von räumlichen Mustern und Formen ist auch eine der zentralen Fragen in der Embryologie. Die Strukturbildung im heranwachsenden Embryo ist unter dem

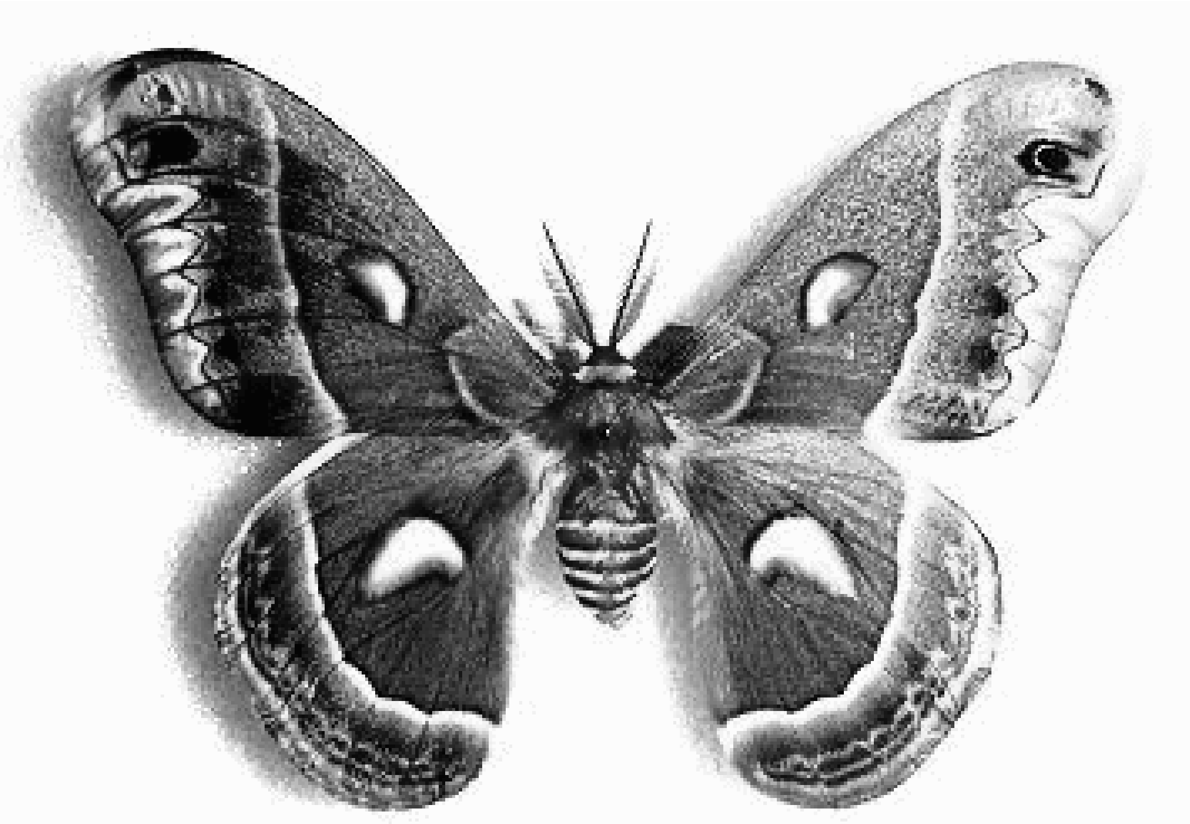

Abbildung 1.1: Hyalophora cecropia

Namen *Morphogenesis* bekannt. Morphogenetische Prozesse, die koordinierte Bewegung oder Musterbildung von Zellpopulationen miteinschließen, werden auch durch nichtlokale Abhängigkeiten charakterisiert.

Das erste Beispiel für einen solchen nichtlokalen Effekt ist die diffuse Zerstreuung von frühen embryonalen Zellen, die dank langer tentakelähnlicher Auswüchse in der Lage sind, sich selbständig zu bewegen. Räumliche Muster kommen als Variationen der Zellendichte zum Vorschein. Im heranwachsenden Embryo ist die Zellendichte relativ hoch, so daß die auf verdünnte Systeme anwendbare klassische Diffusion nicht hinreichend exakt die Vorgänge modelliert. Die langen, von der Zelle ausgestreckten Tentakeln können die Dichteänderung weit außerhalb der nächsten Nachbarschaft spüren. So muß man bei der diffusen Zerstreuung diese nichtlokale Abhängigkeit mitberücksichtigen, weil die Zelle sowohl auf weit entfernte Konzentration als auch auf die Zellendichte in unmittelbarer Umgebung reagiert.

Die Abbildung 1.3 zeigt schematisch, warum diese Konzentrationsmessung größerer Reichweite wichtig sein kann. In diesem Fall wird laut [Mur 89, Seite 534] der Zellenfluß $\vec{j}$ durch

$$\vec{j} = -a_1 \nabla u + a_2 \nabla(\Delta u) \tag{1.5}$$

gegeben, wobei $a_1 > 0$ der gewöhnliche Diffusionskoeffizient ist und $a_2 > 0$ der Koeffizient für Diffusion großer Reichweite ist. In der obigen Formel bezeichnet Δ den Laplaceoperator.

Um ein zweites Beispiel für ein nichtlokales Phänomen in der Biologie zu betrachten, müssen wir die beiden Arten von embryonalen Zellen genauer charakterisieren. Die zwei Typen solcher Zellen sind einerseits die dermalen und andererseits die epidermalen. Wie schon im letzten Beispiel erwähnt wurde, sind die dermalen Zellen in der Lage,

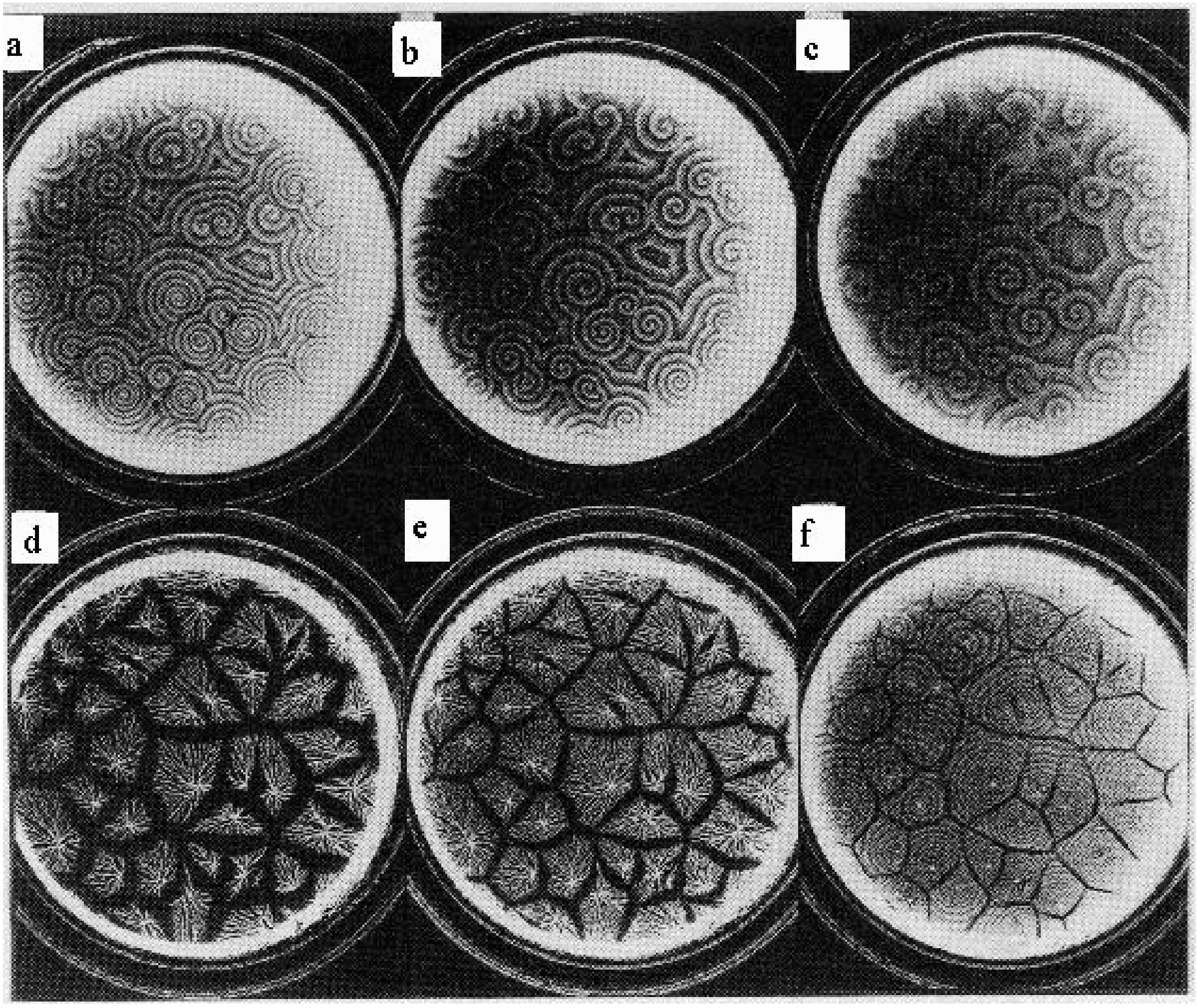

Abbildung 1.2: Spiralförmige Signalmuster bei *Dictyostelium discoideum*

sich selbständig zu bewegen. Sie können auch noch faserartiges Material zur Ausbildung der extrazellularen Matrix (EZM) absondern. Epidermale Zellen bilden räumliche Muster dadurch, daß sie sich verformen. Diese Art von Zelle bewegt sich im Allgemeinen nicht. Faserartige Materialien wie die extrazellulare Matrix werden durch nichtlokales elastisches Zusammenwirken gekennzeichnet, denn die Fasern übertragen Spannungen zwischen weit entfernten Punkten der EZM. Wenn die Tentakeln, mit denen die Zelle die EZM berührt, weit über ihrer unmittelbaren Nachbarschaft ausgestreckt werden, was höchstwahrscheinlich in der Realität vorkommt, so müssen wir nichtlokale Erscheinungen in Betracht ziehen, analog zur Diffusion großer Reichweite in der letzten Gleichung (1.5). Laut [Mur 89, Seite 536] sind die nichtlokalen Effekte wichtiger als der Diffusionsbeitrag, wenn man die Bilanzgleichung für den Zellenfluß aufstellen will.

1.3 Gegenbeispiel: Nichtlokales Problem mit mehreren Lösungen

Unter gewissen Glattheitsvoraussetzungen für den Koffizienten $a(x,u)$ hat das lokale Problem

$$u \in H_0^1(\Omega), \qquad -\frac{\partial}{\partial x_i} a(x,u) \frac{\partial}{\partial x_i} u = f \quad \text{in } \Omega$$

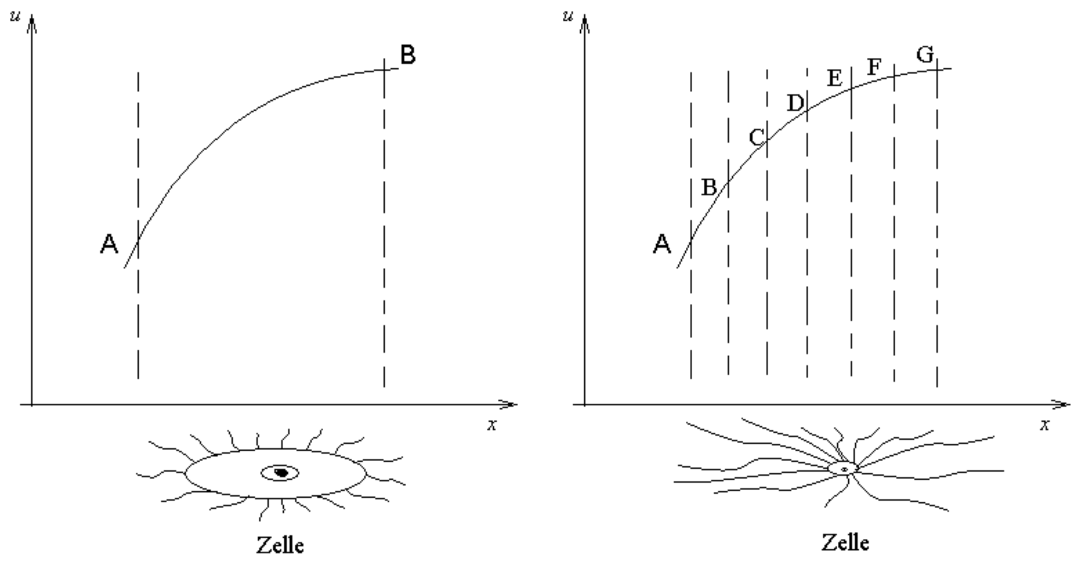

Abbildung 1.3: Diffusion großer Reichweite

eine eindeutige Lösung. Sobald man eine Abhängigkeit von benachbarten Punkten zuläßt, ist diese Eindeutigkeit nicht mehr sichergestellt. Mehrere voneinander verschiedene Lösungen können auftauchen, selbst dann, wenn der Diffusionskoeffizient a eine glatte Funktion ist. Eine mögliche Erklärung dafür wäre, daß ein in komplizierter Weise reagierendes Populationssystem von Zellen, Tierarten, Bevölkerungsschichten oder anderen Lebewesen, mehrere Gleichgewichtslagen erreichen kann. Aus der Sicht der Funktionalanalysis sei noch folgendes bemerkt: Wenn ein elliptisches oder parabolisches Problem eine eindeutige Lösung besitzt, ist es immer noch möglich, daß seine diskrete Version mehrere voneinander verschiedene Lösungen aufweist. Solche unangenehmen Situationen werden in [Chi 00, Seite 99, Abschnitt 8.5, Seite 122, Satz 8.14 auf Seite 126] genannt. Das kann mehrere Ursachen haben. Als Beispiel kann man die Gleichung

$$-\frac{\partial u}{\partial n} = g \text{ auf } \partial\Omega, \quad -a\Big(\int\limits_\Omega u\ dx\Big)\ \Delta u + u = f \text{ in } \Omega \tag{1.6}$$

nach schwachen Lösungen untersuchen. Es wird vorausgesetzt, daß g irgendeine glatte Funktion ist, die der Bedingung $\int_\Omega g(x)\ d\sigma(x) \neq 0$ genügt. Integrieren wir die zweite Gleichung in 1.6 :

$$-a\Big(\int\limits_\Omega u\ dx\Big)\int\limits_\Omega \Delta u\ dx + \int\limits_\Omega u\ dx = \int\limits_\Omega f\ dx$$

Wir erinnern an die Greensche Formel

$$\int\limits_\Omega \Delta u\ dx = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}\ d\sigma(x)\ .$$

Also bekommen wir, die erste Gleichung von (1.6) einsetzend,

$$-\ a\Big(\int\limits_\Omega u\ dx\Big)\int\limits_{\partial\Omega} g\ d\sigma(x) + \int\limits_\Omega u\ dx = \int\limits_\Omega f\ dx. \tag{1.7}$$

Satz 1.1 : *Das Problem (1.6) hat genauso viele Lösungen wie die Gleichung*

$$a(\mu) \int\limits_{\partial\Omega} g \; d\sigma(x) + \mu = \int\limits_{\Omega} f \; dx \tag{1.8}$$

für $\mu \in \mathbb{R}$.

Beweis: Sei u eine Lösung von (1.6). Nach (1.7) ist $\mu = \int_\Omega u \; dx$ Lösung von (1.8). Umgekehrt genüge μ der Gleichung (1.8). Dann existiert eine schwache Lösung u von

$$-a(\mu)\Delta u + u = f \text{ in } \Omega, \quad -\frac{\partial u}{\partial n} = g \quad \text{auf } \Omega \; .$$

Integration über Ω und die Anwendung der Greenschen Formel führen zu

$$a(\mu) \int\limits_{\partial\Omega} g \; d\sigma(x) + \int\limits_{\Omega} u \; dx = \int\limits_{\Omega} f \; dx = a(\mu) \int\limits_{\partial\Omega} g \; d\sigma(x) + \mu \; .$$

Es folgt $\mu = \int_\Omega u \; dx$ und somit ist u eine Lösung von (1.6). □

Aus (1.8) erhalten wir

$$a(\mu) = \int\limits_{\Omega} f \; dx - \mu / \int\limits_{\partial\Omega} g \; d\sigma(x).$$

Die Lösung der obigen Gleichung wird gegeben durch den Schnittpunkt des Graphen von a mit der Geraden

$$\mu \longmapsto -\mu \; / \int\limits_{\partial\Omega} g \; d\sigma(x) + \int\limits_{\Omega} f \; dx \; / \int\limits_{\partial\Omega} g \; d\sigma(x) \; . \tag{1.9}$$

Selbstverständlich kann es vorkommen, daß für bestimmte a die Gleichung unendlich viele Lösungen besitzt. Wenn a stückweise den gleichen Verlauf wie die Gerade (1.9) aufweist, so existieren dann überabzählbar viele Lösungen. Unter der Annahme

$$a \text{ ist stetig und } \; 0 < m < a(\xi) < M \quad \forall \; \xi \in \mathbb{R}$$

hat (1.6) stets eine Lösung. Die Existenz einer Lösung ist für unbeschränktes oder unstetiges a nicht mehr gewährleistet.

Kapitel 2

Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis

2.1 Soboleväume

2.1.1 Distributionen

Sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, $n > 1$. Mit $\mathcal{D}(\Omega)$ sei der Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen $C^\infty(\Omega)$ mit kompaktem Träger bezeichnet. $\mathcal{D}(\Omega)$ ist ein Vektorraum unendlicher Dimension.

Für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ setzen wir

$$D^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1 + ... + \alpha_n}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ ... \partial^{\alpha_n} x_n} \ .$$

Definition: Für eine Funktionenfolge $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ sagen wir

$$\varphi_i \longrightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{D}(\Omega) \ ,$$

wenn φ_i ihren Träger in einer kompakten Menge $K \subset \Omega$ für alle $i \in \mathbf{N}$ hat und

$$D^\alpha \varphi_i \longrightarrow D^\alpha \varphi \text{ gleichmäßig auf } K \subset \Omega \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Diese Konvergenz definiert eine Topologie in dem Raum $\mathcal{D}(\Omega)$. Der Beweis ist in [Jan 71, Seite 51] zu finden.

Definition: Eine *Distribution* T ist eine Linearform auf $\mathcal{D}(\Omega)$, so daß

$$T(\varphi_i) \longrightarrow T(\varphi) \tag{2.1}$$

für beliebige Funktionenfolge $\{\varphi_i\}_{i \in N}$ mit

$$\varphi_i \longrightarrow \varphi \text{ in } \mathcal{D}(\Omega).$$

So ist eine Distribution T Element des dualen Raums $\mathcal{D}'(\Omega)$. Die Wirkung von T wird auch mit

$$\langle T, \varphi \rangle := T(\varphi)$$

bezeichnet.

Definition: Sei

$$L^1_{loc}(\Omega) := \{v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \mid v \in L^1(K) \text{ für alle kompakten Mengen } \ K \subset \Omega\}.$$

Definition: *(Ableitung von Distributionen)* Sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Dann definiert

$$\varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle$$

eine Distribution, die wir mit $D^\alpha T \in L^1_{loc}(\Omega)$ bezeichnen, d.h. wir setzen

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Bemerkung: Wenn T eine k-mal stetig differenzierbare Funktion ist, so stimmt die gewöhnliche Ableitung $D^\alpha T$ mit der Ableitung im Sinne der Distributionen für alle α mit $\mid \alpha \mid \leq k$ überein.

Beweis:

$$\int\limits_\Omega \left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\varphi + T\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) dx = \int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(T\varphi)\ dx = \int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(T\varphi)\ dx_i dx_1 ... dx_{i-1} dx_{i+1} ... dx_n = 0,$$

weil $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Also

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial T}{\partial x_i}\varphi\ dx = (-1)\int\limits_\Omega T\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\ dx = (-1)\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{2.2}$$

wenn wir $T \in C^k(\Omega)$ als Distribution auffassen mit

$$\langle T, \psi\rangle := \int\limits_\Omega T \cdot \psi\ dx \quad \text{für alle } \psi \ \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Die Identität (2.2) liefert

$$\int\limits_\Omega \frac{\partial T}{\partial x_i}\varphi\ dx = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{2.3}$$

für alle Multiindizes α der Gestalt $\alpha = (0, ..., 0, 1, 0...0)$ mit einer Eins an i-ter Stelle. Mittels Induktion bekommen wir die Richtigkeit von (2.3) für alle Multiindizes α mit $\mid \alpha \mid \leq k$. □

Definition: Sei $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Wir sagen

$$T_i \longrightarrow T \quad \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

genau dann, wenn

$$\langle T_i, \varphi\rangle \ \longrightarrow \ \langle T, \varphi\rangle \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Diese Art von Konvergenz liefert einen eindeutigen Grenzwert, vorausgesetzt die Folge $\{T_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Für Beweis vergleiche [Jan 71, Satz 28.1, Seite 131] . Bezüglich dieses Konvergenzbegriffes ist der Vektorraum $\mathcal{D}'(\Omega)$ vollständig, siehe wieder [Jan 71, Satz 28.3]. In [Jan 71, Satz 28.2] wird noch bewiesen, daß

$$T_i \longrightarrow T \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega) \quad \Rightarrow \quad D^\alpha T_i \longrightarrow D^\alpha T \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ für alle Multiindizes } \alpha.$$

Proposition 2.1 : *Der Operator D^α ist folgenstetig in $\mathcal{D}(\Omega)$, d.h. für beliebige Folge $\{T_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ mit*

$$T_i \longrightarrow T \quad in\ \mathcal{D}'(\Omega)$$

gilt

$$D^\alpha T_i \longrightarrow D^\alpha T \quad in\ \mathcal{D}'(\Omega)\ .$$

Beweis:

$$\langle D^\alpha T_i, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T_i, D^\alpha\varphi\rangle \ \longrightarrow\ \langle T, D^\alpha\varphi\rangle = \langle D^\alpha T, \varphi\rangle\ .$$

□

Beispiele:

1.Funktionen sind Distributionen.
Falls $T \in L^1_{loc}(\Omega)$, so erklären wir die Wirkung von T durch

$$\langle T, \varphi\rangle := \int_\Omega T(x)\varphi(x)\ dx.$$

Die Eigenschaft (2.1) in der Definition folgt aus

$$|\langle T, \varphi_i - \varphi\rangle| \ = \ |\int_\Omega T(\varphi_i - \varphi)\ dx| \ \le\ \max_K |\varphi_i - \varphi| \int_K |T\ |\ dx\ .$$

2. Dirac-Delta-Distribution. Sei $x_0 \in \Omega$. Wir definieren die Distribution δ_{x_0} durch

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi\rangle := \varphi(x_0), \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\ .$$

3. Sei $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ mit $x_i \longrightarrow x_0 \in \Omega$. Dann gilt $\delta_{x_i} \longrightarrow \delta_{x_0}$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.
4. Sei $T_j \in L^p(\Omega), 1 \le p \le \infty$ mit $T_j \longrightarrow T$ in $L^p(\Omega)$. Dann gilt $T_j \longrightarrow T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

2.1.2 Sätze über Sobolevräume

Sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Für $m \in \mathbb{N}$ und $1 \le p \le \infty$ definieren wir den *Sobolevraum* $H^{m,p}(\Omega)$ durch

$$H^{m,p}(\Omega) := \{v \in L^p(\Omega)\ |\ D^\alpha v \in L^p(\Omega),\ \forall\ \alpha \text{ mit } |\alpha|\ \le\ m\}\ .$$

Hier bezeichnet $D^\alpha v$ die Ableitung im Sinne der Distributionen und

$$L^p(\Omega) := \{v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\ |\ \int_\Omega |v|^p dx \le \infty\}\ ,$$

ausgestattet mit der Norm

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} := (\int_\Omega |v|^p\ dx)^{1/p}\ . \tag{2.4}$$

Bemerkung: Genauer gesprochen besteht der Raum $L^p(\Omega)$ aus Äquivalenzklassen $[v]$ in dem zugehörigen Quotientenraum $L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega)/_N$ mit

$$N := \{v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\ |\ \int_\Omega |v|^p\ dx = 0\}.$$

Erst dann wird $| v |_{L^p(\Omega)}$ in (2.4) eine Norm. $L^p(\Omega)$ ist ein Banachraum.

Als Norm in dem Sobolevraum wird definiert

$$\|v\|_{m,p} := \Big(\sum_{|\alpha|\le m} \|D^\alpha v\|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{1/p} .$$

PROPOSITION 2.2 : *Der Raum $H^{m,p}(\Omega)$ ist mit der obigen Norm ein Banachraum.*

BEWEIS: Sei $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $H^{m,p}(\Omega)$. Dann ist $\{D^\alpha u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega)$ für belibiges α. Aufgrund der Vollständigkeit der L^p-Räume existiert $u_\alpha \in L^p(\Omega)$, so daß

$$D^\alpha u_i \longrightarrow u_\alpha \quad \text{in } L^p(\Omega) .$$

Im Spezialfall $\alpha = 0$ ist $u_i \longrightarrow u^0$ in $L^p(\Omega)$. Nach Beispiel 4 im vorigen Abschnitt ist

$$D^\alpha u_i \longrightarrow u_\alpha \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ und } u_i \longrightarrow u^0 \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Laut Proposition (2.1) ist D^α stetig in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

$$\Rightarrow D^\alpha u_i \longrightarrow D^\alpha u_0 \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

Da die Konvergenz von der letzten Definition im Abschnitt über Distributionen einen eindeutigen Grenzwert in $\mathcal{D}'(\Omega)$ liefert, haben wir

$$D^\alpha u_0 = u_\alpha \in L^p(\Omega) \ \forall \alpha \text{ mit } |\alpha| \le m .$$

Daraus können wir schließen $u_0 \in L^p(\Omega)$.

$\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge. Zu jedem ε existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für $i, j \ge N$

$$\|u_i - u_j\|^p \ = \ \sum_\alpha \|D^\alpha u_i - D^\alpha u_j\|_{L^p(\Omega)}{}^p \ < \ \varepsilon .$$

Für $j \longrightarrow \infty$ erhalten wir

$$\|u_i - u_0\|^p \ = \ \sum_\alpha \|D^\alpha u_i - D^\alpha u_0\|_{L^p(\Omega)}{}^p \ < \ \varepsilon,$$

mit anderen Worten, $u_i \longrightarrow u_0 \in H^{m,p}(\Omega)$. □

SATZ 2.3 : *Sei Ω beschränkt mit Lipschitz-Rand. Dann liegt $C^m(\overline{\Omega})$ dicht in $H^{m,p}(\Omega)$.*

Der Beweis ist in [Ada 75, Seite 52] zu finden.

SATZ 2.4 : *(Poincaré Ungleichung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt in eine Richtung ν, d.h. Ω sei enthalten in dem Streifen*

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n :| x.\nu \mid \le a\} \textit{ für ein } a > 0.$$

Dann gilt für alle p mit $1 \le p \le \infty$ die Abschätzung

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \ \le \ 2a \ \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall\ u \in H_0^{1,p}(\Omega)$$

mit $H_0^{m,p}$:=Abschluß von $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H^{m,p}(\Omega)$.

Beweis: Sei $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. $\mathcal{D}(\Omega)$ liegt dicht in $H_0^{1,p}(\Omega)$. Wenn wir die Behauptung für $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ zeigen, so nutzen wir das Dichtheitsargument, um die Aussage des Satzes zu beweisen. Wähle $(\nu, v_2, v_3, ..., v_n)$ als orthonormale Basis des $\mathbb{R}^n$, d.h. vervollständige ν zu einer orthonormalen Basis. Weil u für $x_1 = a$ verschwindet, hat man

$$\begin{aligned}
u(x) &= u(x_1\nu + x_2v_2 + ... + x_nv_n) - u(a\nu + x_2v_2 + ... + x_nv_n) \\
&= \int\limits_{x_1}^{a} \frac{d}{dt} u(t\nu + x_2v_2 + ... + x_nv_n) \\
&= \int\limits_{x_1}^{a} \frac{\partial}{\partial t} u(t\nu + x_2v_2 + ... + x_nv_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mid u(x) \mid &\leq \int\limits_{-a}^{a} \mid \nabla u(t\nu + x_2v_2 + ... + x_nv_n) \cdot \nu \mid dt \\
\mid u(x) \mid &\leq \int\limits_{-a}^{a} \mid \nabla u(t\nu + x_2v_2 + ... + x_nv_n) \mid dt\ .
\end{aligned}$$

Nach der Hölderschen Ungleichung ist

$$\mid u(x) \mid \leq (\int\limits_{-a}^{a} \mid \nabla u(t\nu + x_2v_2 + ... + x_nv_n) \mid^p dt)^{1/p} (2a)^{1-\frac{1}{p}}\ .$$

Somit erhalten wir

$$\mid u(x) \mid^p \leq (2a)^{p-1} \int\limits_{-a}^{a} \mid \nabla u(t\nu + x_2v_2 + ... + x_nv_n) \mid\ dt\ .$$

Integration nach x_1 führt zu

$$\int\limits_{-a}^{a} \mid u(x_1\nu + x_2v_2 + ... + x_nv_n) \mid^p dx_1 \leq (2a)^p \int\limits_{-a}^{a} \mid \nabla u(x_1\nu + x_2v_2 + ... + x_nv_n) \mid^p dx_1\ .$$

Dann integrieren wir in die restlichen Richtungen v_i:

$$\int\limits_{\Omega} \mid u(x) \mid dx \leq (2a)^p \int\limits_{\Omega} \mid \nabla u(x) \mid^p dx$$

Das ist die Behauptung für $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Aus der Dichtheit von $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H_0^{1,p}(\Omega)$ folgt die Aussage des Satzes. □

Satz 2.5 : *Sei Ω offen, beschränkt in eine Richtung. In $H_0^{1,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty$ sind die Normen*

$$\|u\|_{1,p}\ , \quad \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \textit{und} \quad \sum_{|\alpha|=1} \mid D^\alpha u \mid_{L^p(\Omega)}$$

äquivalent.

Für Beweis sei auf [Chi 00, Satz 2.11 und 2.12, Seite 33 ff.] verwiesen.

Satz 2.6 : *(Rellich) Sei Ω ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$, d.h. sei Ω offen, bogenweise zusammenhängend und nichtleer. Außerdem habe Ω Lipschitz-Rand. Dann ist die kanonische Einbettung*

$$H^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

kompakt.

Man kann den Beweis dieses Satzes in [Alt 85, Satz A.5.4, Seite 162] oder auch in [Wer 97, Seite 176] finden.

Lemma 2.7 : *Falls $x_n \rightharpoonup x$ und $y_n \longrightarrow y$ in einem Hilbertraum H, so folgt daraus*

$$(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y) \ .$$

Beweis: [Chi 00, Lemma 5.1, Seite 62] oder [Alt 85].

Definition: Wir sagen $u \in H^{1,2}(\Omega)$ erfüllt $u \leq 0$ auf $\partial\Omega$ falls $u^+ := max\{0, u\}$ in $H_0^{1,2}(\Omega)$ liegt. Wenn u stetig in einer Umgebung von $\partial\Omega$ ist, dann ist die obige Ungleichung im klassischen Sinne zu verstehen, d. h. punktweise.

Definition: Sei Γ eine Teilmenge von $\bar{\Omega}$ und $u \in H^{1,2}(\Omega)$. Wir sagen $u \leq 0$ auf Γ im Sinne von $H^{1,2}(\Omega)$ falls $u^+ := max\{0, u\}$ ein Grenzwert in $H^{1,2}(\Omega)$ von Funktionenfolge in $C_0^1(\overline{\Omega} \setminus \Gamma)$ ist.

2.2 Fixpunktsätze

Satz 2.8 : *(Brouwer) Sei $M \in \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, beschränkt, konvex und nichtleer. Dann hat der stetige Operator*

$$A : M \longrightarrow M$$

einen Fixpunkt, d.h. es existiert ein $x \in M$ mit $Ax = x$.

Beweisidee: Für diese Beweisskizze brauchen wir folgende

Definition: Sei X topologischer Raum, $M \subseteq X$ und der Operator $r : X \longrightarrow M$ sei stetig.

$$r \text{ heißt } \mathit{Retraktion} \Longleftrightarrow r(x) = x \ \forall x \ \in \ M.$$

Die Menge M heißt *Retrakt* von X. Eine Retraktion r zieht X stetig auf M zusammen und M bleibt punktweise identisch. Mittels Retraktion kann man Fixpunktaussagen für komplizierte Mengen auf Behauptungen über einfachere Mengen zurückführen. Hier zwei Retraktionsprinzipien:

Satz 2.9 : (i) *Jede abgeschlossene konvexe Menge M eines normierten Raumes X ist Retrakt von X.*

(ii) *Der Rand $\partial B_R(x_0)$ einer n-dimensionalen abgeschlossenen Kugel $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$, $R > 0$, $n \in \mathbb{N}$ ist nicht Retrakt von $B_R(x_0)$.*

Beweis: (i) Man erweitere die identische Abbildung $I : M \longrightarrow M$ zu

$$r : X \longrightarrow \text{conv}M := \text{konvexe Hülle von } M = M \ .$$

Zu (ii): Sei $x_0 = 0$, sonst kann man durch Translation den Mittelpunkt der Kugel in den Koordinatenursprung verschieben. Ist $r : B_R(0) \longrightarrow \partial B_R(0)$ eine Retraktion, dann stimmen $x \mapsto f(x) := r - x$ und $x \mapsto g(x) := 0$ auf $\partial B_R(x)$ überein, also gilt für den Fixpunktindex i nach [Zei 77, Theorem 12.1 und Satz 12.2] folgendes: $i(f, B_R(0)) = i(g, B_R(0)) = 1$. Nach [Zei 77, Definition 12.2, A2)] besitzt f im Inneren der Kugel $B_R(0)$ einen Fixpunkt. Widerspruch zu $r(B_R(0)) = \partial B_R(0)$. □

Bemerkung: : Der Beweis von (ii) kann auch in [Zei 86, Seite 51] gefunden werden. Dabei wird als Hilfsmittel der *Abbildungsgrad* benutzt. Wir werden einen zweiten vollständigen Beweis durch elementare Überlegungen über Simplizes angeben.

Beweis: (des *Brouwer*schen Fixpunktsatzes)

Schritt 1:

Sei S ein N-Simplex in einem endlichdimensionalen normierten Raum. Sei $A : S \to S$ stetig. Wir zeigen, daß A einen Fixpunkt besitzt.

$N = 0$: S besteht aus einem Punkt. Der Punkt wird vom Operator A auf sich selbst abgebildet. Trivialerweise besitzt A einen Fixpunkt.

$N = 1$: Dann ist $A : [a, b] \longrightarrow [a, b],\ a < b$. Setze $B(u) := A(u) - u,\ \forall u \in [a, b]$. Es gilt $A(a), A(b) \in [a, b]$. $\Rightarrow A(a) \geq a$ und $A(b) \leq b$. Also $B(a) \geq 0$ und $B(b) \leq 0$. Folglich existiert $u \in [a, b]$ mit $B(u) = 0$, weil B stetig ist. Dies bedeutet, daß A einen Fixpunkt u hat.

$N = 2$: S ist ein Dreieck. $S = \text{conv}\{u_0, u_1, u_2\}$. Jedes $u \in S$ hat die Darstellung

$$u = \alpha - 0(u)u_0 + \alpha_1(u)u_1 + \alpha_2(u)u_2 \ \text{ mit } \ 0 \leq \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ \text{ und } \ \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1\ . \quad (2.5)$$

Aus $u = u_0 = \alpha_1(u)(u_1 - u_0) + \alpha_2(u)(u - u_0)$ und $\alpha_0(u) = 1 - \alpha_1(u) - \alpha_2(u)$ folgt wegen der linearen Unabhängigkeit von $(u_1 - u_0), (u_2 - u_0)$, daß die baryzentrischen Koordinaten $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ eindeutig bestimmt sind und stetig von u abhängen. Die Stetigkeit und Eindeutigkeit von u werden ausführlich in [Zei 95, Seiten 59–61] bewiesen. Wir setzen

$$C_j := \{u \in S \mid \alpha_j(A(u)) \leq \alpha_j(u)\} \quad \text{für} \quad j = 0, 1, 2\ .$$

Da $\alpha(\cdot)$ und A stetig in S sind, ist C_j abgeschlossen. An dieser Stelle brauchen wir eine Hilfsaussage, die wir ohne Beweis formulieren werden.

Lemma 2.10 : *(Knaster, Kuratovski, Mazurkievicz) Sei $S = co\{u_0, ..., u_N\}$ ein N-Simplex in einem endlichdimensionalen normierten Raum X mit $N = 0, 1, 2, ...$ Es seien die abgeschlossenen Mengen $C_0, ..., C_n$ in X gegeben, so daß*

$$conv\{u_{i_0}, ..., u_{i_k}\} \subseteq \bigcup_{m=0}^{k} C_{i_m} \quad (2.6)$$

für alle möglichen Indizes $\{i_0, ..., i_k\}$ und alle $k = 0, ..., N$. Dann existiert ein Punkt $v \in S$ mit $v \in C_j\ \forall j = 0, ..., N$.

Der Beweis ist in [Zei 95, Seite 58] dargestellt.

Um die Voraussetzung 2.6 zu erfüllen, werden wir zeigen, daß

$$\text{conv}\{u_{i_0}, ..., u_{i_k}\} \subseteq \bigcup_{m=0}^{k} C_{i_m}, \quad k = 0, 1, 2\ .$$

Angenommen, das wäre nicht erfüllt, so gäbe es einen Punkt $u \in \operatorname{conv}\{u_{i_0}, ..., u_{i_k}\}$, so daß $u \notin \bigcup_{m=0}^{k} C_{i_m}$, also

$$\alpha_{i_m}(Au) > \alpha_{i_m}(u) \text{ für alle } m = 0, ..., k \text{ und irgendein } k = 0, 1, 2\ . \tag{2.7}$$

Das ist ein Widerspruch zu (2.5). In der Tat, nach eventueller Umnumerierung der Spitzen, bedeutet (2.7)

$$\alpha_j(Au) > \alpha_j(u) \text{ für alle } \ j = 0, ..., k \text{ und irgendein } k = 0, 1, 2.$$

Da $u \in S$ und $Au \in S$, so folgt aus (2.5)

$$\alpha_0(u) + \alpha_1(u) + \alpha_2(u) = 1 \quad \text{und} \quad \alpha_0(Au) + \alpha_1(Au) + \alpha_2(Au) = 1\ . \tag{2.8}$$

Nach der letzten Zeile ist für $k = 2$ die Beziehung (2.6) nicht möglich. Im Fall $k = 1$ oder $k = 2$ haben wir $u \in \operatorname{conv}\{u_0, u_1\}$ oder $u \in \operatorname{conv}\{u_0\}$, also entsprechend $\alpha_2(u) = 0$ oder $\alpha_1(u) = \alpha_2 = 0$. Erneut Widerspruch zu 2.8. Somit ist die Voraussetzunng (2.6) des Lemmas von *Knaster, Kuratovski* und *Mazurkievicz* gesichert. Das Lemma besagt, daß ein Punkt $v \in S$ existiert mit

$$v \in C_j \text{ für alle } \ j = 0, 1, 2.$$

Dies impliziert $\alpha_j(Av) \le \alpha_j(v)$ für alle $j = 0, 1, 2$. Gemäß (2.8) mit $u = v$ bekommen wir

$$\alpha_j(Av) = \alpha_j(v) \text{ für } j = 0, 1, 2\ .$$

Folglich ist $Av = v$. Im Fall $N = 2$ ist also v der gesuchte Fixpunkt. Die gleiche Argumentation kann man für $N \ge 3$ anwenden.

Schritt 2:

Sei jetzt M eine kompakte, konvexe, nichtleere Teilmenge eines endlichdimensionalen normierten Raumes. Dann ist M nach [Zei 95, Proposition 9, Seite 52] homöomorph zu einem N-Simplex S. Sei $C : S \longrightarrow M$ dieser Homöomorphismus. Der Operator

$$C^{-1} \circ A \circ C : S \longrightarrow M \longrightarrow M \longrightarrow S$$

ist stetig. Nach Schritt 1 existiert Fixpunkt $u \in S$ von $C^{-1} \circ A \circ C$, d. h.

$$C^{-1}(A(Cu)) = u \qquad u \in S\ .$$

Sei $v := Cu$.

$$\Rightarrow Av = v, \quad v \in M$$

Somit hat A einen Fixpunkt $v \in M$. □

DEFINITION: Seien X, Y Banachräume. Sei $M \subset X$. Der Operator $A : M \longrightarrow Y$ heißt *kompakt*, wenn A stetig ist und beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet.

SATZ 2.11 : *(Fixpunktsatz von Schauder) Sei X Banachraum. Sei $M \subset X$ nichtleer, beschränkt, abgeschlossen und konvex. Dann besitzt der kompakte Operator*

$$A : M \longrightarrow M$$

einen Fixpunkt.

Beweis: Nach dem Approximationssatz für kompakte Operatoren in [Zei 95, Proposition 13, Seite 41] existieren für alle $n \in \mathbb{N}$ endlichdimensionale Unterräume X_n und stetige Operatoren

$$A_n : M \longrightarrow X_n$$

mit

$$\|Au - A_n u\| \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } u \in M \tag{2.9}$$

Definiere $M_n := X_n \cap M$. Dann ist M_n eine beschränkte abgeschlossene, konvexe Teilmenge von X_n mit $0 \in M_n$ und $A_n(M) \subseteq \text{conv}A(M) \subseteq M$, weil M konvex ist. Nach dem *Brouwer*schen Fixpunktsatz besitzt der Operator $A_n : M_n \longrightarrow M_n$ einen Fixpunkt u_n.

$$A_n u_n = u_n, \quad u_n \in M_n \quad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

Aus (2.9) folgt

$$\|Au_n - u_n\| \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \ . \tag{2.10}$$

Weil $M \subseteq M$ für alle n, ist die Folge $\{u_n\}_n$ beschränkt. A ist kompakt. Somit existiert eine Teilfolge u_{n_k}, so daß

$$Au_{n_k} \longrightarrow v \quad \text{für } k \to \infty \ .$$

Nach (2.10) gilt

$$\|v - u_{n_k}\| \leq \|v - Au_{n_k}\| \longrightarrow 0 \quad \text{für } k \to \infty \ .$$

Aber $Au_{n_k} \in M$ für alle k und M ist abgeschlossen, d.h. $v \in M$. Stetigkeit von A hat

$$Av = v \quad \text{mit } v \in M$$

zur Folge. □

2.3 Abschätzung von Stampacchia

Lemma 2.12 : *Sei $\varphi(t)$ für $t \in [k_0, \infty)$ nichtnegativ und nichtwachsend, so daß*

$$\varphi(h) \leq \frac{c}{(h-k)^\alpha} \, |\varphi(k)|^\beta \quad \textit{mit } k_0 < k < h$$

für gewisse Konstanten c, α, β, wobei $\beta > 1$ vorausgesetzt wird. Dann gilt

$$\varphi(k_0 + d) = 0 \quad \textit{mit} \quad d^\alpha = c|\varphi(k_0)|^{\beta-1} 2^{\alpha\beta/(\beta-1)}.$$

Beweis: Betrachte die Folge

$$k_r := k_0 + d - \frac{d}{2^r} \quad \text{für } r \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ .$$

Mittels Induktion werden wir beweisen, daß

$$\varphi(k_r) \leq \frac{\varphi(k_0)}{2^{-r\mu}} \qquad \text{mit } \mu := \frac{\alpha}{1-\beta} < 0 \ . \tag{2.11}$$

Nach Voraussetzung ist

$$\varphi(k_{r+1}) \leq \frac{c 2^{(r+1)\alpha} |\varphi(k_r)|^\beta}{d^\alpha} \qquad \text{für } r \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{2.12}$$

erfüllt. Für $r = 0$ ist (2.11) trivialerweise richtig. Sei (2.11) für $1, 2, ..., r$ gültig. Aus (2.12) folgt

$$\varphi(k_{r+1}) \leq \frac{c2^{(r+1)\alpha}|\varphi(k_0)|^\beta}{d^\alpha 2^{-r\beta\mu}} \ .$$

Durch einsetzen von

$$d^\alpha = c|\varphi(k_0)|^{\beta-1}2^{\alpha\beta/(\beta-1)}$$

erhalten wir

$$\varphi(k_{r+1}) \leq \frac{\varphi(k_0)}{2^{-(r+1)\mu}} \ .$$

Somit ist der Induktionsbeweis beendet. Die Abschätzung (2.12) gilt demzufolge für alle $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Aber für $r \longrightarrow \infty$ geht die rechte Seite gegen 0, also

$$0 \leq \varphi(k_0 + d) \leq \varphi(k_r) \longrightarrow 0 \ .$$

Deswegen können wir schließen

$$0 \leq \varphi(k_0 + d) \leq 0 \ .$$

Daraus folgt $\varphi(k_0 + d) = 0$. □

Satz 2.13 : *Seien $a_{ij}(x) \in L^\infty(\Omega)$ und genügen der Ungleichung*

$$\nu|\xi|^2 \leq a_{ij}\xi_i\xi_j \qquad \text{für } \xi \in \mathbb{R}^n \text{ fast überall in } \Omega \ , \ \nu > 0 \ .$$

Seien $f_0, f_1, ..., f_n \in L^s(\Omega)$ für $s > n$ und sei $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ die Lösung von

$$\int_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\ dx = \int_\Omega (f_0 v + \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial v}{\partial x_i})\ dx \quad \forall\ v \in H_0^{1,2}(\Omega) \ .$$

Dann gilt

$$\max_\Omega |u| \leq \frac{K}{\nu}\sum_{i=0}^n \|f_i\|_{L^s(\Omega)} \mid \Omega \mid^{(1/n-1/s)} \ .$$

Bemerkung: Dabei hängt die Konstante K nicht von ν ab.

Beweis: Definiere für $k > 0$

$$v := \operatorname{sign}(u)\max\{|u| - k, 0\} = \begin{cases} u - k, & \text{falls} \quad u \ \geq k \\ 0, & \text{für} \quad |u| \ \leq k \\ u + k, & \text{falls} \quad u \ \leq -k \ . \end{cases}$$

Laut [Kin/Sta 80, Folgerung. A.5, Seite 54 und Proposition 5.3, Seite 36] ist $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$,

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{auf } A(k) := \{x \in \Omega : |u(x)| \ \geq \ k\} \quad \text{und } \frac{\partial v}{\partial x_i} = 0 \text{ sonst} \ .$$

Nach Voraussetzung ist

$$\nu|\ \nabla v\ |^2 \leq a_{ij}v_{x_i}v_{x_j} \ .$$

Integration über Ω läßt uns schließen

$$\nu\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \int_\Omega a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}\ dx = \int_\Omega a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}\ dx = \int_{A(k)} f_0 v + \sum_i f_i v_{x_i}\ dx \ .$$

Die Ungleichung von *Poincaré* liefert uns

$$\int_{A(k)} f_0 v + \sum_i f_i v_{x_i}\ dx \leq P\ \Big(\int_{A(k)} f_0^2 + \sum_i {f_i}^2\ dx\Big)^{1/2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\ .$$

Hier ist $P := \max\{\beta, 1\}$, wobei β die *Poincaré*-Konstante bei der Abschätzung des ersten Terms $f_0 v$ ist. Unter Verwendung der *Young*schen Ungleichung

$$ab \leq \frac{\varepsilon^p a^p}{p} + \frac{b^q}{\varepsilon^q q}$$

mit

$$a := P\ \Big(\int_{A(k)} f_0^2 + \sum_i {f_i}^2\ dx\Big)^{1/2},$$

$$b := \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

$$\varepsilon := \sqrt{\nu} \text{ und } p := q := 2$$

erhalten wir

$$\nu\ \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)}\ \leq\ \frac{\nu}{2}\ \|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \frac{K_1}{\nu}\ \sum_{i=0}^{n} \int_{A(k)} f_i^2\ dx\ .$$

Nach der *Hölder*schen Ungleichung ist

$$\int_{A(k)} f_i^2\ dx \leq \Big(\int_{A(k)} |f_i|^s\ dx\Big)^{2/s}\ |A(k)|^{(1-2/s)}\ ,$$

wobei mit $|A(k)|$ das Maß der Menge $A(k)$ bezeichnet sei.
Aus der letzten Ungleichung folgt

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{2K_1}{\nu^2} \sum_i \|f_i\|^2_{L^2(\Omega)}\ |A(k)|^{1-2/s}\ .$$

Wir benutzen weiter die *Sobolev*-Ungleichungen

$$\|u\|_{L^{s^*}(\Omega)} \leq c\|u\|_{H^{1,s}(\Omega)} \quad \text{und} \quad \|u\|_{C^{0,\lambda}(\Omega)} \leq c\|u\|_{H^{1,s}(\Omega)},$$

wobei der Sobolev-konjugierte Index s^* gegeben wird durch

$$\frac{1}{s^*} := \frac{1}{s} - \frac{1}{n}.$$

Die Konstante c hängt von Ω, s und der Raumdimension n ab. Die Sobolev-Ungleichung liefert

$$\Big(\int_{A(k)} (|u| -\ k)^{2^*}\ dx\Big)^{2/2^*} = \Big(\int_{\Omega} |v|^{2^*}\ dx\Big)^{2/2^*}$$

$$\leq c\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq \frac{2K_1}{\nu^2} \sum_{i=0}^{n} \|f_i\|^2_{L^s(\Omega)}\ |A(k)|^{(1-2/s)}\ . \tag{2.13}$$

Falls $0 < k < h$, so ist $A(h) \subset A(k)$ und es folgt

$$(h-k)^2\ |A(h)|^{2/2^*} \leq (\int\limits_{A(h)} (|u| -\ k)^{2^*}\ dx)^{2/2^*} \leq (\int\limits_{A(k)} (|u| -\ k)^{2^*})\ dx)^{2/2^*} \ .$$

Nach (2.13) ist

$$(h-k)^2\ |A(h)|^{2/2^*} \leq \frac{Kc}{\nu^2} \sum_{i=0}^{n} \|f_i\|^2_{L^s(\Omega)}\ |A(k)|^{(1-2/s)} \ .$$

Daraus ergibt sich

$$(h-k)^{2^*}\ |A(h)| \leq \frac{Kc}{\nu^{2^*}}\ (\sum_i \|f_i\|^2_{L^s(\Omega)})^{2^*/2}\ |A(k)|^{(1-2/s)(2/2^*)} \ .$$

Also gilt

$$|A(h)| \leq \frac{c}{\nu^{2^*}(h-k)^{2^*}}\ (\sum_i \|f_i\|^2_{L^s(\Omega)})^{2^*/2}\ |A(k)|^{\beta}$$

$$\text{mit } \beta := \left(1 - \frac{2}{s}\right)\frac{2^*}{2} = \frac{1-\frac{2}{s}}{1-\frac{2}{n}} \ .$$

Aus $s > n$ folgt $\beta > 1$. Wir werden die Vorausetzungen für Lemma 2.12 überprüfen. Aus $s > n$ folgt $\beta > 1$. Die Abbildung $h \mapsto |A(h)|$ ist nichtnegativ und aus $0 < k < h$ folgt $A(h) \subset A(k)$, also ist sie nichtwachsend. Bezeichnen wir diese Abbildung mit φ. Es gilt $|u(x)| \geq 0$ für alle $x \in \Omega$. Folglich ist $A(0) = \Omega$. Somit bekommen wir $\varphi(0) = |\Omega|$. Setzen wir $\alpha := 2^*$. Sei β wie oben definiert. Damit sind die Bezeichnungen konform mit der Notation in Lemma 2.12. Nach Lemma 2.12 gilt mit $k_0 := 0$

$$\varphi(d) = 0 \quad \text{mit} \quad d^{\alpha} = c|\varphi(0)|^{\beta-1}2^{\alpha\beta/(\beta-1)} = c|\Omega|^{\beta-1}2^{\alpha\beta/(\beta-1)} \ . \tag{2.14}$$

Für den Exponenten $\beta - 1$ von $|\Omega|$ in der letzten Gleichung erhalten wir

$$\beta - 1 = \frac{1-\frac{2}{s}}{1-\frac{2}{n}} - 1 = \frac{\frac{2}{n}-\frac{2}{s}}{1-\frac{2}{n}} = \frac{2(s-n)n}{ns(n-2)} \ .$$

Mit

$$\alpha = 2^* = \frac{2n}{n-2}$$

können wir schließen, daß

$$\frac{\beta-1}{\alpha} = \frac{\beta-1}{2^*} = \frac{2(s-n)n}{ns(n-2)}\frac{(n-2)}{2n} = \frac{s-n}{ns} = \frac{1}{n} - \frac{1}{s} \ .$$

Aus (2.14) bekommen wir für d den Ausdruck

$$d = c|\Omega|^{(\beta-1)/\alpha}2^{\beta(\beta-1)}$$

Wenn wir die Definition von φ verwenden, ergibt sich daraus

$$A(d) = 0 \quad \text{mit} \quad d = \frac{c}{\nu}(\sum_{i=0}^{n} \|f_i\|^2_{L^s(\Omega)})^{1/2}\ |\Omega|^{(1/n-1/s)} \ ,$$

wobei die Konstante c in der Behauptung vom Lemma 2.12 durch

$$\frac{c}{\nu^{2^*}} \Big(\sum_{i=0}^{n} \|f_i\|^2_{L^s(\Omega)} \Big)^{2^*/2}$$

ersetzt wird. Daraus folgt

$$|u(x)| \le d \quad \text{fast überall in } \Omega \ ,$$

also

$$\max_{\Omega} |u| \le \frac{K}{\nu} \ \Big(\sum_{i=0}^{n} \|f_i\|^2_{L^s(\Omega)} \Big)^{1/2} \ |\Omega|^{(1/n - 1/s)} \ .$$

□

Kapitel 3

Elliptisches Problem

3.1 Dirichlet-Problem

Sei Ω offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. Betrachten wir das Dirichlet-Problem für gegebene Funktion f:

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \tag{3.1}$$

Falls $f \in C^0(\Omega)$, dann bezeichnen wir als klassische Lösung eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \bigcap C^0(\overline{\Omega})$, die die erste Gleichung in (3.1) erfüllt und auf dem Rand $\partial\Omega$ verschwindet.

Sei u klassische Lösung von (3.1). Sei $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Multiplikation von $-\Delta u = f$ mit φ und Integration über Ω führt zu

$$\int_\Omega -\Delta u . \varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx.$$

Es gilt

$$-\Delta u . \varphi = -\mathrm{div}(\varphi \nabla u) + \nabla u \nabla \varphi.$$

Also haben wir

$$\int_\Omega -\mathrm{div}(\varphi \nabla u) \, dx + \int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx.$$

Nach dem Satz von *Gauß* verschwindet das erste Integral und wir bekommen

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi \, dx = \int_\Omega f\varphi \, dx \quad , \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \; . \tag{3.2}$$

Um die Forderung an die Lösung $u \in C^2(\Omega)$ abzuschwächen, suchen wir nach einer Funktion $u \in H^{1,p}(\Omega)$, die der Gleichung (3.2) genügt, und auf dem Rand $\partial\Omega$ verschwindet, also $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$. Aus der Dichtheit von $\mathcal{D}(\Omega)$ in $H_0^{1,2}(\Omega)$ folgt

$$u \in H_0^{1,2}(\Omega), \qquad \int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = \int_\Omega fv \, dx, \quad \forall v \in H_0^{1,2}(\Omega) \; . \tag{3.3}$$

Wir nennen (3.3) die *schwache Formulierung* von (3.1). So sind wir in der Lage, auch für nicht genügend glatte Funktionen f eine Lösung u zu finden.

Satz 3.1 : *Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt in einer Richtung. Sei $f \in H^{-1}$ der duale Raum von $H_0^{1,2}(\Omega)$. Dann existiert eindeutige Lösung von (3.3).*

Beweis: In $H_0^1(\Omega)$ ist

$$(u,v) \longmapsto \int\limits_\Omega \nabla u \nabla v \, dx$$

Skalarprodukt, weil die Normen $\|v\|_{H^{1,2}(\Omega)}$ und $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ äquivalent sind. Die Behauptung folgt aus dem Darstellungssatz von *Riesz*. □

3.2 Satz von Lax-Milgram

Der Satz von *Lax-Milgram* erlaubt uns, Probleme vom Typ (3.3) zu lösen, wenn die linke Seite der zweiten Gleichung kein Skalarprodukt, sondern eine allgemeinere Bilinearform ist.

Satz 3.2 : *(Lax-Milgram) Sei H ein Hilbertraum über $\mathbb{R}$. Sei $a : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform, dermaßen, daß*

(i) a stetig ist, d.h. es existiert $C \in \mathbb{R}$ mit

$$a(u.v) \le C \ \|u\| \ \|v\| \ , \quad \forall u, v \in H$$

(ii) a ist koerzitiv, d.h. es existiert $\alpha > 0$, so daß

$$a(u,u) \ge \alpha \ \|u\|^2 \quad \textit{für alle } u \in H.$$

Dann existiert zu jedem $f \in H'$, dem Dualraum von H,eine eindeutige Lösung u von

$$a(u,v) = \langle f, v \rangle, \qquad \forall v \in H. \tag{3.4}$$

Falls zusätzlich a symmetrisch ist, so ist u die einzige Minimalstelle für das Funktional

$$J(v) := \frac{1}{2} a(v,v) - \langle f, v \rangle$$

im Hilbertraum H.

Hier bezeichnet $\langle \ , \ \rangle$ die Dualitätsklammer zwischen H' und H und $(\ , \ )$ sei die Notation für das Skalarprodukt.

Beweis: Aus der Stetigkeit von a folgt, daß die Linearform $v \mapsto a(u,v)$ stetig ist. Nach dem Darstellungssatz von *Riesz* existiert ein eindeutig bestimmtes $Au \in H$ mit

$$a(u,v) = (Au, v) \text{ für alle } \ v \in H \ .$$

Die Abbildung $u \mapsto Au$ ist linear. Wir behaupten, daß AH ein dichter Unterraum von H ist.
Begründung: Sei $v \in (AH)^\perp$, das orthogonale Komplement von AH. Dann ist

$$0 = (Av, v) = a(v,v) \ge \alpha \|v\|^2 \ .$$

Daraus folgt $v = 0$, also liegt AH dicht in H.

Sei $f \in H'$. Nach dem Satz von *Riesz* existiert ein eindeutiges $\tilde{f} \in H$ mit $\langle f, v\rangle = (\tilde{f}, v)$ für alle $v \in H$. Weil AH dicht in H liegt, existiert eine Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ mit

$$Au_n \longrightarrow \tilde{f} \text{ in } H \ . \tag{3.5}$$

Jede konvergente Folge ist beschränkt, es existiert eine Konstante C mit $\|Au_n\| \le C$.

$$\Rightarrow (Au_n, u_n) \le \|Au_n\| \ \|u_n\| \le C\|u_n\|$$

Die Koerzitivität von a läßt uns schließen

$$\alpha\|u_n\|^2 = (Au_n, u_n) \le C\|u_n\| \quad \Rightarrow \|u_n\| \le C \ .$$

Die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt in H. Man kann eine Teilfolge $\{u_{n_k}\}_k$ auswählen, so daß $u_{n_k} \rightharpoonup u$ schwach in H. Aus (3.5) folgt

$$(Au_{n_k}, v) \longrightarrow \langle f, v\rangle \text{ für alle } v \in H \ .$$

Aber $a(u_{n_k}, v) = a(u_{n_k}, v) \longrightarrow a(u, v)$, weil $a(\cdot, v)$ linear und stetig ist. Somit ist u Lösung von

$$a(u, v) = \langle f, v\rangle \quad \text{für alle } v \in H \ . \tag{3.6}$$

Zur Eindeutigkeit: Sei u' eine andere Lösung von (3.6).

$$a(u, v) = a(u', v) \quad \forall v \in H$$

Sei $v := u - u'$. Koerzitivität von a liefert

$$\alpha\|u - u'\|^2 \le a(u - u', u - u') = 0 \ .$$

Es ist $\alpha > 0$. Daraus folgt $u = u'$.

Sei jetzt a symmetrisch und sei u eindeutige Lösung von (3.6). Für alle $v \in H$ haben wir

$$\begin{aligned} J(u+v) &= \frac{1}{2}a(u+v, u+v) - \langle f, u+v\rangle \\ &= \frac{1}{2}a(u,u) + a(u,v) + \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f, u\rangle - \langle f, v\rangle = J(u) + \frac{1}{2}a(v,v) \ . \end{aligned}$$

Wenn wir v durch $v - u$ ersetzen, erhalten wir

$$J(v) = J(u) + \frac{1}{2}a(v-u, v-u) \quad \forall\ v \in H \ .$$

Die Bilinearform a ist koerzitiv. Es gilt also

$$a(v-u, v-u) > 0 \quad \text{für } v \ne u \ .$$

Daraus folgt $J(v) > J(u)$ für $v \ne u$. Dies bedeutet daß u die einzige Minimalstelle von J in H ist. □

3.3 Nichtlineare elliptische Probleme

Wenn man nichtlineare elliptische Probleme lösen möchte, kann man beispielsweise Fixpunktargumente benutzen. Zuerst muß man das Problem in endlichdimensionalen Räumen lösen und dann zum Grenzfall übergehen. Um diesen Grenzübergang zu Banachräumen zu bewerkstelligen, haben wir mehrere Verfahren zur Auswahl. Zwei sehr bekannte Vorgehensweisen sind die Kompaktheitsmethode und die Monotoniemethode, die in den nächsten Abschnitten beschrieben werden.

3.3.1 Kompaktheitsmethode

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt und offen. Sei $f \in H^{-1}(\Omega)$. Betrachten wir das Problem

$$u \in H_0^1(\Omega) \ , \quad -\frac{\partial}{\partial x_i} a(x,u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = f \quad \text{in } \Omega \ , \tag{3.7}$$

unter der Voraussetzung, daß a eine Carathéodory-Funktion ist, d.h.

$$\begin{aligned} u \mapsto a(x,u) &\text{ ist stetig für fast alle } x \in \Omega \\ x \mapsto a(x,u) &\text{ ist meßbar für alle } u \in \mathbb{R} \ . \end{aligned}$$

Außerdem werden wir annehmen, daß a nach oben und nach unten beschränkt ist. Die untere und obere Schranke seien mit m und M bezeichnet:

$$0 < m \leq a(x,u) \leq M \quad \text{für fast alle } x \in \Omega \text{ und } \forall\ u \in \mathbb{R}$$

Man kann zeigen, daß unter diesen Bedingungen das Problem lösbar ist. Das werden wir im folgenden Satz formulieren.

Satz 3.3 : *Unter obigen Voraussetzungen existiert Lösung von (3.7).*

Beweis: Erneut schöpfen wir Inspiration aus der numerischen Analysis und konstruieren zuerst eine Näherung des Problems.

Sei $V_h, h \in \mathbb{R}$ eine Familie von endlichdimensionalen Teilräumen von $H_0^1(\Omega)$, so daß

$$\forall\ v \in H_0^1(\Omega)\ \exists\ v_h \in V_h \text{ mit } \quad \lim_{h \to 0} v_h = v \text{ in } H_0(\Omega) \ .$$

Es existieren solche Familien von Teilräumen. Der erste Schritt ist, eine Näherung für u zu finden. Zu diesem Zweck behaupten wir: Es existiert eine Lösung u_h von

$$u_h \in V_h, \quad \int_\Omega a(x,u_h) \nabla u_h \cdot \nabla v_h \ dx = \langle\ f, v\ \rangle \quad \forall\ v \in V_h \ . \tag{3.8}$$

Begründung: Sei $w \in V_h$. Nach dem Satz von *Lax-Milgram* angewendet auf V_h mit

$$a(u,v) := \int_\Omega a(x,w) \nabla u \nabla v \ dx$$

existiert eine eindeutige Lösung $u = T(w)$ von

$$u \in V_h, \quad \int_\Omega a(x,w) \nabla u \nabla v \ dx = \langle\ f, v\ \rangle \quad \forall\ v \in V_h \ . \tag{3.9}$$

In V_h sind alle Normen äquivalent, da V_h endlichdimensional ist. Deshalb können wir die Einschränkung der $H_0^1(\Omega)$-Norm auf V_h benutzen, d.h. die Norm

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = (\int_\Omega |\ \nabla v\ |^2 \ dx)^{1/2} \ .$$

Setzt man $v := u$ in (3.9) und zieht man die Beschränktheit

$$0 < m \le a(x,u) \le M \quad \text{für fast alle } x \in u,\ \forall u \in \mathbb{R}$$

von a in Betracht, so erhält man

$$m\|\nabla u\|^2_{L^2\Omega} \le \int_\Omega a(x,w)|\ \nabla u\ |^2\ dx = \langle f,u\rangle \le \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \cdot \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\ .$$

Daraus ergibt sich

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{\|f\|_{H^{-1}(\Omega)}}{m} = \|\frac{f}{m}\|_{H^{-1}(\Omega)}\ . \tag{3.10}$$

Angenommen, wir wählen $w \in B(0, \|\frac{f}{m}\|_{-1(\Omega)}) \subset V_h$, die Kugel mit Radius $\|\frac{f}{m}\|_{H^{-1}(\Omega)}$, so wird $u = T(w)$ ebenso in dieser Kugel liegen. Falls wir die Stetigkeit von der Abbildung T nachweisen könnten, so gäbe es nach dem *Brouwer*schen Fixpunktsatz einen Fixpunkt von T in V_h. Sei also $\{w_n\}_n \subset V_h$ eine Folge mit $w_n \longrightarrow w$ in V_h. Sei u_n die Lösung von (3.9), die zu w_n gehört. Die Abschätzung (3.10) gilt auch für u_n und wir können eine Teilfolge u_{n_k} auswählen, so daß $u_{n_k} \longrightarrow u \in V_h$, weil V_h endlichdimensionaler Raum ist. Nach eventueller Auswahl einer Teilfolge w_{n_k} können wir behaupten

$$w_{n_k} \longrightarrow w \quad \text{fast überall in } \ \Omega\ .$$

Weil u_n Lösung, assoziiert mit w_n ist, gilt

$$\int_\Omega a(x,w_{n_k})\nabla u_{n_k}\nabla v\ dx = \langle f,v\rangle\ , \quad \forall\ v \in V_h$$

Die linke Seite konvergiert für $k \longrightarrow \infty$ gegen $\int_\Omega a(x,w)\nabla u\nabla v\ dx$, weil $\nabla u_{n_k} \longrightarrow \nabla u$ in $L^2(\Omega)$ und wegen $a(x,w_{n_k}) \longrightarrow a(x,w)$, was aus der Stetigkeit von a folgt. Außerdem ist a beschränkt.

$$v \in V_h \subset H^1_0 \quad \Rightarrow \quad \nabla v \in L^2(\Omega)$$

Folglich

$$\int_\Omega a(x,w)\nabla u\nabla v\ dx = \langle\ f,v\ \rangle\ \forall\ v \in V_h\ . \tag{3.11}$$

Daraus können wir schließen

$$u = T(w)\ .$$

Aber $u = T(w)$ ist der einzig mögliche Grenzwert für die Teilfolgen von u_n. Das garantiert uns nach dem Satz von *Lax-Milgram* die Eindeutigkeit der Lösung von (3.11). Es folgt also

$$T(w_n) = u_n \longrightarrow u = T(w) \quad \Rightarrow T(w_n) \longrightarrow T(w)\ .$$

Die letzte Zeile bedeutet, daß T stetig ist. Somit ist die Existenz einer Lösung von (3.8) gezeigt. Hier endet der Beweis der Begründung.

Der zweite Schritt ist, uns zu vergewissern, daß u_h tatsächlich eine Lösung liefert, wenn wir zum unendlichdimensionalen Fall übergehen. Sei $v \in H^{1,2}_0(\Omega)$. Sei $v_h \in V_h$ mit $\lim_{h\to 0} v_h = v$. Die Abschätzung (3.10) bleibt gültig. Also ist u_h beschränkt in $H^{1,2}_0$. Nach dem Satz von *Rellich* ist die Einbettung

$$H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

kompakt. Demzufolge existiert $u \in H_0^1(\Omega)$, so daß nach Auswahl einer Teilfolge von u_h

$$\begin{array}{lll} u_h & \rightharpoonup u & \text{in } H_0^1(\Omega) \\ u_h & \to u & \text{in } L^2(\Omega) \\ u_h & \to u & \text{fast überall in } \Omega \end{array}$$

gilt. Die Abbildung $w \mapsto a(x,w)$ ist stetig nach Voraussetzung.

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow a(x,u_h) & \longrightarrow & a(x,u) \\ v, v_h \in H_0^1(\Omega) & \Rightarrow & \nabla v, \nabla v_h \in L^2(\Omega) \\ \Rightarrow a(x,u_h)\nabla v_h & \longrightarrow & a(x,u)\nabla v \text{ in } L^2(\Omega) \\ \int\limits_\Omega a(x,u_h)\nabla u_h \nabla v_h \, dx & = & \langle\, f, v_h \,\rangle \text{ nach Lemma 2.7} \end{array}$$

Grenzübergang liefert

$$\int\limits_\Omega a(x,u)\nabla u \nabla v \, dx = \langle\, f, v_h \,\rangle ,$$

d. h. wir haben eine Lösung von (3.7) konstruiert. □

Die gleiche Technik wird später angewendet, wenn nichtlokale Probleme der Gestalt

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad \frac{\partial}{\partial x_i} a(x, l(u)) \frac{\partial u}{\partial x_i} + f = 0 \text{ in } \Omega$$

untersucht werden. Hier ist l eine stetige Linearform auf $H_0^1(\Omega)$, zum Beispiel

$$l(u) := \int\limits_\Omega u(x) \, dx .$$

3.3.2 Monotoniemethode

Für $f \in H^{-1}(\Omega)$ sei das Problem gegeben

$$u \in \; H_0^1(\Omega), \quad -\frac{\partial}{\partial x_i}(A_i(\nabla u)) = f \text{ in } \Omega \tag{3.12}$$

unter der Voraussetzung, daß $A_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ für $i = 1, ..., n$ stetige Funktionen sind. Es gelte noch

$$|A_i(\xi) - A_i(\xi')| \le C|\xi - \xi'| \quad i = 1, ..., n, \; \forall\, \xi, \xi' \in \mathbb{R}^n \tag{3.13}$$

$$\sum_{i=1}^n (A_i(\xi) - A_i(\xi'))(\xi_i - \xi_i') \;\ge\; \alpha|\xi - \xi'|^2 \quad \forall\, \xi, \xi' \in \mathbb{R}^n \tag{3.14}$$

für gewisse Konstanten C und α. Wir untersuchen, ob schwache Lösungen von (3.12) zu finden sind.

Satz 3.4 : *Unter obigen Annahmen existiert eine eindeutige Lösung von (3.12).*

Beweis: Die Eindeutigkeit wird relativ einfach nachgewiesen. Seien u_1, u_2 zwei schwache Lösungen. Dann muß erfüllt sein

$$\int_\Omega (A_i(\nabla u_1) - A_i(\nabla u_2))\frac{\partial v}{\partial x_i}\ dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\ .$$

Setzen wir $v := u_1 - u_2$. Die Gleichung (3.14) führt zu

$$\alpha \int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2 dx \le \int_\Omega (A_i(\nabla u_1) - A_i(\nabla u_2))(\frac{\partial u_1}{\partial x_i} - \frac{\partial u_2}{\partial x_i})\ dx = 0\ .$$

Folglich bekommt man

$$\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2\ dx = 0\ .$$

Daraus schließen wir

$$u_1 = u_2\ .$$

Als nächster Schritt des Beweises untersuchen wir die Existenz einer Näherungslösung in endlichdimensionalen Teilräumen V_h von $H_o^1(\Omega)$.

Lemma 3.5 : *Es existiert eindeutige Lösung u_h von*

$$u_h \in V_h, \qquad \int_\Omega A_i(\nabla u_h)\frac{\partial v}{\partial x_i}\ dx = \langle\ f, v\ \rangle\ \forall\ v \in V_h\ . \tag{3.15}$$

Beweis: Die Eindeutigkeit kann wie oben nachgewiesen werden.

Zur Existenz: Wir führen Basis $w_1, ..., w_N$ von V_h ein. Dann ist die äquivalente Aufgabenstellung ein

$$u_h = \sum_{i=1}^N \xi_i w_i$$

zu finden, so daß

$$\int_\Omega A_i(\sum_{i=1}^N \xi_i \nabla w_i)\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\ dx = \langle\ f, w_j\ \rangle\ \forall\ j = 1, ..., N\ .$$

Es sei mit

$$B := \int_\Omega A_i(\nabla(\sum_{i=1}^N \xi_i w_i))\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\ dx, \text{ und } b_j := \langle\ f, w_j\ \rangle$$

bezeichnet. Dann ist folgendes System zu Lösen:

$$B_j(\xi) = b_j, \quad j = 1, ..., N\ .$$

Im weiteren können wir annehmen, daß $A_i(0) = 0$. Wenn erforderlich, kann man den Operator A_i durch $A_i - A_i(0)$ ersetzen. Das beeinflußt in keiner Weise die weiteren Abschätzungen für die Lösung u. Nach dieser Translation von A_i um den Punkt $-A_i(0)$

hat man $B_i(0) = 0$ erreicht. Laut Voraussetzung sind A_i Lipschitz-stetig, demzufolge sind auch B_i Lipschitz-stetig. Also

$$\sum_{j=1}^{N} (B_j(\xi) - B_j(\xi'))(\xi_j - \xi_j')$$

$$= \int_\Omega \left(A_i(\nabla(\sum_{i=1}^{N} \xi_i w_i)) - \ A_i(\nabla(\sum_{i=1}^{N} \xi_i' w_i)) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}(\sum_{i=1}^{N} \xi_i w_i) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\sum_{i=1}^{N} \xi_i' w_i) \right) \ dx$$

$$\geq \alpha \int_\Omega |\nabla(\sum_{j=1}^{N} \xi_j w_j) - \nabla(\sum_{j=1}^{N} \xi_j' w_j)|^2 \ dx \ .$$

V_h ist endlichdimensionaler Raum und alle Normen sind äquivalent.

$$\alpha \int_\Omega |\nabla(\sum_{i=1}^{N} \xi_i w_i) - \nabla(\sum_{i=1}^{N} \xi_i' w_i)|^2 \ dx \geq \alpha C \ |\xi - \xi'|^2$$

Dann erhalten wir

$$\left(\sum_{j=1}^{N} B_j(\xi) - \sum_{j=1}^{N} B_j(\xi') \right) (\xi_j - \xi_j') \geq \alpha C \ |\xi - \xi'|^2 \ .$$

Aus (3.13) folgt die gleiche Aussage für B_j mit einem anderen Wert für die Konstante C.

$$|B_i(\xi) - B_i(\xi')| \leq C|\xi - \xi'| \quad \forall \ i = 1, ..., N \in, \ \forall \ \xi, \xi' \in \mathbb{R}^n \tag{3.16}$$

Das System

$$B_j(\xi) = b_j, \quad j = 1, ..., N$$

ist äquivalent dazu ein $\xi \in \mathbb{R}^n$ zu finden mit

$$\xi_j - \varepsilon B_j(\xi) + \varepsilon b_j = \xi_j \ \ \forall \ j = 1, ..., n \ , \tag{3.17}$$

d. h. einen Fixpunkt für den Operator B_j in $\mathbb{R}^n$ zu finden. Der Operator B_j ist nach(3.16) Lipschitz-stetig für alle $j = 1, ..., n$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz existiert eine Lösung ξ, die eindeutig ist. Der Banachsche Fixpunktsatz wird für die Abbildung $\xi_i \mapsto \xi_i - \varepsilon B_i(\xi) + \varepsilon b_i$ in Einzelheiten in[Chi 00, Seite 63] bewiesen. Demzufolge gibt es eine eindeutig bestimmte Funktion u_h, die unser Näherungsproblem (3.15) im Raum V_h löst. Hiermit ist das Lemma bewiesen. □

Um den Grenzfall zu betrachten setzen wir in (3.15) $v := u_h$. Einerseits gilt

$$\alpha \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq (\int_\Omega A(\nabla u_h) \frac{\partial u_h}{x_i} \ dx)^2$$

und andererseits ist

$$\langle \ f, u_h \ \rangle \leq \|f\|_{V_h'} \|\nabla u_h\|_{L^2(\Omega)} \ .$$

Daraus kann man schließen, daß u_h beschränkt in $H_0^1(\Omega)$ ist:

$$\|u_h\| \leq \frac{1}{\alpha} \|f\|_{V_h'}$$

Es existiert $u \in H_0^1(\Omega)$ mit $u_h \rightharpoonup u$ in $H_0^1(\Omega)$. Sei $\{v_h\}_h \subset V_h$ mit

$$\lim_{h\to 0} v_h = v \text{ in } H_0^1(\Omega)\ .$$

Es folgt

$$\int_\Omega A_i(\nabla u_h)\frac{\partial v_h}{\partial x_i}\ dx = \langle\ f, v_h\ \rangle\ . \tag{3.18}$$

An dieser Stelle sei bemerkt, daß man in der linken Seite von (3.18) nicht in der Lage ist, Grenzübergang zu vollziehen. Es muß die Monotonieeigenschaft von A ins Spiel gebracht werden. Ersetzt man v_h durch $v_h - u_h$ in (3.18), so bekommt man auf Grund der Monotonie von A

$$\int_\Omega (A_i(\nabla u_h) - A_i(\nabla v_h))\frac{\partial}{\partial x_i}(v_h - u_h)\ dx + \int_\Omega A_i(\nabla v_h)\frac{\partial}{\partial x_i}(v_h - u_h)\ dx = \langle\ f, v_h\ \rangle\ .$$

Das erste Integral ist größer gleich $\alpha \int_\Omega |\nabla u_h - \nabla v_h|^2\ dx \geq 0$. Wir lassen etwas Nichtnegatives weg und erhalten die Ungleichung

$$\int_\Omega A_i(\nabla v_h)\frac{\partial}{\partial x_i}(v_h - u_h)\ dx \geq \langle\ f, v_h - u_h\ \rangle\ .$$

Die obige Ungleichung ist eine Folgerung aus der Monotonieeigenschaft des Operators A.

Aus $v_h \to v$ in $H_0^{1,2}(\Omega)$ kann man schließen, daß sich Teilfolge $v_n(x)$ auswählen läßt mit $\nabla v_n(x) \to \nabla v(x)$ fast überall in Ω. Nach Grenzübergang wird aus der letzten Ungleichung

$$\int_\Omega A_i(\nabla v)\frac{\partial}{\partial x_i}(v - u)\ dx \geq \langle\ f, v - u\ \rangle\ .$$

Nun kann man für v die Funktion $u + tw \in H_0^1(\Omega)$ einsetzen.

$$\int_\Omega A_i(\nabla u + t\nabla w)\frac{\partial w}{\partial x_i}\ dx \geq \langle\ f, tw\ \rangle \quad \forall\ w \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow \int_\Omega A_i(\nabla u + t\nabla w)\frac{\partial w}{\partial x_i}\ dx \geq \langle\ f, w\ \rangle \quad \forall\ w \in H_0^1(\Omega)$$

Falls $t \longrightarrow 0$, so kann man

$$\int_\Omega A_i(\nabla u)\frac{\partial w}{\partial x_i}\ dx \geq \langle\ f, w\ \rangle \quad \forall\ w \in H_0^1(\Omega)$$

schließen. Man ersetze w durch $-w$:

$$\int_\Omega A_i(\nabla u)\frac{\partial w}{\partial x_i}\ dx \leq \langle\ f, w\ \rangle \quad \forall\ w \in H_0^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow \int_\Omega A_i(\nabla u)\frac{\partial w}{\partial x_i}\ dx = \langle\ f, w\ \rangle \quad \forall\ w \in H_0^1(\Omega)$$

Die Funktion u ist die gesuchte Lösung. Hiermit ist der Satz bewiesen. □

3.4 Nichtlokale nichtlineare elliptische Probleme

In diesem Abschnitt sei Ω eine offene, beschränkte Menge des $\mathbb{R}^n, n \geq 2$. An Ω stellen wir eine zusätzliche Forderung, die durch folgende zwei Definitionen gegeben wird.

Definition: Wir sagen, das Gebiet Ω erfüllt die *äußere Kegelbedingung*, falls für jeden Punkt $\xi \in \partial\Omega$ ein endlicher Kreiskegel K mit Spitze in ξ existiert, so daß $\overline{K} \cap \overline{\Omega} = \{\xi\}$ gilt.

Definition: Man sagt Ω erfüllt die *gleichmäßige äußere Kegelbedingung auf* $\Gamma \subset \partial\Omega$, falls Ω der Bedingung von der letzten Definition in jedem Punkt $x_0 \in \Gamma$ genügt und alle Kegel V_{x_0} kongruent zu einem festgegebenen Kegel V sind.

Bevor wir die Existenz von Lösungen nichtlokaler elliptischer Probleme untersuchen, werden wir zwei Resultate aus [Gil/Tru 01] zitieren, die wir ohne Beweis übernehmen werden.

Satz 3.6 : *Es sei vorausgesetzt, daß Ω die gleichmäßige Kegelbedingung von der letzten Definition auf einem Teil Γ des Randes $\partial\Omega$ erfüllt. Seien $f_i \in L^p(\Omega), i = 1, ..., n$, $f_0 \in L^{p/2}(\Omega)$ für ein $p > n$. Gegeben sei die Gleichung*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u + b_i(x)u\right) + c_i\frac{\partial}{\partial x_i}u + d(x)u = f_0 + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}f_i \quad \text{in } \Omega \ .$$

Für a_{ij} gelte die Bedingung

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \text{für alle } x \in \Omega, \forall\xi \in \mathbb{R}^n \ . \tag{3.19}$$

Die Koeffizienten in der Gleichung seien beschränkt, d. h. es existieren Konstanten Λ und $\beta \geq 0$, so daß für alle $x \in \Omega$

$$\sum_{i,j}|a_{ij}(x)|^2 \leq \Lambda^2 \ ,$$

$$\lambda^{-2}\sum_i(|b_i(x)|^2 + |c_i(x)|^2) + \lambda^{-1}|d(x)| \leq \beta^2$$

gilt. Falls $u \in H^{1,2}(\Omega)$ eine Lösung von der obigen Gleichung ist und falls Konstanten K, α existieren mit

$$\sup_{x,y\in\partial\Omega\cap B_R(x_0)}|u(x) - u(y)| \leq KR^\alpha \quad \text{für alle } x_0 \in \Gamma \ ,$$

wobei $R > 0$ ist, so folgt daraus, daß $u \in C^\delta(\Omega \cup \Gamma)$ für ein $\delta > 0$. Für beliebiges $\Omega' \subset\subset \Omega \cup \Gamma$ gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{C^\delta(\Omega')} \leq C(\sup_\Omega|u| + K + k)$$

mit $\delta = \delta(n, \Lambda, \lambda, \beta, d', V, p, \alpha)$ und $C = C(n, \Lambda, \lambda, \beta, d', V, p, \alpha)$. Dabei sind d' und k definiert durch

$$d' := \mathit{dist}\ (\Omega', \partial\Omega \setminus \Gamma), \quad k := \lambda^{-1}(\sum_i\|f_i\|_{L^p} + \|f_0\|_{L^{p/2}}) \ .$$

Falls $\Omega' = \Omega$, so muß dann d' durch diam Ω ersetzt werden.

Beweis: [Gil/Tru 01, Satz 8.29, Seite 205].

Bemerkung: Die Größe $\sup_{x,y\in\Omega}|u(x)-u(y)|$ nennt man *Oszillation von u in Ω.*

Satz 3.7 : *Sei Ω ein $C^{1,\delta}$ Gebiet. Seien $f_0 \in L^\infty, f_i \in C^\delta(\overline{\Omega})$ und $u_0 \in C^{1,\delta}(\overline{\Omega})$. Gegeben sei das Problem*

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}u+b_i(x)u\right)+c_i\frac{\partial}{\partial x_i}u+d(x)u=f_0+\sum\frac{\partial}{\partial x_i}f_i \quad \text{in } \Omega\\&u=u_0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}\tag{3.20}$$

Die Koeffizienten genügen der Bedingung (3.19) und den Bedingungen

$$\int_\Omega dv - b_i\frac{\partial}{\partial x_i}v\ dx \le 0, \forall v\ge 0,\ v\in\ C_0^1(\Omega)$$

$$\max_{i,j=1,\dots,n}\|a_{ij}\|_{C^{0,\delta}(\Omega)}, \|b_i\|_{C^{0,\delta}(\Omega)}, \|c_i\|_{C^0(\Omega)}, \|d\|_{C^0(\Omega)} \le k\ .$$

Dann ist das verallgemeinerte Dirichlet-Problem (3.20) eindeutig lösbar in $C^{1,\delta}(\bar{\Omega})$.

Beweis: [Gil/Tru 01, Satz 8.34, Seite 211].

Lemma 3.8 *Gilt für eine unendliche Funktionenmenge M*

$$\|f\|_{C^\nu(\Omega)} \le a, \forall f\in M,$$

dann ist M in $C(\Omega)$ und $C^\mu(\Omega)$ mit $0<\mu<\nu$ relativ kompakt.

Beweis: [KTW 71, Seite 59]

Als Abschuß zur Vorbereitung der theoretischen Grundlagen für den Existenzsatz formulieren wir folgendes Konvergenzprinzip.

Satz 3.9 : *(Konvergenzprinzip) Sei $\{x_n\}_n$ eine Folge im Banachraum X. Sei $x\in X$. Besitzt jede Teilfolge von $\{x_n\}_n$ eine gegen x konvergente Teilfolge, dann ist $x_n \longrightarrow x$. Ist der Raum reflexiv, dann besitzt jede beschränkte Folge $\{x_n\}_n$ eine schwach konvergente Teilfolge $\{x_{n_k}\}_k$. Haben alle schwach konvergenten Teilfolgen von $\{x_n\}_n$ den gleichen Grenzwert x, so ist dann $x_n \rightharpoonup x$.*

Beweis: [Zei 77, Satz 10.2, Seite 117].

3.4.1 Existenz

Die Funktionen

$$a_{ij}:\Omega\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$$

seien Carathéodory-Funktionen, d. h.

$$\begin{aligned}x&\longmapsto a_{ij}(x,y) \quad \text{ist meßbar} \quad \forall y\in\mathbb{R},\forall i,j=1,...,n\\ y&\longmapsto a_{ij}(x,y) \quad \text{ist stetig} \quad \text{für fast alle } x\in\Omega\ .\end{aligned}\tag{3.21}$$

Wir setzen noch voraus, daß zwei positive Konstanten α, β existieren, so daß

$$\alpha\|\xi\|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(x,y)\xi_i\xi_j \leq \beta\|\xi\|^2 \ . \tag{3.22}$$

Dann werden wir für

$$\varphi : \Omega \longrightarrow \Omega \quad \text{meßbar} \tag{3.23}$$

und für $\lambda = \lambda(x) \geq 0, f \in H^{-1}(\Omega)$ das nichtlokale Problem

$$u \in H_0^1(\Omega), \quad -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x, u(\varphi(x)))\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \lambda u = f \quad \text{in } \Omega \tag{3.24}$$

nach schwachen Lösungen untersuchen. Dabei werden wir noch annehmen, daß

$$f = f_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad \text{mit } f_0 \in L^{p/2}(\Omega),\ f_i \in L^p(\Omega),\ i = 1, ..., n \tag{3.25}$$

für irgendein $p > n \geq 2$.

Satz 3.10 : *Es sei angenommen, daß Ω die gleichmäßige Kegelbedingung von der Definition auf Seite 31 erfüllt und daß λ eine nichtnegative meßbare beschränkte Funktion ist. Unter den obigen Voraussetzungen (3.21)–(3.25) existiert eine schwache Lösung von dem Problem (3.24).*

Beweis: Eine schwache Lösung wird definiert durch

$$\int_\Omega (a_{ij}(x, u(\varphi(x)))\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \lambda u)\ dx = \int_\Omega (f_0 v + \sum_i f_i \frac{\partial v}{\partial x_i})\ dx \quad \forall v \in H_0^{1,2}(\Omega) \ . \tag{3.26}$$

Die Abschätzung von Stampacchia aus Abschnitt 2.3 garantiert uns die Beschränktheit von u. Wenn u eine Lösung von (3.26) ist, so existiert dann eine Konstante $C = C(\alpha, \beta, \Omega, n, p)$ mit

$$|u|_\infty := \sup_{x\in\Omega}|u(x)| \leq C(\|f_0\|_{L^{p/2}} + \sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_{L^p}) \ . \tag{3.27}$$

Sei

$$B := \{w \in C(\bar{\Omega}) : |w|_\infty \leq C\ (\|f_0\|_{L^{p/2}} + \sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_{L^p})\} \ .$$

Für $w \in B$ folgt nach dem Satz von Lax-Milgram, daß eine Lösung $u = T(w) \in H_0^{1,2}(\Omega)$ von

$$\int_\Omega (a_{ij}(x, w(\varphi(x)))\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \lambda u.v)\ dx = \int_\Omega (f_0 v + \sum_i f_i \frac{\partial v}{\partial x_i})\ dx \quad \forall v \in H_0^{1,2}(\Omega) \tag{3.28}$$

existiert. Wenn wir a_{ij} als unabhängig von u betrachten, ist es klar, daß u der Stampacchia-Abschätzung (3.27) genügt. Um die Aussage des Satzes zu beweisen, werden wir zeigen, daß der Operator T einen Fixpunkt besitzt. Wir werden die Voraussetzungen des Schauderschen Fixpunktsatzes für T überprüfen. Nach Satz 3.6 erfüllt $u = T(w)$ für ein $\delta \in (0,1)$ die Ungleichung

$$\|u\|_{C^\delta(\bar{\Omega})} \leq C \ , \tag{3.29}$$

wobei die Konstante C nicht von $w \in B$ abhängt. Zur Anwendung von Satz 3.6 muß man jedoch wissen, daß

$$\sup_{x,y \in \partial\Omega \cap B_R(x_0)} |u(x) - u(y)| \leq KR^\alpha \quad \text{für alle } x_0 \in \Gamma \ .$$

Diese Ungleichung ist im Sinne der Definition auf Seite 14 zu verstehen. Wenn (3.27) erfüllt ist, so bildet T von B nach B ab. Aus der vorletzten Ungleichung $\|u\|_{C^\delta(\bar{\Omega})} \leq C$ können wir schließen, daß $T(B)$ präkompakt in $C(\bar{\Omega})$ ist. Diese Behauptung folgt nach Lemma 3.8.

Jetzt werden wir die Stetigkeit von T nachweisen. Sei also $w_n \in B$, so daß

$$w_n \longrightarrow w \in C(\overline{\Omega}) \ ,$$

d. h. w_n konvergiert gegen w gleichmäßig in $\bar{\Omega}$. Sei $u_n := T(w_n)$. Die Gleichung (3.28) gilt für jedes v aus dem Sobolevraum $H_0^{1,2}(\Omega)$. Setzen wir $v := u_n$. Dann kann man (3.28) für $w := w_n$ aufschreiben:

$$\int_\Omega (a_{ij}(x, w_n(\varphi(x))) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} + \lambda u_n u_n) \ dx = \int_\Omega (f_0 u_n + \sum_i f_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i}) \ dx \tag{3.30}$$

Nach der Hölderschen Ungleichung ist

$$\int_\Omega (f_0 u_n + \sum_i f_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i}) \ dx \leq \|f_0\|_{L^2} \|u_n\|_{L^2} + \sum_{i=1}^n \|f_i\|_{L^2} \|\nabla u_n\|_{L^2}$$

oder mit Konstanten C_1 und C_2

$$\int_\Omega (f_0 u_n + \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i}) \ dx \leq C_1 \|u_n\|_{L^2} + C_2 \|\nabla u_n\|_{L^2} \ .$$

Nach der *Poincaré*-Abschätzung für $u_n \in H_0^{1,2}(\Omega)$ erhält man

$$\int_\Omega (f_0 u_n + \sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial u_n}{\partial x_i}) \ dx \leq C_3 \|\nabla u_n\|_{L^2} \ . \tag{3.31}$$

Die linke Ungleichng in (3.22) lautet für $\xi_i := \partial_i u_n$

$$\alpha \|\nabla u_n\|^2 \leq a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \ .$$

Demzufolge ist

$$\int_\Omega \alpha \|\nabla u_n(x)\|^2 \ dx \leq \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \ dx \ ,$$

was nichts anderes bedeutet als

$$\alpha \|\nabla u_n\|_{L^2}^2 \leq \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \ dx.$$

Die Ungleichung stimmt immer noch, wenn man $\int_\Omega \lambda u_n^2 \; dx > 0$ zum Integral addiert

$$\alpha \|\nabla u_n\|_{L^2}^2 \leq \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} + \lambda u_n^2 \; dx.$$

Die letzte Ungleichung zusammen mit (3.31) liefert unter Beachtung von (3.30)

$$\alpha \|\nabla u_n\|_{L^2}^2 \leq C_3 \|\nabla u_n\|_{L^2} \; .$$

Also erhalten wir

$$\|\nabla u_n\|_{L^2} \leq C \; ,$$

wobei die Konstante C unabhängig von u_n ist, d. h. u_n ist gleichmäßig beschrankt in $H_0^{1,2}(\Omega)$. Die Abschätzung (3.29) ist gültig auch für $u := u_n$. Weil $\|u_n\|_{C^\delta(\bar\Omega)} \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, so können wir eine Teilfolge u_{n_k} auswählen, so daß für eine Grenzfunktion $u_\infty \in H_0^{1,2}(\Omega) \; \cap C(\overline{\Omega})$

$$u_{n_k} \to u_\infty \text{ in } C(\overline{\Omega}) \quad \text{und} \quad u_{n_k} \rightharpoonup u_\infty \text{ in } H_0^{1,2}(\Omega)$$

gilt. Die Differentialgleichung (3.28) kann jetzt für die Teilfolge u_{n_k} aufgeschrieben werden. Dann erhält man

$$\int_\Omega (a_{ij}(x, w_{n_k}(\varphi(x))) \frac{\partial u_{n_k}}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \lambda u_{n_k}.v) \; dx = \int_\Omega (f_0 v + \sum_i f_i \frac{\partial v}{\partial x_i}) \; dx \quad \forall v \in H_0^{1,2}(\Omega) \quad . \tag{3.32}$$

Nach Voraussetzung sind a_{ij} Carathéodory-Funktionen, d. h. a_{ij} sind stetig im zweiten Argument. Deshalb können wir schließen

$$a_{ij}(x, w_{n_k}(\varphi(x))) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \longrightarrow a_{ij}(x, w(\varphi(x))) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \text{ fast überall in } \Omega \; .$$

Wenn wir die Beschränktheit

$$a_{ij}(x, w_{n_k}(\varphi(x))) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \leq C \mid \nabla v \mid$$

von a_{ij} als Voraussetzung zum Satz von Lebesgue auffassen, so können wir die Richtigkeit der letzten Grenzwertaussage auch im Raum $L^2(\Omega)$ mit dem eben erwähnten Satz der majorisierten Konvergenz nachweisen.

$$a_{ij}(x, w_{n_k}(\varphi(x))) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \longrightarrow a_{ij}(x, w(\varphi(x))) \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \text{ in } L^2(\Omega)$$

Der Grenzübergang in (3.32)

$$\int_\Omega (a_{ij}(x, w(\varphi(x))) \frac{\partial u_\infty}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \lambda u_\infty.v) \; dx = \int_\Omega (f_0 v + \sum_i f_i \frac{\partial v}{\partial x_i}) \; dx \quad \forall v \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

überzeugt uns davon, daß $u_\infty = T(w)$. Nach dem Konvergenzprinzip, siehe Satz 3.9, ist der einzig mögliche Grenzwert für eine Teilfolge von u_n durch $u = T(w)$ bestimmt. Letztendlich bekommen wir $T(w_n) = u_n \longrightarrow u = T(w)$, also

$$T(w_n) \longrightarrow T(w) \text{ in } C(\bar\Omega) \; .$$

Das beweist die Stetigkeit des Operators T. Nach dem Fixpunktsatz von *Schauder* besitzt das Problem (3.24) eine Lösung. □

Dieses Ergebnis kann man auch auf Probleme mit Nicht-Nullrandwerten erweitern. Die vorgeschriebenen Randwerte möchten aus Verträglichkeitsgründen die gleiche Regularität aufweisen, die die Lösung besitzt.

SATZ 3.11 : *Sei λ eine nichtnegative meßbare beschränkte Funktion, Ω erfülle die gleichmäßige Kegelbedingung von der Definition auf Seite 31. Unter den Voraussetzungen (3.21)–(3.25) existiert eine schwache Lösung von*

$$\bar{u}\mid_{\partial\Omega}= g \in C^{\delta}(\partial\Omega), \quad -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x,\bar{u}(\varphi(x)))\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}\right) + \lambda\bar{u} = f \quad \textit{in } \Omega \tag{3.33}$$

BEWEIS: Sei $\{g_m\}_m \subset C^1(\overline{\Omega})$ eine Funktionenfolge, die auf dem Rand $\partial\Omega$ gleichmäßig gegen g konvergiert. Sei $u := \bar{u} - g$. Dann ist die äquivalente Problemstellung

$$\begin{aligned} &u \in H_0^{1,2}(\Omega) \\ -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x,(u+g)(\varphi(x)))\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \quad &+ \quad \lambda u \\ &= f \quad + \quad \frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}(x,(u+g)(\varphi(x)))\frac{\partial g}{\partial x_j} - \lambda g \quad \text{in } \Omega\ . \end{aligned} \tag{3.34}$$

Wir werden zeigen, daß zu jedem $g_m \in C^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung u_m des Problems

$$\begin{aligned} &u_m \in H_0^{1,2}(\Omega) \\ &-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x,(u_m+g_m)(\varphi(x)))\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right) + \lambda u_m \\ &= f + \frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}(x,(u_m+g_m)(\varphi(x)))\frac{\partial g_m}{\partial x_j} - \lambda g_m \quad \text{in } \Omega \end{aligned} \tag{3.35}$$

existiert. Die Koeffizienten a_{ij} sind beschränkt und meßbar. Wie beim Beweis des letzten Satzes werden wir die Strategie verfolgen, den Fixpunktsatz von *Schauder* anzuwenden und wählen eine Kugel

$$B := \{w \in C(\bar{\Omega}) : \mid w\mid_\infty \le C\ (\|f_0 + \lambda g_m\|_{L^{p/2}} + \sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_{L^p} + \|a_{ij}\frac{\partial g_m}{\partial x_j}\|_{L^p})\}\ .$$

Nach dem Satz von Lax-Milgram folgt, daß für $w \in B$ eine Lösung $u_m = T(w) \in H_0^{1,2}(\Omega)$ von

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (a_{ij}(x,(w+g_m)(\varphi(x)))\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \lambda u_m v)\ dx \\ &= \int_\Omega (f_0 v + \sum_i f_i\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_{ij}((w+g_m)(\varphi(x)))\frac{\partial g_m}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} - \lambda g_m v)\ dx \quad \forall v \in H_0^{1,2}(\Omega) \end{aligned}$$

existiert. Die Koeffizienten a_{ij} sind unabhängig von u_m, folglich erfüllt die Lösung u_m die Stampacchia-Abschätzung

$$\mid u_m\mid_\infty \le C\ (\|f_0 + \lambda g_m\|_{L^{p/2}} + \sum_{i=1}^{n}\|f_i\|_{L^p} + \|a_{ij}\frac{\partial g_m}{\partial x_j}\|_{L^p})\ .$$

Weiter wird genauso wie im letzten Satz argumentiert, daß der Operator T stetig ist. Bei der Argumentation muß $\|f_i\|_{L^p}$ durch

$$\|f_i\|_{L^p} + \|a_{ij}\frac{\partial g_m}{\partial x_j}\|_{L^p}$$

und $\|f_0\|_{L^{p/2}}$ durch

$$\|f_0 + \lambda g_m\|_{L^{p/2}}$$

ersetzt werden. Die Menge $T(B)$ ist nach Satz 3.6 präkompakt und die Stetigkeit von T wird wie folgt für die neue rechte Seite gezeigt.

Sei $\{w_n\}_n \subset B$, so daß w_n gleichmäßig in $C(\overline{\Omega})$ gegen w konvergiert. Wir definieren $u_m^n := T(w_n)$. Einsetzen von $v := u_m^n$ in die schwache Formulierung von (3.35) für u_m^n führt nach Standardabschätzungen, vergleiche (3.30) ff., zur Ungleichung

$$\|u_m^n\|_{L^2} \leq C \ .$$

Außerdem gilt $\|u_m^n\|_{C^\delta(\bar{\Omega})} \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Deswegen kann eine Teilfolge von $\{u_m^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ausgewählt werden, mit deren Hilfe die Stetigkeit von T gezeigt wird. Nach dem *Schauder*schen Fixpunktsatz existiert Lösung u_m von (3.35).

Also gibt es zu jedem $g_m \in C^1(\overline{\Omega})$ eine Lösung u_m von (3.35). Nach Satz 3.6 ist

$$u_m \in C^\delta(\Omega \cup \partial\Omega) = C^\delta(\overline{\Omega})$$

und u_m erfüllt für ein $\delta \in (0,1)$ als Lösung der Differentialgleichung (3.35)

$$\|u_m\|_{C^\delta(\bar{\Omega})} \leq C \quad \forall m \in \mathbb{N} \ ,$$

wobei die Konstante C nicht von m abhängt. An dieser Stelle sollte man sich davon überzeugen, daß die obige Ungleichung für ein festes δ erfüllt ist, d. h. das δ hängt nicht von m ab. Nach dem oben zitierten Satz 3.6 hängt δ von folgenden Größen

$$\delta = \delta(n, \Lambda, \lambda, \beta, d', V, p, \alpha)$$

ab. Die Raumdimension n bleibt die gleiche und steht in keiner Beziehung zum Folgenindex m. An dem Differentialoperator ändert sich nichts und demzufolge bleiben β, λ und Λ die selben. Der Abstand d' hängt nur vom Gebiet Ω' ab und in keiner Weise von der rechten Seite, insbesondere nicht von g_m. Mit p wird der Integrierbarkeitsindex der Funktionen auf der rechten Seite bezeichnet. In unserem Fall ist $g_m \in C^1(\overline{\Omega})$ für alle $m \in \mathbb{N}$, a_{ij} sind meßbar und beschränkt, daher hängt p nicht von m ab. Der Kegel V von der gleichmäßigen Kegelbedingung auf Seite 31, die wir an das Gebiet Ω stellen, wird nicht von der Funktionenfolge g_m beeinflußt. Nach dem Satz von de Giorgi und Nash in der Formulierung in [Gil/Tru 01, Satz 8.22, Seite 200] hangt die Konstante α von der Raumdimension n und von den Größen Λ, λ, β und p ab. Laut der hier zitierten Version, Satz 3.12, von de Giorgi und Nash hängt das δ nur von der Raumdimension, von den Konstanten Λ, λ und vom Gebiet Ω_0 ab. Somit ist gezeigt, daß die obige Ungleichung für ein festes δ erfüllt ist.

Wir können also gemäß der letzten Ungleichung eine Teilfolge u_{m_k} auswählen, so daß für eine Grenzfunktion $u_\infty \in H_0^{1,2}(\Omega) \ \cup C(\overline{\Omega})$

$$u_{m_k} \longrightarrow u_\infty \quad \text{in } C(\bar{\Omega}) \quad \text{und} \quad u_{m_k} \rightharpoonup u_\infty \quad \text{in } H_0^{1,2}(\Omega)$$

gilt. Die Gleichung (3.35) kann nun für die Teilfolge u_{m_k} aufgeschrieben werden. In schwacher Form lautet (3.35)

$$\int_\Omega (a_{ij}(x, u_{m_k}(\varphi(x)))\frac{\partial u_{m_k}}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \lambda u_{m_k}.v)\ dx \tag{3.36}$$

$$= \int_\Omega (f_0 v + \sum_i f_i \frac{\partial v}{\partial x_i}) a_{ij}(u_{m_k} - g_{m_k}(\varphi(x)))\frac{\partial g_{m_k}}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \lambda g_{m_k} v\ dx \quad \forall v \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

Die Koeffizienten a_{ij} sind beschränkt und als Carathéodory-Funktionen stetig im letzten Argument. Nach dem Satz von Lebesgue gilt

$$a_{ij}(x, u_{m_k}(\varphi(x)))\frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \longrightarrow a_{ij}(x, u_\infty(\varphi(x)))\frac{\partial v}{\partial x_j}(x) \text{ in } L^2(\Omega)$$

Der Grenzübergang in (3.36)

$$\int_\Omega (a_{ij}(x, u_\infty(\varphi(x)))\frac{\partial u_\infty}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \lambda u_\infty v)\ dx \tag{3.37}$$

$$= \int_\Omega (f_0 v + \sum_i f_i \frac{\partial v}{\partial x_i}) a_{ij}(u_\infty - g(\varphi(x)))\frac{\partial g}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \lambda g v\ dx \quad \forall v \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

zeigt, daß u_∞ (3.34) löst. Es gilt $\bar{u} = u_\infty + g$. Damit ist sichergestellt, daß $\bar{u}$ die vorgeschriebenen Randwerte annimmt, da u_∞ in $H_0^{1,2}(\Omega)$ liegt. Außerdem folgt aus (3.37), daß $\bar{u}$ eine Losung von (3.33) darstellt, weil (3.34) die äquivalente Aufgabenstellung zu unserem ursprünglichen Problem ist. Somit ist die Aussage des Satzes bewiesen. □

3.4.2 Eindeutigkeit unter Glattheitsvoraussetzungen

Wir haben schon im Abschnitt 1.3 ein Gegenbeispiel genannt, bei dem die Eindeutigkeit verletzt wird. Jetzt werden wir den Fall untersuchen, bei dem eine eindeutige Lösung existiert.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Rand von der Klasse $C^{1,\delta}$ für irgendein δ. Weiter sei vorausgesetzt, daß $f_0 = 0$ und

$$f_1, ..., f_n, \lambda \in C^{1,\delta}(\Omega)\ .$$

Desweiteren nehmen wir an, daß die Koeffizienten $a_{ij}(x, y)$ von der Klasse C^1 sind, d. h. einmal stetig differenzierbar in x und y.

SATZ 3.12 *(E. de Giorgi, J. Nash) Sei $u \in H_0^{1,2}(\Omega)$ schwache Lösung von*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u(x)) = 0\ ,$$

wobei die meßbaren und beschränkten Koeffizienten die Strukturbedingung

$$\lambda|\xi|^2 \le a_{ij}\xi_i\xi_j, \quad a_{ij} \le \Lambda\ , \quad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

mit Konstanten $0 < \lambda < \Lambda < \infty$ erfüllen sollen. Dann ist u hölderstetig in Ω. Genauer existieren zu jedem $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ ein $\delta \in (0,1)$ und eine Konstante c mit

$$|u(x) - u(y)| \le c|x - y|^\delta\ , \quad \forall x, y \in \Omega_0\ .$$

Dabei hängt δ nur von der Raumdimension n, von den Konstanten λ, Λ und vom Gebiet Ω_0 ab. Die Konstante c hängt zusätzlich noch von

$$\sup_{\Omega_0} u - \inf_{\Omega_0} u$$

ab.

Beweis: [Jos 98, Seite 254].
Diese Aussage war ursprünglich von E. de Giorgi und J. Nash unabhängig voneinander mit jeweils verschiedenen Methoden bewiesen worden, bevor J. Moser den in [Jos 98] vorgeführten Beweis mittels der Harnackschen Ungleichung fand.

In diesem Abschnitt sei noch angenommen, daß φ eine invertierbare Abbildung der Klasse C^1 ist. Die Umkehrabbildung nennen wir ψ. Wir bezeichnen mit J die Supremumsnorm der Determinante von der Jacobi-Matrix $(\partial_j \psi_i)_{ij}$

$$J := \|\det \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}\right)_{ij} \|_\infty := \sup_{y \in \bar{\Omega}} |\det \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}\right)_{ij} | \ .$$

Satz 3.13 : *Eine Voraussetzung sei die gleichmäßige Lipschitz-Stetigkeit von $a_{ij}(x,y)$ in der Variablen y:*

$$|a_{ij}(x,y) - a_{ij}(x,y')| \leq \gamma |y - y'| \quad \textit{für fast alle } x \in \Omega, \forall\ y, y' \in \mathbb{R} \tag{3.38}$$

Es gelte noch

$$\gamma n C_1 \sqrt{J} \sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_{L^p} + \|f_i\|_\delta < \alpha C_2 \ , \tag{3.39}$$

wobei C_2 das Reziproke der Poincaré-Konstanten in der Poincaré-Abschätzung

$$C_2 \|v\|_{L^2} \leq \|\nabla v\|_{L^2} \quad \forall\ v \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

bezechnet. Unter obigen Voraussetzungen hat das Problem (3.26) eindeutige Lösung.

Beweis: Wenn wir die Koeffizienten a_{ij} von der Klasse $L^\infty(\Omega)$ und als unabhängig von u auffassen, so folgt aus dem Satz 3.12 von *de Giorgi* und *Nash*, daß die Lösung u zur Funktionenklasse $C^\delta(\bar{\Omega})$ für irgendein $\delta \in (0,1)$ gehört, d. h. u ist hölderstetig. Aber $\varphi \in C^1$ und es folgt, daß $u(\varphi(\cdot)) \in C^\delta(\overline{\Omega})$ und das gleiche gilt für die Koeffizienten a_{ij}:

$$a_{ij}(\cdot, u(\varphi(\cdot))) \in C^\delta$$

Nach Satz 3.7 gehört jede Lösung u von(3.26) zur Funktionenklasse $C^{1,\delta}(\overline{\Omega})$. Gemäß der Stampacchia-Abschätzung vom Abschnitt 2.3 gilt für die Lösung u

$$\|u\|_\infty \leq C_1 \sum_i \|f_i\|_{L^p(\Omega)} \ .$$

Nach [Chi 00/1, Seite 257] ist erfüllt

$$\|u\|_{C^{1,\delta}(\overline{\Omega})} \leq C_0(\|u\|_\infty + \sum_i \|f_i\|_\delta) \leq C_1(\sum_i \|f_i\|_{L^p(\Omega)} + \sum_i \|f_i\|_\delta) \ . \tag{3.40}$$

Annahme: Seien u_1, u_2 zwei Lösungen von (3.26). Setzen wir $w := u_1 - u_2$. Durch Subtraktion der beiden Gleichungen, die entsprechend mit u_1 und u_2 erfüllt sind, erhält man

$$\int\limits_\Omega a_{ij}(x, u_1(\varphi(x)))\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \lambda(x)(u_1 - u_2)v \; dx$$
$$= \int\limits_\Omega a_{ij}(x, u_2(\varphi(x))) - a_{ij}(x, u_1(\varphi(x)))\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} \; dx \; .$$

Die letzte Gleichung gilt für alle $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$, insbesondere auch für $v := w$.

$$\int\limits_\Omega a_{ij}(x, u_1(\varphi(x))) \; \frac{\partial w}{\partial x_i} \; \frac{\partial w}{\partial x_j} + \lambda(x)w^2 \; dx$$
$$= \int\limits_\Omega a_{ij}(x, u_2(\varphi(x))) - a_{ij}(x, u_1(\varphi(x)))\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} \; dx \; .$$

Die Bedingung der Lipschitz-Stetigkeit (3.38) für die rechte Seite der obigen Gleichung liefret

$$\int\limits_\Omega \; a_{ij}(x, u_2(\varphi(x))) - a_{ij}(x, u_1(\varphi(x)))\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} \; dx \quad \leq \quad \gamma\int\limits_\Omega \sum_{i,j} |w| \; |\frac{\partial w}{\partial x_j}| \; |\frac{\partial u_2}{\partial x_i}| \; dx \; .$$

Es gilt noch

$$\gamma\int\limits_\Omega \sum_{i,j} |w| \; |\frac{\partial w}{\partial x_j}| \; |\frac{\partial u_2}{\partial x_i}| \; dx \; = \gamma\int\limits_\Omega \sum_j \left(\; 1 \cdot |\frac{\partial w}{\partial x_j}|\right) \left(\sum_i 1 \cdot \; |w||\frac{\partial u_2}{\partial x_i}|\right) \; dx \; .$$

Nach Cauchy-Schwarz ist

$$\gamma\int\limits_\Omega \sum_j \left(\; 1 \cdot |\frac{\partial w}{\partial x_j}|\right) \left(\sum_i 1 \cdot \; |w||\frac{\partial u_2}{\partial x_i}|\right) \; dx$$
$$\leq \gamma\int\limits_\Omega \sqrt{n}\left(\sum_j \; |\frac{\partial w}{\partial x_j}|^2\right)^{1/2} \cdot \sqrt{n}\left(\sum_i \; |w|^2|\frac{\partial u_2}{\partial x_i}|^2\right)^{1/2} \; dx \; .$$

Nach der Hölderschen Ungleichung für $p = 2$ erhalten wir

$$\gamma\int\limits_\Omega \sqrt{n}\left(\sum_j \; |\frac{\partial w}{\partial x_j}|^2\right)^{1/2} \cdot \sqrt{n}\left(\sum_i \; |w|^2|\frac{\partial u_2}{\partial x_i}|^2\right)^{1/2} \; dx$$
$$\leq \gamma n \left(\int_\Omega \sum_j \; |\frac{\partial w}{\partial x_j}|^2 \; dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_\Omega \sum_i \; |w|^2|\frac{\partial u_2}{\partial x_i}|^2 \; dx\right)^{1/2}$$
$$= \gamma n \left(\int\limits_\Omega \left(\; |\nabla w|^2\right) dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_\Omega \; |w|^2|\nabla u_2|^2 \; dx\right)^{1/2} \; .$$

Es gilt also

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} a_{ij}(x, u_2(\varphi(x))) - a_{ij}(x, u_1(\varphi(x)))\frac{\partial u_2}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}\ dx \\
&\leq \gamma n \left(\int\limits_{\Omega} \left(\ |\nabla w|^2\right) dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_{\Omega}\ |w|^2 |\nabla u_2|^2\ dx\right)^{1/2} .
\end{aligned}$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} a_{ij}(x, u_1(\varphi(x)))\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} + \lambda(x) w^2\ dx \\
&\leq \gamma n \left(\int\limits_{\Omega} \left(\ |\nabla w|^2\right) dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_{\Omega}\ |w|^2 |\nabla u_2|^2\ dx\right)^{1/2} .
\end{aligned}$$

Nachdem wir $\lambda w^2 \geq 0$ weglassen, bekommen wir

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} a_{ij}(x, u_1(\varphi(x)))\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}\ dx \\
&\leq \gamma n \left(\int\limits_{\Omega} \left(\ |\nabla w|^2\right) dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_{\Omega}\ |w|^2 |\nabla u_2|^2\ dx\right)^{1/2} .
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Gemäß der linken Ungleichung in der Elliptizitätsbedingung (3.22) für die Koeffizienten a_{ij} gilt mit $\xi_i := \partial w / \partial x_i$

$$\alpha |\nabla w|^2 \leq a_{ij}(x, u_1(\varphi(x)))\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j} .$$

Integration über Ω ergibt

$$\alpha \int\limits_{\Omega} |\nabla w|^2\ dx \leq \int\limits_{\Omega} a_{ij}(x, u_1(\varphi(x)))\frac{\partial w}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_j}\ dx .$$

Zusammen mit (3.41) ergibt dies

$$\alpha \int\limits_{\Omega} |\nabla w|\ dx \leq \gamma n \left(\int\limits_{\Omega} \left(\ |\nabla w|^2\right) dx\right)^{1/2} \cdot \left(\int\limits_{\Omega}\ |w|^2 |\nabla u_2|^2\ dx\right)^{1/2} .$$

Wir erhalten also

$$\alpha \|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \gamma n \left(\int\limits_{\Omega} \left(\ |\nabla w|^2 |\nabla u_2|^2\right) dx\right)^{1/2} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} .$$

Demnach gilt

$$\alpha \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \leq \gamma n \left(\int\limits_{\Omega}\ |\nabla w|^2 |\nabla u_2|^2 dx\right)^{1/2} .$$

Daraus können wir schließen

$$\alpha^2 \|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} \leq n^2\gamma^2 \int\limits_\Omega w^2 |\nabla u_2|^2 \; dx \; .$$

Die linke Seite kann man unter Berücksichtigung der *Poincaré*-Ungleichung in $H_0^1(\Omega)$ folgendermaßen von unten abschätzen

$$\alpha^2 C_2^2 \|w\|^2_{L^2(\Omega)} \leq n^2\gamma^2 \int\limits_\Omega w^2 |\nabla u_2|^2 \; dx \; .$$

Aus (3.40) kann man schließen

$$\alpha^2 C_2^2 \|w\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \gamma^2 n^2 C_1^2 (\sum_i \|f_i\|_{L^2(\Omega)} + \|f_i\|_\delta)^2 \int\limits_\Omega w^2(\varphi(x)) \; dx \; . \tag{3.42}$$

Nach dem Transformationssatz für Integrale in [Els 91, Seite 201 ff.] oder [Bau 92, Seite 127] gilt

$$\int\limits_\Omega w(\varphi(x)^2 \; dx = \int\limits_{\varphi(\Omega)} w(y)^2 \; |detD\psi(y)| \; dy \; .$$

Also können wir schreiben

$$\|w\|^2_{L^2(\Omega)} = \int\limits_\Omega w(\varphi(x)^2 \; dx = \int\limits_{\varphi(\Omega)} w(y)^2 \; |detD\psi(y)| \; dy \; .$$

Im weiteren gilt nach Definition für J die Abschätzung

$$\int\limits_{\varphi(\Omega)} w(y)^2 \; |detD\psi(y)| \; dy \leq J \int\limits_{\varphi(\Omega)} w(y)^2 \;\; dy \; .$$

Die Funktion φ bildet das Gebiet Ω auf Ω ab, also $\varphi(\Omega) = \Omega$. Setzen wir $y := \varphi(x)$ in das obige Integral in 3.42, so erhalten wir

$$\alpha^2 C_2^2 \|w\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \gamma^2 n^2 C_1^2 (\sum_i \|f_i\|_{L^2(\Omega)} + \|f_i\|_\delta)^2 J \|w\|_{L^2(\Omega)} \; .$$

Falls $w \neq 0$, so stände dies im Widerspruch zur Voraussetzung (3.39). Somit ist bewiesen, daß die Lösung u eindeutig bestimmt ist. □

Kapitel 4

Parabolisches Problem

In diesem Kapitel untersuchen wir das Problem, das unter dem Namen *Wärmeleitungsgleichung* bekannt ist. Diese ist auch zur Modellierung der zeitlichen Entwicklung einer Population geeignet. Im Kapitel 1.1 wurde die genaue Herleitung dieser Gleichung geschildert. Der Laplace-Operator Δ kann auch durch einen allgemeineren elliptischen Operator ersetzt werden.

Sei Ω ein Gebiet im $\mathbb{R}^n$. Für gegebene Funktionen $f(x,t), u_0(x)$ suchen wir $u = u(x,t)$ die Lösung von

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u = f \quad & \text{in} \quad \Omega \times (0,T) \\ u(x,t) = 0 \quad & \text{auf} \quad \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad & \text{in} \quad \Omega \end{aligned} \tag{4.1}$$

für eine feste Zeit T. Es kann nach klassischen Lösungen gesucht werden, wenn alle Gleichungen von (4.1) im üblichen Sinne aufgefaßt werden. Ähnlich wie beim *Dirichlet*-Problem können wir aber die zweite Gleichung als

$$u(\cdot,t) \in H_0^{1,2}(\Omega)$$

interpretieren. Unter der Voraussetzung, daß $v \in H_0^{1,2}(\Omega)$, multiplizieren wir die erste Gleichung mit v und integrieren über Ω

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega uv\ dx + \int_\Omega \nabla u \nabla v\ dx = \int_\Omega fv\ dx \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega)\ . \tag{4.2}$$

Jetzt kann man die Anforderungen an das ursprüngliche Problem (4.1) abschwächen und nach Lösungen u suchen, so daß (4.2) in $\mathcal{D}'(0,T)$ erfüllt ist. Dafür braucht man einige funktionalanalytische Mittel, die im nächsten Abschnitt vorbereitet werden.

4.1 Funktionalanalysis für parabolische Probleme

4.1.1 Funktionalräume zur Behandlung instationärer Probleme

Will man einen instationären Prozeß, der in einem räumlichen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abläuft, im Zeitintervall $(0,T)$ beschreiben, so kann man mit zeit- und ortsabhängigen Funktionen arbeiten, d. h. mit Funktionen u, die jedem Paar $(t,x) \in (0,T) \times \Omega$ eine reelle Zahl oder einen Vektor $u(t,x)$ zuordnen. In dieser Auffassung treten Zeit und Ort völlig gleichberechtigt auf. Es hat sich jedoch herausgestellt, daß eine andere Auffassung zur mathematischen Beschreibung instationärer Prozesse weit besser geeignet ist. Diese Auffassung geht davon aus, daß man es bei instationären Prozessen mit Zeitfunktionen zu tun hat, die jedem Zeitpunkt t eine Funktion $u(t,\cdot\,)$ des Ortes zuordnen. Beispielsweise wird jedem Zeitpunkt eine Temperatur-, Geschwindigkeit- oder Konzentrationverteilung im Gebiet Ω zugeordnet. Man betrachtet also Funktionen, die auf dem Zeitintervall $(0,T)$ definiert sind und deren Werte Elemente eines Raumes von Ortsfunktionen sind, z. B. des Raums $H_0^1(\Omega)$ oder irgendeines anderen Raums von Ortsfunktionen.

Sei X ein Banachraum. Im Zusammenhang mit der Behandlung zeitabhängiger Probleme ist es zweckmäßig, Räume von Funktionen der Art $(0,T) \longrightarrow X$ einzuführen, insbesondere Räume von differenzierbaren und integrierbaren Funktionen. Zuerst untersuchen wir aber die Frage nach der separaten Betrachtung von Raum- und Zeitkoordinaten. Im nächsten Abschnitt wird genauer erklärt durch welche Besonderheiten die Zweckmäßigkeit der unterschiedlichen Behandlung von Zeit- und Ortsvariablen motiviert wird.

4.1.2 Besonderheiten bei der Behandlung parabolischer Probleme

Sehen wir uns wieder das Problem (4.1) an. Die Gleichung (4.2) schreiben wir in der Form

$$\frac{d}{dt}(u(t),v)_H + a(u(t),v) = (f(t),v)_H \;, \quad \text{für alle } v \in V := H_0^{1,2}(\Omega) \quad . \tag{4.3}$$

Die erste Besonderheit kommt bei festgehaltener Zeit zum Ausdruck. Bei fester Zeit fassen wir die Funktion $x \mapsto u(x,t)$ der räumlichen Variablen x als Element des Sobolevraumes $H_0^{1,2}(\Omega)$ auf. Damit wird die Randbedingung $u = 0$ auf $\partial\Omega \times (0,T)$ erfüllt. Dieses so entstehende Element von $H_0^{1,2}(\Omega)$ bezeichnen wir kurz mit $u(t) \in H_0^{1,2}(\Omega)$. Bei variabler Zeit t entsteht eine Funktion $t \mapsto u(t)$ der zeitlichen Variablen t mit Werten in $H_0^{1,2}(\Omega)$.

Die zweite Besonderheit besteht im Auftreten zweier Räume $L^2(\Omega)$ und $H_0^{1,2}(\Omega)$. Dabei gilt $H_0^{1,2}(\Omega) \;\subset L^2(\Omega)$ und $H_0^{1,2}(\Omega)$ ist dicht in $L^2(\Omega)$.

Eine weitere Besonderheit resultiert daraus, daß man die Zeitableitung in (4.2) im verallgemeinerten Sinne aufzufassen hat.

Die vierte Besonderheit ergibt sich aus der Wahl der Räume für die Lösung $t \mapsto u(t)$. Man wählt dazu Sobolevräume vektorwertiger Funktionen mit der Norm

$$\|u\| := \Big(\int_0^T \|u(t)\|_V^2 \; dt\Big)^{1/2} + \Big(\int_0^T \|u'(t)\|_{V'}^2 \; dt\Big)^{1/2} \;.$$

Dabei ist u' verallgemeinerte Ableitung von u. Sie wird so definiert, daß

$$\langle\, u'(t), v \,\rangle_V = \frac{d}{dt}(u(t),v)_{H'} \text{ für alle } v \in V$$

gilt. Benutzt man den durch

$$\langle\, Au, v \,\rangle_V := a(u,v)$$

erklärten Operator $A : V \to V'$ und das durch

$$\langle\, b(t), v \,\rangle_V := (f(t),v)_H$$

definierte Element $b(t) \in V'$, dann geht (4.3) über in die abstrakte Differentialgleichung 1. Ordnung

$$u'(t) + Au(t) = b(t), \quad u(0) = u_0 \in H \ .$$

Die obige Gleichung ist auch unter dem Namen *Evolutionsgleichung* bekannt.

4.1.3 Räume stetig differenzierbarer Funktionen

Sei X ein Banachraum mit der Norm $\| \cdot \|$.

Definition: Eine Funktion $u : (0,T) \to X$ heißt *differenzierbar im Punkt* $t \in (0,T)$, wenn ein Element $x \in X$ existiert, für welches

$$\lim_{h \to 0} \| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - x \| = 0$$

gilt. Das Element x bezeichnet man als Ableitung von u im Punkt t. Man schreibt üblicherweise $u'(t)$. Eine Funktion u heißt differenzierbar, wenn sie in jedem Punkt von $(0,T)$ differenzierbar ist. Die Funktion $u' : (0,T) \to X$, die in jedem $t \in (0,T)$ die Ableitung von u im Punkt t zuordnet, heißt Ableitung von u.

Definition: Eine Funktion $u : (0,T) \to X$ heißt *schwach differenzierbar im Punkt* $t \in (0,T)$, wenn es ein Element $x \in X$ gibt, so daß

$$\lim_{h \to 0} \langle \ f, \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - x \ \rangle = 0 \quad \forall f \in X' \ .$$

Das Element x bezeichnet man als schwache Ableitung von u im Punkt t.

Definition: Eine Abbildung A einer abgeschlossenen Teilmene M eines Banachraumes X in einen Banachraum Y heißt *demistetig* wenn aus $x_n \longrightarrow x$ in $X, \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$, die Beziehung $Ax_n \rightharpoonup Ax$ in Y folgt.

Definition: Wir bezeichnen mit $C^m(0,T;X)$ die Menge aller Funktionen $(0,T) \to X$, die stetige Ableitungen bis zur Ordnung m besitzen und mit $C^m_W(0,T;X)$ die Menge aller Funktionen aus $(0,T) \to X$, die demistetige schwache Ableitungen bis zur Ordnung m besitzen.

Lemma 4.1 : *Für $u \in C^m_W(0,T;X)$ und beliebige $s,t \in (0,T), s < t$ ist*

$$\sup_{s \le \tau \le t} \|u(t) - u(s)\| < \infty \quad \text{und} \quad \|u(t) - u(s)\| \le (t-s) \sup_{s \le \tau \le t} \|u'(t)\| \ .$$

Beweis: Siehe [GGZ 74, Seite 121].

Satz 4.2 : *Die Menge $C^m([0,T];X)$, die in natürlicher Weise einen linearen Raum bildet, wird für den Fall, daß der Zeitintervall kompakt ist, mit der Norm*

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} := \sum_{j=0}^{m} \sup_{t \in [0,T]} \|u^{(j)}(t)\|$$

zu einem Banachraum.

Bemerkung: Die Forderung, daß das Zeitintervall kompakt ist, ist wesentlich.

Beweis: Die Behauptung kann wie für reellwertige Funktionen bewiesen werden. Die oben angegebene Norm erfüllt die Axiome für Norm bei kompaktem Zeitintervall. Die Vollständigkeit muß noch bewiesen werden. Es sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset C^m([0,T];X)$ eine Cauchy-Folge. Aus der Vollständigkeit von X und der Normdefinition im Satz kann man schließen, daß die Folge $\{u_n^{(j)}(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ für feste j und t einen Grenzwert $v_j(t) \in X$ hat. Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $N = N(\varepsilon)$ dermaßen, daß für $n > N(\varepsilon)$ gilt:

$$\begin{aligned} \|u_n^{(j)}(t) - v_j(t)\| &= \lim_{k,j} \|u_n^{(j)}(t) - v_j(t) - u_k^{(j)}(t) - v_j(t)\| \\ &\le \limsup_{k\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \|u_n^{(j)(t)} - v_j(t) - u_k^{(j)}(t) - v_j(t)\| \le \varepsilon \end{aligned}$$

Daher konvergiert die Folge $\{u_n^{(j)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen v_j. Die Stetigkeit der Funktionen $v_j : [0,T] \to X$ ergibt sich aus der Abschätzung

$$\|v_j(t) - v_j(s)\| \le \|v_(t) - u_n^{(j)}(t)\| + \|u_n^{(j)}(t) - u_n^{(j)}(s)\| + \|u_n^{(j)}(s) - v_j(s)\| ,$$

aus der Stetigkeit von $u_n^{(j)}$ und aus der soeben gezeigten gleichmäßigen Konvergenz der $u_n^{(j)}$ gegen v_j. Wir beweisen nun, daß $v_j = v_0^{(j)}$ ist. Nach Lemma 4.1 ist

$$\|u_n(t) - u_k(t) - (u_n(s) - u_k(s))\| \le| t - s | \sup_{\tau\in[0,T]} \|u_n'(\tau) - u_k'(\tau)\| .$$

Für $n \to \infty$ ergibt sich

$$v_0(t) - v_0(s) - (u_k(t) - u_k(s))\| \le| t - s | \sup_{\tau\in[0,T]} \|v_1'(\tau) - u_k'(\tau)\| .$$

Für beliebiges $s \in [0,T]$ folgt

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to s} \|\frac{v_0(t) - v_0(s)}{t-s} - v_1(s)\| \\ &\le \liminf_{k\to\infty} \lim_{t\to s} (\|\frac{v_0(t) - v_0(s) - (u_k(t) - u_k'(s))}{t-s}\| + \|\frac{u_k(t) - u_k(s)}{t-s} - v_1(s)\|) \\ &\le \liminf_{k\to\infty} 2 \sup_{\tau\in[0,T]} \|v_1(\tau) - u_k'(\tau)\| = 0 \end{aligned}$$

Folglich ist v_0 differenzierbar und $v_0' = v_1$. Analog beweist man, daß $v_{j-1}' = v_j$ für j=2,...,m. Die Cauchy-Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt als Grenzwert die Funktion $v_0 \in C^m([0,T];X)$. □

4.1.4 Das Bochner-Integral

Wir definieren in diesem Abschnitt die Meßbarkeit und die Integrierbarkeit von Funktionen $u : (0,T) \to X$. Laut [GGZ 74] gehen diese Begriffe auf S. Bochner zurück.

Definition: Eine Funktion $u : (0,T) \to X$ heißt *einfach*, wenn es endlich viele in (0,T) enthaltene durchschnittsfremde *Lebesgue*-meßbare Mengen $B_i (i = 1, ..., n)$ mit $\mathrm{mes}(B_i) < \infty$ derart gibt, daß u auf jeder der Mengen B_i einen konstanten Wert x_i

annimmt und daß $u(s) = 0$ ist für $s \in (0,T) \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_i$. Das Bochner-Integral einer solchen einfachen Funktion wird definiert durch

$$\int_0^T u(s)ds := \sum_{i=1}^{n} \mathrm{mes}(B_i)x_i \ .$$

Können für eine einfache Funktion $u : (0,T) \to X$ die entsprechenden Mengen B_i als Intervalle gewählt werden, so nennt man u Treppenfunktion.

DEFINITION: Eine Funktion $u : (0,T) \to X$ heißt *Bochner-meßbar*, wenn es eine Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von einfachen Funktionen existiert, für die folgendes gilt:

$$u_n(s) \longrightarrow u(s) \quad \text{für fast alle } s \in (0,T) \tag{4.4}$$

Genügt eine solche Folge außerdem der Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|u(s) - u_n(s)\| \ ds = 0 \ , \tag{4.5}$$

so heißt u *Bochner-integrierbar*. Das *Bochner-Integral* einer Bochner-integrierbaren Funktion u über eine Lebesgue-meßbare Menge $B \subset (0,T)$ wird definiert durch

$$\int_B u(s) \ ds := \lim_{n\to\infty} \int_0^T u_n(s) \ \chi_B(s) \ ds \ , \tag{4.6}$$

wobei χ_B die charakteristische Funktion für die Menge B bezeichnet.

$$\chi_B(s) := \begin{cases} 1, & \text{falls} \ \ s \in (0,T) \\ 0, & \text{falls} \ \ s \notin (0,T) \ . \end{cases}$$

BEMERKUNG: Aus der Bochner-Meßbarkeit von u folgt, daß $\|u(\cdot) - u_n(\cdot)\|$ in $(0,T)$ Lebesgue-meßbar ist. Daher hat die Bedingung (4.5) einen Sinn. Der in (4.6) auftretende Grenzwert existiert unter der Voraussetzung (4.5) und ist für alle Folgen einfacher Funktionen mit den Eigenschaften (4.4) und (4.5) der gleiche. Damit ist die letzte Definition erst gerechtfertigt.

Die unten formulierten Sätze verschaffen einen Einblick in die Eigenschaften der Bochner-integrierbaren Funktionen aus einem maßtheoretischen Blickwinkel.

SATZ 4.3 : *Ist der Raum X separabel, so ist $u : (0,T) \to X$ genau dann Bochner-meßbar, wenn für jedes $f \in X'$ die Funktion*

$$\langle f, u(\,\cdot\,) \rangle : (0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Lebesgue-meßbar ist.

SATZ 4.4 : *Existiert zu $u : (0,T) \to X$ eine Folge u_n von Bochner-meßbaren Funktionen mit $u_n(t) \rightharpoonup u(t)$ in X für fast jedes t, so ist u Bochner-meßbar.*

Satz 4.5 : *Eine Bochner-meßbare Funktion $u : (0,T) \to X$ ist genau dann Bochner-integrierbar, wenn die Funktion $\|u(\cdot)\| : (0,T) \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist. Für eine Bochner-integrierbare Funktion gilt*

$$\| \int_B u(s)\ ds \| \le \int_B \|u(s)\|\ ds$$

für jede Lebesgue-meßbare Menge $B \subset (0,T)$.

Satz 4.6 : *Ist $u : (0,T) \to X$ Bochner-integrierbar, so ist die durch*

$$v(t) := \int_{t_0}^{t} u(s)\ ds\ , \quad t_0 \in (0,T)$$

definierte Funktion $v : (0,T) \to X$ in fast allen Punkten von $(0,T)$ differenzierbar und es gilt

$$v'(t) = u(t) \quad \text{für fast alle } t \in (0,T)\ .$$

Satz 4.7 : *Ist $u : (0,T) \to X$ Bochner-integrierbar und $B \subset (0,T)$ meßbar, so gilt für beliebiges $f \in X'$*

$$\int_B \langle\, f, u(s)\,\rangle\ ds = \langle\, f, \int_B u(s)\ ds\ \rangle\ .$$

Die Beweise der Sätze 4.3 bis 4.7 sind in [Yos 65] dargestellt.

4.1.5 L^p-Räume

Sei X ein Banachraum, $\|\cdot\|_X$ die Norm in X.

Definition: Wir nennen zwei Funktionen $u, v : (0,T) \to X$ *äquivalent*, wenn $u(s) = v(s)$ für fast alle $s \in (0,T)$ gilt.

Definition: Für $a, b \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit

$$L^p(a,b;X), \quad 1 \le p < \infty$$

den *Raum der Bochner-meßbaren Funktionen* $f : (a,b) \longrightarrow X$ mit

$$\Big(\int_a^b \|f(t)\|_X^p\ dt\ \Big)^{1/p} < \infty$$

und

$$L^\infty(a,b;X) := \{f : (a,b) \to X \mid \exists M : \|f(t)\|_X \le M \quad \text{für fast alle } t\ \in (a,b)\}\ .$$

Satz 4.8 : *Ausgestattet mit der Norm*

$$\|f\|_{L^p(a,b,X)} := (\int_a^b \|f(t)\|_X^p \, dt)^{1/p} \quad , 1 \leq p < \infty$$

$$\|f\|_{L^\infty}(a,b,X) := \inf\{M \in \mathbb{R} \mid \|f(t)\|_X \leq M \text{ für fast alle } t \in (a,b)\}$$

ist $L^p(a,b;X)$ *ein Banachraum.*

Beweis: Die im Satz definierte Norm erfüllt die Axiome für eine Norm. Das folgt aus der Dreiecksungleichung in X und der Minkowskischen Ungleichung. Nun wird die Vollständigkeit gezeigt. Sei $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(a,b;X)$. Wähle Teilfolge $\{u_{k_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$, so daß

$$\int_a^b \|u_n(s) - u_{k_j}(s)\|^p \, ds < \frac{1}{4^j} \quad \text{für } n \geq k_j \ . \tag{4.7}$$

Es sei

$$M_j := \{s \mid s \in (a,b), \|u_{k_{j+1}}(s) - u_{k_j}(s)\|^p \geq \frac{1}{2^j}\} \quad \text{und} \quad N_i := \bigcup_{j\geq i} M_j \ .$$

Aus (4.7) folgt

$$2^{-j} \operatorname{mes}(M_j) \leq \int_a^b \|u_{k_{j+1}}(s) - u_{k_j}(s)\|^p \, ds < 4^{-j} \ ,$$

d. h. $\operatorname{mes}(M_j)$ und daher $\operatorname{mes}(N_i) < \sum_{j\geq i} 2^{-j} = 2^{1-j}$. Für $N := \bigcap_{i\in\mathbb{N}} N_i$ folgt daraus wegen $N_1 \supset N_2 \supset ...$ die Beziehung $\operatorname{mes}(N) = 0$. Es sei nun $s \notin N$. Dann existiert $i \in \mathbb{N}$ mit $s \notin N_i$, d. h. $s \notin M_i$ für alle $j \geq i$. Folglich ist

$$\|u_{k_{j+1}}(s) - u_{k_j}(s)\|^p < 2^{-j} \quad \text{für } j \leq i \ .$$

Für $s \in S \setminus N$ gilt also

$$\lim_{i,j\to\infty} \|u_{k_j}(s) - u_{k_i}(s)\| \leq \lim_{i\to\infty} \sum_{l=i}^{\infty} 2^{-l/p} = 0 \ .$$

Wegen der Vollständigkeit von X existiert zu $s \in S \setminus N$ ein Element $u(s) \in X$ mit

$$\lim_{j\to\infty} \|u_{k_j}(s) - u(s)\| = 0 \ .$$

Setzen wir noch $u(s) = 0$ für $s \in N$, so ist u als Grenzwert der meßbaren Funktionen u_{k_j} im Sinne der punktweisen Konvergenz laut Satz 4.4 fast überall selbst meßbar . Nach Lemma von Fatou gilt

$$\int_a^b \|u_{k_j}(s) - u(s)\|^p \, ds \leq \liminf_{i\to\infty} \int_a^b \|u_{k_j}(s) - u_{k_i}(s)\|^p \, ds \ .$$

Da u_{k_j} Teilfolge einer Cauchy-Folge ist, folgt die Gleichheit

$$\lim_{i\to\infty} \int_a^b \|u_{k_j}(s) - u_{k_i}(s)\|^p \, ds = 0 \ .$$

Daraus schließen wir

$$\limsup_{n\to\infty} \int_a^b \|u_n(s)-u(s)\|^p \, ds \le \limsup_{n,j\to\infty} \int_a^b \|u_n(s)-u_{k_j}(s)\|^p + \|u_{k_j}(s)-u(s)\|^p \, ds$$
$$\le \limsup_{n,j\to\infty} \int_a^b 2^p \|u_n(s)-u_{k_j}(s)\|^p + \|u_{k_j}(s)-u(s)\|^p \, ds = 0 \ .$$

Die Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also in $L^p(a,b;X)$ gegen $u \in L^p(a,b;X)$. □

LEMMA 4.9 : *Die Menge der Treppenfunktionen $u:(a,b)\to X$ liegt dicht in $L^p(a,b;X)$ für $1\le p<\infty$.*

Für den Beweis siehe [GGZ 74, Seite 128].

LEMMA 4.10 : *(Höldersche Ungleichung) Sei X ein Banachraum. Seien p und q Hölder-Zahlen, d. h. es gelte $1/p+1/q=1$. Dann hat man für beliebige $u\in L^p(a,b;X)$ und $v\in L^q(a,b;X')$*

$$\int_a^b \langle\, v(s), u(s)\,\rangle \, ds \le \|v\|_{L^q(a,b;X')} \|u\|_{L^p(a,b;X)} \ .$$

Der Beweis ist in [GGZ 74, S. 130] zu lesen.

SATZ 4.11 : *Ist $\{H,(\,\cdot,\cdot\,)\}$ ein Hilbertraum, so wird auch $L^2(a,b;X)$ mit*

$$(u,v)_{L^2(a,b;X)} := \int_a^b (u(s),v(s)) \, ds \quad \text{für } u,v\in L^2(a,b;X)$$

zu einem Hilbertraum.

BEWEIS: Aus der Hölderschen Ungleichung, siehe Lemma 4.10, und dem *Riesz*schen Darstellungssatz folgt, daß das Skalarprodukt $(\ ,\ )_{L^2(a,b;X)}$wohldefiniert ist und die Eigenschaften besitzt, die in der Axiomatik für ein Skalarprodukt gefordert werden. Die Vollständigkeit von $L^2(a,b;X)$ wurde im Satz 4.8 bewiesen. Die Norm im zitierten Satz wird vom Skalarprodukt $(\ ,\ )_{L^2(a,b;X)}$ induziert. □

SATZ 4.12 *Ist der Raum X reflexiv und separabel und $1<p<\infty$, so besitzt jedes $f\in(L^p(a,b;X))'$genau eine Darstellung der Form*

$$f(u) \int_a^b \langle v(s), u(s)\rangle \, ds \quad \text{für jedes } u\in L^p(a,b;X)$$

mit einer Funktion $v\in(L^q(a,b;X))'$ und p,q so daß $1/p+1/q=1$. Die Zuordnung $f\mapsto v, f\in(L^p(a,b;X))'$ ist linear und es gilt

$$\|f\|_{L^p(a,b;X)} = \|v\|_{L^q(a,b;X')} \ .$$

Für Beweis siehe [GGZ 74, S. 131 ff].

BEMERKUNG: Die Aussage des Satzes behält ihre Richtigkeit auch für $p = 1$.

BEMERKUNG: Der Satz gilt auch dann, wenn man für den Raum X nur voraussetzt, daß er reflexiv oder separabel ist .

BEMERKUNG: Aus dem Satz geht hervor, daß die Räume $L^p(a, b; X), 1 < p < \infty$, für reflexive und separable Räume X selbst reflexiv sind.

LEMMA 4.13 : *Für jede Funktion $u \in L^p(a, b; X), 1 < p < \infty$ gehört die durch die Vorschrift*

$$u_h(t) := \begin{cases} u(t+h), & \textit{falls} \;\; t+h \in (a,b) \\ 0, & \textit{falls} \;\; s \notin (a,b) \end{cases}$$

definierte Funktion u_h ebenfalls zu $L^p(a, b; X)$ und es gilt

$$\lim_{h \to 0} \|u_h - u\|_{L^p(a,b;X)} = 0 \ .$$

BEWEIS: Es gilt

$$\|u_h\|_{L^p(a,b;X)} \leq \|u\|_{L^p(a,b;X)} \Rightarrow u_h \in L^p(a, b; X) \ .$$

Es sei $\{u_n\}_n$ eine in $L^p(a, b; X)$ gegen u konvergente Folge von Treppenfunktionen, siehe auch Lemma 4.9. Dann konvergiert die Folge $\{(u_n)_h\}_h$ wegen (4.8) gleichmäßig in h im Raum $L^p(a, b; X)$ gegen u_h. Daher reicht es, das Lemma 4.13 für Treppenfunktionen zu beweisen. Sei $B \subset (a, b)$ beschränkt. Für Funktionen der Art $u = \chi_B x, \ x \in X$ folgt die Behauptung aus

$$\lim\_h \to 0 \int_a^b \|u_h(s) - u(s)\|^p \ ds \leq 2\|x\|^p \lim_{h \to 0} |h| = 0 \ .$$

Wegen $(u + v)_h = u_h + v_h$ folgt die Aussage für Treppenfunktionen und somit die Aussage des Lemmas. □

4.1.6 Beispiel: Interpretation der rechten Seiten

Das folgende Beispiel ist hilfreich für die funktionalanalytische Interpretation der rechten Seiten parabolischer Differentialgleichungen.

BEISPIEL: Sei $0 < T < \infty, n \geq 1$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ nichtleeres, beschränktes Gebiet. Sei $V := H_0^{m,p}(\Omega), \ 1 < p < \infty$ mit p und q Hölderpaar, d. h. $1/p + 1/q = 1$. Sei

$$Q_T := \{(x, t) \mid x \in \Omega, t \in (0, T)\}$$

und

$$f : Q_T \longrightarrow \mathbb{R} \qquad (x, t) \mapsto f(x, t) \ .$$

Dann gilt die unten formulierte und bewiesene Proposition.

PROPOSITION 4.14 : *Falls $f \in L^q(Q_T)$, so folgt dann $f \in L^q(0, T; L^q(\Omega)) \subset L^q(0, T; V')$.*

Beweis: $f \in L^q(Q_T) \Rightarrow \|f\|^q_{L^q(\Omega)} = \int_{Q_T} |f(x,t)|^q \, dx \, dt \ < \ \infty$
Nach dem Satz von Fubini gilt

$$\|f\|^q_{L^q(\Omega)} = \int_0^T (\int_\Omega |f(x,t)|^q \, dx) \, dt \ . \tag{4.8}$$

Dabei existiert das innere Intergral für alle $t \in (0,T) \setminus N$, wobei N eine Menge vom Lebesgue-Maß Null ist. Daraus folgt, daß die Funktion $x \mapsto f(x,t)$ der räumlichen Variablen x für alle $t \in (0,T) \setminus N$ ein Element von $L^q(\Omega)$ ist. Dieses Element symbolisieren wir durch $f(t) \in L^q(\Omega)$, d. h.

$$\|f(t)\|^q_{L^q(\Omega)} = \int_\Omega |f(x,t)|^q \, dx \ < \ \infty \ . \tag{4.9}$$

Für $t \in N$ setzen wir $f(t) := 0$. Aus (4.8) und (4.9) folgt

$$\|f\|^q_{L^q(0,T;L^q(\Omega))} = \int_0^T \|f(t)\|^q_{L^q(\Omega)} \, dt = \|f(t)\|^q_{L^q(Q_T)} < \infty \ .$$

Wir zeigen noch die Meßbarkeit von $t \mapsto f(t)$. Nach dem Satz von Pettis in [Zei 77/2, Satz A(10), Seite 226] genügt es, die Meßbarkeit von

$$t \mapsto \langle v, f(t) \rangle \quad \text{für alle } v \in L^q(\Omega)' = L^p(\Omega)$$

nachzuweisen, d. h. die Meßbarkeit von

$$t \mapsto \int_\Omega v(x) f(x,t) \, dx \quad \text{für alle } v \in L^p(\Omega) \ . \tag{4.10}$$

Aus $v \in L^p(Q_T), f \in L^q(Q_T)$ folgt nach der Hölderschen Ungleichung, daß $fv \in L^1(Q_T)$ gilt. Wieder nach dem Satz von Fubini erhält man

$$\int_{Q_T} v(x) f(x,t) \, dx = \int_0^T \int_\Omega v(x) f(x,t) \, dx \, dt \ .$$

Das innere Integral ist für alle $t \in (0,T) \setminus N_1, \text{mes} N_1 = 0$ meßbar und somit auch auf (0,T). Wir zeigen $f \in L^q(0,T;V')$. Aus der Meßbarkeit von $t \mapsto f(t)$ folgt, daß

$$t \mapsto \langle f(t), v \rangle_V := \int_\Omega f(x,t) v(x) \, dx$$

meßbar auf $(0,T)$ für alle $v \in V := H_0^{m,p}(\Omega)$ ist und

$$\|\langle f(t), v \rangle\|_V \leq \|f(t)\|_{L^q(\Omega)} \|v\|^p_V \ .$$

Daraus ergibt sich

$$\int_0^T \|f(t)\|^q_{V'} \, dt \leq \int_0^T \|f(t)\|^q_{L^q(\Omega)} \, dt = \|f\|^q_{L^q(Q_T)} < \infty \ .$$

$\square$

4.1.7 Vektorwertige Distributionen

DEFINITION: Sei X linearer Raum. X heißt lokalkonvex, wenn eine Familie μ von Halbnormen existiert, die den folgenden Bedingungen genügt:

(i) Aus $p(x) = 0$ für jedes $p \in \mu$ folgt $x = 0$.

(ii) Die Gesamtheit der konvexen Mengen der Form

$$\{x \mid x \in X \text{ und } p_i(x - x_0) < \varepsilon_i \text{ für } i = 1, ...n\}$$

bildet eine Basis der Topologie in X.

Sei X ein Banachraum. Mit X_W bezeichnen wir den linearen Raum X, versehen mit der schwachen Topologie. X_W ist ein lokalkonvexer Raum.

DEFINITION: Wir bezeichnen den Raum $\mathcal{L}(\mathcal{D}(a, b, X_W))$ der stetigen linearen Abbildungen von $\mathcal{D}(a, b)$ in den lokalkonvexen Raum X_W mit $\mathcal{D}'(a, b; X)$ und nennen die Elemente dieses Raumes Distributionen auf (a, b) mit Werten in X. Wir fassen $\mathcal{D}'(a, b; X)$ als lokalkonvexen Raum auf und als Topologie dieses Raumes wählen wir die einfache Topologie von $\mathcal{L}(\mathcal{D}(a, b, X_W))$.

BEMERKUNG: Die Topologie von $\mathcal{D}'(a, b; X)$ läßt sich mit Hilfe der Halbnormen

$$p_{\varphi,y} := |\langle\, y, u(\varphi)\,\rangle| \ , \quad \varphi \in \mathcal{D}(a, b),\ y \in X',\ u \in \mathcal{D}'(a, b; X)$$

erzeugen. Eine Folge $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathcal{D}'(a, b; X)$ genau dann, wenn für beliebige $\varphi \in \mathcal{D}'(a, b)$ und $y \in X'$ die Folge$\{\langle\, y, u_n(\varphi)\,\rangle\}_n$ konvergiert. $\mathcal{D}(a, b; X)$ ist vollständig wenn X_W vollständig ist, insbesondere dann wenn X reflexiv ist.

BEMERKUNG: Für $X = \mathbb{R}$ ist $\mathcal{D}'(a, b; \mathbb{R}) = \mathcal{D}'(a, b)$

LEMMA 4.15 : *Es sei $u : (a, b) \to X$ lokal Bochner-integrierbar. Dann kann man der Funktion u durch die Vorschrift*

$$T_u(\varphi) := \int_a^b \varphi(s)u(s)\ ds \ , \quad \varphi \in \mathcal{D}(a, b)$$

eine Distribution auf (a, b) mit Werten in X zuordnen. Das Integral ist als Bochner-Integral zu verstehen. Die Zuordnung $u \mapsto T_u$ ist eindeutig, wenn wir äquivalente lokal Bochner-integrierbare Funktionen als gleich ansehen.

Der Beweis ist in [GGZ 74, S. 139] zu finden.

BEMERKUNG: $u \in L^1_{loc}(a, b; X)$ impliziert $u \in \mathcal{D}'(a, b; X)$.

DEFINITION: Sei $T \in \mathcal{D}'(a, b; X)$. Sei $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Die k-te Ableitung von T ist eine Distribution $T^{(k)}$, so daß

$$\langle\ T^{(k)}, \varphi\ \rangle = (-1)^k \langle\ T, \frac{d^k\varphi}{dt}\ \rangle\ .$$

BEMERKUNG: Die dadurch erklärte Abbildung $T' : \mathcal{D}(a, b) \to X_W$ ist linear und stetig, d. h. $T' \in \mathcal{D}'(a, b; X)$. Aus $T_n \longrightarrow T$ in $\mathcal{D}'(a, b; X)$ folgt für $y \in X'$ und $\varphi \in \mathcal{D}(a, b)$

$$\begin{aligned}
&\lim_n \langle y, T_n'(\varphi) - T'(\varphi)\rangle = \lim_n \langle y, T(\varphi') - T_n(\varphi')\rangle = 0\ . \\
&\Rightarrow T_n \longrightarrow T \quad \text{in } \mathcal{D}'(a, b; X)
\end{aligned}$$

Daraus schließen wir, daß die Zuordnung $T \mapsto T'$ eine stetige Abbildung von $\mathcal{D}'(a, b; X)$ in sich ist.

LEMMA 4.16 : *Es sei $t_0 \in (a,b)$ fest und $u : (a,b) \to X$ eine lokal Bochner-integrierbare Funktion. Dann besitzt die durch*

$$v(t) := \int_{t_0}^{t} u(s)\ ds$$

definierte Funktion $v \in C(a,b;X)$, aufgefaßt als Element von $\mathcal{D}'(a,b;X)$, die Ableitung $v' = u$.

BEWEIS: Für $y \in X'$ ist $\langle y, v(\,\cdot\,)\rangle$ als Funktion stetig. Unter Benutzung der Formel für partielle Integration, die für stetige Funktionen gültig ist erhalten wir

$$\begin{aligned}\langle y, v'(\varphi)\rangle = \langle y, -v(\varphi')\rangle = \langle y, -\int_a^b v(t)\varphi'(t)\ dt\rangle &= -\int_a^b \int_{t_0}^{t} \langle y, u(s)\rangle\ ds\ \varphi'(t)\ dt \\ = \int_a^b \langle y, u(t)\varphi(t)\ dt = \langle y, \int_a^b u(t)\varphi(t)\ dt\rangle &= \langle y, u(\varphi)\rangle\ .\end{aligned}$$

Somit schließen wir, daß $v' = u$ ist. □

DEFINITION: Seien X, Y zwei Banachräume, so daß X stetig in Y eingebettet ist

$$X \hookrightarrow Y\ .$$

Sei $u \in L^1(a,b;X)$. Wir sagen $u' \in L^2(a,b;Y)$ genau dann, wenn eine Funktion $v \in L^2(a,b;Y)$ existiert mit

$$-\int_a^b u(t)\varphi'\ dt = \int_a^b v(t)\varphi(t)\ dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b)\ .$$

Im folgenden betrachten wir zwei Hilberträume V, H mit

$$\begin{gathered} V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'\ , \\ V \ \text{ dicht in } H\ . \end{gathered}$$

Ein Beispiel für eine passende Wahl wäre

$$H_0^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)\ .$$

Dann können wir nach dem *Riesz*schen Darstellungssatz V und V' identifizieren durch

$$\langle\ f, v\ \rangle = (\tilde{f}, v)_V\ ,$$

wobei $(\ ,\ )_V$ das Skalarprodukt in V bezeichnet. Somit können wir setzen

$$\|f\|_{V'} := \|\tilde{f}\|_V\ .$$

Diese Norm ist äquivalent zu der Norm in V.

DEFINITION: Wir definieren den Raum $H^1(a,b;V,V')$ durch

$$H^1(a,b;V,V') := \{u \in L^2(a,b;V) \mid u_t \in L^2(a,b;V')\}\ .$$

Satz 4.17 : *$H^1(a,b;V,V')$ ist Hilbertraum mit der Norm*

$$\|u\|_1^2 := \|u\|^2_{L^2(a,b;V)} + \|u_t\|^2_{L^2(a,b;V')} \ .$$

Beweis: Nach Satz 4.11 sind $L^2(a,b;V), L^2(a,b;V')$ wieder Hilberträume mit den entsprechenden Normen. Daraus folgt, daß $\|\cdot\|_{H^1(a,b;V,V')}$ selbst eine Norm ist. Sie wird vom Skalarprodukt in $H^1(a,b;V,V')$ abgeleitet. Zu zeigen ist noch die Vollständigkeit. Sei u_n Cauchy-Folge in $H^1(a,b;V,V')$. Dann ist u_n Cauchy-Folge in $L^2(a,b;V)$ und $(u_n)_t$ ist eine Cauchy-Folge in $L^2(a,b;V')$. Es existiert $u \in L^2(a,b;V), u' \in L^2(a,b;V')$ mit

$$u_n \longrightarrow u \quad \text{in } L^2(a,b;V) \quad \text{und} \quad (u_n)_t \longrightarrow u \quad \text{in } L^2(a,b;V) \ .$$

Es gilt noch $u_n \to u$ in $\mathcal{D}'(a,b;V)$ und in $\mathcal{D}'(a,b;V')$. Also $(u_n)_t \longrightarrow u_t$ in$\mathcal{D}'(a,b;V')$ Das impliziert $u' = u_t$. Weiter gilt $u_n \to u$ in $H^1(a,b;V,V')$. Damit ist $H^1(a,b;V,V')$ vollständig. □

Satz 4.18 : *$\mathcal{D}([a,b];V)$ ist dicht in $H^1(a,b;V,V')$.*

Beweis: Siehe [Chi 00, Satz 11.3].

Satz 4.19 : *Sei $u \in H^1(a,b;V,V')$. Dann kann u mit einer $C([a,b];H)$ Funktion identifiziert werden. Es gilt noch*

$$H^1(a,b;V,V') \hookrightarrow C([a,b];H) \ .$$

Hier ist $C([a,b];V)$ der Raum stetiger Funktionen von $[a,b]$ in V, ausgestattet mit der Topologie, die von der gleichmäßigen Konvergenz auf $[a,b]$ induziert wird.

Beweis: Es sei wieder auf [Chi 00, Seite 190] verwiesen.

Satz 4.20 : *Seien $u,v \in H^1(a,b;V,V')$ mit $a,b < \infty$. Dann gilt*

$$\int_a^b \langle\ u'(t), v(t)\ \rangle\ dt + \int_a^b \langle\ v'(t), u(t)\ \rangle\ dt = (u(b),v(b)) - (u(a),v(a)) \ .$$

Beweis: Für $u,v \in \mathcal{D}([a,b],V)$ haben wir

$$\int_a^b \langle\ u'(t), v(t)\ \rangle\ dt + \int_a^b \langle\ v'(t), u(t)\ \rangle\ dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(u(t),v(t))\ dt = (u(b),v(b)) - (u(a),v(a)) \ .$$

$\mathcal{D}(a,b;V)$ liegt dicht in $H^1(a,b;V,V')$. Wegen der Dichtheit folgt die Behauptung für alle $u,v \in H^1(a,b;V,V')$. □

Satz 4.21 : *Falls $u \in H^1(a,b;V,V')$, so gilt dann für alle $v \in V$*

$$\frac{d}{dt}(u(\cdot),v) = \langle\ u_t, v\ \rangle \quad \textit{in } \mathcal{D}(a,b) \ .$$

Beweis: Nach dem letzten Satz 4.20 kann man schließen

$$\int_a^b (\langle u'(t), \varphi(t)v \rangle + \langle \varphi'(t)v, u(t) \rangle) \; dt = 0 \quad \forall \; v \in V \; .$$

$$\Rightarrow \int_a^b \langle u'(t), v \rangle \; \varphi(t) \; dt = - \int_a^b \langle v, u(t) \rangle \; \varphi'(t) \; dt = - \int_a^b (u(t), v(t))\varphi'(t) \; dt$$

□

Die obigen Sätze brauchen wir als Vorbereitung zum zentralen Satz, der die Existenz eindeutiger Lösung von parabolischen Problemen sichert.

4.2 Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Satz 4.22 : *Seien V und H zwei separable Hilberträume über $\mathbb{R}$, so daß V stetig in H eingebettet und H seinerseits stetig in V' eingebettet ist. Außerdem sei noch angenommen, daß V dicht in H liege. Für $t \in (0,T)$ sei $a(t;u,v)$ eine Bilinearform auf V mit folgenden Eigenschaften:*

$$t \longrightarrow a(t;u,v) \text{ ist meßbar für alle } u,v \in V$$

$$\exists M : \; |a(t;u,v)| \le M \; \|u\| \; \|v\| \quad \forall u,v \in V \text{ für fast alle } t \in (0,T) \tag{4.11}$$

$$\exists \; \alpha, \lambda > 0 : a(t;u,v) + \lambda^2 |u|^2 > \alpha \|u\|^2 \forall u \in V, \text{ für fast alle } t \in (0,T) \tag{4.12}$$

Dann existiert eine eindeutige Lösung von

$$u \in L^2(0,T;V), \qquad u_t \in L^2(0,T;V) \tag{4.13}$$

$$\frac{d}{dt}(u,v) + a(\cdot,u,v) \;=\; \langle \; f,v \; \rangle \text{ in } \mathcal{D}'(0,T) \; \forall v \in V \tag{4.14}$$

$$u(0) \;=\; u_0 \; . \tag{4.15}$$

Bemerkung: Nach Satz 4.19 macht die Anfangsbedingung $u(0) = u_0$ einen Sinn. Da nach Satz 4.21

$$\frac{d}{dt}(u(\,\cdot\,),v) = \langle \; u_t(\,\cdot\,),v \; \rangle \quad \text{in } \mathcal{D}(a,b)$$

gilt, kann die Gleichung (4.14) in

$$u_t + a(t,u,\cdot) = f \quad \text{in } L^2(0,T;V')$$

umgeschrieben werden.

Beweis:

Schritt 1: In der Koerzitivitätsvoraussetzung (4.12) können wir annehmen, daß $\lambda = 0$ ist. Falls wir eine Lösung u bei $\lambda = 0$ kennen, so können wir Lösung w von

$$w(0) = w_0, \qquad \frac{d}{dt}(w,v) + a(\cdot;w,v) + \lambda(w,v) = \langle \; e^{-\lambda t} f, v \; \rangle \quad \forall v \in V$$

finden. Die Bilinearform $a(t;u,v)$ genügt der Bedingung (4.12) mit $\lambda = 0$ und es folgt

$$|a(t;u.v)| \le M \; \|u\| \; \|v\| \quad \forall \; u,v \in V \text{ und fast alle } \; t \in (0,T)$$

Multiplikation der letzten Gleichung mit $e^{\lambda t}$ läßt uns schließen, daß $u = e^{\lambda t}$ die gesuchte Lösung ist.

Schritt 2: Wir konstruieren eine Näherung für u. Sei $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ Basis von V, d.h. w_i linear unabhängig und $\operatorname{span}\{w_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ dicht in V und laut Voraussetzung auch in H. Die Separabilität von V sichert die Existenz einer solchen Basis. Sei $u_0 \in H$. Dann existiert Zahlenfolge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_n \sum_{i=1}^{n} x_i w_i = u_0 \quad \text{in } H \ .$$

Behauptung: Es existieren Funktionen $x_1(t), ..., x_n(t)$ auf $(0,T)$, die das unten stehende lineare Differentialgleichungssystem lösen.

$$\begin{aligned} x_i(0) &= x_i \ \forall i = 1, ..., n & (4.16)\\ u_n(t) &= \sum_i x_i(t) w_i & (4.17)\\ (u_n'(t), w_j) + a(t; u_n(t), w_j) &= \langle\ f(t), w_j\ \rangle \text{ für f. a. } t \in (0,T), \forall\ j = 1, ..., n & (4.18) \end{aligned}$$

Begründung: Die Matrix $(w_i, w_j)_{i,j}$ ist invertierbar. Aus (4.18) bekommen wir

$$x'(t) = A(t)x(t) + F(t) \ ,$$

wobei $A(t)$ eine Matrix mit Koeffizienten in $L^\infty(0,T)$ und $F(t)$ Vektor, dessen Eintragungen $L^2(0,T)$ Funktionen sind. Dann ist x die eindeutige Lösung der Integralgleichung

$$x(t) = x(0) + \int_0^T A(s)x(s) + F(s)\ ds \ .$$

Schritt 3: "A priori" Abschätzungen für u_n. Wenn man (4.18) mit $x_j(t)$ multipliziert und über j aufsummiert, so erhält man

$$(u_n'(t), u_n(t)) + a(t; u_n(t), u_n(t)) = \langle\ f(t), u_n(t)\ \rangle$$

oder

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt} u_n(t)^2 + a(t; u_n(t), u_n(t)) &= \langle\ f(t), u_n(t)\ \rangle \\ &\leq \|f(t)\|_{V'} \|u_n(t)\| \ . \end{aligned}$$

Wir betrachten den Fall $\lambda = 0$ (vergleiche Schritt 1). Aus (4.12) folgt

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_n(t)|^2 + \alpha\|u_n(t)\|^2 \leq \|f(t)\|_{V'}\|u_n(t)\| \ .$$

Ungleichung von *Young*

$$ab \leq \frac{\alpha}{2}a^2 + \frac{1}{2\alpha}b^2 \quad \forall a, b$$

läßt uns schließen

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_n(t)|^2 + \alpha\|u_n(t)\|^2 \leq \frac{\alpha}{2}\|u_n(t)\|^2 + \frac{1}{2\alpha}\|f(t)\|_{V'}^2 \ .$$

Damit erhalten wir

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_n(t)|^2 + \frac{\alpha}{2}\|u_n(t)\|^2 \leq \frac{1}{2\alpha}\|f(t)\|_{V'}^2 \ .$$

Integration von 0 bis t liefert

$$\frac{1}{2}|u_n(t)|^2 + \frac{\alpha}{2}\int_0^t \|u_n(s)\|^2 \ ds \leq \frac{1}{2\alpha}\int_0^t \|f(s)\|_{V'}^2 \ ds + \frac{1}{2}|u_n(0)|^2 \ .$$

Laut Schritt 2 (Approximation von u) gilt $u_n(0) \longrightarrow u_0$ in H. Aber jede konvergente Folge ist beschränkt, also existiert eine Konstante C mit

$$|u_n(0)| \leq C \ \|u_0\| \ .$$

Folglich erhalten wir nach eventuellem Umskalieren von C

$$|u_n(t)|^2 + \alpha\int_0^t \|u_n(s)\|^2 \ ds \leq C(\int_0^t \|f(s)\|_{V'}^2 \ ds + |u(0)|^2) \ .$$

$$\Rightarrow \|u_n\|_{L^2(0,T;V)} \leq C \qquad \text{und} \qquad \|u_n\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq C$$

Schritt 4: Grenzübergang. Aus (4.11) folgt, daß die Abbildung $v \mapsto a(t;u,v)$ linear und stetig für jedes u und fast alle t ist. Nach dem Darstellungssatz von *Riesz* existiert ein Element $A(t)u \in V'$ mit

$$a(t;u,v) = \langle \ A(t)u, v \ \rangle \quad \forall \ u,v \in V \ .$$

Der Operator $A : V \longrightarrow V'$ ist linear und (4.11) impliziert

$$\|A(t)u\|_{V'} \leq M \ \|u\| \quad \forall u \in V \text{ für fast alle } t \ .$$

Nach dem Ergebnis vom Schritt 3 bekommt man

$$\|A(t)u\|_{L^2(0,T;V')} \leq C \ ,$$

eventuell für einen anderen Wert von C. Wir können eine Teilfolge von $\{u_n\}_n$ auswählen mit

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad &&\text{in } L^2(0,T;V) \\ u_n &\rightharpoonup^* \tilde{u} \quad &&\text{in } L^\infty(0,T;H) \\ A(t)u_n &\rightharpoonup w \quad &&\text{in } L^2(0,T;V') \ . \end{aligned} \tag{4.19}$$

Wir werden zeigen, daß $\tilde{u} = w$ und $w = A(t)u$. Sei also $v \in L^2(0,T;V)$. Der Raum V ist dicht in H und $V \hookrightarrow H$ ist stetig eingebettet nach Voraussetzung und es folgt

$$|v| \leq C\|v\| \quad \text{ und } \quad v \in L^2(0,T;H) \ .$$

Schwache Konvergenz $u_n \rightharpoonup^* u$ in $L^\infty(0,T;H)$ impliziert

$$\int_0^T (u_n, v) \ dt \rightarrow \int_0^T (\tilde{u}, v) \ dt \quad \text{für alle } v \in L^2(0,T;V) \ .$$

Halten wir v für einen Augenblick fest. Die Abbildung

$$u \mapsto \int_0^T (u, v)\ dt$$

ist linear und stetig.

$$\Rightarrow \int_0^T (u_n, v)\ dt \longrightarrow \int_0^T (u, v)\ dt$$

Also gilt

$$\int_0^T (\tilde{u} - u, v)\ dt = 0 \quad \forall v \in L^2(0, T; V)\ .$$

Aus $(\tilde{u} - u, v)$ für alle $v \in L^2(0, T; V)$ und aus der Dichtheit von V in H folgt $u = \tilde{u}$. Durch Anwendung ähnlicher Technik können wir zeigen

$$\int_0^T \langle A(t)u, v\rangle\ dt = \int_0^T \langle w, v\rangle\ dt \quad \forall v \in L^2(0, T; V)\ .$$

Daraus kann man $w = A(t)u$ schließen. Letztendlich haben wir bis jetzt

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup & u \quad & \text{in } L^2(0, T; V) \\ u_n &\rightharpoonup^* & u \quad & \text{in } L^\infty(0, T; H) \\ A(t)u_n &\rightharpoonup & A(t)u \quad & \text{in } L^2(0, T; V') \end{aligned}$$

gezeigt. Was wir noch beweisen müssen, ist, daß u eine Lösung des Systems (4.14) ist. Das werden wir in Schritt 5 tun.

Schritt 5: Sei $v \in V$. Dann existiert Folge $v_n = \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(n)} w_j$ mit $v_n \longrightarrow v$ in V und auch in H. Für alle φ in $\mathcal{D}(0, T)$ ist

$$\varphi(t)v_n \longrightarrow \varphi(t)v \quad \text{in } L^2(0, T; V)$$

erfüllt und demnach auch in $L^2(0, T; H)$. Multiplikation von (4.18) mit $\varphi(t)\alpha_j^{(n)}$, Aufsummieren und Integration über $(0, T)$ ergibt

$$\int_0^T (-u_n(t), \varphi'(t)v_n) + \langle A(t)u_n, \varphi(t)v_n\rangle)\ dt = \int_0^T \langle f(t), \varphi(t)v_n(t)\rangle\ dt\ . \tag{4.20}$$

Grenzübergang $n \longrightarrow \infty$ liefert

$$\int_0^T (-u(t), \varphi'(t)v) + a(t; u, \varphi v)\ dt = \int_0^T \langle f(t), \varphi(t)v)\rangle\ dt\ ,$$

was geschrieben werden kann als

$$\int_0^T (-u(t), v)\varphi'(t) + a(t; u, v)\varphi\ dt = \int_0^T \langle f(t), \varphi(t)v)\rangle\ dt\ , \tag{4.21}$$

d.h. die Relation (4.14). Es fehlen noch $u_t \in L^2(0,T;V')$ und $u(0) = u_0$. Die Gleichung (4.21) kann umgeformt werden in

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t), v(t)) &= \langle f(t) - A(t)u, v(t)\rangle \ \varphi \ dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T) \ . \\ \Rightarrow \ -\int_0^T (u(t), \cdot \ )\varphi' \ dt &= \int_0^T \langle f(t) - A(t)u, \cdot \ \rangle \ \varphi \ dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T) \\ \Rightarrow \quad u_t &= f(t) - A(t)u \ \in L^2(0,T;V') \end{aligned} \tag{4.22}$$

Um zu zeigen, daß $u(0) = u_0$ ist, betrachten wir die glatte Funktion φ mit $\varphi \neq 0$ und $\varphi(T) = 0$. Aus (4.22) und aus $\varphi(t)v \in L^2(0,T;V)$ $\forall v \in V$ schließen wir

$$\begin{aligned} \langle u_t, v\rangle \ \varphi(t) &= \langle f(t) - A(t)u, v\rangle \ \varphi(t) \quad \text{für fast alle } t \in (0,T) \ . \\ \Rightarrow \ \int_0^T (u,v)_t \varphi \ dt &= \int_0^T \langle f(t) - A(t)u, v\rangle \ \varphi \ dt \end{aligned}$$

Vergleiche nun Satz 4.20 und Satz 4.21. Nach ausgeführter Integration erhält man

$$-\int_0^T (u,v)\varphi' \ dt - (u(0),v)\varphi(0) = \int_0^T \langle f(t) - A(t)u, v\rangle \ \varphi \ dt \ .$$

Setzen wir unser φ in (4.20) ein. Nach partieller Integration bekommt man

$$-\int_0^T (u_n,v_n)\varphi' \ dt - (u_n(0),v_n)\varphi(0) = \int_0^T \langle f(t) - A(t)u_n, v_n\rangle \ \varphi \ dt \ .$$

Grenzübergang $n \to \infty$ läßt uns schließen

$$\begin{aligned} -\int_0^T (u,v)\varphi' \ dt - (u_0,v)\varphi(0) &= \int_0^T \langle f(t) - A(t)u, v\rangle \ \varphi \ dt \ . \\ \Rightarrow \quad (u_0 - u(0), v) &= 0 \quad \forall \ v \in V \end{aligned}$$

Der Raum V ist dicht in H. Also $u(0) = u_0$.

Schritt 6: Eindeutigkeit. Seien u_1, u_2 zwei Lösungen.

$$\frac{d}{dt}(u_1 - u_2, v) + a(\cdot; u_1 - u_2, v) = 0 \text{ in } \mathcal{D}(0,T), \ \forall v \in V$$

oder

$$\frac{d}{dt}(u_1 - u_2) + A(t)(u_1 - u_2) = 0 \text{ in } L^2(0,T;V') \ .$$

Multiplikation mit $u_1 - u_2$ und Integration von 0 bis t ergibt

$$|(u_1 - u_2)(t)|^2 + \int_0^t a(s; u_1 - u_2)(u_1 - u_2) \ ds = 0 \ .$$

Daraus folgt $u_1 - u_2 = 0$ für alle t. $\square$

4.3 Anwendung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $H := L^2(\Omega)$ und V sei ein abgeschlossener Unterraum von $H^{1,2}(\Omega)$ mit

$$H_0^{1,2}(\Omega) \subset V \subset H^{1,2}(\Omega)$$

Seien

$$a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \text{fast überall in} \;\; (x,t) \in \Omega \times (0,T), \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

Dann können wir für $u, v \in V$

$$a(t;u,v) := \int\limits_\Omega (a_{i,j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}v + a_0 uv)\; dx$$

setzen mit $a_{ij}, a_i, a_0,\;\, i,j = 1, ..., n$ Funktionen aus $L^\infty(\Omega \times (0,T))$. Die Voraussetzung

$$|a(t;u,v)| \leq M\; \|u\|\; \|v\|$$

ist folgendermaßen zu überprüfen. Nach der *Hölder*schen Ungleichung ist

$$\int\limits_\Omega a_0 uv\; dx \leq C\; \|u\|_{L^2(\Omega)}\; \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\; \|u\|_{H^1(\Omega)}\; \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\int\limits_\Omega a_i\frac{\partial u}{\partial x_i}v\; dx \leq C\; \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\; \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\; \|u\|_{H^1(\Omega)}\; \|v\|_{H^1(\Omega)}\; .$$

Analog kann man herleiten,daß

$$\int\limits_\Omega a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\; dx \leq C\; \|u\|_{H^1(\Omega)}\; \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

für gewisse Konstante C. Die letzten drei Ungleichungen zusammen liefern die Stetigkeit von $a(t;u,v)$.
Nun wird die Koerzitivität gezeigt.

$$\begin{aligned} a(t;u,u) &= \int\limits_\Omega a_{ij}\; \partial_j u\; \partial_i u + a_i\; \partial_i u \cdot u + a_0 u^2\; dx \\ &\geq \alpha \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\; dx - \|a\|_{L^\infty} \int\limits_\Omega |\nabla u|\; |u|\; dx - \|a_0\|_{L^\infty} \int\limits_\Omega u^2\; dx \end{aligned}$$

Hier bezeichnet a den Vektor mit Koordinaten a_i und $|\cdot|$ steht für die Euklidische Norm. Die Ungleichung von *Young* liefert

$$a(t;u,u) \leq (\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\|a\|_{L^\infty}) \int\limits_\Omega |\; \nabla u|^2\; dx - (\frac{1}{2\varepsilon}\|a\|_{L^\infty} - \|a_0\|_{L^\infty}) \int\limits_\Omega u^2\; dx\; .$$

Wenn man

$$\lambda := \frac{\|a\|_{L^\infty}}{2\varepsilon} + \|a_0\|_{L^\infty} + \alpha - \frac{\varepsilon\|a\|_{L^\infty}}{2}$$

setzt, so bekommt man für alle $t \in (0;T)$

$$a(t;u,u) + \lambda \int_\Omega u^2 \; dx \geq (\alpha - \frac{\varepsilon \|a\|_{L^\infty}}{2}) \int_\Omega (|\nabla u|^2 + u^2) \; dx \; ,$$

was für ε klein genug und α ersetzt durch

$$\alpha - \frac{\varepsilon \|a\|_{L^\infty}}{2}$$

genau die Koerzitivitätseigenschaft (4.12) bedeutet.
Jetzt kann man eine direkte Folgerung vom Satz 4.22 aufstellen.

FOLGERUNG 4.23 : *Unter den Voraussetzungen des Satzes 4.22 existiert eine eindeutige Lösung u von*

$$u \in L^2(0,T;V), \; u_t \in L^2(0,T;V'), \; u(0) = u_0$$
$$\frac{d}{dt}(u,v) + a(\cdot,u,v) = \langle f,v \rangle \; , \quad \forall v \in V \; .$$

4.4 Nichtlokale parabolische Probleme

4.4.1 Kompaktheitsresultate

Beim Existenzbeweis im nächsten Abschnitt werden wir von folgenden Kompaktheitsresultaten Gebrauch machen.

SATZ 4.24 : *Seien $B_0 \subset B \subset B_1$ Banachräume. Sei B_0 dicht in B und B dicht in B_1. Seien B_1, B_2 reflexiv. Sei die Einbettung $B_0 \to B$ kompakt. Wir definieren*

$$W := \{v \mid v \in L^p(0,T;B_0), v' \in L^q(0,T;B_1)\}$$

für endliche Zeit T mit $1 < p,q < \infty$. Dann ist die Einbettung

$$W \to L^p(0,T;B)$$

kompakt.

BEWEIS: [Lio 72, Seite 70, Satz 5.1]

BEMERKUNG: Der Raum W ist mit der Norm

$$\|v\|_W := \|v\|_{L^p(o,T;B_0)} + \|v'\|_{L^q(0,T;B_1)}$$

ein Banachraum. Es gilt $W \subset L^p(0,T;B)$.

Nun wollen wir diesen Satz erweitern und eine Kompaktheitsaussage formulieren, indem wir den Banachraum B_0 durch eine Menge S ersetzen. Auf der Menge S sei eine Funktoin $M : S \to \mathbb{R}_+$ definiert, dermaßen daß

$$M(v) \geq 0, \quad \forall v \in S, \quad M(\lambda v) = |\lambda| M(v) \; . \tag{4.23}$$

Im weiteren betrachten wir eine Menge F, die die beschränkten Mengen in dem Raum

$$\{v \in L^p(0,t;B_0) \mid v' \in L^q(0,T;B_1)\}$$

ersetzt. Wir definieren die Menge F folgendermaßen:

$$F := \{v : (0,T) \to B_1 \mid \int_0^T M(v(t))^p \; dt \le C_1, v' \text{ beschränkt in } L^q(0,T;B_1)\} \tag{4.24}$$

Satz 4.25 : *Sei S eine Menge. Seien B, B_1 Banachräume. Es gelte $S \subset B \subset B_1$ und S dicht in B, B dicht in B_1. Die Bedingungen (4.23) und(4.24) seien erfüllt mit $1 < p, q < \infty$. Die Menge $\{v \in S \mid, M(v) \le 1\}$ sei relativ kompakt in B. Dann ist F dicht in $L^p(0,T;B)$ und F ist relativ kompakt in $L^p(0,T;B)$.*

Beweis: [Lio 72, Seite 154 ff, Satz 12.1]

Jetzt können wir eine Folgerung vom Satz 4.25 herleiten, indem wir für die Menge S eine Kugel von $H^1(0,T;V,V')$ wählen und $M(v) := \|v\|_{V'}$ setzen.

Folgerung 4.26 : *Die Kugeln von $H^1(0,T;V,V')$ sind relativ kompakt in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.*

4.4.2 Existenz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Lipschitz-Rand. Im Abschnitt 1.2 wurden Beispiele genannt, bei denen der Diffusionskoeffizient a vom Zustand des Systems in einem Teilgebiet $V \subset \Omega$ oder vom gesamten System abhängt.

$$a = a(\int_\Omega u(x) \; dx), \quad a = a(\int_V u(x) \; dx), V \subset \Omega$$

Wir können diese Abhängigkeit verallgemeinern, indem wir einen Gewichtsfaktor einführen. Mit $g \in L^2(\Omega)$ definiern wir

$$l(u) := \int_\Omega g(x)u(x) \; dx \; . \tag{4.25}$$

Man kann l als eine Linearform auf $L^2(\Omega)$ auffassen. Sei Γ eine Teilmenge des Randes $\partial\Omega$ von positivem Lebesgue-Maß.

Satz 4.27 : *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Lipschitz-Rand. Sei $1 \le p < n$. Definiere*

$$q := \frac{p(n-1)}{n-p} \; .$$

Dann existiert eine Konstante $C = C(\Omega, n, p)$, so daß

$$\|u\|_{L^q(\partial\Omega)} \le C\|u\|_{H^{1,p}(\Omega)} \quad \textit{für alle } u \in C^1(\Omega) \; .$$

Die lineare Abbildung $\gamma_1 : C^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow L^q(\partial\Omega), u \mapsto u \mid_{\partial\Omega}$ hat eindeutige Fortsetzung γ auf $H^{1,p}(\Omega)$.

Beweis: [Chi 00, Satz 2.5, Seite 24]

Satz 4.28 : *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit Lipschitz-Rand. Dann existiert eine eindeutige stetige lineare Abbildung $\gamma : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$ mit*

$$\gamma(u) = u\,|_{\partial\Omega} \quad \textit{für alle } u \in C^1(\overline{\Omega}) \ .$$

Beweis: [Chi 00, Satz 2.6, Seite 25]

Definition: Wir nennen $\gamma(u)$ *die Spur von u auf $\partial\Omega$.*

Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a(l(u))\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f \quad \text{in } \Omega \\
&u(\,\cdot, t) \in \{v \in H^1(\Omega) \ | \ \gamma(v) = 0 \text{ auf } \Gamma\} \text{ für } t \in \ (0, T) \\
&\frac{\partial}{\partial n} u(\,\cdot, t) = 0 \text{ auf } \partial\Omega \setminus \Gamma, \ u(\,\cdot, 0) = u_0
\end{aligned} \tag{4.26}$$

für gegebene $f(x,t), u_0(x)$. Der Raum V sei definiert durch

$$V := \{v \in H^1(\Omega) \ | \ \gamma(v) = 0 \text{ auf } \Gamma\} \ .$$

Das ist der Raum, zu dem $u(\cdot, t)$ gehört, d. h. es wird bei unserer Problemstellung verlangt, daß $u(\cdot, t)$ auf einer Teilmenge Γ des Randes $\partial\Omega$ Null ist und auf dem Rest des Randes die Normalenableitung von $u(\cdot, t)$ Null sein soll.

Satz 4.29 : *Sei $a : \mathbb{R} \longrightarrow (0, \infty)$ stetig und es gelte*

$$m \le a(\xi) \le M \quad \textit{für alle } \xi \in \mathbb{R}$$

mit gewissen Konstanten $m > 0$ und M. Seien $f \in L^2(0,T;V'), u_0 \in L^2(\Omega)$. Dann existiert eine Lösung u von

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(u, v) + a(l(u)) \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx &= \langle f, v\rangle \quad \textit{in } \mathcal{D}'(0,T) \ \forall v \in V \\
u(0) &= 0 \\
u \in L^2(0,T;V) \cap C([0,T]; L^2(\Omega)), \qquad & u_t \in L^2(0,T;V') \ .
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Beweis: Unser Hauptargument wird der Fixpunktsatz von *Schauder* sein. Sei

$$w \in L^2(0,T; L^2(\Omega)) \cong L^2(\Omega \times (0,T)) \ .$$

Die Abbildung $t \mapsto l(w)$ ist gemäß (4.25) meßbar und auf Grund der Stetigkeit von a ist auch die Abbildung $t \mapsto a(l(w))$ meßbar. $a(\xi)$ ist nach oben und nach unten beschränkt, folglich ist $a(l(w)) \in L^\infty(0,T)$. Nach Folgerung 4.23 existiert eindeutige Lösung $u = T(w)$ von

$$\begin{gathered}
\frac{d}{dt}(u, v) + a(l(w)) \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx = \langle f, v\rangle \quad \text{in } \mathcal{D}'(0,T) \ \forall v \in V \\
u \in L^2(0,T;V) \cap C([0,T]; L^2(\Omega)), \ u_t \in L^2(0,T;V'), \ u(0) = u_0 \ .
\end{gathered} \tag{4.28}$$

Wir werden zeigen, daß die Abbildung $w \mapsto T(w) = u$ einen Fixpunkt hat. Der Fixpunkt ist dann die Lösung unseres Problems. Die letzte Gleichung, aufgeschrieben für $L^2(0,T;V')$, hat die Gestalt

$$\frac{du}{dt} - a(l(w))\Delta u = f \ . \tag{4.29}$$

Es folgt also

$$\langle u_t, u\rangle - \langle a(l(w))\Delta u, u\rangle = \langle f, u\rangle \quad \text{für fast alle } t \in (0,T) \ .$$

Sei mit

$$\|u\|_V := \int_\Omega |\nabla u|^2 \ dx \ ,$$

die Norm in V und mit$\|f\|_*$ die duale Norm von f bezeichnet.Nach Voraussetzung ist a beschränkt. Daraus schließen wir

$$\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + m\|v\|_V^2 \leq \|f\|_*\|u\|_V \ .$$

Die Ungleichung von *Young*

$$ab \leq \frac{m}{2}a^2 + \frac{1}{2m}b^2$$

liefert

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|_{L^2}^2 + \frac{m}{2}\|u\|_V^2 \leq \frac{1}{2m}\|f\|_*^2 \ .$$

Integration von 0 bis t

$$\|u\|_{L^2}^2 + \frac{m}{2}\int_0^t \|u\|_V^2 \ d\tau \leq \frac{1}{2m}\int_0^t \|f\|_*^2 \ d\tau + \frac{1}{2}\|u_0\|^2 \ .$$

Daraus folgt

$$\|u\|_{L^2(0,T;V)} \leq C$$

für irgendein $C = C(m, u_0, f)$. Die Konstante C hängt nicht von w ab. Es gilt

$$|\langle -\Delta u, v\rangle| = |\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ dx| \leq \|u\|_V\|v\|_V \quad \text{für alle } V \in V \ .$$

Aus (4.29) folgt

$$\frac{du}{dt} = f - a(l(w))\Delta u \ .$$

Wieder verwenden wir die Beschränktheit von a und erhalten

$$\|u_t\|_* \leq M\|u\|_V + \|f\|_* \ .$$

Demzufolge ist

$$\|u_t\|_{L^2(0,T;V')} \leq C' \ ,$$

wobei die Konstante $C' = C'(m, M, u_0, f)$ unabhängig von w ist. Aus der Definition für $H^1(0,T;V;V')$ auf Seite 54 kann man folgern, daß $u \in H^1(0,T;V,V')$

$$\|u\|_{H^1(0,T;V,V')} \leq C \tag{4.30}$$

für einen neuen Wert der Konstanten C, die aber wiederum nicht von w abhängt. Man kann Konstante R finden, die unabhängig von von w ist, so daß

$$\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq R \ ,$$

d. h. T bildet die Kugel

$$B_R(0) := \{v \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) : \|v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq R\}$$

in sich ab. Nach Folgerung 4.26 sind die Kugeln von $H^1(0,T;V,V')$ relativ kompakt in $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ und aus der Ungleichung (4.30) können wir schließen, daß $T(B_R(0))$ relativ kompakt in $B_R(0)$ ist. Von Anfang an war es unsere Absicht, die Voraussetzungen des *Schauder*schen Fixpunktsatzes zu erfüllen. Es fehlt nur noch die Stetigkeit des Operators $T(B_R(0)) \longrightarrow B_R(0)$. Wir zeigen jetzt, daß T stetig ist. Sei also $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B_R(0))$ mit

$$w_n \longrightarrow w \quad \text{in } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \ . \tag{4.31}$$

Setzen wir $u_n := T(w_n)$. Aus (4.31) folgt, daß

$$l(w_n) \longrightarrow l(w) \quad \text{in } L^2(0,T) \ . \tag{4.32}$$

Die Ungleichung (4.30) behält ihre Gültigkeit auch für u_n

$$\|u_n\|_{H^1(0,T;V,V')} \leq C \ \forall n \in \mathbb{N} \ ,$$

wobei C nicht vom Index n abhängt. Die Gleichung (4.28) läßt uns schließen, daß für beliebige $\varphi \in \mathcal{D}(0,T), v \in V$ die Relation

$$-\int_0^T \int_\Omega u_n v \varphi'(t) \ dx \ dt + \int_0^T \int_\Omega a(l(w_n)) \nabla u_n \cdot \nabla v \varphi(t) \ dx \ dt = \int_0^T \langle f, v\rangle \ \varphi \ dt \tag{4.33}$$

für $u_n, n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist. Weil $\|u_n\|_{H^1(0,T;V,V')}$ beschränkt ist und $l(w_n) \longrightarrow l(w)$ in $L^2(0,T)$, vergleiche (4.30) und (4.32), können wir $u_\infty \in H^1(0,T;V,V')$ finden und Teilfolge u_{n_k} auswählen mit

$$\begin{aligned} l(w_{n_k}) \to \ & l(w) \quad \text{für fast alle } \ t \in (0,T) \\ u_{n_k} \rightharpoonup \ & u_\infty \quad \text{schwach in } H^1(0,T;V,V') \\ u_{n_k} \to \ & u_\infty \quad \text{in } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \ . \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist a stetig, also

$$a(l(w_n))\nabla v \to a(l(w))\nabla v \quad \text{in } L^2(\Omega \times (0,T)) \ .$$

Grenzübergang in (4.33) überzeugt uns davon, daß

$$\frac{d}{dt}(u_\infty, v) + a(l(w)) \int_0^T \nabla u_\infty \cdot \nabla v \ dt = \langle f, v\rangle \quad \text{in } \mathcal{D}'(0,T), \forall v \in V \ .$$

Für fast alle $t \in (0,T)$ und für alle $v \in V$ gilt nach Satz 4.21

$$\frac{d}{dt}(u(\cdot, v) = \langle u_t(\cdot), v\rangle \quad \text{in } \mathcal{D}'(0,T) \ .$$

Daher kann man schreiben

$$(u_n(t), v) - (u_0, v) = \int_0^t \langle \frac{\partial}{\partial t} u_n, v \rangle \; dt \; .$$

Grenzübergang liefert

$$(u_\infty(t), v) - (u_0, v) = \int_0^t \langle \frac{\partial}{\partial t} u_\infty, v \rangle \; dt = (u_\infty(t), v) - (u_\infty(0), v)$$

für fast alle $t \in (0, T)$ und für alle $v \in V$. Weil $u_n \longrightarrow u_\infty$ in $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ können wir o. B. d. A. schreiben

$$u_n(t) \longrightarrow u_\infty \quad \text{in } L^2(\Omega) \text{ für fast alle } t \in (0, T) \; .$$

Also $u_\infty(0) = u_n(0) = u_0$. Nach Folgerung 4.23 ist die Lösung von (4.28) eindeutig. Daraus erhalten wir

$$u_\infty(0) = u_0 \; .$$

Jede Teilfolge von u_n hat den gleichen eindeutig bestimmten Grenzwert. Also

$$T(w_n) = u_n \longrightarrow u = T(w) \quad \Rightarrow \quad T(w_n) \longrightarrow T(w)$$

Der Operator T ist stetig. Die Voraussetzungen für den Fixpunktsatz von *Schauder* sind erfüllt. Das bedeutet, daß T einen Fixpunkt hat, der Lösung von unserem Problem ist. □

Bemerkung: Die Ergebnisse dieses Satzes lassen sich auf Probleme der Art

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(l(w)) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) &= f \quad \text{in} \quad \Omega \\ u \in L^2(0, T; V) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)) & \\ u_t \in L^2(0, T; V'), \qquad u(0) = u_0 & \end{aligned}$$

ausweiten.

4.4.3 Eindeutigkeit

Satz 4.30 : *Unter den Voraussetzungen des letzten Satzes 4.29 und unter der zusätzlichen Annahme, daß eine Konstante $A > 0$ existiert mit*

$$|a(\xi) - a(\xi')| \leq A|\xi - \xi'| \quad \textit{für alle } \xi, \xi' \in \mathbb{R}$$

hat das Problem (4.27) eine eindeutige Lösung.

Beweis: Seien u_1, u_2 zwei Lösungen von (4.27). In $L^2(0, T; V')$ betrachet, sind die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t} u_1 - a(l(u_1))\Delta u_1 = \frac{\partial}{\partial t} u_2 - \; a(l(u_2))\Delta u_2$$

und

$$(u_1 - u_2)_t - a(l(u_1))\Delta(u_1 - u_2) = a(l(u_1)) - a(l(u_2))$$

äquivalent. Multiplikation der letzten Gleichung mit $u_1 - u_2 \in L^2(0,T;V)$ liefert

$$\langle (u_1-u_2)_t, u_1-u_2\rangle + a(l(u_1)) \int\limits_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^2 \, dx$$
$$= a(l(u_1)) - a(l(u_2)) \int\limits_\Omega \nabla u_2 \nabla(u_1-u_2) \, dx$$

für fast alle $t \in (0,T)$. Unter Verwendung von

$$\|u\|_V = \|\nabla v\|_{L^2}$$

erhalten wir nach Einsetzen von $|a(\xi) - a(\xi')| \leq A|\xi - \xi'|$ und $m \leq a(\xi) \leq M$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_1-u_2\|_{L^2}^2 + m\int\limits_\Omega |\nabla(u_1-u_2)|^2 \, dx &\leq A|l(u_1)-l(u_2)| \int\limits_\Omega |\nabla u_2| \, |\nabla(u_1-u_2)| \, dx \\ &\leq C\|u_1-u_2\|_{L^2}\|u_2\|_V\|u_1-u_2\|_V \ . \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_1-u_2\|_{L^2}^2 + m\|u_1-u_2\|_V^2 \leq C'\|u_1-u_2\|_{L^2}^2\|u_1-u_2\|_V^2$$

mit $C' := C\|u_2\|_V$. Die Ungleichung von *Young*

$$ab \leq \frac{m}{2C'}a^2 + \frac{C'}{2m}b \ , \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$$

läßt uns schließen

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_1-u_2\|_{L^2}^2 + m\|u_1-u_2\|_V \leq \frac{m}{2}\|u_1-u_2\|_V^2 + \frac{C'^2}{2m}\|u_1-u_2\|_{L^2}^2 \ .$$

Folglich gilt

$$\frac{d}{dt}\|u_1-u_2\|_{L^2}^2 \leq C\frac{\|u_2\|_V^2}{m}\|u_1-u_2\|_{L^2}^2 \ .$$

Setzen wir $g := \frac{C^2}{2m}\|u_2\|_V^2 \in L^1(0,T)$. Dann gilt

$$\frac{d}{dt}\|u_1-u_2\|_{L^2}^2 \leq g(t)\|u_1-u_2\|_{L^2}^2 \ .$$

Aus der letzten Ungleichung folgt

$$\frac{d}{dt}\|u_1-u_2\|_{L^2}^2(\exp\left(-\int_0^t g(s) \, ds\right) \leq 0 \ .$$

Also ist die Funktion

$$t \mapsto \exp\left(-\int_0^t g(s) \, ds\right) \|u_1-u_2\|_{L^2}^2$$

nichtwachsend. Aber sie verschwindet an der Stelle Null, also nimmt sie für jedes $T \geq 0$ den Wert Null an. Damit ist bewiesen, daß $u_1 = u_2$. $\square$

4.5 Beispiele

Nichtlokale partielle Differentialgleichungen treten bei Modellen in der Populationsdynamik in Erscheinung.

Beispiel: *Diffusion.*
Sei $g \in L^2(\Omega)$. Dann definieren wir

$$l(u) := \int_\Omega g(x)u(x)\; dx \; .$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes 4.29 hat das Problem

$$\begin{aligned} u_t - a(l(u))\Delta u = f \quad & \text{in} \quad (0,T)\times\Omega \\ u(t,x) = 0 \quad & \text{auf } (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0) = u_0(x) \quad & \text{in} \quad \Omega \end{aligned}$$

eine Lösung. Die Existenz der Lösung ist eine direkte Folgerung von Satz 4.29. Falls a zusätzlich noch Lipschitz-stetig ist, so ist die Lösung eindeutig. Dieses Beispiel wird auch in [Ack 02] untersucht und mit Hilfe von Aussagen über Operatordifferentialgleichungen behandelt. Die obige Gleichung hat Anwendung in der Populationsdynamik. Für ein bestimmtes a beschreibt sie das Verhalten einer Population bei Epidemieausbrüchen, das wir im nächsten Beispiel diskutieren wollen.

Beispiel: *Population bei Epidemieausbrüchen.*
Gegeben sei das Problem

$$\begin{aligned} u_t - \frac{1}{a(u(t,\cdot))}\Delta u = f(u) \qquad & \text{in } (0,T)\times\Omega \\ u(t,x) = 0 \qquad & \text{auf } (0,T)\times\partial\Omega \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad & \text{in } \overline{\Omega}\; . \end{aligned}$$

Hier ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt mit glattem Rand $\partial\Omega$. Der Diffusionskoeffizient hängt von einer nichtlokalen Größe ab. Falls der Koeffizient $1/a$ eine nicht beschränkte Funktion im Koordinatenursprung ist, z. B.

$$a(u(t,\cdot)) := \int_\Omega u(t,x)\; dx \; ,$$

so könnte Diffusion von diesem Typ eine Population beschreiben, die bestrebt ist, aus Regionen mit stark sinkender Populationsdichte panikartig zu flüchten. Als Beispiel für dieses Verhalten können wir eine Population nehmen, die infolge einer gefährlichen Situation versucht, ein räumliches Gebiet zu verlassen. Die einzelnen Individuen bewegen sich vom Zufall gesteuert, jedoch wird ihre Bewegung (beispielsweise auf Grund mangelnder Information) dazu führen, daß sie die Gefahrenzone verlassen. In diesem Fall wird die Diffusionsrate anwachsen, die zum Verlassen der Region beiträgt, während die Populationsdichte infolge abnehmender Wechselwirkung zwischen den Individuen schwindet. Man könnte sich so eine Erscheinung in Verbindung mit einer Epidemie vorstellen. Die Funktion f schildert den Zuwachs der Kolonie. Man kann diesen Zuwachs auch als Reaktion der Kolonie auffassen. In der Literatur werden zwei sehr weit verbreitete Formen für f benutzt. Das sind $f(u) := ru(k-u)$, die auch *logistisches Modell* genannt wird, und $f(u) := ru/(k+u)$ mit Konstanten r und k. Wir werden die Frage beantworten, unter welchen Bedingungen eine Population in endlicher Zeit überleben oder aussterben wird.

BEISPIEL: *Überleben oder Aussterben einer Kolonie in endlicher Zeit.*
Sei L linearer gleichmäßig elliptischer Operator, gegeben durch

$$Lu := \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

mit genügend glatten und symmetrischen Koeffizienten $a_{ij}(x)$. Untersuchen wir das Problem

$$\begin{aligned} u_t - \frac{1}{\int_\Omega u(t,x)\, dx} Lu = f(u) \qquad & \text{in } (0, T_{max}) \times \Omega \\ u(t,x) = 0 \qquad & \text{auf } (0, T_{max}) \times \partial\Omega \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad & \text{in } \overline{\Omega} \end{aligned} \tag{4.34}$$

mit $f(u) := ru(k-u)$ oder $f(u) := ru/(k+u)$, vergleiche auch letztes Beispiel. Nur für dieses Beispiel werden wir voraussetzen, daß die Anfangsdichte $u_0 \in C_0^2(\Omega)$ der Bedingung $u_0 \geq 0$ und $u_0 \not\equiv 0$ genügt. Gegenstand unserer Untersuchungen wird sein, eine Grenzfunktionen $w_0(x), W_0(x)$ zu bestimmen, so daß für $u_0 < w_0$ die Population in endlicher Zeit verschwindet, das heißt die Lösung von 4.34 erfüllt

$$\lim_{t \to T_{max}} \int_\Omega u(t,x)\, dx = 0 \ .$$

Wenn $u_0(x) \geq W_0(x)$, so überlebt die Population, dies bedeutet

$$\liminf_{t \to \infty} \int_\Omega u(t,x)\, dx > 0 \ .$$

Sei $\phi(x)$ die erste Eigenfunktion von

$$-L\phi = \lambda\phi \quad \text{in } \Omega, \quad \phi = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

mit $\|\phi\|_\infty = 1$ und sei λ_0 der erste Eigenwert. Für den Fall $f(u) = ru/(k+u)$ definieren wir

$$w_0(x) := \frac{\lambda_0}{c}\phi \quad \text{mit } c := \frac{r}{k} \int_\Omega \phi\, dx \ .$$

Das ist die gesuchte Grenzfunktion. Dann können wir folgenden Satz formulieren:

SATZ 4.31 : *Falls $u_0(x) < w_0(x)$, so erreicht die Lösung u von (4.34) den Wert Null in endlicher Zeit.*

BEWEIS: [Ack/Ke 00, Seite 3487].

Für den Fall $f(u) = ru(k-u)$ setzen wir

$$w_0 := \frac{\lambda_0}{c}\phi \quad \text{mit } c := rk \int_\Omega \phi\, dx \ .$$

Dann haben wir die gleiche Aussage wie im obigen Satz 4.31. Jetzt werden wir ähnliche Anfangsbedingungen nennen, unter denen die Population überlebt. Behandeln wir zuerst den Fall $f(u) = ru/(k+u)$. Angenommen, daß $r \int_\Omega \phi \, dx > \lambda_0$, setzen wir

$$\delta := \frac{k\lambda_0}{r \int\limits_\Omega \phi \, dx - \lambda_0} \; .$$

Definiere $W_0(x) := \delta\phi$. Das ist die Grenzfunktion W_0, die die Überlebensgrenze für die Anfangsdichte darstellt.

Satz 4.32 : *Falls $u_0(x) \geq W_0(x)$, so erreicht die Lösung u von (4.34) niemals den Wert Null.*

Beweis: [Ack/Ke 00, Seite 3488].

Entsprechend ist im Falle $f = ru(k-u)$ die Voraussetzung erforderlich, daß $4\lambda_0 < rk^2 \int_\Omega \Phi \, dx$. Sei dann δ die positive Lösung von

$$\lambda_0 = r(k-\delta)\delta \int\limits_\Omega \phi \, dx \; . \tag{4.35}$$

Definiere $W_0 := \delta\Phi$. Dann überlebt die Kolonie, wie im letzten Satz formuliert wurde.

Bemerkung: Die Ergebnisse in diesem Beispiel können auf folgendes Problem erweitert werden:

$$\begin{aligned} u_t - \frac{1}{b(\int\limits_\Omega u(t,x)\, dx)} Lu = f(u) \qquad & \text{in } (0, T_{max}) \times \Omega \\ u(t,x) = 0 \qquad & \text{auf } (0, T_{max}) \times \partial\Omega \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad & \text{in } \bar{\Omega} \end{aligned}$$

mit wachsender und stetig differenzierbarer Funktion b, wobei

$$\mid \frac{db}{d\xi} \mid \leq \beta \quad \text{für alle } \xi \geq 0 \text{ und } b(0) = 0 \; .$$

Numerische Resultate: Für die spezielle Form

$$\begin{aligned} u_t - \frac{1}{\int_0^1 u(t,x)\, dx} u_{xx} = ru(k-u) \qquad & \text{in } (0, T_{max}) \times (0,1) \\ u(t,0) = 0 = u(t,1) \qquad & \text{für } t \in (0, T_{max}) \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad & \text{für } x \in [0,1] \end{aligned}$$

der Gleichung (4.34) wurden numerische Berechnungen durchgeführt. Man hat die Werte $r := 1, k := 10$ und Genauigkeit $\varepsilon := 10^{-5}$ gesetzt. Der kleinste Eigenwert und die entsprechende Funktion von

$$-\phi'' = \lambda\phi \text{ in } (0,1), \quad \phi(0) = 0 = \phi(1)$$

sind $\lambda = \pi^2$ und $\phi = \sin \pi x$. Daraus errechnet sich $c = rk \int_0^1 \sin \pi x \, dx \approx 6.4$. Folglich ist $u_0(x) = \frac{\pi^2}{c} \sin \pi x \approx 1.55 \sin \pi x$. In der numerischen Simulation wurde $u_0(x) := 1.5 \sin \pi x$

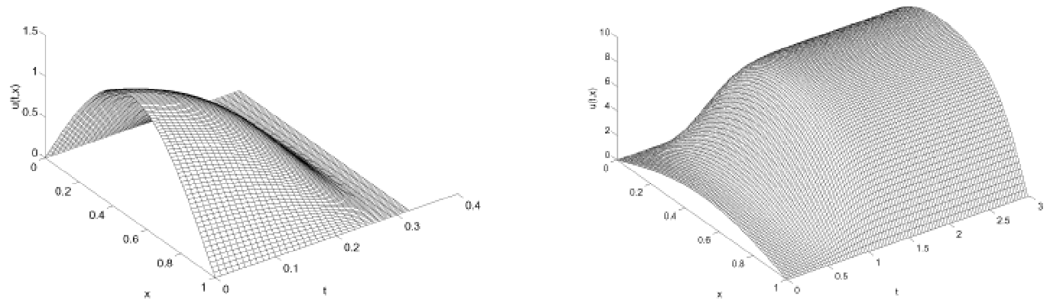

Abbildung 4.1: Numerische Berechnungen für unterschiedliche Anfangsbedingungen

gewählt. Die Berechnung zeigt, daß bei $T_{max} = 0.32$ die Population verschwindet. Eine theoretische obere Schranke für T_{max} ist $T_{max} = 0.34$, vergleiche [Ack/Ke 00, Seite 3490]. Um eine Funktion W_0 zu bestimmen, wählen wir $W_0 := \delta \sin \pi x$ mit $\delta := 1.92$, die erste positive Lösung von (4.35). Also für $u_0(x) \geq W_0(x)$ muß die Population überleben. Abbildung 4.1 zeigt die Resultate der numerischen Berechnung. Die Ergebnisse der numerischen Simulation belegen, daß die Lösung gegen einen positiven Gleichgewichtszustand strebt.

Im weiteren wurden Berechnungen für Anfangswerte zwischen den kritischen Grenzfunktionen durchgeführt, das heißt für Werte $1.55 \sin \pi x \leq u_0(x) \leq 1.92 \sin \pi x$. Während wir nicht in der Lage sind, theoretisch das Langzeitverhalten der Lösung zu bestimmen, wurde numerisch festgestellt, daß die Kolonie für alle $u_0 < 1.84 \sin \pi x$ ausstirbt und für alle $u_0(x) \geq 1.84 \sin \pi x$ überlebt.

Beispiel: *Nichtlokale Effekte und Diffusion großer Reichweite*
In verdünnten Systemen, d. h. wenn die Konzentration oder die Dichte u klein ist, wird der Diffusionsfluß $\vec{j}$ durch das Gesetz von *Fourier (Fick, Darcy)* $\vec{j} = -D(u)\nabla u$ beschrieben. Für einen begrenzten Kreis von praktischen Anwendungen mag diese Gesetzmäßigkeit ausreichend sein, beispielsweise bei Wärmeleitung in einem nichtporösen homogenen isotropen Medium, Diffusion, einfachen Turbulenzmodellen, siehe Beispiel auf Seite 76, einfachen Populationsmodellen etc. Durch die obige Formel werden lokale Erscheinungen und Effekte geringer Reichweite beschrieben. Bei zahlreichen biologischen Phänomenen, beispielsweise bei embryonaler Entwicklung, Formation von Mustern und Strukturen, chemotaktischer Bewegung etc., ist die Zellendichte recht hoch und lokaler Diffusionsfluß von der eben zitierten Gestalt ist nicht genügend exakt.

Statt der einfachen Proportionalität $\vec{j} \sim \nabla u$ suchen wir eine Abhängigkeit der Form

$$\vec{j}(x,t) \sim G[\nabla u(x+r,t)]$$

mit einem Funktional G, das vom Gradienten ∇u abhängt. Der Punkt r gehört einer Umgebung des Punktes x an. Mittels Symmetrieüberlegungen und auf Grund der Isotropie des Mediums, das untersucht wird, kann man zeigen, daß der erste Korrekturterm die Gestalt $\nabla(\Delta u)$ hat. In [Oth 69] wird die Herleitung des Funktionals geschildert. Die Form für den Fluß $\vec{j}$ ist dann

$$\vec{j} = -D_1 \nabla u + \nabla D_2(\Delta u)$$

mit Diffusionskonstanten $D_1 > 0$ und D_2. Die Konstante D_2 ist das Maß für die Effekte großer Reichweite und ist im Allgemeinen betragsmäßig kleiner als D_1.

Wenn der Fluß durch die letzte Formel gegeben wird und in die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{j}$$

eingesetzt wird, so bekommen wir

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla D_1 \nabla u - \nabla \cdot \nabla(D_2 \Delta u) \ . \tag{4.36}$$

Eine mögliche Interpretation des Laplace-Opertors ist nach J. C. Maxwell, daß Δu den Mittelwert der benachbarten Konzentrationen darstellt und proportional ist zu

$$\Delta u \sim \frac{u_{mit}(x,t) - u(x,t)}{R^2} \quad \text{mit } R \longrightarrow 0 \ ,$$

wobei u_{mit} den Mittelwert über Kugel mit Radius $R > 0$ bezeichnet.

$$u_{mit}(x,t) := \frac{1}{|B_R|} \int\limits_{B_R(x)} u(x+r,t) \ dr$$

Durch Entwicklung in Taylorreihe und Ausrechnen kann man zeigen, daß der Proportionalitätsfaktor 10/3 ist. Wenn wir die Interpretation von J. C. Maxwell aufgreifen, können wir den biharmonischen Term $\Delta(D_2 \Delta u)$ als Mittelwert der benachbarten Mittelwerte deuten.

Der biharmonische Term ist stabilisierend, wenn $D_2 > 0$ und destabilisierend bei $D_2 < 0$. Das können wir uns überlegen, indem wir nach einer Lösung in der Form

$$u(x,t) \sim e^{(\omega t + ik \cdot x)} \tag{4.37}$$

suchen. Das ist eine wellenähnliche Lösung mit dem Wellenvektor k und Wellenlänge $2\pi/|k|$. Da die Gleichung (4.36) linear ist, können wir diesen Ansatz benutzen, um Anfangswertprobleme mittels Fourierreihenentwicklung oder Integraltechniken zu behandeln. Durch Einsetzen der Lösung in die Gleichung (4.36) bekommen wir das Dispersionsgesetz für ω in Abhängigkeit von der Wellenzahl $|k|$

$$\omega = -D_1 |k|^2 - D_2 |k|^4 \ .$$

Anwachsen oder Abklingen der Lösung wird durch $e^{\omega t}$ bestimmt. Mit $\omega = \omega(|k|)$ zeigt (4.37) das zeitliche Verhalten beliebiger Wellen, wenn man das entsprechende $|k|$ einsetzt. Also erhalten wir nach Einsetzen der obigen Dispersionsrelation in die Lösung (4.37)

$$u(x,t) \sim \exp((-D_1 |k|^2 - D_2 |k|^4)t + ik \cdot x) \ ,$$

d. h. für große Wellenzahlen $|k|$ mit $|k|^2 > D_1/|D_2|$ hat man für $t \longrightarrow \infty$

$$u(x,t) \longrightarrow \begin{cases} 0, & \text{wenn } D_2 > 0 \\ \infty, & \text{wenn } D_2 < 0 \ . \end{cases}$$

Beispiel: *Zellenpotential und energetischer Zugang zur Diffusion*
Man kann Energieüberlegungen anwenden, um die partielle Differentialgleichung für die Diffusion großer Reichweite herzuleiten. Sei mit $u(x,t)$ die Zellendichte bezeichnet. In ganz allgemeinen Begriffen ausgedrückt kann man behaupten, daß bei gegebenem Potential ϕ das Vorhandensein eines Gradienten im Potential ϕ einen Fluß $\vec{j}$ verursacht, der proportional zu $\nabla\phi$ ist. Das Potential ist die Arbeit, die verrichtet wird, um eine infinitesimale Änderung des Zustandes zu bewirken, d. h. die Variation δE der Energie E. Bei gegebener Zellendichte $u(x,t)$ assoziieren wir die räumliche Verteilung von Zellen mit einer Energiedichte $e(u)$. Sei $e(u)$ die innere Energie pro Volumeneinheit, so daß die Gesamtenergie $E(u)$ im Volumen V durch

$$E(u) = \int_V e(u)\ dx$$

gegeben wird. Die Energieänderung δE bei Änderung des Zustands des Systems um δu definiert das Potential ϕ gemäß

$$\phi(u) := \frac{\delta E}{\delta u}\ .$$

Unter der Annahme, daß die Energiedichte e lediglich von u abhängt $e = e(u)$, kann man $\phi(u) = e'(u)$ schreiben. Der Gradient des Potentials bewirkt einen Fluß $\vec{j}$, der proportional zu $\nabla\phi$ ist, also

$$\vec{j} = -D\nabla\phi$$

mit Proportionalitätsfaktor D, der von x, t und u abhängt. Die Kontinuitätsgleichung für u lautet

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla\cdot\vec{j} = \nabla\cdot(D\nabla\phi(u)) = \nabla De''(u)\nabla u$$

In der einfachen Situation von gewöhnlicher Diffusion ist die innere Energie von der Form $e(u) = u^2/2$. Also ist $\phi(u) = u$ und die letzte Gleichung hat die Gestalt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u\ .$$

Wenn $D = D(x,t,u)$, so ist die allgemeinere Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla\cdot(D(x,t,u)\nabla u)\ .$$

Hier kann u auch ein Vektor von verschiedenen Zellenarten sein.

Diese Herleitung wurde unter der Annahme durchgeführt, daß die Energiedichte nur von u abhängt. In der biologischen Musterformation und Strukturbildung ist die räumliche verschiedenartige Zusammensetzung von mehreren Zellenarten von Bedeutung. Damit diese Heterogenität erreicht wird, muß die Energiedichte auch von anderen Größen abhängen, als nur von der Zellendichte u. Ein etwas realistischeres Funktional, der invariant unter Rotation und Spiegelung ist, könnte sein

$$E(u) = \int_V e(u) + k_1\Delta u + k_2(\nabla u)^2 + \ldots\ dx\ .$$

Nach der Green'schen Formel

$$\int_V k_1\Delta u\ dx + \int_V \nabla k_1\cdot\nabla u\ dx = \int_{\partial V} k_1\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\ ds$$

mit der äußeren Normalen $\vec{n}$ ist

$$\int_V k_1 \Delta u \; dx = -\int_V k_1'(u)(\nabla u)^2 \; dx + \int_{\partial V} k_1 \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} \; ds$$

mit $\nabla k_1(u) = k_1'(u)\nabla u$. Wenn kein Fluß durch den Rand ∂V vorhanden ist, erhält das Energiefunktional die Form

$$E(u) = \int_V (e(u) - (k_1' - k_2)(\nabla u)^2 + ...) \; dx \; .$$

Mit $k := 2(-k_1'(u) + k_2)$ bekommen wir für das Potential ϕ

$$\phi = \phi(u, \nabla u) = \frac{\delta E}{\delta u} = -k\Delta u + e'(u) \; .$$

Daraus ergibt sich für den Fluß $\vec{j}$

$$\vec{j} = -De''(u)\nabla\phi(u, \nabla u) \; .$$

Die verallgemeinerte Diffusionsgleichung ist dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = -\nabla \cdot \vec{j} = \nabla \cdot (De''(u)\nabla\phi) &= De''(u)\Delta(-\Delta u + e'(u)) \\ &= -kDe''(u)\Delta^2 u + De''(u)\nabla \cdot e''(u)\nabla u \; , \end{aligned}$$

wobei k und D als konstant vorausgesetzt werden.

Für die Energiedichte $e(u)$ sind mehrere Formeln bekannt. Eine mögliche Wahl wäre die Landau-Ginzburg Form der freien Energie, vergleiche [Mur 89, Seite 251]

$$e(u) = \frac{au^2}{2} + \frac{bu^4}{2} \; .$$

Dann hat die verallgemeinerte Diffusionsgleichung die Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -De''(u)k\Delta^2 u + De''(u)a\Delta u + De''(u)b\Delta u^3$$

oder mit

$$D_1 := De''(u)a, \quad D_2 := De''(u)k, \quad D_3 := De''(u)b$$

lautet die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D_1\Delta u + D_2\Delta^2 u + D_3\Delta u^3 \; .$$

Es sei bemerkt, daß ein nichtlinearer Term Δu^3 vorhanden ist. Wenn die Energiedichte die Form $e(u) = u^2/2$ hat und $b = 0$ ist, so bekommt man die Relation (4.36). Bei vorhandener Quelle $f(u)$ lautet die Bilanzgleichung

$$-D_1\Delta u + D_2\Delta^2 u - D_3\Delta u^3 = f(u) \; .$$

In [Coh/Mur 81] wurde gezeigt, daß die eindimensionale Version mit logistischem Zuwachs für $f(u)$ räumlich inhomogene Lösungen besitzen kann. Das logistische Modell für $f(u)$ wurde im Beispiel auf Seite 70 erwähnt. In [Lar 84] wurde festgestellt, daß im zweidimensionalen Fall diese Gleichung bestimmte morphogenetische Aspekte von heterogenen Systemen mehrerer mobiler Zellenarten widerspiegelt.

BEISPIEL: *Turbulenzmodell.*
Es wird der Fluß in einer geraden Leitung zwischen zwei parallelen Wänden modelliert. Wir betrachten eine inkompressible Flüssigkeit mit konstanter kinematischer Zähigkeit ν_0. Es wird die Idee in [Lan/Lif 74, Seite 135] und [SBS 97] umgesetzt, daß man eine turbulente Zähigkeit einführen kann. Eine turbulent strömende Flüssigkeit kann in mancher Hinsicht qualitativ als Flüssigkeit mit einer, wie man sagt, turbulenten Zähigkeit ν_{turb} beschrieben werden, die von der wirklichen kinematischen Zähigkeit ν_0 verschieden ist. Unser Beispiel wird eine turbulent strömende Flüssigkeit zwischen zwei parallelen Ebenen beschreiben. Der Abstand zwischen den Ebenen sei 1. Als Koordinaten wählen wir (x, y, z), so daß $x \in [0, 1]$ senkrecht zu den Ebenen ist. Sei mit $u(x, t)$ die mittlere Strömungsgeschwindigkeit bezeichnet. Wir setzen voraus, daß die mittlere Strömungsgeschwindigkeit parallel zu den Wänden der Leitung und zur y-Achse ist. Also sind die x-und die z-Komponente der mittleren Geschwindigkeit identisch gleich Null. Eine weitere Annahme bei unserem Modell der Strömung sei, daß es sich dabei um eine Strömung handelt, die konstant längs der y-Richtung ist. Wenn wir den mittleren Druck mit $\bar{p}$ bezeichnen, bedeutet dies, daß $\partial\bar{p}/\partial y$ und die y-Komponente der Geschwindigkeit unabhängig von y sind. Ausgehend von der Navier-Stokes-Gleichung für die Strömungsgeschwindigkeit v

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v\nabla)v = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu_0 \Delta v$$

wird in [SBS 97, Seite 237–238] gezeigt, daß wir unter diesen Voraussetzungen das Problem

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}((\nu_0 + \nu_{turb})\frac{\partial u}{\partial x}) = f \\ u(x,t) = 0 \quad \text{für } x = 0, x = 1\end{gathered}$$

erhalten, wobei die Funktion f als bekannt betrachtet wird.

Nun muß man die turbulente Zähigkeit ν_{turb} modellieren. Dabei gehen wir davon aus, daß die beobachtete Turbulenz durch den rapiden Abfall der Geschwindigkeit an den Wänden erzeugt wird. Dann verbreitet sich die Turbulenz quer durch die Leitung. Da der Abfall der Geschwindigkeit durch $\partial u/\partial x$ gegeben wird, könnte man folgendes Modell aufstellen

$$\nu_{turb}(t,x) = \varphi(\frac{\partial}{\partial x}u(t,0))g(x) + \varphi(\frac{\partial}{\partial x}u(t,1))g(1-x) \ .$$

Hier beschreibt die Funktion φ die Erzeugungsrate der Turbulenz und die Gewichtungsfunktion $g(x)$ widerspiegelt den Übertragungseffekt längs der x-Achse. Die Auswertung der Funktion $\partial_x u(\cdot, 0)$ zur Zeit t und nicht zu einem früheren Zeitpunkt $t - s, s > 0$ beruht auf der Annahme, daß sich die Turbulenz wesentlich schneller ausbreitet, als die Änderungen in der Strömung. Die Gewichtungsfunktion $g(x)$ wird so gewählt, daß sie die Turbulenzausbreitung in unmittelbarer Nähe der Leitungswände schildert. Man kann beweisen, daß bei symmetrischen Daten f, g und bei symmetrischem Anfangszustand $u_0(x)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ die Lösung ebenfalls symmetrisch ist. Unter Symmetrie ist hier

$$f(x) = f(x-1), \quad g(x) = g(x-1)$$

etc. gemeint. Wir werden bei der numerischen Simulation symmetrische Daten verwenden. Diese Symmetrieannahme wird in Folgerung 4.34 gerechtfertigt. Um uns Rechenaufwand bei der Auswertung der Ableitungen $\partial_x u(t, 0), \partial_x u(t, 1)$ zu ersparen, werden wir

$$\nu_{turb} = \varphi(\frac{\partial}{\partial x}u(t,0))g(x)$$

für unser Modell aufschreiben. Trotz dieser Vereinfachung sind wir immer noch mit einem nichtlokalen Problem konfrontiert. Letztendlich bemerken wir, daß aus Dimensionsüberlegungen die Größe

$$U_R = \sqrt{\nu_0 \frac{\partial u}{\partial x} \mid}_{x=0} = \sqrt{\nu_0 \frac{\partial u}{\partial x} \mid}_{x=1}$$

die Maßeinheit einer Geschwindigkeit besitzt. Das ist die charakteristische Geschwindigkeitsskala in unmittelbarer Nähe der Wände. Die Energiedissipation infolge der Reibung an der Wand erzeugt Turbulenzen. Die Reibungskräfte, die die Energiedissipation verursachen, sind proportional zu U_R. Wir werden annehmen, daß die Funktion φ proportional zu den Reibungskräften ist, d. h. $\varphi(r) = \sqrt{r}$. Somit ist unsere Modellbeschreibung beendet.

Wir untersuchen das nichtlokale Problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(D\frac{\partial u}{\partial x}) = f \quad & \text{in } Q := (0,T)\times(0,1) \\ u = 0 \quad & \text{auf dem Rand } x=0, x=1 \\ u = u_0 \quad & \text{für } t = 0 \;. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Die nichtlokale Abhängigkeit des Diffusionkoeffizienten D wird gegeben durch

$$D = g_0(x) + g_1(x)h(t) \quad \text{mit } h(\cdot) := \varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}u(\cdot,x)|_{x=0}\right) \;. \tag{4.39}$$

Ausgehend von der Navier-Stokes-Gleichung wird die nichtlineare parabolishe Differentialgleichung mit der konkreten Abhängigkeit

$$D = D(u) = \nu_0 + g(x)\sqrt{\frac{\partial}{\partial x}u(t,0)}$$

aufgestellt, wobei die Funktion f modifizierter Druckgradient, $\nu_0 > 0$ die kinematische Zähigkeit der Flüssigkeit und die Funktion $g > 0$ die Turbulenzübertragungsrate empirisch darstellt. Die minimalen Anforderungen, unter denen Existenz einer Lösung von dem Problem (4.38) nachgewiesen werden kann, sind

$$\begin{aligned} (i) \quad & u_0 \in H_0^1(0,1) \\ (ii) \quad & \|f\|_{L^2(Q)} \le M \\ (iii) \quad & \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \quad \text{ist stetig} \\ (iv) \quad & \|g_j'\|_{L^2(0,1)} \le M, \quad 0 < \lambda \le g_j \le \Lambda, \quad j = 0,1 \;. \end{aligned} \tag{4.40}$$

Man beweist die Existenz schwacher Lösungen von dem Problem(4.38) mit Hilfe des *Schauder*schen Fixpunktsatzes. Das wird in Einzelheiten in [SBS 97, Seite 244 ff] ausgeführt. Wir beschränken uns darauf, den Satz über Existenz schwacher Lösungen zu formulieren.

Satz 4.33 : *Unter den Voraussetzungen (4.40) existiert mindestens eine schwache Lösung u von dem Problem (4.38) mit*

$$u \in C(\bar{Q}), \; u_{xx} \in L^2(Q), \; u_x \mid_{x=0} \in L^4(0,T) \;. \tag{4.41}$$

Falls zusätzlich noch g_1 beschränkt und φ gleichmäßig lipschitz-stetig in $\mathbb{R}$ sind, so ist dann die Lösung eindeutig und hängt gleichmäßig von den Daten (u_0, f) in den entsprechenden Räumen in (4.41) ab.

Beweis: [SBS 97, Seite 244 ff] .

Folgerung 4.34 : *Angenommen* g_o, g_1, f, u_0 *sind symmetrisch, so ist auch die Lösung symmetrisch.*

Beweis: [SBS 97, Seite 245]

Weiter wird ein gewisser gedanklicher Aufwand erforderlich um die Beschränktheit nach unten von $u_x(\cdot, 0)$ in $[0, T]$ zu überprüfen. Dieser Schritt ist durch die konkrete Auswahl der Funktion $\varphi(r) := \sqrt{r}$ in (4.39) und durch die Mindestanforderung (4.40)(iii) notwendig. Um die Beschränktheit nachweisen zu können, muß man stärkere Forderungen an die Funktionen g_0, g_1, φ, u_0 und f stellen.

Satz 4.35 *Unter den Voraussetzungen*

$$\begin{aligned}
&(i) && u_0 \in H_0^1(0,1;\mathbb{R}_+) \\
&(ii) && f \in L^2(Q;\mathbb{R}_+) \\
&(iii) && \varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \qquad \textit{ist stetig} \\
&(iv) && \|g_j'(x)\|_{L^2(0,1)}, \qquad 0 < \lambda \le g_j \le \Lambda, \quad j = 1,2, \quad x \in (0,1)
\end{aligned} \tag{4.42}$$

ist für die Lösung u *von (4.38) die Funktion* $\xi := u_x \,|_{x=0}$ *auf* Q *von unten beschränkt, d. h.* $u_x \,|_{x=0} \ge 1/C$ *in* $[0, T]$.

Beweis: [SBS 97, Seite 247]

Folgerung 4.36 *Es sei angenommen, daß (4.42)* $(i), (ii), (iv)$ *mit* $\varphi(r) := \sqrt{r}$ *auf* $\mathbb{R}^+$. *Dann hat (4.38) eindeutige Lösung* u*, die stetig von* u_0 *und* f *abhängt.*

Beweis: [SBS 97, Seite 249]

Jetzt wird unter Symmetrie die Modellgleichung

$$\begin{aligned}
&u_t = \nu_0 + g(x)\sqrt{\frac{\partial u}{\partial x}\,\Big|_{x=0}} \\
&u = 0 \quad \text{für } x = 0 \\
&\frac{\partial u}{\partial x}\,\Big|_{x=1/2} = 0
\end{aligned} \tag{4.43}$$

zusammen mit den Anfangs- und Randwertbedingungen aufgestellt. Das ist unser ursprüngliches Problem mit Symmetrieannahmen, die durch Folgerung 4.34 gerechtfertigt werden, vergleiche auch die physikalische Modellbeschreibung.

Satz 4.37 *Seien die Voraussetzungen (4.42) unter Symmetrieannahme auf* $[0, 1]$ *mit* $f \ge 0$ *und* $f \not\equiv 0$ *erfüllt. Dann existiert eindeutige Lösung* v *für den Gleichgewichtszustand von (4.43) und (4.43) ist lokal exponentiell stabil in einer Umgebung von dieser Lösung* v.

Beweis: In [SBS 97, Seite 249 ff] wird die Existenz und Stabilität einer stationären Lösung gezeigt.

Zum Schluß wurden numerische Berechnungen für Reynolds-Zahlen 57 000, 120 000 und 230 000 bei konstantem Druckgradienten $f > 0$ durchgeführt. Man hat die Finite-Elemente-Methode benutzt. Experimentelle Daten sind in [Com-Bel 65] zu entnehmen.

Diese Daten entsprechen der stationären Lösung vom letzten Satz 4.37. Die Funktion g wird empirisch angepaßt. Dem Modell in [SBS 97] folgend, wird g so gewählt, daß sie unabhängig von der Reynolds-Zahl ist. Laut Auswertung der berechneten Daten in [SBS 97, Seite 253] wiesen die numerischen Ergebnisse qualitativ das gleiche Verhalten wie beim Experiment auf. Der Fall für Re=57 000 wird in Abbildung 4.2 dargestellt.

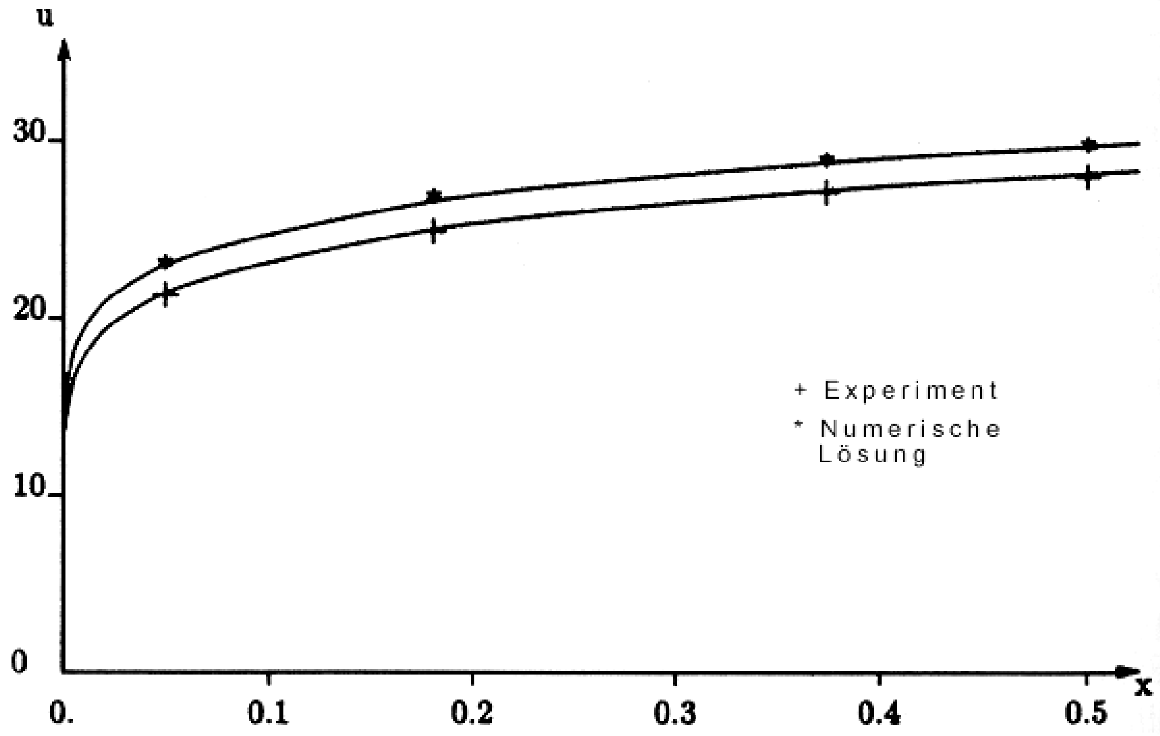

Abbildung 4.2: Vergleich zwischen numerischen Ergebnissen und Experiment bei Turbulenzmodell

Ein anderes physikaliches Beispiel, das in [Lin 97] mittels nichtlokaler partieller Differentialgleichungen modelliert wurde, ist der thermoelastische Kontakt zwischen zwei Scheiben.

Als weitere Anwendung von nichtlokalen partiellen Differentialgleichungen in der Physik sei die Beschreibung von Wärmeleitung in einem porösen Medium erwähnt. Die Nichtlokalität ist eine Folge von der Existenz bevorzugter Pfade, die die Wärme über große Entfernungen leiten.

4.6 Auswertung der Ergebnisse, Ausblicke

In dieser Arbeit wurde die Existenz von Lösungen für nichtlokale elliptische Probleme unter allgemeinen Bedingungen nachgewiesen. Bei der Eindeutigkeit haben wir gefordert, daß die Koeffizienten a_{ij} des Differentialoperators glatt sein sollten. Außerdem wurde verlangt, daß die rechte Seite in gewissem Sinne klein sein sollte. Die Summe der Normen von den Funktionen auf der rechten Seite sollte in gewisser Weise von der *Poincaré*-Konstanten, von den Koeffizienten des Differentialoperators und noch von der die Nichtlokalität beschreibenden Abbildung φ kontrolliert werden, vergleiche Satz 3.13. Wenn man bestimmte Phänomene auf dem Gebiet der Biologie oder Physik modelliert, ist es nicht ausgeschlossen, diese Einschränkung abzuschwächen und Eindeutigkeit für beliebige Werte der rechten Seite zu beweisen, wie das beispielweise in [Lin 97] bei der Behandlung des thermoelastischen Kontakts erreicht wurde. Das ist jedoch mit der Struktur der einzelnen Aufgabe eng verbunden. Die Beweistechnik und Argumentation, die wir vorgestellt haben, ist für eine Klasse von nichtlokalen elliptischen Problemen gültig. Im parabolischen Fall wurde der Existenzbeweis für nichtlokale Abhängigkeit der Gestalt $a_{ij} = a_{ij}(l(u))$ mit einer Linearform $l(u)$ auf $L^2(\Omega))$ durchgeführt. Man könnte versuchen, die Voraussetungen für die Form $l(u)$ abzuschwächen. Im folgenden werden einige weitere Forschungsmöglichkeiten bei parabolischen Problemen erwähnt.

Man kann das Verhalten einer Lösung von nichtlokalen parabolischen Differentialgleichungen für $t \to \infty$ untersuchen. Das assoziierte elliptische Problem für die Gleichgewichtslage erhalten wir, wenn wir $u_t := 0$ in die parabolische Gleichung setzen. Es kann vorkommen, daß eine stationäre Lösung existiert. Selbstverständlich ist es möglich, daß es mehrere voneinander unterschiedliche oder gar ein Kontinuum von Lösungen gibt. Auch die Frage nach der Stabilität dieser Lösungen wäre für diese Art der asymptotischen Analysis von Interesse.

Ein weiteres Forschungsfeld wäre die Existenz von Lösungen für endliche Zeit. Es ist wohlbekannt, daß parabolische Gleichungen Lösungen besitzen können, die nicht global existieren. Dann sagt man, daß sie in endlicher Zeit explodieren. Man könnte die Diagnostik von dieser Erscheinung auf Herausfinden von Größen zurückführen, die nicht global existieren können. Solche Größen sind beispielsweise Lösungen von Differentialgleichungen.

Ein möglicher Zugang zur Gewinnung von Regularitätsaussagen über nichtlokale Probleme wäre die Untersuchung von Variationsungleichungen. Die Zuhilfenahme von Bifurkationsmethoden könnte sich für die vorgestellte Problematik auch als nützlich erweisen.

Literaturverzeichnis

[Ack 02] Ackleh, A. S.: *On the unique solvability of a nonlocal functional evolution equation*, Journal of mathematical analysis and applications **267**, 522–530(2002)

[Ack/Ke 00] Ackleh, A. S., Ke, L.: *Existence and long time behaviour for a class of nonlocal nonlinear parabolic evolution equations*, Proceedings of the American Mathematical Siciety, Volume **128**, Number 12, pp 3483–3492, S 0002-9939(00)05912-8

[Ada 75] Adams, R.: *Sobolev spaces*, Academic Press, NY, 1975

[Alt 85] Alt, H. W.: *Funktionalanalysis*, Springer, Berlin '85

[Bau 92] Bauer, H.: *Maß- und Integrationstheorie*, de Gruyter, Berlin, NY, 1992

[Boc 33] Bochner, S.: *Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind.* Fund. Math., **20**, 262–276, 1933

[Chi 00] Chipot, M.: *Elements of nonlinear analysis*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000

[Chi 00/1] Chipot, M.: *The diffusion of a population partly driven by its preferences* Arch. Rational Mech. Anal. 155 (2000) 237–259, Digital Object Identifier 10.1007/s002050000112

[Chi/Lov 97] Chipot, M., Lovat, B.: *Some remarks on non local elliptic and parabolic problems.* Nonlinear analysis, Methods & Applications, Vol. **30**, No 7, pp 4691-4627, 1997

[Coh/Mur 81] Cohen, D. S., Murray, J. D.: *A generalized diffusion model for growth and dispersal in a population*, J. Math. Biol. **12**, 237–249(1981)

[Com-Bel 65] Comte-Bellot, G., *Ecolement turbulent entre deux parios planes paralleles.* Publ. Sci. Tech. du Min. de l'Air, No **419**, 1965

[Els 91] Elstrodt, J.: *Maß- und Integrationstheorie*, Springer, Berlin, Heidelberg, NY, 1991

[GGZ 74] Gajewski, H., Gröger, K., Zacharias, K.: *Nichtlineare Operatorgleichumgen und Operatordifferentialgleichungen.* Akademie-Verlag, Berlin, 1974

[Gil/Tru 01] Gillbarg, D., Trudinger, N. S.: *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, Berlin, Heidelberg, NY, 2001

[Jan 71] Jantscher, L.: *Distributionen*, De Gruyter, NY 1971

[Jos 98] Jost, J.: *Partielle Differentialgleichungen*, Springer, Berlin, Heidelberg, NY 1998

[Kin/Sta 80] Kinderlehrer, D., Stampacchia, G.: *An introduction to variational inequalities*, Academic Press 1980

[KTW 71] Klötzler, R., Tutschke, W., Wiener, K.: Beiträge zur Analysis 1, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971

[Lan/Lif 74] Landau, L. D., Lifschitz, E. M.: *Lehrbuch der theoretischen Physik, Band VI Hydrodynamik*, Akademie-Verlag-Berlin 1974

[Lar 84] Lara Ocha F.: *A generalized reaction diffusion model for spatial structure formed by mobile cells.* Biosystems **17** 309–331 (1984)

[Lau/Kel 79] Lauffenburger, D. A., Keller, K. H.: *Effects of leucocyte random mobility and chemotaxis in tisue inflamatory responce.* Journal of theoretical biology **81** (475-503) 1979

[Lin 97] Lin, Y.: *A nonlocal parabolic system modelling axially symmetric thermoelastic contact of two discs,* Journal of Mathematical Analysis and Applications **210**, 39–57 (1997)

[Lio 72] Lions, J. L.: *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Mir, Moskau, 1972, auf Russisch

[Mur 89] Murray, J. D.: *Mathematical Biology*, Springer, Berlin 1989

[Oth 69] Othmer, H.: *Interactions of reaction and diffusion in open systems*, Ph. D. thesis, Chem. Eng. Dept., Univ. Minnesota, 1969

[SBS 97] Seidmann, T. I., Browner, C.-M., Schmitd-Lainè, C.: *A nonlocal parabolic equation arising in a turbulence model*, Journal of Math. Anal & Applications, Vol **206**, No 1, Feb 1997, pp 234–253

[Tra/Lau 86] Tranquillo, Lauffenburger: *Consequences of chemosensory phenomena for leucocyte chemotactic orientation.* Cell Biophysichs **8** (1-46) 1986

[Wer 97] Werner, D.: *Funktionalanalysis*, Springer, Berlin, 1997

[Zei 77] Zeidler, E.: *Vorlesungen über nichlineare Funktionalanalysis I. Fixpunktsätze*, Teubner, Leipzig, 1977

[Zei 77/2] Zeidler, E.: *Vorlesungen über nichlineare Funktionalanalysis II. Monotone Operatoren*, Teubner, Leipzig, 1977

[Zei 86] Zeidler, E.: *Applied functional analysis*, Vol.**1**, Springer, NY 1986

[Zei 95] Zeidler, E.: *Applied functional analysis, Applications to mathematical physiks*, Springer, NY 1995

[Yos 65] Yosida, K.: *Funktionalanalysis*, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1965

Erklärung

Ich versichere, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Leipzig, 08. Juli 2002

Danksagung

Ich danke meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr. Schumann, für die Auswahl des interessanten Themas sowie für die fachlichen Hinweise, für die zahlreichen Literaturangaben und für die Bereitschaft mir jederzeit zu helfen.

Für Korrekturen, hilfreiche Gestaltungsempfehlungen und interessante und fruchtbare Diskussionen möchte ich mich bei Lars Nöbel, Jan Keller, Matthias Semmelhack, Olliver Möller, Mario Schmidt, Kai Zehmisch, Thomas Scholze und Matthias Adler bedanken.

Mein ganz besonderer Dank geht an Rossitza Findeisen für ihre Hilfe und moralishe Unterstützung.

Danken will ich auch meinen Eltern, die mich stets unterstützt haben.