# Entropiezahlen von Diagonaloperatoren in Lorentzräumen

**DIPLOMARBEIT**

zur Erlangung des akademischen Grades Diplom - Mathematiker

an der UIVERSITÄT zu LEIPZIG
Fakultät für Mathematik und Informatik

eingereicht von Oliver Thomys,
geboren am 19. Juli 1982 in Jena

Betreuer: Prof. Dr. Thomas Kühn

Leipzig, 13. September 2007

**Zusammenfassung**

In dieser Arbeit behandeln wir das Gebiet der Entropiezahlen - wir definieren sie ganz allgemein, stellen Eigenschaften und ihre Bedeutung heraus und arbeiten uns bis zu den aktuell wichtigsten Resultaten vor. Das Konzept ist so angelegt, dass es schon für Studenten im Hauptstudium Mathematik verständlich sein sollte, auf jeden Fall werden Kenntnisse in Analysis, Funtktioanalanalysis, Kombinatorik und - in Ansätzen - lineare Algebra vorausgesetzt.

**Danksagung**

An dieser Stelle möchte ich mich bei all denen bedanken, die mich beim Anfertigen dieser Arbeit unterstützt haben. Mein besonderer Dank geht hierbei an

* Herrn Prof. Dr. Thomas Kühn, für seine freundliche und intensive Betreuung,
* meine Eltern und Großmutter, die mich finanziell unterstützt haben,
* meine Freundin Petra Schulze, welche mir immer wieder Mut gemacht hat und
* Frau Webers, die das Korrekturlesen übernehmen mußte.

## Vorwort

Die metrische Entropie ist ein allgemeines Konzept, welches in vielen Bereichen der Mathematik Anwendung findet, so zum Beispiel in der Codierungs- und Ergodentheorie. Wir betrachten in dieser Arbeit lediglich eine Anwendung der metrischen Entropie in der Funktionalanalysis, indem wir sie zur Beschreibung der Kompaktheit linearer stetiger Operatoren verwenden. Ein Operator in Banachräumen $T : X \to Y$ ist bekanntlich kompakt, wenn $T(U_X) \subseteq Y$ präkompakt ist, wobei wir mit $U_X$ die abgeschlossene Einheitskugel des Raumes X bezeichnen. Die Kompaktheit von $T$ können wir also wie folgt formulieren:

$$T \text{ ist kompakt } \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0\, \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{ so dass } T(U_X) \subseteq Y \text{ durch } N \\ \text{Kugeln vom Radius } \varepsilon \text{ überdeckt werden kann} \end{cases}$$

Das ist der Ausgangspunkt der Entropiebetrachtungen. Man kann nun entweder den Radius der Kugeln fixieren und untersuchen, welches die kleinste Anzahl von Kugeln ist, die man zur Überdeckung benötigt, oder man hält die Anzahl der Kugeln fest und sucht nun den kleinsten Radius, mit dem man das Bild der Einheitskugel überdecken kann.
Wir werden den zweiten Weg gehen und Erkenntnisse sammeln, die es uns ermöglichen, das asymptotische Verhalten der Entropiezahlen zu ermitteln. Dabei richten wir unser Hauptaugenmerkt auf Entropiezahlen von Diagonaloperatoren und werden am Ende schließlich in der Lage sein, ein wichtiges Resultat von Gordon, König und Schütt auf Lorentzräume auszudehnen.
Wir werden im Verlaufe der Arbeit auf ein fundamenteles Resultat von Carl stoßen, die **Ungleichung von Carl**:

$$|\lambda_n(T)| \leq \sqrt{2} e_n(T).$$

Sie ermöglicht uns nämlich die Eigenwerte $\lambda_n(T)$ eines beliebigen kompakten Operators T konkret nach oben, durch die Entropiezahlen $e_n(T)$, abzuschätzen.

Vor allem in der Physik steckt hinter elementaren Fragestellungen oft ein System von Differentialgleichungen, welches nicht exakt berechnet werden kann. Um weiter zu kommen, ist man meist gezwungen, einen Separationsansatz anzuwenden, um dann ein Eigenwertproblem zu erhalten. Da man dieses Eigenwertproblem auch nicht immer lösen kann, versucht man zumindest deren Lösungen gut zu approximieren, also die Eigenwerte abzuschätzen. An dieser Stelle ist es wichtig, das Verhalten der Eigenwerte zu kennen und das wiederum ermöglicht uns obige Ungleichung von Carl.
Wir wollen nun noch ein abstraktes Beispiel angeben, in dem wir zeigen, wie wir, mit Hilfe der Entropiezahlen, konkrete Aussagen über die Eigenwertfolge eines kompakten Operators $T : X \to X$, der auf einem Banachraum $X$ wirkt, erhalten. Angenommen, zu dem Operator $T$ gibt es stetige lineare Operatoren $A$ und $B$ sowie einen Diagonaloperator $D_\sigma$, so dass das folgende Diagramm kommutativ[1] ist.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "A"'] & X \\ l_p \arrow[r, "D_\sigma"'] & l_q \arrow[u, "B"'] \end{tikzcd} \tag{1}$$

[1]D.h. es gilt $T = BD_\sigma A$.

So erhalten wir dank gewisser Eigenschaften der Entropiezahlen und der Ungleichung von Carl das Resultat, dass die Folge der Eigenwerte von $T$ in $l_r$ liegt, wenn die Folge der Entropiezahlen von $D_\sigma$ in $l_r$ liegt.

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

Wie aus der Funktionalanalysis bekannt ist, kann man den “Betrag eines kompakten Operators“, der zwischen zwei Hilberträumen operiert, als $|T| := (T^*T)^{1/2}$ definieren, wobei $T^*$ der (im Hilbertraumsinn) adjungierte Operator von T ist. $|T|$ wiederum hat nur nichtnegative Eigenwerte und man kann diese, der Größe und ihrer Vielfachheit nach gezählt, anordnen. Diese Anordnung ergibt eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen, welche **singuläre Zahlen** genannt werden. Die singulären Zahlen haben eine Reihe schöner Eigenschaften, so bilden sie zum Beispiel eine positive Nullfolge, deren erstes Glied gerade der Norm von T entspricht.
Aus der Theorie der Hilberträume ist uns bekannt, dass wir zu einem kompakten Operator $T \in \mathcal{K}(H_1, H_2)$, der zwischen zwei Hilberträumen operiert, Orthonormalsysteme $e_n$ bzw. $f_n$ finden können, so dass gilt:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n \langle x, e_n \rangle f_n \qquad \forall x \in H_1, \tag{2}$$

wobei $s_n$ die singulären Zahlen von T sind.
Nun kann man im Banachraumfall nach einer Zahlenfolge suchen, die Eigenschaften von den singulären Zahlen hat. Bei dieser Suche sind gut ein halbes Dutzend solcher Zahlen aufgetaucht, welche man in Anlehnung an die singulären Zahlen **s-Zahlen** nennt.
Wir werden auf zwei Vertreter der s-Zahlen, die **Approximationszahlen** und die **Entropiezahlen**, näher eingehen, Relationen zwischen beiden betrachten und konkrete Methoden angeben, wie man sie berechnen kann. Wie in jedem Gebiet der Mathematik gibt es auch hier spezielle Beweistechniken und Konstrukte, um ihnen zu Leibe zu rücken. Zwei wichtige Vertreter hiervon sind die Operatorenideale und die Interpolation. Auf diese beiden Begriffe werden wir auch noch eingehen, bevor wir die Hauptresultaten im letzten Kapitel in herleiten können.
Die Hauptresultate sind die **Ungleichung von Carl** und der **Satz von Gordon-König-Schütt**. Wie im Vorwort schon erwähnt, können wir aus der Ungleichung von Carl eine Abschätzung für die Beträge der Eigenwerte finden, welche die Entropiezahlen interessant macht. Zum Berechnen der Entropiezahlen wiederum, dient uns der Satz von Gordon-König-Schütt. Durch diesen können wir für bestimme Entropiezahlen ermitteln, wie schnell diese gegen Null abfallen. Zum Schluß beweisen wir noch zwei neue Sätze, welche an den Satz von Gordon-König-Schütt angelehnt sind und ihn verallgemeinern.

## Notationen und Konventionen

Wie üblich bezeichnen wir mit $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ die natürlichen, ganzen, reellen bzw. komplexen Zahlen. Wir zählen die Null nicht zu den natürlichen Zahlen, manchmal betonen wir das noch extra mit dem Symbol $\mathbb{N}^+$. Falls wir einmal doch die Null benötigen, definieren wir dazu $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Mit $c_{00}$, $c_0$, $c$, $l_p$ und $l_\infty$ bezeichnen wir die Räume der finiten Folgen, Nullfolgen, konvergenten , p-summierbaren bzw. beschränkten Folgen. Die zwei letzten Räume tauchen manchmal mit einem zusätzlichen oberen Index "n" auf, dann meinen wir damit den $\mathbb{K}^n$ mit der entsprechenden Norm.
Oft werden wir nicht nur mit Normen in Berührung kommen, sondern auch mit so genannten Quasinormen und $p$-Normen$(0 < p \leq 1)$. Eine **Quasi-** bzw. **p-Norm** ist eine Abbildung auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $r : X \to [0, \infty)$ mit

(a) $r(sx) = |s|r(x)$ $\quad \forall s \in \mathbb{K},\ \forall x \in X$
(b) $r(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
(c) $r(x + y) \leq C[r(x) + r(y)]$ $\quad \forall x, y \in X$ für ein $C \geq 1$
bzw.
(c') $[r(x + y)]^p \leq [r(x)]^p + [r(y)]^p$ $\quad \forall x, y \in X$.

Räume, die bezüglich einer Quasi- bzw. p-Norm vollständig sind, nennen wir **Quasi-** bzw. **p-Banachräume**.
Banachräume über dem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ werden stets mit $X, Y, Z$ bezeichnet. Falls einmal Hilberträume auftauchen sollten, werden wir diese mit $H$ oder $\mathcal{H}$ bezeichnen. Für Operatoren zwischen Räumen werden wir in der Regel die Bezeichnung $R, S, T$ verwenden. Sofern es nicht ausdrücklich anders gesagt wird, meinen wir mit Operatoren lineare und stetige Operatoren von $X$ nach $Y$, deren Klasse wir mit $\mathcal{L}(X, Y)$ bezeichnen. Mit $\mathcal{F}(X, Y)$ bzw. $\mathcal{K}(X, Y)$ bezeichnen wir die finiten bzw. kompakten Operatoren.
Unter der Norm eines Operators T verstehen wir wie üblich $\|T\| := \sup\{\|Tx\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}$, wobei der untere Index der Norm angibt, welchem Raum diese zugeordnet ist. Den Dualraum von $X$ bezeichnen wir mit $X'$ und den (im Hilbertraumsinn) zu $T$ adjungierten Operator mit $T^*$.

Wir vereinbaren hier für nichtnegative Folgen $x = (x_n)$ und $y = (y_n)$ die Schreibweise $x_n \sim y_n$ oder kurz $x \sim y$, wenn es positive Konstanten c und C gibt mit $cx_n \leq y_n \leq Cx_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wenn wir von Banachräumen sprechen, meinen wir sowohl reelle als auch komplexe Räume.
Wenn es nicht ausdrücklich anders gesagt wird, ist es nicht nötig zwischen den beiden Fällen zu unterscheiden. Falls ein Satz oder eine Behauptung nur für einen Fall gilt, werden wir ausdrücklich darauf hinweisen.

Unser spezielles Augenmerk liegt auf Banachräumen, jedoch gelten manche Sätze sogar im Quasibanachraumfall. Wir bitten um Verständnis, wenn manchmal nur der Banachraumfall betrachtet oder bewiesen wird, da sich ansonsten die Beweistechniken meist als viel aufwendiger erweisen, der eingeschränkte Fall aber für unsere Hauptresultate ausreichend ist.

# Kapitel 1

# Entropiezahlen und Lorentzräume

Bevor wir das Hauptobjekt unserer Betrachtungen, die Entropiezahlen, einführen, werden wir die Klasse der **s-Zahlen** definieren, von denen wir die Vertreter Entropiezahlen und Approximationszahlen genauer betrachten werden. Nachdem wir einige Eigenschaften der Approximationszahlen studiert haben, werden wir mit deren Hilfe die Lorentzräume definieren und damit alle wichtigen Objekte dieser Arbeit vorgestellt haben. Als letztes beschäftigen wir uns noch mit Operatorenidealen und der Interpolation, welche in unserem Kontext wichtig für die Beweise in den folgenden Kapiteln sind.
Wie bereits eingangs erwähnt, interessiert man sich bei Operatoren, welche zwischen Banachräumen wirken, für Folgen, die ähnliche Eigenschaften haben wie die singulären Zahlen. Wir können hier nicht auf alle s-Zahlenfunktionen eingehen, deswegen verweisen wir auf *Eigenvalue Distribution of Compact Operators* von Hermann König (vgl. [6, Definition 1.d.13]), wo wir eine gute Einführung in diese Theorie finden.

1. Seien $X$ und $Y$ (quasi-) Banachräume. Eine Abbildung $s : \mathcal{L} \to l_\infty$ die jedem Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ eine Folge $(s_n(T))$ nichtnegativer reeller Zahlen zuordnet, nennen wir **s-Zahlenfunktion**, wenn folgendes gilt:
   (a) $\|T\| = s_1(T) \geq s_2(T) \geq ... \geq 0,\ T \in \mathcal{L}(X, Y)$
   (b) $s_{m+n-1}(S + T) \leq s_m(S) + s_n(T),\ S, T \in \mathcal{L}(X, Y), \forall m, n \in \mathbb{N}$
   (c) $s_n(RST) \leq \|R\|\, s_n(S)\, \|T\|\,,\ T \in \mathcal{L}(X_0, X), S \in \mathcal{L}(X, Y), R \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$
   (d) $s_n(T) = 0 \Leftrightarrow rang\, T < n, s_n(id_{l_2^n}) = 1.$

2. Wenn eine Abbildung nur die Eigenschaften (a) - (c) erfüllt, nicht jedoch Eigenschaft (d), so nennen wir sie **pseudo-s-Zahlenfunktion**.

3. Eine (pseudo-)s-Zahlenfunktion $s : \mathcal{L} \to l_\infty$ nennen wir **multiplikativ**, wenn folgendes gilt:

$$s_{m+n-1}(ST) \leq s_m(S)s_n(T),\ T \in \mathcal{L}(X, Y), S \in \mathcal{L}(Y, Z), \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Der in obiger Definition auftauchende Raum $l_2^n$ ist der Raum $\mathbb{K}^n$ mit der Norm $\|x\|_{l_2^n} := (\sum_{i=1}^n |x_i|^2)^{1/2}$.
Man kann alle s-Zahlen, die in Banachräumen auftauchen, auch im Spezialfall der Hilberträume betrachten und erkennt, dass dort alle zusammenfallen und gerade gleich den singulären Zahlen sind.

## 1.1 Approximationszahlen und Lorentzräume

Wir gehen jetzt auf eine wichtige s-Zahlenfunktion ein, die so genannten **Approximationszahlen**. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, sind singuläre Zahlen zunächst nur für kompakte Operatoren definiert. Um eine analoge Darstellung, wie in (2) zu erhalten, führt man eben besagte Approximationszahlen ein und zeigt, dass sie im Falle der Hilberträume, gerade mit den singulären Zahlen übereinstimmen.
Zuvor führen wir jedoch den wichtigen Begriff des **Diagonaloperators** ein, mit welchen wir uns im Laufe dieser Arbeit oft beschäftigen werden.

### 1.1.1 Definition (Diagonaloperator)

Wir nennen $D_\sigma : l_p \longrightarrow l_q$, $0 < p, q \leq \infty$ **Diagonaloperator**, wenn er jedem Element $x \in l_p$ durch die Vorschrift

$$D_\sigma(x) := (x_1\sigma_1, x_2\sigma_2, ...)$$

ein Element aus $l_q$ zuordnet.

### 1.1.2 Definition (Approximationszahlen für Operatoren)

Sei $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, so ist die **n-te Approximationszahl** von T definiert durch:

$$a_n(T) := \inf\{\|T - S\|\ S \in \mathcal{L}(X, Y), \operatorname{rang} S < n\}$$

Man erkennt leicht, dass es sich bei den Approximationszahlen um multiplikative s-Zahlen handelt. Der Beweis hierzu findet sich u.a. in König [6, Lemma 1.d.14,15].

Sei $x = (x_i)_{i\in I}$ eine komplexwertige Folge, dann heißt $x$ **endlich**, wenn es nur endlich viele Koordinaten $x_i$ ungleich Null gibt, dabei bezeiche $I$ eine beliebige Indexmenge. Wir bezeichnen die Kardinalzahl von $\{i \in I : x_i \neq 0\}$ mit card(x).
Wir geben jetzt noch die Definition für die Approximationszahlen für Folgen an.

### 1.1.3 Definition (Approximationszahlen für Folgen)

Die **n-te Approximationszahl** von $x \in l_\infty(I)$ ($I$ beliebige Indexmenge) wird definiert durch:

$$a_n(x) := \inf\{\|x - u\|_\infty : u \in l_\infty(I),\ \operatorname{card}(u) < n\}$$

Es ist nicht schwer zu sehen, dass diese Definition gerade mit der Definition der **monotonen Umordnung** $x^*$ zusammenfällt, welche wir jetzt auch noch einführen werden.

### 1.1.4 Definition (nicht fallende monotone Umordnung)

1. Sei $x = (x_1, x_2, ...)$ eine Nullfolge mit Werten in $\mathbb{C}$, so heißt $x^*$ **nicht fallende monotone Umordung** mit:

$$x_1^* := \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n|\},$$

$$x_n^* := \sup_{|I_n|=n} \left\{ \sum_{j\in I_n} |x_j| \right\} - \sum_{j=1}^{n-1} x_j^*, \quad \text{für } n > 1.$$

(Es gilt also: $x_1^* \geq x_2^* \geq ... \geq 0$. Die Definition ist auch für endliche Folgen sinnvoll, indem man diese durch Null fortsetzt.)

2. Ein aus Folgen bestehender Banachraum (X,$\|.\|_X$) heißt **symmetrischer Folgenraum**, wenn $\|x\|_X = \|x^*\|_X \; \forall x \in X$ gilt.

Man kann sich auch in diesem Fall wieder überlegen, dass die Approximationszahlen die Multiplikativitäsbedingung erfüllen.
Wir geben jetzt die Definition der **Lorentzräume** an. Pietsch verwendet in seinem Buch *Eigenvalues and s-Numbers*, [11, Definition 2.1.4] die Approximationszahlen anstelle der nicht fallenden monotonen Umordnung, welche die übliche Variante ist. Wie man leicht sieht, stimmen beide im Falle von Folgenräumen überein, darum ist das auch gerechtfertigt.

### 1.1.5 Definition (Lorentzräume)

Die **Lorentzräume** $l_{r,w}$ bestehen aus allen komplexwertigen Folgen $x = (x_i)$, so dass $(n^{1/r-1/w}x_n^*) \in l_w$ ist, mit $0 < r < \infty$. Die dazugehörige Quasinorm wird im Falle $0 < w < \infty$ mit

$$\|x\|_{r,w} := \left\| \left( n^{1/r-1/w} x_n^* \right) \right\|_w := \left( \sum_{n=1}^{\infty} [n^{1/r-1/w} x_n^*]^w \right)^{1/w}$$

und im Falle $w = \infty$ mit

$$\|x\|_{r,\infty} := \sup_{n\in\mathbb{N}} \{n^{1/r} x_n^*\}$$

definiert.

Man sieht sogleich, dass für den Fall $r = w$ die Lorentzräume mit den üblichen Folgenräumen $l_r$ zusammenfallen, die Lorentzräume bilden also eine Art Verfeinerung der bekannten Folgenräume.
Wir werden jetzt ein Lemma formulieren, welches uns zum Beweis des darauf folgenden Satzes dienen soll. Der Beweis des Lemmas ist in [11, Prosposition 2.1.7-10] zu finden, und da es sich um rein analytische Beweistechniken handelt, verzichten wir darauf, ihn hier zu führen.

### 1.1.6 Lemma

1. *Seien* $0 < p < r < \infty, 0 < w \leq \infty$ *und sei* $x \in l_\infty$, *so gilt:*
   (a) $x \in l_{r,w} \Leftrightarrow \|x\|_p^{mean} := \left\|((\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_n^{*p})^{1/p})\right\|_{r,w} < \infty,$
   (b) $\|.\|_p^{mean}$ *und* $\|.\|_{r,w}$ *sind äquivalente Quasinormen auf* $l_{r,w}$.
2. *Seien* $0 < r < \infty, 0 < w \leq \infty$ *und sei* $x \in l_\infty$, *so gilt:*
   (a) $x \in l_{r,w} \Leftrightarrow \|x\|_0^{mean} := \left\|((\prod_{k=1}^n x_n^*)^{1/n})\right\|_{l,w} < \infty,$
   (b) $\|.\|_0^{mean}$ *und* $\|.\|_{r,w}$ *sind äquivalente Quasinormen auf* $l_{r,w}$.

3. *Seien* $0 < r < \infty, 0 < w \leq \infty$ *und sei* $x \in l_\infty$*, so gilt:*

   (a) $x \in l_{r,w} \Leftrightarrow \|x\|_{r,w}^{odd} := \left\|\left(x_{2n-1}^*\right)\right\|_{r,w} < \infty$,

   (b) $\|.\|^{odd}$ *und* $\|.\|_{r,w}$ *sind äquivalente Quasinormen auf* $l_{r,w}$.

4. *Seien* $0 < r < \infty, 0 < w \leq \infty$ *und sei* $x \in l_\infty$*, so gilt für festes s=2,3,...:*

   (a) $x \in l_{r,w} \Leftrightarrow \|x\|_s^{geom} := \left\|\left(s^{k/r} x_{s^k}^*\right)\right\|_w < \infty$,

   (b) $\|.\|_s^{geom}$ *und* $\|.\|_{r,w}$ *sind äquivalente Quasinormen auf* $l_{r,w}$.

Mit Hilfe von Lemma 1.1.6 kann man zweierlei leicht zeigen, erstens, dass die Lorentzräume **lexikographisch geordnet** sind, d.h. es gilt
$l_{r_0,w_0} \subseteq l_{r_1,w_1}$ für $0 < r_0 < r_1 < \infty$ und beliebige $w_0, w_1$,
$l_{r,w_0} \subseteq l_{r,w_1}$ für beliebiges und $0 < w_0 < w_1 < \infty$
und zweitens folgenden Satz, der die Höldersche Ungleichung auf Lorentzräume ausdehnt:

### 1.1.7 Satz (Höldersche Ungleichung für Lorentzräume)

*Für* $0 < p, q, u, v \leq \infty$ *und* $1/p + 1/q = 1/r$ *sowie* $1/u + 1/v = 1/w$ *gilt:*

$$x \in l_{p,u},\ y \in l_{q,v}\ \Rightarrow xy \in l_{r,w}$$

**Beweis**

Seien $x \in l_{p,u}$ und $y \in l_{q,v}$. Nach Lemma 1.1.6.4 gilt mit $s = 2$:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} [2^{k/p} x_{2^k}^*]^u\right)^{1/u} < \infty, \tag{1.1}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} [2^{k/q} y_{2^k}^*]^v\right)^{1/v} < \infty. \tag{1.2}$$

Wegen des gleichen Lemmas reicht es, zu zeigen, dass ein $s \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $(\sum_{k=1}^{\infty}([s^{k/r}(xy)_{s^k}^*]^w))^{1/w} < \infty$ ist. Wir wählen dazu wieder $s = 2$ und beachten folgende Formel, die aus der Multiplikativität der Approximationszahlen folgt:

$$\underbrace{a_{2^k}(xy)}_{(xy)_{2^k}^*} = a_{2^{k-1}+2^{k-1}+1-1}(xy) \overset{Monotonie}{\leq} a_{2^{k-1}+2^{k-1}-1}(xy) \leq \underbrace{a_{2^{k-1}}(x)}_{x_{2^{k-1}}^*} \underbrace{a_{2^{k-1}}(y)}_{y_{2^{k-1}}^*}. \tag{1.3}$$

Damit folgt also:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} [2^{k/r} (xy)_{2^k}^*]^w\right)^{1/w} \overset{(1.3)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{\infty} [2^{k/r} x_{2^{k-1}}^* y_{2^{k-1}}^*]^w\right)^{1/w} =$$

$$= 2^{1/r} \left(\sum_{k=1}^{\infty} [2^{k-1/p} x_{2^{k-1}}^*]^w [2^{k-1/q} y_{2^{k-1}}^*]^w\right)^{1/w} \overset{Höldersche\,Ungleichung}{\leq}$$

$$\leq 2^{1/r}\left(\sum_{k=1}^{\infty}[2^{(k-1)/p}x^*_{2^{k-1}}]^u\right)^{1/u}\left(\sum_{k=1}^{\infty}[2^{(k-1)/q}y^*_{2^{k-1}}]^v\right)^{1/v}\overset{(1.1),(1.2)}{<}\infty. \tag{1.4}$$

q.e.d.

Sei $I$ wieder eine beliebige Indexmenge, wenn wir mit $l_{p,u}(I)\circ l_{q,v}(I)$ die Menge aller komplexwertigen Familien bezeichnen, deren Elemente $x$ wie folgt geschrieben werden können: $x=(\alpha_n\beta_n)$, mit $a=(\alpha_n)\in l_{p,u}(I)$ und $b=(\beta_n)\in l_{q,v}(I)$,
so gilt sogar die folgende Bemerkung.

### 1.1.8 Bemerkung

*Für $0<p,q,u,v\leq\infty$ und $1/p+1/q=1/r$ sowie $1/u+1/v=1/w$ gilt:*

$$l_{p,u}(I)\circ l_{q,v}(I)=l_{r,w}(I). \tag{1.5}$$

Der Beweis hierzu findet sich wieder in [11, 2.1.13].
Als letztes geben wir noch ein Kriterium an, wie wir Approximationszahlen konkret berechnen können, einen Beweis hierzu finden wir wieder in [6, Lemma 1.d.17].

### 1.1.9 Lemma

*Seien $1\leq q\leq p\leq\infty$ und $1/r:=1/q-1/p$ (bzw. $r:=\infty$, für $p=q$) und sei $\sigma$ die zum Diagonaloperator $D_\sigma\in\mathcal{L}(l_p,l_q)$ gehörige Folge, so gilt*

$$a_n(D_\sigma)=\begin{cases}(\sum_{j=n}^{\infty}\sigma_j^{*r})^{1/r} & ,\text{für } p>q\\ \sigma_n^* & ,\text{für } p=q.\end{cases} \tag{1.6}$$

## 1.2 Entropiezahlen

Wir werden nun kurz die Entropiezahlen einführen und zeigen, dass es sich um eine multiplikative s-Zahlenfunktion handelt. Zu weiteren Aussagen und Anwendungen kommen wir dann in den folgenden Kapiteln.

### 1.2.1 Definition (Entropiezahlen)

Seien $X$ und $Y$ Banachräume und $T$ ein linearer stetiger Operator $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, so nennt man

$$\varepsilon_n(T) := inf \left\{ \varepsilon > 0 | \exists x_1, ..., x_n \in Y \text{mit } T(B_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \{\{x_i\} + \varepsilon B_Y\} \right\}$$

**n-te Entropiezahl von T**, wobei $B_X$ bzw. $B_Y$ die abgeschlossenen Einheitskugeln in $X$ bzw. $Y$ sind. Wir nennen:

$$e_n := \varepsilon_{2^{n-1}}$$

die **n-te dyadische Entropiezahl von T**.

Beim Übergang von den "normalen" Entropiezahlen zu den dyadischen gehen bei der asymptotischen Betrachtung keine wesentlichen Informationen verloren. Darum werden wir auch nur die dyadischen Entropiezahlen betrachten und diese wieder nur "Entropiezahlen" nennen.

### 1.2.2 Bemerkung

*Aus der Definition der Entropiezahlen ergibt sich offensichtlich folgender elementarer Zusammenhang:*

$$T \text{ ist kompakt } \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} e_n(T) = 0.$$

Wenn wir also einen kompakten Operator gegeben haben, gibt uns das Verhalten der Entropiezahlen an, "wie kompakt" der Operator ist. Je schneller sie gegen Null konvergieren, desto kompakter ist auch der Operator.
Haben wir zum Beispiel kompakte Operatoren $S$ und $T$ gegeben mit $e_n(S) = 2^{-\sqrt{n}}$ und $e_n(T) = 1/n$, so würden wir $S$ ein größeren "Grad der Kompaktheit" zuordnen als $T$.

### 1.2.3 Behauptung

*Die Entropiezahlen sind eine multiplikative pseudo-s-Zahlenfunktion.*

**Beweis**

Die Eigenschaften hierzu sind leicht nachzuprüfen, wir geben den Beweis lediglich für die Multiplikativität an:

Seien $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, sowie $\lambda > e_n(T)$ und $\mu > e_m(S) \Rightarrow \exists y_1,...,y_{2^{n-1}} \in Y, z_1,...,z_{2^{m-1}} \in Z$ mit:

$$T(B_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} \{\{y_i\} + \lambda B_Y\}, \tag{1.7}$$

$$S(B_Y) \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^{m-1}} \{\{z_j\} + \mu B_Z\}. \tag{1.8}$$

Wenn wir nun den Operator $S$ auf (1.7) anwenden und anschließend (1.8) beachten, erhalten wir

$$S(T(B_X)) \subseteq S(\bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} \{\{y_i\} + \lambda B_Y\})) \subseteq \bigcup_{j=1}^{2^{m-1}} \bigcup_{i=1}^{2^{n-1}} \{\{Sy_i\} + \{\lambda z_j\} + \lambda\mu B_Z\}. \tag{1.9}$$

Wir können die rechte Seite von (1.9) auch als eine Menge mit $2^{m-1} \cdot 2^{n-1} = 2^{(m+n-1)-1}$ Elementen betrachten und wenn wir gleichzeitig $x_k := Sy_i + \lambda z_j$ setzen, erhalten wir:

$$(ST)(B_X) \subseteq \bigcup_{k=1}^{2^{(m+n-1)-1}} \{\{x_k\} + \lambda\mu B_Z\} \tag{1.10}$$

Aus der Definition von $\lambda$ und $\mu$, sowie aus (1.10) folgt also:

$$e_{m+n-1}(ST) \leq \lambda\mu \overset{inf}{\rightarrow} e_{m+n-1}(ST) \leq e_m(S)e_n(T) \tag{1.11}$$

q.e.d.

Am Ende unserer Einführung der Entropiezahlen geben wir noch eine interessante Eigenschaft der s-Zahlen Funktionen und auch der Entropiezahlen an. Mit ihrer Hilfe erhalten wir eine weitere Formel zur Berechnung des **Spektralradius' r(T)**. Wenn wir ein $T \in \mathcal{L}(X)$ gegeben haben, so kennen wir aus der Funktionalanalysis folgende Formel:

$$r(T) := \inf \|T^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Es stellt sich heraus, dass man noch weitere Berechnungsmöglichkeiten erhält, einmal für beliebige s-Zahlen Funktionen, aber auch für die Entropiezahlen:

$$r(T) = \lim_{k\to\infty} s_1(T^k)^{1/k} \tag{1.12}$$

$$r(T) = \lim_{k\to\infty} e_n(T^k)^{1/k}. \tag{1.13}$$

Da wir im weiteren Verlaufe nicht mehr auf den Spektralradius stoßen werden, verweisen wir zum Beweis auf König [6, Prosposition 2.d.6] und [6, Remark 2.d.7].

## 1.3 Operatorenideale

Wir führen nun kurz die Operatorenideale ein und richten uns dabei nach den Ausführungen von Carl und Stephani in [2, 1.6.]. In den folgenden Kapiteln werden wir die Idealeigenschaften zum Beweis von einigen Sätzen heranziehen. Besonderes Augenmerk legen wir dabei auf die Entropieideale. Die Theorie der Operatorenideale hat Pietsch in seinem Buch "Operator Ideals" ausführlich behandelt.

### 1.3.1 Definition (Operatorenideale)

Seien für jedes Paar von (Quasi-) Banachräumen $X$ und $Y$ eine Teilmenge $\mathcal{A}(X,Y) \subseteq \mathcal{L}(X,Y)$ gegeben. So heißt die Klasse

$$\mathcal{A} := \bigcup_{X,Y} \mathcal{A}(X,Y)$$

**Operatorenideal**, falls die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. $\mathcal{F}(X,Y) \subseteq \mathcal{A}(X,Y)$,
2. $T_1,\, T_2 \in \mathcal{A}(X,Y) \Rightarrow T_1 + T_2 \in \mathcal{A}(X,Y)$,
3. und seien $X_0$ und $Y_0$ weitere Banachräume, $R \in \mathcal{L}(X_0, X),\ S \in \mathcal{A}(X,Y),\ T \in \mathcal{L}(Y, Y_0) \Rightarrow TSR \in \mathcal{A}(X_0, Y_0)$.

Aus der Definition ergibt sich, dass die Klasse $\mathcal{F}$ aller finiten Operatoren und die Klasse $\mathcal{L}$ aller linearen stetigen Operatoren zwischen beliebigen Banachräumen Operatorenideale sind. Es ist offensichtlich, dass für jedes Operatorenideal $\mathcal{A}$ gilt: $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$.

### 1.3.2 Definition (Ideal-Quasinorm)

Sei $\mathcal{A}$ ein Operatorenideal. Eine Funktion $\alpha : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ heißt **Ideal-Quasinorm auf $\mathcal{A}$**, falls gilt

1. $0 \leq \alpha(T) < \infty\, \forall T \in \mathcal{A},\ \alpha(T) = 0 \Leftrightarrow T = 0$,
2. $\exists\, c \geq 1$ mit $\alpha(T_1 + T_2) \leq c(\alpha(T_1) + \alpha(T_2))\ \forall\, T_1, T_2 \in \mathcal{A}(X,Y)$,
3. $\alpha(TSR) \leq \|T\|\, \alpha(S)\, \|R\|\ \ \forall R \in \mathcal{L}(X_0, X), S \in \mathcal{A}(X,Y), T \in \mathcal{L}(Y, Y_0)$.

Ein Paar $[\mathcal{A}, \alpha]$ heißt **quasinormiertes Operatorenideal**. Ein quasinormiertes Operatorenideal wird **vollständig** genannt, wenn jede Komponente $\mathcal{A}(X,Y)$ vollständig bezüglich $\alpha$ ist.

### 1.3.3 Definition ((pseudo-)s-Zahlenideal)

Sei s eine (pseudo-)s-Zahlenfunktion, so definieren wir

$$\mathcal{L}^{(s)}_{p,q}(X,Y) := \{T \in \mathcal{L}(X,Y) : (s_n(T)) \in l_{p,q}\} \text{ für } 0 < p < \infty,\ 0 < q \leq \infty, \tag{1.14}$$

$$\lambda^{(s)}_{p,q} := \|(s_n(T))\|_{l_{p,q}}\,. \tag{1.15}$$

Wir nennen $[\mathcal{L}^{(s)}_{p,q}, \lambda^{(s)}_{p,q}]$ **(pseudo-)s-Zahlenideal**.

### 1.3.4 Lemma

*Das **Entropieideal** $[\mathcal{L}_{p,q}^{(e)}, \lambda_{p,q}^{(e)}]$ ist ein vollständiges quasinormiertes Operatorenideal.*

**Beweis**

1. Schritt: $\mathcal{L}_{p,q}^{(e)}$ ist ein Operatorenideal.
Der Beweis hierfür findet sich in [2, 1.6], wir geben lediglich den Beweis für die 2. Eigenschaft eines Operatorenideals an.
Seien $T_1$ und $T_2 \in \mathcal{L}_{p,q}^{(e)}$, d.h. gelte $\lambda_{p,q}^{(e)}(T_i) = (\sum_{n=1}^{\infty}[n^{1/p-1/q}e_n(T_i)]^q)^{1/q} < \infty$, so folgt wegen $e_{2k}(T_1+T_2) \leq e_{2k-1}(T_1+T_2) \leq e_k(T_1) + e_k(T_2)$:

$$\lambda_{p,q}^{(e)}(T_1+T_2) = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\Big[(2k-1)^{1/p-1/q}e_{2k-1}(T_1+T_2)\Big]^q + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[(2k)^{1/p-1/q}e_{2k}(T_1+T_2)\Big]^q\right)^{1/q}$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\Big[(2k-1)^{1/p-1/q}(e_k(T_1)+e_k(T_2))\Big]^q + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[(2k)^{1/p-1/q}(e_k(T_1)+e_k(T_2))\Big]^q\right)^{1/q}. \tag{1.16}$$

Im Falle $p \leq q$ können wir nun wie folgt abschätzen:

$$(1.16) \leq \left(2\cdot 2^{q/p-1}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[k^{1/p-1/q}(e_k(T_1)+e_k(T_2))\Big]^q\right)^{1/q} \leq$$

$$\leq \left(2^{1/p}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[k^{1/p-1/q}(e_k(T_1)+e_k(T_2))\Big]^q\right)^{1/q}.$$

Falls aber $p > q$ gilt, so können wir $(2k-1)^{1/p-1/q}$ und $(2k)^{1/p-1/q}$ bei (1.16) jeweils durch $k^{1/p-1/q}$ nach oben abschätzen:

$$(1.16) \leq 2^{1/q}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\Big[k^{1/p-1/q}(e_k(T_1)+e_k(T_2))\Big]^q\right)^{1/q}.$$

Wenn wir also $s := \min(p,q)$ setzen, erhalten wir:

$$\lambda_{p,q}^{(e)}(T_1+T_2) \leq 2^{1/s}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\Big[k^{1/p-1/q}(e_k(T_1)+e_k(T_2))\Big]^q\right)^{1/q} \tag{1.17}$$

Wenn wir jetzt in der rechten Seite von (1.17) die Dreiecksungleichung, bzw. die Quasidreiecksungleichung anwenden, ergibt sich:

$$\lambda_{p,q}^{(e)}(T_1+T_2) \leq 2^{1/s}C[\lambda_{p,q}^{(e)}(T_1) + \lambda_{p,q}^{(e)}(T_2)],$$

wobei $C \geq 1$ die eventuelle auftauchende Konstante der Quasidreiecksungleichung ist.

2. Teil: Vollständigkeit
Sei $T_m : X \to Y$ eine Cauchyfolge bezüglich $\lambda_{p,q}^{(e)}$ in $\mathcal{L}_{p,q}^{(e)}(X,Y)$, d.h. es ist

$$\lambda_{p,q}^{(e)}(T_{m+j} - T_m) < \varepsilon \tag{1.18}$$

für genügend großes m und alle j. Da für $T \in \mathcal{L}_{p,q}^{(e)}$ sogar

$$\|T\| = e_1(T) \leq \lambda_{p,q}^{(e)}(T)$$

gilt, stellt sich heraus, dass $T_m$ auch eine Cauchyfolge bezüglich der üblichen Operatornorm ist. Es existiert also ein Operator $L \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit:

$$\lim_{m\to\infty} \|T - T_m\| = 0.$$

Wir müssen jetzt noch zeigen, dass $T \in \mathcal{L}_{p,q}^{(e)}$ ist, und dass

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_{p,q}^{(e)}(T_m - T) = 0 \tag{1.19}$$

gilt. Dazu betrachten wir zuerst ein endliches Teilstück der unendlichen Reihe, welche links in Formel (1.18) steht:

$$\lim_{j\to\infty} \left( \sum_{n=1}^{k} \left[ n^{1/p-1/q} e_n(T_{m+j} - T_m) \right]^q \right)^{1/q} = \left( \sum_{n=1}^{k} \left[ n^{1/p-1/q} \lim_{j\to\infty} e_n(T_{m+j} - T_m) \right]^q \right)^{1/q} \leq \varepsilon, \tag{1.20}$$

für m, welches von $\varepsilon$ aber nicht von k abhängt. Nun ergibt sich:

$$e_n(T - T_m) \leq e_n(T - T_{m+j}) + ||T_{m+j} - T_m|| \leq ||T - T_{m+j}|| + e_n(T_{m+j} - T_m)$$

und daraus wiederum folgt:

$$|e_n(T_{m+j} - T_m) - e_n(T - T_m)| \leq \|T_{m+j} - T\|\,.$$

Dies impliziert:

$$\lim_{j\to\infty} e_n(T_{m+j} - T_m) = e_n(T - T_m).$$

Darum können wir jetzt, anstatt von (1.20) auch schreiben:

$$\left( \sum_{n=1}^{k} \left[ n^{1/p-1/q} e_n(T - T_m) \right]^q \right)^{1/q} \leq \varepsilon,$$

wobei m immer noch unabhängig von k ist, weswegen wir endlich unser gewünschtes Resultat erhalten:

$$\left( \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n^{1/p-1/q} e_n(T - T_m) \right]^q \right)^{1/q} \leq \varepsilon,$$

das bedeutet nämlich $T - T_m \in \mathcal{L}_{p,q}^{(e)}(X,Y)$ und mit der Voraussetzung $T_m \in \mathcal{L}_{p,q}^{(e)}(X,Y)$ folgt mittels der Additivität $T \in \mathcal{L}_{p,q}^{(e)}(X,Y)$.
Jetzt ist nur noch die Vollständigkeit im Falle $q = \infty$ zu zeigen, da das aber durch ähnliche Argumente, wie im Fall $q < \infty$, erfolgt, verzichten wir hier darauf.

q.e.d.

Wir werden später zum Beweis der Aussagen von Carl noch das folgende Resultat benötigen.

### 1.3.5 Lemma

*Zu jeder Quasinorm auf einem beliebigen Vektorraum existiert eine $p$-Norm, wobei sich $p$ aus der Gleichung $K = 2^{1/p-1}$ berechnen läßt. $K$ ist dabei die Konstante der Quasidreiecksungleichung.*

Wir verzichten hier auf den Beweis und verweisen dazu auf [6, 1.d.1] und [10, Theorem 6.1.8,6.2] und [10, 6.2].

## 1.4 Interpolation

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einigen Aussagen über die Interpolationstheorie. Natürlich kann man im Rahmen einer Diplomarbeit nicht sämtliche Aspekte dieser komplexen Theorie darlegen, zumal wir auch nur einen Spezialfall davon benötigen werden. Eine hilfreiche Einführung findet sich zum Beispiel in [11, Kapitel F.]. Ausführlich haben sich Bergh und Löfström mit diesem Gebiet befasst, in ihrem Buch *Interpolation Spaces* findet sich unter anderem der für uns wichtige Satz 1.4.2.

Wir wollen nun kurz das Konzept der Interpolation beschreiben. Seien $A_0$ und $A_1$ zwei Quasibanachräume, welche stetig in einen linearen Hausdorffraum $A$ eingebettet sind. Dann heißt $(A_0, A_1)$ **Interpolationspaar**. Sei nun $(B_0, B_1)$ ein weiteres Interpolationspaar, welches ebenfalls in einen linearen Hausdorffraum $B$ eingebettet, ist und sei $T$ ein linearer Operator von $A$ nach $B$, dessen Einschränkung auf $A_i$ stetige lineare Operatoren nach $B_i$ $(i = 0, 1)$ sind.

Jetzt fragt man nach Quasibanachräumen $A^* \subseteq A$ und $B^* \subseteq B$, so dass die Einschränkung von $T$ auf $A^*$ ein stetiger Operator nach $B^*$ ist. Diese Bedingung wird **Interpolationseigenschaft** genannt. Es ist also eine Konstruktion $F$ gesucht, die aus einem gegebenen Interpolationspaar $(A_0, A_1)$ einen Quasibanachraum $A^\sim := F((A_0, A_1))$ erzeugt, so dass $F((A_0, A_1))$ und $F((B_0, B_1))$ die Interpolationseigenschaft besitzen. $A^\sim$ wird dabei als **Interpolationsraum** bezeichnet.

Bekannte Konstruktionsmöglichkeiten sind die **J-Methode** und die **K-Methode**. Wir werden nur die letztere vorstellen, welche wir in dem Kapitel über die Resultate von Carl verwenden werden.

Zuerst definieren wir den Quasibanachraum

$$A_0 + A_1 := \{a \in A : a = a_0 + a_1, a_i \in A_i\},\ i = 0, 1, \tag{1.21}$$

mit zugehöriger Quasinorm

$$\|a\|_{A_0+A_1} := \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}), \tag{1.22}$$

sowie für festes $t > 0$ das **Peetresche K-Funktional**

$$K(t, a) := K(A_0, A_1, t, a) := \inf_{a \in A_0+A_1} (\|a_0\|_{A_0} + t\,\|a_1\|_{A_1}). \tag{1.23}$$

Wie man leicht sieht, bildet $K$ eine einparametrige Familie von äquivalenten Quasinormen auf $A_0 + A_1$, welche für festes a stetig von t abhängt.

Gelte nun $\theta \in (0, 1)$ und $q \in (0, \infty]$. Sei $(A_0, A_1)$ ein beliebiges Interpolationspaar, so bezeichnen wir mit $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ die Menge aller $a \in A_0 + A_1$, für die

$$\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,p}} := \left( \int_0^\infty \left[ t^{-\theta} K(t, a) \right]^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \tag{1.24}$$

bzw. falls $p = \infty$

$$\|a\|_{(A_0,A_1)_{\theta,\infty}} := \sup_t \left\{ t^{-\theta} K(t, a) \right\} \tag{1.25}$$

endlich ist. Man kann leicht zeigen(vgl. z.B. [11, F]), dass $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ zusammen mit der soeben definierten Quasinorm einen Quasibanachraum bildet.

Sei wieder $0 < \theta < 1$. Man sagt, eine Interpolationsmethode F ist vom **Typ** $\theta$, wenn außer den oben genannten Eigenschaften noch

$$\|T : F(A_0, A_1) \to F(B_0, B_1)\| \leq c \, \|T : A_0 \to B_0\|^{1-\theta} \, \|T : A_1 \to B_1\|^{\theta} \tag{1.26}$$

,für ein $c \geq 1$, erfüllt ist. Man kann zeigen, dass die eben definierte Interpolationsmethode gerade von diesem Typ $\theta$ ist.

Wir werden nun einige Ergebnisse angeben, ohne auf deren Beweise einzugehen. Hauptsächlich handelt es sich um Aussagen über Folgenräume und Operatorenideale, aber auch um Interpolationseigenschaften der Entropiezahlen.

### 1.4.1 Satz

*Seien $0 < r_0 < r_1 < \infty$, $0 < t, t_0, t_1 \leq \infty$ und $0 < \theta < 1$ mit $1/r = (1-\theta)/r_0 + \theta/r_1$, so gilt*

$$(l_{r_0,t_0}, l_{r_1,t_1})_{\theta,t} = l_{r,t}. \tag{1.27}$$

### 1.4.2 Satz

*Seien $X$ und $Y$ beliebige Quasibanachräume, $0 < s_0 < s_1 < \infty$, $0 < t, t_0, t_1 \leq \infty$, $0 < \theta < 1$ mit $1/s = (1-\theta)/s_0 + \theta/s_1$, so gilt*

$$(\mathcal{L}^{(e)}_{s_0,t_0}(X,Y), \mathcal{L}^{(e)}_{s_1,t_1}(X,Y))_{\theta,t} \subseteq \mathcal{L}^{(e)}_{s,t}(X,Y). \tag{1.28}$$

Die Beweise sind in [1, Theorem 5.3.1] bzw. in [12, Satz 3] zu finden. Der nun folgende Satz entstammt dem schon oft zitierten Buch "Operator Ideals" von Pietsch ([10, Prosposition 12.1.11,12]) und wird dort in Form zweier Lemmata formuliert. Wir halten uns aber an den Beweis, welcher in [4, 1.3.2] für einen noch allgemeineren Fall zu finden ist.

### 1.4.3 Satz

*Seien $X$ und $Y$ beliebige Banachräume, $(Y_0, Y_1)$ ein Interpolationspaar mit $Y_0 \cap Y_1 \subset Y$, $0 < \theta < 1$ und gelte $\|y\|_Y \leq \|y\|_{Y_0}^{1-\theta} \, \|y\|_{Y_1}^{\theta}$ $\forall y \in Y_0 \cap Y_1$, so gilt für jeden Operator $T \in \mathcal{L}(X, Y_0 \cap Y_1)$ und $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$*

$$e_{k_0+k_1-1}(T : X \to Y) \leq 2e_{k_0}(T : X \to Y_0)^{1-\theta} e_{k_1}(T : X \to Y_1)^{\theta}. \tag{1.29}$$

**Beweis**

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, so lässt sich, nach der Definition der Entropiezahlen, das Bild der Einheitskugel von $X$, $T(B_X) \subseteq Y_0$, durch $2^{k_0-1}$ $Y_0$-Kugeln vom Radius $(1+\varepsilon)e_{k_0}(T : Y \to Y_0)$ überdecken. Diese Kugeln nennen wir $K_j$. Jede der Mengen $K_j \cap T(B_X)$ kann in $Y_1$ durch jeweils $2^{k_1-1}$ Kugeln vom Radius $(1+\varepsilon)e_{k_1}(T : X \to Y_1)$ überdeckt werden. Wenn wir die Dreiecksungleichung anwenden, können wir o.B.d.A. annehmen, dass die Kugelmittelpunkte jeweils in $K_j \cap T(B_X)$ liegen und erhalten aber einen Faktor 2. Es gibt nun $2^{k_0+k_1-2}$ solcher Mittelpunkte, die wir mit $b_l$ bezeichnen. Sei nun $a \in B_X$, es gibt nun ein $b_l$ mit

$$\|Ta - b_l\|_{B_i} \leq 2(1+\varepsilon)e_{k_i}(T : X \to B_i),\ i = 0, 1. \tag{1.30}$$

Aus (1.30) und der Voraussetzung an die Normen folgt nun

$$e_{k_0+k_1-1}(T : X \to Y) \leq [2(1+\varepsilon)e_{k_0}(T : X \to Y_0)]^{1-\theta}[2(1+\varepsilon)e_{k_1}(T : X \to Y_1)]^{\theta} = \tag{1.31}$$
$$= [2(1+\varepsilon)]e_{k_0}^{1-\theta}(T : X \to Y_0)e_{k_1}^{\theta}(T : X \to Y_1).$$

Beim Übergang $\varepsilon \to 0$ ergibt sich das behauptete Resultat.

q.e.d.

### 1.4.4 Bemerkung

*Unter ähnlichen Voraussetzungen ergibt sich ein analoger Satz mit folgendem Resultat:*

$$e_{k_0+k_1-1}(T : X \to Y) \leq 2e_{k_0}(T : X_0 \to Y)^{1-\theta}e_{k_1}(T : X_1 \to Y)^{\theta}.$$

*Des weiteren können wir einen analogen Satz formulieren, wenn es sich bei bei $Y$ um einen Quasi- bzw. p-Banachraum handelt. Wie aus dem Beweis zu entnehmen ist, müssen wir lediglich auf der rechten Seite von (1.29) den Faktor "2" durch "2C" bzw. "$2^{1/p}$" ersetzen, wobei $C$ die Konstante der Quasidreiecksungleichung ist.*

# Kapitel 2

# Erste Resultate

Wir werden nun aus den im vorherigen Kapitel gemachten Betrachtungen erste Ergebnisse gewinnen und einige Erkenntnisse über das gegenseitige Verhalten von $a_n$ und $e_n$ erhalten. Dann, im zweiten Teil, können wir einen wichtigen Satz über die Entropiezahlen von Einbettungen formulieren.

## 2.1 Vergleich von Entropie- und Approximationszahlen

Nun werden wir der Frage nachgehen, in welchem Falle man Entropie- und Approximationszahlen vergleichen kann. Dazu werden wir zuerst einen Satz beweisen, und uns anschließend Beispiele von Operatoren ansehen und erkennen, dass ein Vergleich unter allgemeinen Voraussetzungen nicht möglich ist.
Zuerst aber zu unserem Satz, der zeigt, dass wir unter bestimmten Voraussetzungen Aussagen über das wechselseitige Verhalten von $a_n$ und $e_n$ machen können.

### 2.1.1 Satz

*Seien $X$ und $Y$ Quasibanachräume und sei $T \in \mathcal{K}(X, Y)$,*

1. *falls es ein $c > 0$ gibt, so dass für alle $j \in \mathbb{N}$*

$$a_{2^{j-1}}(T) \leq c a_{2^j}(T) \tag{2.1}$$

   *gilt, so gibt es eine positive Konstante $C$, mit*

$$e_j(T) \leq C a_j(T). \tag{2.2}$$

2. *Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ monoton wachsend, und gelte für ein positives $c$:*

$$f(2^j) \leq c f(2^{j-1}) \; \forall \, j \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

   *so gibt es eine positive Konstante $C$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ folgendes gilt:*

$$\sup_{1 \leq j \leq n} f(j) e_j(T) \leq C \sup_{1 \leq j \leq n} f(j) a_j(T). \tag{2.4}$$

**Beweis**

Da $Y$ ein Quasibanachraum ist, gibt es eine Konstante $K \geq 1$, so dass für alle $u, v \in Y$ gilt

$$\|u + v\|_Y \leq K(\|u\|_Y + \|v\|_Y). \tag{2.5}$$

Wenn wir (2.5) jetzt iterativ fortsetzen, sehen wir, dass es ein $\lambda \geq 0$ gibt, mit $K = 2^\lambda$, so dass wir für alle $y_1, ..., y_k \in Y$ folgende Abschätzung bekommen:

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} y_j \right\|_Y \leq \sum_{j=1}^{k} 2^{\lambda(k+1-j)} \|y_i\|_Y . \tag{2.6}$$

Nun wählen wir für jedes $j \in \mathbb{N}$ ein $L_j \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit

$$\operatorname{rang} L_j < 2^{j-1} \text{ und } \|T - L_j\| \leq 2a_{2^{j-1}},\ j > 1,\ L_1 := 0. \tag{2.7}$$

Daher gilt für ein $C$[1] $> 0$

$$\operatorname{rang}(L_{j+1} - L_j) < 2^{j+1},\ \|L_{j+1} - L_j\| \leq Ca_{2^{j-1}}(T). \tag{2.8}$$

Nun definieren wir $m_j := \mu 2^j (k-j)$ für ein $\mu > 0$, welches wir später noch genauer bestimmen und beachten, dass

$$\sum_{j=1}^{k+1} m_j = \mu 2^k \sum_{j=1}^{k+1} 2^{-(k-j)}(k-j) \leq C\mu 2^k \tag{2.9}$$

ist. Da wir T auch als

$$T = T - L_k + \sum_{j=1}^{k-1}(L_{j+1} - L_j)$$

schreiben können, folgt unter Beachtung von (2.6) und (2.7) für $x \in B_X$ und $y_i \in Y$ ($i = 1, ..., k-1$)

$$\left\| Tx - \sum_{j=1}^{k-1} y_i \right\|_Y \overset{\text{Dreiecksungl.},(2.6)}{\leq} 2^\lambda \|(T - L_k)x\|_Y + \sum_{j=1}^{k-1} 2^{\lambda(k+1-j)} \|(L_{j+1} - L_j)x - y_j\| \tag{2.10}$$

$$\overset{(2.7)}{\leq} 2^{\lambda+1} a_{2^{k-1}}(T) + \sum_{j=1}^{k-1} 2^{\lambda(k+1-j)} \|(L_{j+1} - L_j)x - y_j\|_Y .$$

Für jedes $j \in \{1, ..., k-1\}$ sei $\varepsilon_{m_j}$ das Infimum aller $\varepsilon > 0$, so dass es $2^{m_j - 1}$ Bälle in $Y$ vom Radius $\varepsilon$ gibt, die das Bild der $X$-Einheitskugel unter $L_{j+1} - L_j$ überdecken. Nun gibt es positive Konstanten[2] c und C, so dass

$$\varepsilon_{m_j} \leq C 2^{-cm_j/2^j} a_{2^{j-1}} = C 2^{-c\mu(k-j)} a_{2^{j-1}} \tag{2.11}$$

[1] Wenn hier im Beweis eine Konstante C auftaucht und später erneut, so muss es sich nicht um den selben Wert handeln. Uns geht es hier nicht um genaue Werte, sondern darum, dass es möglich ist, gewisse Abschätzungen zu treffen.

[2] Für näheres zu diesem Schritt, sei z.B. auf [4, Seite 16] verwiesen.

erfüllt ist. Jetzt ergibt (2.10) zusammen mit (2.8) und (2.11)

$$e_{\mu C 2^k}(T) \le 2^{\lambda+1} a_{2^{k-1}}(T) + C \sum_{j=1}^{k} 2^{\lambda(k+1-j)} a_{2^{j-1}}(T) 2^{-c\mu(k-j)}, \tag{2.12}$$

wobei $\mu > 0$ wegen unserer Annahme ist, und c, C jeweils unabhängig von $\mu$ sind.

Kommen wir nun zum Beweis von 1. Nach (2.1) gibt es ein $\kappa > 0$ mit

$$a_{2^{j-1}}(T) \le 2^{\kappa(k-j)} a_{2^{k-1}}(T),\ j = 1, ..., k. \tag{2.13}$$

Indem wir (2.13) in (2.12) einsetzen und $\mu$ groß genug wählen erhalten wir für alle $k \in \mathbb{N}$

$$e_{c2^k}(T) \le C e_{2^{k-1}}(T). \tag{2.14}$$

Wir können nun noch annehmen, dass $c = 2^n$ ist, dann (2.1) und (2.14) anwenden. Damit erhalten wir

$$e_{2^{n+k}}(T) \le C a_{2^{n+k}}(T). \tag{2.15}$$

Wenn wir jetzt noch einmal (2.1) benutzen und die Monotonieeigenschaften von $a_j$ und $e_j$ beachten, ergibt sich gerade der erste Teil unseres Satzes.

Um den zweiten Teil zu beweisen, sei zunächst $b := \sup\{f(j)a_j(T),\ j = 1, ..., 2^{k+n}\}$. So gilt offenbar

$$a_j(T) \le b/f(j),\ j = 1, ..., 2^{k+n}. \tag{2.16}$$

Nun ersetzen wir die $a_{2^{j-1}}$ auf der rechten Seite von (2.12) durch $b/f(2^{j-1})$. Jetzt ist (2.3) das Analogon zu (2.1) und, indem wir die gleichen Abschätzungen wie bei (2.13) - (2.15) machen, erhalten wir

$$e_{2^{k+n}}(T) \le Cb/f(2^{k+n}),\ n \in \mathbb{N}, \tag{2.17}$$

wobei $C > 0$ von b unabhängig ist. Zusammen mit den Monotonieeigenschaften von f und $e_j(T)$ und der Tatsache, dass $e_1 \le \|T\| = a_1$ gilt, ergibt sich Formel (2.4) und somit ist der Satz bewiesen.

q.e.d.

Wir kommen nun zu einigen konkreten Beispielen, welche illustrieren sollen, dass Entropie- und Approximationszahlen im Allgemeinen nicht vergleichbar sind. Seien $a_n$ und $b_n$ beliebige positive Folgen, falls es Konstanten c, C $\ge 1$ gibt mit $ca_n \le b_n \le Ca_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so schreiben wir dafür kurz $a_n \sim b_n$. Wie wir in einem späteren Abschnitt durch den Satz von Gordon-König-Schütt sehen werden, gilt für die Entropiezahlen von Diagonaloperatoren $D_\sigma : l_p \to l_p$ folgende Relation:

$$e_{k+1}(D_\sigma) \sim \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ 2^{-k/2n} (\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n} \right\}, \tag{2.18}$$

wobei $1 \le p \le \infty$ gilt. Der Diagonaloperator wird dabei durch die Nullfolge $\sigma$ beschrieben. Wobei die Folge positiv und der Größe nach geordnet ist:

$$\sigma_1 \ge ... \ge \sigma_n > 0. \tag{2.19}$$

Mit diesen Annahmen sehen wir, dass auch $(\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n}$ eine monoton gegen Null fallende Folge ist. Tatsächlich reicht es, auf der rechten Seite von (2.18) nur das Maximum über alle $n \le k$ zu betrachten, da $(\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n}$ monoton fällt und für $n > k$ dann $2^{-k/2n} \sim 1$ gilt.

**1. Beispiel:** $\sigma_n \sim \sigma_{2n}$

Offenbar gibt es wegen der Monotonie und nach der Voraussetzung ein $C \geq 1$ mit

$$\sigma_{2n} \leq \sigma_n \leq C\sigma_{2n}. \tag{2.20}$$

Wir können nun für $k > n$ ein $m \in \mathbb{N}_0$ finden mit

$$2^m n \leq k < 2^{m+1} n \tag{2.21}$$

und iterativ folgt damit aus (2.20)

$$\sigma_n \leq C\sigma_{2n} \leq C^2\sigma_{4n} \leq ... \leq C^m\sigma_{2^m n} \leq C^{m+1} \underbrace{\sigma_{2^{m+1}n}}_{\leq \sigma_k}. \tag{2.22}$$

Daraus ergibt sich nun für $k > n$

$$1 \leq \sigma_n/\sigma_k \leq C \cdot C^m = C2^{m\overbrace{\log_2 C}^{=:\alpha}} \overset{2^m \leq k/n}{\leq} C(k/n)^\alpha. \tag{2.23}$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\sigma_n = 1$ gilt und so erhalten wir für $n = 1$ aus Formel (2.23) für $\sigma_k$ die Abschätzung

$$\sigma_k \geq Ck^{-\alpha}. \tag{2.24}$$

Wir erkennen also, dass alle Folgen, die der Bedingung (2.20) genügen, nicht schneller als polynomial fallen können.

Jetzt werden wir versuchen, unter der Annahme von (2.20) Formel (2.18) zu vereinfachen. Sei nun $j = 1, ..., n$, so folgt aus (2.23)

$$\sigma_j \leq C(n/j)^\alpha \sigma_n. \tag{2.25}$$

Nun ergibt sich wegen der Monotonie von $\sigma$, der Stirlingschen Formel[3], sowie wegen $\sqrt{n}^{1/n} \to 1$ gerade

$$\sigma_n \leq (\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n} \leq C\sigma_n n^\alpha/(n!)^{\alpha/n} \leq C\sigma_n \left[\frac{n}{n/e}\right]^\alpha \leq C\sigma_n. \tag{2.26}$$

Wir kommen also zu dem Ergebnis, dass für $\sigma_n \sim \sigma_{2n}$ nun

$$e_k(D_\sigma) \sim \sup_{n \leq k} 2^{-k/2n}\sigma_n \tag{2.27}$$

folgt. Das sieht nun schon viel einfacher aus als (2.18), jedoch gelingt es uns, das Resultat noch mehr zu optimieren:

$$C\sigma_k \leq \sup_{n \leq k} 2^{-k/2n}\sigma_n \overset{(2.23)}{\leq} C\sigma_k \sup_{n \leq k} 2^{-k/2n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha \leq C\sigma_k \sup_{t \geq 1} 2^{-t/2}t^\alpha \leq C\sigma_k. \tag{2.28}$$

Letztendlich kommen wir wegen (2.28) also zu folgendem Resultat:

$$e_k(D_\sigma) \sim \sigma_k, \text{ für } \sigma_n \sim \sigma_{2n}. \tag{2.29}$$

[3] $n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$

**2. Beispiel:** $a_n \sim a_{2n}$

Nach unserer Voraussetzung gilt nun insbesondere $a_{2^n} \sim a_{2^{n-1}}$, weshalb wir $f(n) := (a_n)^{-1}$ in Formel (2.4) setzen können und erhalten damit

$$\max_{1 \leq k \leq n} e_k/a_k \leq C.$$

Das gilt nun nicht nur für den Wert, bei dem das Maximum angenommen wird, sondern natürlich auch für alle anderen k, d.h. wir haben

$$e_k(T) \leq C a_k(T).$$

Wir geben nun ein erstes konkretes Beispiel an, für das wir die Entropiezahlen wieder einfach ausrechnen können, indem wir den Satz von Gordon-König-Schütt (Satz 3.2.1) anwenden.

**3. Beispiel:** $D_\sigma : l_p \longrightarrow l_p$**,** $\sigma_n := 2^{-n}$

Wir haben nach (2.18) folgendes Ergebnis

$$e_k \sim \sup_{n \leq k} 2^{-(n^2+n+k)/2n} \tag{2.30}$$

und müssen zur Bestimmung des Supremums von $f(n) := 2^{-(n^2+n+k)/2n}$ eine kleine Kurvendiskussion durchführen:

$$f'(n) = \ln 2 \cdot 2^{-(n^2+n+k)/2n}(k/2n^2 - 1/2).$$

Die erste Ableitung nimmt also bei $n = \sqrt{k}$ ihre Nullstelle an, man erkennt leicht, dass es sich hierbei um ein Maximum von $f(n)$ handelt. Wenn man nun $n = \sqrt{k}$ in (2.30) einsetzt, erhalten wir die Relation

$$e_k \sim 2^{-\sqrt{k}}. \tag{2.31}$$

Nach (1.6) gilt $a_k = \sigma_k$, also in unserem Fall

$$a_k = 2^{-k}. \tag{2.32}$$

Aus (2.31) und (2.32) sehen wir also, dass der Quotient $a_k/e_k = 2^{-\sqrt{k}(\sqrt{k}-1)}$ gegen Null konvergiert, d.h. die Approximationszahlen fallen viel schneller als die Entropiezahlen.

**4. Beispiel:**

Wir geben hier einige konkrete Beispiele an, die der Bedingung (2.20) genügen (vgl. [8, Seite 481]). Nach dem 1. Beispiel und Lemma 1.1.9 gilt somit für alle Beispiele $\sigma_k \sim e_k \sim a_k$, wobei $\alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R},\ 0 < \delta < 1$ seien.

1. $\sigma_k := k^{-\alpha}$
2. $\sigma_k := k^{-\alpha}(\log k)^\beta$
3. $\sigma_k := (\log k)^{-\alpha}$
4. $\sigma_k := (\log k)^{-\alpha}(\log \log k)^\beta$
5. $\sigma_k := (\log \log ... \log k)^{-\alpha}$
6. $\sigma_k := \exp(-\alpha(\log k)^\delta)$

## 2.2 Entropiezahlen von Einbettungen

Meist kann man Entropiezahlen von Operatoren zwischen beliebigen (Quasi-)Banachräumen nicht direkt berechnen und nur schlecht abschätzen, da man in mathematischen Sätzen möglichst allgemeine Voraussetzungen annehmen möchte. Darum bietet sich folgende Strategie an:

Man zerlegt einen gegebenen Operator T in mehrere Operatoren $T_i$, die, hintereinander ausgeführt, wieder T ergeben.

Dabei sind meist ein oder mehrere $T_i$ identische Abbildungen, also Einbettungen, für die es leichter ist, die Entropiezahlen zu berechnen. Wenn wir nun die Entropiezahlen oder auch nur die Normen der $T_i$ kennen, ist es möglich, die Werte für den ursprünglichen Operator zu approximieren.
Bevor wir zum Hauptresultat des Abschnitts kommen, formulieren und beweisen wir noch ein Lemma, welches uns beim Beweis von Carls Ergebnissen hilfreich sein wird.

### 2.2.1 Lemma

*Seien* $1 \leq p, q \leq \infty$, *so gilt für alle n=1,...,m*

$$e_n(id : l_p^m \to l_q^m) \geq \frac{1}{2e} m^{1/q-1/p}, \tag{2.33}$$

*also für* $p = \infty$ *und* $q = 1$ *insbesondere*

$$e_n(id : l_\infty^m \to l_1^m) \geq \frac{m}{6}. \tag{2.34}$$

**Beweis**

Bezeichne $U_p^m$ die abgeschlossene Einheitskugel in $l_p^m$. Angenommen, es gilt nun

$$U_\infty^m \subseteq \bigcup_{i=1}^{2^{m-1}} \{y_i + \sigma U_1^m\}, \tag{2.35}$$

so erhalten wir, wenn wir das Lebesguemaß $Vol$ anwenden,

$$\underbrace{Vol(U_\infty^m)}_{2^m} \leq \sum_{i=1}^{2^{m-1}} Vol(y_i + \sigma U_1^m) = 2^{m-1}\sigma^m \underbrace{Vol(U_1^m)}_{2^m/m!}, \tag{2.36}$$

was dann

$$\sigma^m \geq m! 2^{1-m} \tag{2.37}$$

impliziert.
Es gilt $e^m m! > m^m$ [4], also bekommen wir folgendes Ergebnis $\sigma^m \geq m!2^{1-m} \geq (\frac{m}{2e})^m$. Wir erhalten also

$$e_m(id : l_\infty^m \to l_1^m) \geq \frac{m}{2e}. \tag{2.38}$$

[4] $e^m m! > m^m \overset{Stirling}{\Leftrightarrow} 1 < (e/m)^m \sqrt{2\pi m}(m/e)^m = \sqrt{2\pi m}$

Schließlich folgt aus

$$\frac{m}{2e} \leq e_m(id : l_\infty^m \to l_1^m) \leq \underbrace{\left\| id : l_\infty^m \to l_p^m \right\|}_{m^{1/p}} e_m(id : l_p^m \to l_q^m) \underbrace{\left\| id : l_q^m \to l_1^m \right\|}_{m^{1/q}} \leq$$

$$\leq m^{1+1/p-1/q} e_m(id : l_p^m \to l_q^m) \tag{2.39}$$

dann unter Einbeziehung von (2.38) letztendlich

$$e_n(id : l_p^m \to l_q^m) \geq e_m(id : l_p^m \to l_q^m) \geq \frac{m^{1/q-1/p}}{2e}. \tag{2.40}$$

q.e.d.

Das nun folgende Resultat bildet den bereits angekündigten Hauptteil des Abschnitts. Wir erhalten dadurch Erkenntnisse über das Verhalten der Entropiezahlen für bestimmte Diagonaloperatoren, nämlich dass sich das Verhalten in drei Abschnitte unterteilen lässt. Zuerst sind die Entropiezahlen nahezu konstant, dann fallen sie wie eine Potenz und letztendlich exponentiell.

### 2.2.2 Satz

*Seien $0 < p \leq q \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}$ und $r$ durch $1/r = 1/q - 1/p$ bestimmt ($r := \infty$, falls $p = q$), so gilt:*

$$e_k(id : l_p^m \to l_q^m) \sim \begin{cases} 1 & , \textit{für } 1 \leq k \leq \log_2(2m) \\ (k^{-1}\log_2(1 + 2m/k))^{-1/r} & , \textit{für } \log_2(2m) \leq k \leq 2m \\ 2^{-k/2m}(2m)^{1/r} & , \textit{für } k \geq 2m. \end{cases} \tag{2.41}$$

Wir werden lediglich den ersten Teil des Beweises formulieren und dabei den Ausführungen in [4, Theorem 3.2.2] folgen. Zum Beweis der unteren Abschätzung verweisen wir für den ersten und dritten Teil auf den Beweis von Triebel [14, Theorem 7.3], der zweite wurde erst vier Jahre später in einer Arbeit von Kühn [7] bewiesen.

Den Beweis für den Banachraumfall, d.h. wenn $p \geq 1$ ist, hat Schütt bereits 1984 in [13, Theorem 1] gegeben.

### 2.2.3 Lemma

*Seien $0 < p \leq q \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}$ und $r$ durch $1/r = 1/q - 1/p$ bestimmt ($r := \infty$, falls $p$=$q$), so existiert eine positive Konstante $C$, welche von $m$ und $k$ unabhängig ist, eventuell aber von $p$ und $q$ abhängt, mit*

$$e_k(id : l_p^m \to l_q^m) \leq C \begin{cases} 1 & , \textit{für } 1 \leq k \leq \log_2(2m) \\ (k^{-1}\log_2(1 + 2m/k))^{-1/r} & , \textit{für } \log_2(2m) \leq k \leq 2m \\ 2^{-k/2m}(2m)^{1/r} & , \textit{für } k \geq 2m. \end{cases} \tag{2.42}$$

**Beweis**

<u>1. Schritt:</u> $k \geq 2m$, $0 < p \leq q \leq 1$

Im gesamten Beweis bezeichnen wir mit "B" die offene Einheitskugel, durch Indizes wird deutlich, welchem Raum wir sie zuordnen müssen.
Sei $s := 2^{-k/2m}(2m)^{1/q-1/p}$ und bezeichne $K_s$ die maximale Anzahl von Punkten $y^l \in B_p^m$ mit $\left\|y^l - y^n\right\|_{l_q^m} > s$ für $l \neq n$.
Für $z \in B_q^m$ ergibt sich wegen der Dreiecksungleichung, der Hölderschen Ungleichung und der Wahl von s

$$\left\|y^l - sz\right\|_{l_p^m}^p \leq 1 + s^p \left\|z\right\|_{l_p^m}^p \overset{\text{Hölder}}{\leq} 1 + s^p \left\|z\right\|_{l_q^m} m^{p(1/p-1/q)} \leq 2. \tag{2.43}$$

Sei nun $\{y^l : l = 1, ..., K_s\}$ eine maximale Menge im obigen Sinn, so haben wir

$$B_p^m \subseteq \bigcup_l \{y^l + sB_q^m\} \subseteq \bigcup_l 2^{1/p} B_p^m. \tag{2.44}$$

Des weiteren sind die Kugeln $y^l + 2^{-1/q}B_q^m$ für $l = 1, ..., K_s$ paarweise disjunkt, denn angenommen, $z$ würde zu zwei solchen Kugeln gehören, die wir mit i bzw. j indizieren, so folgt:

$$\left\|y^i - y^j\right\|_{l_q^m}^q \leq \left\|y^i - z\right\|_{l_q^m}^q + \left\|z - y^j\right\|_{l_q^m}^q \leq s^q,$$

was ein Widerspruch zur Definition der $y^l$ ist. Wir erhalten also aus (2.44) die Ungleichung

$$K_s 2^{-2m/q} s^{2m} Vol(B_q^m) \leq 2^{2m/p} Vol(B_p^m). \tag{2.45}$$

Nach Lemma 4.1.1 gilt nun

$$Vol(B_p^m) \leq C^{2m}(2m)^{-2m(1/p-1/q)} Vol(B_q^m) \tag{2.46}$$

für ein positives C, das nur von p und q abhängt. Wegen der Wahl von $s$ und unter der Einbeziehung von (2.45) und (2.46) zeigt sich

$$K_s \leq 2^{k+Cm}, \text{ für } k \geq 2m, \tag{2.47}$$

und darum auch

$$e_{k+cm} \leq 2^{-k/2m}(2m)^{1/q-1/p}, \text{ für } k \geq 2m. \tag{2.48}$$

Dabei ist c eine von k und m unabhängige positive Konstante. An dieser Stelle führen wir eine nützliche Konvention ein: Sei $\lambda \geq 1$, so definieren wir $e_\lambda := e_{[\lambda]+1}$. Damit ist der erste Schritt vollständig.

<u>2. Schritt:</u> $k \geq 2m$, $0 < p \leq q \leq \infty$

Zum Beweis diesen Schrittes muss man lediglich den ersten Schritt leicht verändern und zusätzlich die Dreiecksungleichung anwenden. Insbesondere folgt die Behauptung sofort, falls $p = q$ gilt, da dann ja insbesondere die Beziehung $e_k \leq 1$ besteht.

<u>3. Schritt:</u> $p$ beliebig, $q = \infty$, $1 \leq k \leq c_1 k$, für ein beliebiges $c_1 > 0$

Als erstes wählen wir ein $c_2$ mit

$$c_2 > \{1/c_1 \log_2(1 + 1/c_1)\}^{-1/p}$$

und bemerken, dass

$$\sigma := c_2\{k^{-1} \log_2(m/k + 1)\}^{1/p} = c_2 m^{-1/p}\{m/k \log_2(m(k + 1)\}^{1/p} > m^{-1/p}. \tag{2.49}$$

Bezeichne nun $\sigma_m$ die maximale Anzahl der Komponenten $y_n$, die jeder Punkt $y = (y_1, ..., y_m) \in B_p^m$ hat, wobei $|y_n| > \sigma$ gelten soll. Aus (2.49) folgt $m_\sigma < m$ und

$$m_\sigma \sigma^p \leq 1 \Leftrightarrow m_\sigma \leq \sigma^{-p.} \tag{2.50}$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\sigma^{-p} \in \mathbb{N}$ und gerade gleich $m_\sigma$ ist. Wir definieren dazu

$$e_k^\sigma := e_k(id : l_p^{m_\sigma} \to l_\infty^{m_\sigma}).$$

Wenn wir mit $k = c_1\sigma^{-1}$ den 1. Schritt anwenden, ergibt sich:

$$e_{c_1\sigma^{-p}}^\sigma \leq c_3 m_\sigma^{-1/p} = c_3\sigma, \text{ mit einem } C > 1. \tag{2.51}$$

Folglich wird $B_p^{m_\sigma}$ von $2^{c_1\sigma^{-p}}$ Kugeln in $l_\infty^{m_\sigma}$ vom Radius $c_3\sigma$ überdeckt. Da es genau $\binom{m}{m_\sigma}$ Möglichkeiten gibt, $m_\sigma$ Koordinaten aus $m$ gegebenen Koordinaten auszuwählen, folgt nach obiger Konstruktion, dass $B_p^m$ durch $2^{c_1\sigma^{-p}} \binom{m}{\sigma^{-1}}$ Kugeln vom Radius $c_3\sigma$ überdeckt werden kann.
Nun haben wir

$$\log_2 \binom{m}{m_\sigma} = \log_2 \frac{m(m-1)\cdots(m - m_\sigma + 1)}{m_\sigma!} \leq \log_2 \frac{m^{m_\sigma}}{m_\sigma!} = m_\sigma \log_2 m - \sum_{j=1}^{m_\sigma} \log_2 j \leq$$

$$\leq m_\sigma \log_2 m - m_\sigma \log_2 m_\sigma + C m_\sigma \leq C m_\sigma \log_2(m/m_\sigma + 1),$$

wobei C jeweils eine geeignete positive Konstante bezeichnet. Demzufolge wird $B_p^m$ von

$$2^{c_4\sigma^{-p} \log_2(m\sigma^p + 1)} \tag{2.52}$$

$l_\infty^m$ Kugeln vom Radius $c_3\sigma$ überdeckt. Wegen (2.49) haben wir

$$\log_2(m\sigma^p + 1) \leq C \log_2(m/k + 1),$$

weshalb wir (2.52) nach oben abschätzen können durch $2^{c_5 k}$ für ein positives $c_5$. Zusammen mit (2.49) zeigt es, dass

$$e_{c_5 k} \leq c_6\{k^{-1} log_2(m/k + 1)\}^{1/p}, \text{ falls } 1 \leq k \leq c_1 m \tag{2.53}$$

für positive Zahlen $c_5 \geq 1$ und $c_6 > 0$, welche unabhängig von m und k sind. Der Beweis für diesen Schritt folgt nun aus (2.49) und der Tatsache $e_k \leq 1$.

4. Schritt: $0 < p < q < \infty$, $1 \leq k \leq c_1 m$

Wir benutzen wieder Interpolation und erhalten so

$$e_k(id : l_p^m \to l_q^m) \leq C e_k^\theta(id : l_p^m \to l_\infty^m). \tag{2.54}$$

Wenn wir jetzt (2.53) anwenden und auf der rechten Seite von (2.54) $\theta/p = 1/p - 1/p$ wählen, ergibt sich, wie am Ende vom 3. Schritt, die gewünschte Behauptung.

q.e.d.

# Kapitel 3

# Entropiezahlen von Diagonaloperatoren

Nach den vorangegangenen Überlegungen ist es möglich, die Hauptresultate dieser Arbeit beweisen zu können. Das sind, wie schon mehrmals erwähnt, gewisse Resultate von Carl - unter anderem die nach ihm benannte Ungleichung - und der Satz von Gordon-König-Schütt, sowie zwei diesen Satz verallgemeinernde Sätze.

## 3.1 Resultate von Carl

In diesem Abschnitt betrachten wir ein Ergebnis von Carl für Diagonaloperatoren $D$ mit zugehöriger Diagonale $\sigma$, welches er schon im Jahre 1981 veröffentlicht hat. Des weiteren stellen wir ein Resultat zur Verfügung, welches einen Durchbruch auf dem Gebiet der Entropiezahlen brachte - die so genannte **Ungleichung von Carl**. Sie stellt einen wichtigen Zusammenhang zwischen den Entropiezahlen und den Eigenwerten von kompakten Operatoren her. Eben dieser Zusammenhang beschert den Entropiezahlen großes Interesse, da es dadurch möglich ist, bessere Abschätzungen über das Verhalten von Eigenwerten zu erzielen.
Als letztes formulieren wir eine Ungleichung, die man auch als Weylsche Ungleichung in Banachräumen bezeichnen kann. In der Hilbertraumtheorie kennen wir die **Weylsche Ungleichung** der Art $\|\lambda_n(T)\|_{l_p} \leq \|s_n(T)\|_{l_p}$, wobei $\lambda_n$ die betragsmäßig fallend geordnete Eigenwertfolge, und $s_n$ die Folge der singulären Zahlen ist. Da in der Banachraumtheorie aber der Begriff der singulären Zahlen keinen Sinn macht, muss man, auf der Suche nach einer entsprechenden Ungleichung, die singulären Zahlen durch eine andere Folge ersetzen. Es zeigt sich, mittels der Ungleichung von Carl, dass die singulären Zahlen durch die Entropiezahlen ersetzen werden können.

Es ist nicht erforderlich, jedes benötigte Detail zu beweisen, deswegen formulieren wir eine Bemerkung und verweisen zum Beweis auf den Artikel [3, Theorem 1], worin Carl auch den Beweis der hier noch folgenden zwei Sätze veröffentlichte.

### 3.1.1 Bemerkung

$1 \leq p, q \leq \infty, 1/s > \max(1/p - 1/q, 0), 0 < t \leq \infty \Rightarrow \lambda_{s,t}^{(e)}(I_n : l_p^n \to l_q^n) \leq C \cdot n^{1/s+1/q-1/p}$

Ein wichtiges Resultat ist der nächste Satz, dessen Beweis wir in Form der beiden ihm nachfolgenden Lemmata angeben wollen.

### 3.1.2 Satz

*Seien $1 \leq p, q \leq \infty$, $1/r > \max(1/p - 1/q, 0)$, $0 < t \leq \infty$ und $1/s = 1/r + 1/p - 1/q$, so gilt:*

$$D \in \mathcal{L}_{s,t}^{(e)}(l_p, l_q) \Leftrightarrow \sigma \in l_{r,t}.$$

### 3.1.3 Lemma

*Seien $1 \leq p, q \leq \infty$, $1/r > \max(1/q - 1/p, 0)$, $0 < t \leq \infty$ und $1/s = 1/r + 1/p - 1/q$, so gilt:*

$$D \in \mathcal{L}_{s,t}^{(e)}(l_p, l_q) \Rightarrow \sigma \in l_{r,t}.$$

**Beweis**

Wir können wieder o.B.d.A. annehmen, dass die Folge der Diagonalelemente der Größe nach geordnet und positiv ist:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... > 0. \tag{3.1}$$

Denn wäre ein $\sigma_k = 0$, so auch alle folgenden, und die Aussage wäre trivialerweise erfüllt. Wir definieren nun die linearen und stetigen Operatoren $J_n \in \mathcal{L}(l_p^n, l_p)$ und $Q_n \in \mathcal{L}(l_p, l_p^n)$ durch

$$J_n(x_1, ..., x_n) := (x_1, ..., x_n, 0, ...) \tag{3.2}$$

und

$$Q(x_1, x_2, ...) := (x_1, ..., x_n). \tag{3.3}$$

Wie man durch bloßes Hinsehen erkennt, haben sowohl $J_n$ als auch $Q_n$ die Norm 1 und es ist auch klar, dass $D_n := Q_n D J_n$ invertierbar ist. Nach diesen Vorbemerkungen können wir die identische Abbildung $I_n : l_\infty^n \to l_1^n$ wie folgt zerlegen:

$$I_n : l_\infty^n \xrightarrow{I_n} l_p^n \xrightarrow{D_n^{-1}} l_p^n \xrightarrow{J_n} l_p \xrightarrow{D} l_q \xrightarrow{Q_n} l_q^n \xrightarrow{I_n} l_1^n. \tag{3.4}$$

Nach Lemma 2.2.1 gilt nun:

$$\begin{aligned} n/6 &\leq e_n(I_n : l_\infty^n \to l_1^n) \leq e_n(I_n Q_n D J_n) \left\|D_n^{-1} I_n\right\| \leq \\ &\leq \left\|I_n : l_q^n \to l_1^n\right\| \|Q_n\| \, e_n(D) \, \|J_n\| \left\|I_n : l_\infty^n \to l_p^n\right\| \left\|D_n^{-1}\right\| \leq n^{1-1/q} e_n(D) n^{1/p} \sigma_n^{-1}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Folglich erhalten wir:

$$\sigma_n \leq 6 n^{1/p - 1/q} e_n(D : l_p \to l_q). \tag{3.6}$$

Mittels Ungleichung (3.6) gelangen wir zum Beweis unserer Behauptung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{t/r-1} \sigma_n^t \overset{(3.6)}{\leq} 6^t \sum_{n=1}^{\infty} n^{t/r-1} n^{t(1/p-1/q)} e_n^t(D) \leq 6^t \sum_{n=1}^{\infty} n^{t/s-1} e_n^t(D) < \infty$$

<u>q.e.d.</u>

### 3.1.4 Lemma

*Seien* $1 \leq p, q \leq \infty$*,* $1/r > \max(1/q - 1/p, 0)$*,* $0 < t \leq \infty$ *und* $1/s = 1/r + 1/p - 1/q$*, so gilt:*

$$\sigma \in l_{r,t} \Rightarrow D \in \mathcal{L}^{(e)}_{s,t}(l_p, l_q).$$

**Beweis**

<u>1. Schritt:</u> $t = \infty$, d.h. $\sigma \in l_{r,\infty}$
Wie schon im vorangegangenem Beweis nehmen wir ohne Einschränkung $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... > 0$ an. Als nächstes definieren wir die kanonischen Operatoren $J^k \in \mathcal{L}(l_p^{2^k}, l_p)$ und $Q^k \in \mathcal{L}(l_p, l_p^{2^k})$ durch

$$J^k(x_1, ..., x_{2^k}) := (0, ..., 0, \underbrace{x_1}_{2^k+1.\text{ Stelle}}, ..., x_{2^k}, 0...)$$

und

$$Q^k(x_1, x_2, ...) := (x_{2^k}, ..., x_{2^{k-1}-1}).$$

Und wieder gilt $\left\| J^k \right\| = \left\| Q^k \right\| = 1$. Im Folgenden bezeichnen wir den $2^n$ dimensionalen identischen Operator mit $I^n$. Als letztes definieren wir noch den Operator $D^k \in \mathcal{L}(l_p^{2^k}, l_q^{2^k})$ durch

$$D^k(x_1, ..., x_{2^k}) := (\sigma_{2^k} x_1, ..., \sigma_{2^{k+1}-1} x_{2^k}).$$

Anhand der Definition der beteiligten Größen erkennen wir:

$$D = \sum_{k=0}^{\infty} J^k D^k Q^k. \tag{3.7}$$

Nun wählen wir u so, dass $1/u > 1/r + 1/p - 1/q$ gilt und erhalten unter Beachtung der eingangs gemachten Bemerkung 3.1.1 die Abschätzung:

$$\lambda_u^{(e)}(D^k) \leq \lambda_u^{(e)}(I^k) \left\| D^k \right\| \leq C 2^{k(1/u + 1/q - 1/p)} \sigma_{2^k}. \tag{3.8}$$

C bezeichnet dabei eine von k unabhängige Konstante und hängt höchstens von u, p und q ab.
Unser nächstes Ziel ist es, die Reihe in (3.7) geeignet zu teilen und dann die Norm der beiden Teile geschickt nach oben abzuschätzen. Anschließend gewinnen wir daraus eine Aussage über die Beschränktheit der Entropiezahlen.
Wie wir schon im Kapitel über die Operatorenideale gezeigt haben, ist $\lambda_u^{(e)}$ eine Quasinorm und damit, wie aus Lemma 1.3.5 hervor geht, äquivalent zu einer $\alpha$-Idealnorm - daraus und da nach der Wahl von u folgt $1/u - 1/r + 1/q - 1/p > 0$, erhalten wir:

$$2^{(m-1)/u} e_{2^{m-1}} \left( \sum_{k=0}^{m-1} J^k D^k Q^k \right) \leq \left( \sum_{n=1}^{2^{m-1}} e_n^u (\sum_{k=0}^{m-1} J^k D^k Q^k) \right)^{1/u} \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} e_n^u (\sum_{k=0}^{m-1} J^k D^k Q^k) \right)^{1/u} =$$

$$= \lambda_u^{(e)} \left( \sum_{k=0}^{m-1} J^k D^k Q^k \right) \leq C \left( \sum_{k=0}^{m-1} [\lambda_u^{(e)}(J^k D^k Q^k)]^\alpha \right)^{1/\alpha} \leq C \left( \sum_{k=0}^{m-1} \left\| J^k \right\|^\alpha [\lambda_u^{(e)}(D^k)]^\alpha \left\| Q^k \right\|^\alpha \right)^{1/\alpha}$$

$$\stackrel{(3.8)}{\leq} C\left(\sum_{k=0}^{m-1} 2^{k\alpha(1/u+1/q-1/p)}\sigma_{2^k}^{\alpha}\right)^{1/\alpha} \stackrel{\sigma\in l_r}{\leq} C\left(\sum_{k=0}^{m-1} 2^{k\alpha(1/u-1/r+1/q-1/p)}\right)^{1/\alpha} \leq$$

$$\leq C2^{m(1/u-1/r+1/q-1/p)}.$$

Das impliziert:

$$e_{2^{m-1}}\left(\sum_{k=0}^{m-1} J^k D^k Q^k\right) \leq C2^{m(-1/r+1/p-1/q)}. \tag{3.9}$$

Wir haben also für den ersten Teil der Summe eine geeignete Abschätzung gefunden, welche nicht von u abhängt.
Um eine für unsere Zwecke gute Abschätzung für den Rest zu bekommen, wählen wir jetzt $v$ so, dass $1/r+1/p-1/q > 1/v > \max(1/p-1/q, 0)$ erfüllt ist. Das ist wegen der Bedingung an r immer möglich. Auf Grund unserer Wahl von $v$ gilt nun: $1/v-1/r+1/q-1/p < 0$, darum können wir jetzt wie folgt abschätzen:

$$2^{(m-1)/v}e_{2^{m-1}}\left(\sum_{k=m}^{\infty} J^k D^k Q^k\right) \leq \left(\sum_{n=1}^{2^{m-1}} e_n^v(\sum_{k=m}^{\infty} J^k D^k Q^k)\right)^{1/v} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} e_n^v(\sum_{k=m}^{\infty} J^k D^k Q^k)\right)^{1/v}$$

$$= \lambda_v^{(e)}\left(\sum_{k=m}^{\infty} J^k D^k Q^k\right) \leq ... \leq C\left(\sum_{k=m}^{\infty} 2^{k\alpha(1/v-1/r+1/q-1/p)}\right)^{1/\alpha} \leq$$

$$\leq C2^{m(1/v-1/r+1/q-1/p)}\left(\sum_{k=m}^{\infty} 2^{k\alpha(1/v-1/r+1/q-1/p)}\right)^{1/\alpha} \leq C2^{m(1/v-1/r+1/q-1/p)}.$$

Und somit erhalten wir eine ähnliche Abschätzung wie bei (3.9):

$$e_{2^{m-1}}\left(\sum_{k=m}^{\infty} J^k D^k Q^k\right) \leq C2^{m(-1/r+1/p-1/q)}. \tag{3.10}$$

Wenn wir jetzt die Additivität der Entropiezahlen und die Formeln (3.9) und (3.10) verwenden, kommen wir zu folgendem Resultat:

$$e_{2^m}(D) \leq e_{2^m-1}(D) \leq e_{2^{m-1}}\left(\sum_{k=0}^{m-1} J^k D^k Q^k\right) + e_{2^{m-1}}\left(\sum_{k=m}^{\infty} J^k D^k Q^k\right) \leq C2^{m(1/s-1/r+1/q-1/p)}. \tag{3.11}$$

So sei nun n eine beliebige natürliche Zahl. Wir wählen nun $m \in \mathbb{N}_0$ so, dass $2^m \leq n < 2^{m+1}$ erfüllt ist. Wegen der Monotonie der Entropiezahlen und der gerade gezeigten Ungleichung (3.11) gilt nun:

$$e_n(D) \leq e_{2^m}(D) \leq C2^{m(1/s-1/r+1/q-1/p)} \leq C2^{(m+1)(1/s-1/r+1/q-1/p)} \leq Cn^{-1/r+1/q-1/p}, \tag{3.12}$$

wobei im letzten Schritt $-1/r+1/q-1/p < 0$ ausgenutzt wurde.
Daher gilt wegen $1/s = 1/r+1/p-1/q$ und (3.12) also $\lambda_{s,\infty}^{(e)}(D) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{n^{1/s}e_n(D)\} \leq$ $\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\{n^{1/s}n^{-1/s}C\} = C < \infty$. Und somit haben wir den Fall $t = \infty$ bewiesen.

2. Schritt: $0 < t < \infty$
Für $0 < s_0 < s_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$ sowie $1/s = (1-\theta)/s_0 + \theta/s_1$ gilt:

$$\left(\mathcal{L}^{(e)}_{s_0,t_0}(X,Y), \mathcal{L}^{(e)}_{s_1,t_1}(X,Y)\right)_{\theta,t} \subseteq \mathcal{L}^{(e)}_{s,t}(X,Y) \text{ für } 0 < t, t_0, t_1 \leq \infty.$$

Nach Satz 1.4.1 gilt für $0 < r_0 < r_1 < \infty$, $0 < t, t_0, t_1 \leq \infty$ und $0 < \theta < 1$ mit $1/r = (1-\theta)/r_0 + \theta/r_1$:

$$(l_{r_0,t_0}, l_{r_1,t_1})_{\theta,t} = l_{r,t}. \tag{3.13}$$

Wir können also jetzt für einen gegebenen Exponenten r mit $1/r > \max(1/q - 1/p, 0)$ $r_0, r_1$ und $\theta$ finden, so dass sie die Bedingungen $1/r_0 > 1/r > 1/r_1 > \max(1/q - 1/p, 0)$ und $1/r = (1-\theta)/r_0 + \theta/r_1$ erfüllen.
Wenn wir jetzt (3.13) mit $t_0 = t_1 = \infty$ anwenden und den 1. Schritt beachten, erhalten wir:

$$\sigma \in l_{r,t} \Rightarrow D \in \mathcal{L}^{(e)}_{s,t}(l_p, l_q), \text{ für } 0 < t < \infty.$$

Damit sind sowohl das Lemma als auch der Satz bewiesen.

q.e.d.

Der eben bewiesene Satz ist für sich genommen schon bemerkenswert, aber Carl konnte noch eine allgemeinere Variante beweisen. Er dehnt dabei den Satz von den üblichen $l_p$-Räumen auf die facettenreicheren Lorentzräume aus und stützt sich beim Beweis auf den eben gezeigten Satz.

### 3.1.5 Satz

*Für* $1 < p, q < \infty$, $1 \leq u, v \leq \infty$, $1/r > \max(1/p - 1/q, 0)$, $0 < t \leq \infty$ *und* $1/s = 1/r + 1/p - 1/q$ *gilt:*

$$D \in \mathcal{L}^{(e)}_{s,t}(l_{p,u}, l_{q,v}) \Leftrightarrow \sigma \in l_{r,t}.$$

Wie schon beim Beweis des vorangegangenen Satzes formulieren wir zwei Lemmata, die zusammengenommen unseren zu beweisenden Satz ergeben.

### 3.1.6 Lemma

*Für* $1 < p, q < \infty$, $1 \leq u, v \leq \infty$, $1/r > \max(1/p - 1/q, 0)$, $0 < t \leq \infty$ *und* $1/s = 1/r + 1/p - 1/q$ *gilt:*

$$D \in \mathcal{L}^{(e)}_{s,t}(l_{p,u}, l_{q,v}) \Rightarrow \sigma \in l_{r,t}.$$

Wir verzichten darauf, den Beweis auszuformulieren, da er sich analog zu Lemma 3.1.3 beweisen lässt.

### 3.1.7 Lemma

*Für* $1 < p, q < \infty$, $1 \leq u, v \leq \infty$, $1/r > \max(1/p - 1/q, 0)$, $0 < t \leq \infty$ *und* $1/s = 1/r + 1/p - 1/q$ *gilt:*

$$\sigma \in l_{r,t} \Rightarrow D \in \mathcal{L}^{(e)}_{s,t}(l_{p,u}, l_{q,v}).$$

Bevor wir zum Beweis von Lemma 3.1.7 kommen, müssen wir noch eine Norm auf $l_{p,u}$ einführen:

$$\|x\|_{p,u} := (\sum_{n=1}^{\infty}[n^{1/p-1/u-1}\sum_{k=1}^{n}x^*]^u)^{1/u} \text{ für } 1 \le u < \infty$$

$$\|x\|_{p,\infty} := \sup_{n\in\mathbb{N}}[n^{1/p-1}\sum_{k=1}^{n}x^*].$$

Bereits in Definition 1.1.4 wurde $x^*$ eingeführt. Man kann zeigen, dass diese Norm äquivalent zur üblichen Norm auf $l_{p,u}$ ist. Im folgenden Beweis beziehen wir uns daher auf die soeben eingeführte Norm.

**Beweis**

1. Schritt: $\sigma \in l_{r,1} \Rightarrow D \in \mathcal{L}^{(e)}_{s,\infty}(l_{p,\infty}, l_{q,1})$
Gelte $1/r > \max(1/q - 1/p, 0)$ und $1/s = 1/r + 1/p - 1/q$. Wir können nun $p_0$ und $q_0$ finden, so dass sie $p > p_0$, $q > q_0$ und $1/r > \max(1/q_0 - 1/p_0, 0)$ erfüllen. Nach einem Resultat von Oloff können wir den Diagonaloperator $D \in \mathcal{L}(l_{p,\infty}, l_{q,1})$ wie folgt faktorisieren:

$$\begin{array}{ccc} l_{p,\infty} & \xrightarrow{D} & l_{q,1} \\ D_0 \downarrow & & \uparrow D_1 \\ l_{p_0} & \overrightarrow{\tilde{D}} & l_{q_0}, \end{array}$$

wobei die erzeugenden Folgen gerade den Bedingungen

$$\sigma^{(0)} \in l_{r_0,p_0},\ 1/r_0 = 1/p_0 - 1/p, \tag{3.14}$$

$$\sigma^{(1)} \in l_{r_1,\hat{q}_0},\ 1/r_1 = 1/q - 1/q_0,\ 1/\hat{q}_0 = 1 - 1/q_0 \tag{3.15}$$

und

$$\tilde{\sigma} \in l_{\tilde{r},\tilde{t}},\ 1/\tilde{r} = 1/r - 1/r_0 - 1/r_1,\ 1/\tilde{t} = 1/q_0 - 1/p_0 \tag{3.16}$$

genügen. Wegen

$$1/s = 1/\tilde{r} + 1/p_0 - 1/q_0 \overset{(3.16)}{=} 1/r - 1/r_0 - 1/r_1 + 1/p_0 - 1/q_0 \overset{(3.14),(3.15)}{=} 1/r + 1/p - 1/q$$

können wir jetzt Satz 3.1.2 auf $\tilde{D}$ anwenden und erhalten:

$$\tilde{D} \in \mathcal{L}^{(e)}_{s,\tilde{t}}(l_{p_0}, l_{q_0}) \subseteq \mathcal{L}^{(e)}_{s,\infty}(l_{p_0}, l_{q_0}). \tag{3.17}$$

Wegen der Idealeigenschaft der Klasse $\mathcal{L}^{(e)}_{s,\infty}$ und (3.1.7) gilt nun auch

$$D \in \mathcal{L}^{(e)}_{s,\infty}(l_{p,\infty}, l_{q,1}),\ \text{mit } 1/s = 1/r + 1/p - 1/q. \tag{3.18}$$

2. Schritt: $0 < t < \infty$
Sei r mit $1/r > \max(1/q - 1/p, 0)$ gegeben, so können wir $r_0$, $r_1$ und $\theta$ so wählen, dass $1/r_0 > 1/r > 1/r_1 > \max(1/q - 1/p, 0)$ und $1/r = (1-\theta)/r_0 + \theta/r_1$ erfüllt ist. Nach dem ersten Schritt wissen wir nun:

$$\sigma \in l_{r_i} \Rightarrow D \in \mathcal{L}^{(e)}_{s_i,\infty}(l_{p,\infty}, l_{q,1}), \tag{3.19}$$

mit $1/s_i = 1/r_i + 1/p - 1/q$, i=0,1. Wenn wir auf (3.19), wie im Beweis von Lemma 3.1.4, die Interpolation anwenden, erhalten wir folgendes Ergebnis:

$$\sigma \in l_{r,t} \Rightarrow D \in \mathcal{L}_{s,t}^{(e)}(l_{p,\infty}, l_{q,1}). \tag{3.20}$$

Kommen wir zum Abschluss des Beweises, so sei also $\sigma \in l_{r,t}$. Wir können D wie folgt faktorisieren:

$$\begin{tikzcd} l_{p,u} \arrow[r, "D"] \arrow[d, "id"'] & l_{q,v} \\ l_{p,\infty} \arrow[r, "D"'] & l_{q,1} \arrow[u, "id"'] \end{tikzcd} \tag{3.21}$$

Wenn wir jetzt die Idealeigenschaft von $\mathcal{L}_{s,t}^{(e)}$ beachten, ergibt sich das behauptete Resultat. Damit ist alles gezeigt.

q.e.d.

Nachdem wir einige Erkenntnisse über die Zugehörigkeit von $D_\sigma$ zu Operatorenidealen gewonnen haben, wenden wir uns einem anderen bedeutenderen Resultat von Carls Arbeit zu. Wir kommen zu der nach ihm benannten Ungleichung, welche großen Einfluss auf die Entwicklung der Theorie der Entropiezahlen hatte. Denn wenn man die Entropiezahlen eines kompakten Operators kennt, kann man sehr gut die Beträge seiner Eigenwerte abschätzen und, wie bereits erwähnt, ist das bei zahlreichen Problemen von enormer Bedeutung.
Zum Beweis benötigen wir jedoch noch ein Resultat, dessen Beweis hier zu weit führen würde, deshalb formulieren wir es auch nur als:

### 3.1.8 Definition

Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $T \in \mathcal{L}(X)$, so wird

$$k := \dim\Big(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \ker(T - \lambda Id)^m\Big)$$

die **(algebraische) Vielfachheit** von $\lambda$ genannt.

### 3.1.9 Bemerkung

*Seien X ein Banachraum, $T \in \mathcal{L}(X)$ ein kompakter Operator und sei $(\lambda_n)$ die dem Betrag nach fallend geordnete Folge der Eigenwerte, die mit Vielfachheit gezählt werden. Falls $\lambda_k \neq 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ ist, so existiert ein k-dimensionaler Teilraum $U \subseteq X$, welcher unter T invariant ist. Außerdem hat $T|_U$ genau die Eigenwerte $\lambda_1(T), ..., \lambda_k(T)$.*

Diese Bemerkung erweist sich in vielen Beweisen als nützlich. Da uns jedoch nicht alle nötigen Beweismittel zur Verfügung stehen, verweisen wir daher auf den Beweis in [6, 1.a.6].

Für die im folgenden Lemma auftauchende Folge $\lambda$ der Eigenwerte können wir der Einfachheit halber annehmen, dass sie geordnet sind und betragsmäßig monoton fallen.

### 3.1.10 Lemma (Ungleichung von Carl)

*Sei $X$ ein komplexer Banachraum und sei $T \in \mathcal{L}(X)$ ein kompakter Operator, so gilt für alle $k, n \in \mathbb{N}$:*

$$|\lambda_1(T) \cdots \lambda_n(T)|^{1/n} \leq 2^{(k-1)/2n} e_k(T).$$

**Beweis**

Für $\lambda_n(T) = 0$ ist die Aussage trivial, da dann die linke Seite der zu beweisenden Ungleichung gerade Null ist und die rechte Seite nicht kleiner als Null werden kann.
Seien also $k, n \in \mathbb{N}$ und $\lambda_n \neq 0$. Wir wählen einen nach obiger Bemerkung existierenden Teilraum $U$ von $X$, der unter $T$ invariant ist, und definieren $S := T|_U : U \to U$, so dass S gerade $\lambda_1(T), \ldots, \lambda_n(T)$ als seine Eigenwerte hat. Aus der Definition der Entropiezahlen folgt nun, dass es für jedes beliebige, aber feste $\delta > e_k(T)$ Elemente $y_1, ..., y_{2^{k-1}} \in X$ gibt, so dass gilt:

$$T(B_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} (\{y_i\} + \delta B_X).$$

Beachten wir noch die Definition von S, so folgt sogleich:

$$S(B_U) \subseteq \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} (\{y_i\} + \delta B_X) \cap U. \tag{3.22}$$

Wir fassen den n-dimensionalen komplexen Banachraum $U$ als 2n-dimensionalen reellen Banachraum auf. Also können wir den Operator $S$ als Abblildung in $\mathbb{R}^{2n}$ auffassen. Die Determinante von $S$ ist nun gerade:

$$|det(S)| = |\lambda_1(T) \cdots \lambda_n(T)|^2,$$

denn $S : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ kann man darstellen als eine 2n-dimensionale Tridiagonalmatrix, eine Matrix, die nur auf der Hauptdiagonalen und auf den angrenzenden Nebendiagonalen Einträge $\neq 0$ hat, welche aus folgenden Blöcken besteht:

$$\begin{pmatrix} Re(\lambda_i(T)) & -Im(\lambda_i(T)) \\ Im(\lambda_i(T)) & Re(\lambda_i(T)) \end{pmatrix}$$

und die jeweils die Determinante $|\lambda_i(T)|^2$ haben. Bezeichne $Vol$ das 2n-dimensionale Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^{2n}$, aus Formel (3.22) erhalten wir dann folgende Ungleichung:

$$|\lambda_1(T) \cdots \lambda_n(T)|^2 Vol(B_U) = Vol(S(B_U)) \leq 2^{k-1} \delta^{2n} Vol(B_U).$$

Daraus gewinnen wir die gewünschte Ungleichung.

q.e.d.

Wenn wir den Fall des reellen Banachraumes vorliegen haben, erhalten wir beim analogen Beweis eine ähnliche Ungleichung - man muss lediglich in der rechten Seite "2n" durch "n" ersetzen. Des weiteren kann man zeigen, dass das Lemma sogar für quasi-Banachräume gilt. Einen Beweis hierfür finden wir in [4, Theorem 1.3.4].

Die eigentliche **Ungleichung von Carl** ist ein Spezialfall obigen Lemmas. Wenn wir $k = n$ setzen, erhalten wir:

$$|\lambda_n(T)| = |\lambda_n(T)\cdots\lambda_n(T)|^{1/n} \leq |\lambda_1(T)\cdots\lambda_n(T)|^{1/n} \leq 2^{(n-1)/n} e_n(T) \leq \sqrt{2} e_n(T)$$

und somit die 1981 von Carl bewiesene Ungleichung:

$$|\lambda_n(T)| \leq \sqrt{2} e_n(T).$$

Mit dieser Ungleichung sind wir dann auch in der Lage, ein Pendant der **Weylschen Ungleichung** im Hilbertraumfall zu formulieren, indem wir, wie bereits angekündigt, die singulären Zahlen durch die Entropiezahlen ersetzen:

$$\|\lambda_n(T)\|_{l^p} \leq \sqrt{2}\, \|e_n(T)\|_{l^p}\,,\ 0 < p < \infty;\ T \in \mathcal{K}(X).$$

## 3.2 Der Satz von Gordon-König-Schütt

Wir betrachten in diesem Abschnitt einen Satz, der zu Beginn der 1980er Jahre von den Herren Gordon, König und Schütt bewiesen wurde. Dadurch sind wir dann in der Lage, das Entropieverhalten von beschränkten Operatoren zu berechnen, welche auf einem Folgenraum wirken. Wenn wir uns im Weiteren auf diesen Satz beziehen, werden wir ihn mit GKS abkürzen.
Er bildet eine Erweiterung von Lemma 3.1.10, und macht eine wichtige Aussage über das asymptotische Verhalten der Entropiezahlen von Diagonaloperatoren.
An dieser Stelle sei noch einmal an Definition 1.1.4 erinnert, wo symmetrische Folgenräume erkärt wurden.

### 3.2.1 Satz (Gordon-König-Schütt)

*Sei $X$ ein symmetrischer komplexer Folgenraum und $D_\sigma : X \to X$ ein Diagonaloperator, welcher durch eine Folge $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ...) \in c_0$ gegeben ist, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ (\sigma_1^* \cdots \sigma_n^*)^{1/n} 2^{-k/2n} \right\} \leq e_{k+1}(D_\sigma) \leq 6 \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ (\sigma_1^* \cdots \sigma_n^*)^{1/n} 2^{-k/2n} \right\}.$$

**Beweis**

Die linke Ungleichung folgt aus der Ungleichung von Carl.
Kommen wir zum Beweis der rechten Ungleichung. Da X nach Voraussetzung symmetrisch ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq 0$ gilt. Wir definieren nun:

$$\delta := \delta(n) := 8 \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ 2^{-k/2n} (\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n} \right\}. \tag{3.23}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir wählen nun ein $s \in \mathbb{N}$ mit $n \leq 2(s+1)$, was gleichbedeutend ist mit:

$$1 \leq 2 \cdot 2^{-n/2(s+1)}. \tag{3.24}$$

Nun gilt wegen der Monotonie von $\sigma$:

$$\sigma_{s+1} = (\sigma_{s+1} \cdots \sigma_{s+1})^{1/(1+s)} \leq (\sigma_1 \cdots \sigma_{s+1})^{1/(s+1)}.$$

Daraus folgt mittels (3.24):

$$\sigma_{s+1} \overset{(3.24)}{\leq} 2 \cdot 2^{-n/(s+1)} (\sigma_1 \cdots \sigma_{s+1})^{1/(s+1)}.$$

Daher schließen wir, dass es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $s \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\frac{\delta}{4} \geq \sigma_{s+1} \geq \sigma_{s+2} \geq \ldots \geq 0$ gilt.
Falls aber sogar $\sigma_1$ kleiner oder gleich $\frac{\delta}{4}$ sein sollte, so folgt sofort:

$$e_{k+1} \leq \|D_\sigma\| = \sigma_1 \leq \frac{\delta}{4} \leq 6 \sup_{n\in\mathbb{N}} \{ 2^{-k/2n} (\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n} \}.$$

Sei nun also $\sigma_1 > \frac{\delta}{4}$, so existiert ein Index s mit:

$$\sigma_{s+1} \leq \frac{\delta}{4} < \sigma_s.$$

Für dieses $s$ gilt nun wegen (3.23) insbesondere $\delta \geq 8 \cdot 2^{-k/2s}(\sigma_1 \cdots \sigma_s)^{1/s}$ und das ist äquivalent zu:

$$(8/\delta)^{2s}(\sigma_1 \cdots \sigma_s)^2 \leq 2^k. \tag{3.25}$$

Bezeichne $B$ bzw. $B_s$ die Einheitskugel von X bzw. von der linearen Hülle der ersten $s$ Einheitsvektoren. Das Bild von $B_s$ unter $D_\sigma$ ist präkompakt, also kann man ein maximales System von Punkten $\{x_j\}_{j=1}^L$ finden, wobei paarweise verschiedene Elemente jeweils einen Abstand größer als $\frac{\delta}{2}$ haben. Wegen der Maximalität gilt nun:

$$D_\sigma(B_s) \subseteq \bigcup_{j=1}^{L}(\{x_j\} + \frac{\delta}{2}B_s). \tag{3.26}$$

Jedes Element von $D_\sigma x \in D_\sigma(B)$, $x = (x_1, x_2, ...) \in B$ kann geschrieben werden als:

$$D_\sigma x = (\sigma_1 x_1, ..., \sigma_s x_s, 0, ...) + (0, ..., 0, \sigma_{s+1}x_{s+1}, \sigma_{s+2}x_{s+2}, ...).$$

Wir erhalten also: $D_\sigma(B) \subseteq D_\sigma(B_s) + \frac{\delta}{4}B$ und wegen (3.26) folgt weiter

$$D_\sigma(B) \subseteq \bigcup_{j=1}^{L}(\{x_j\} + \frac{3}{4}\delta B). \tag{3.27}$$

Wenn wir uns jetzt Gleichung (3.27) und die Definition der Entropiezahlen genauer ansehen, stellen wir fest, dass wir für $L \leq 2^k$ gerade $e_{k+1} \leq \frac{3}{4}\delta$ erhalten und somit auch die gewünschte Ungleichung. Wir müssen also nur noch

$$L \leq 2^k$$

zeigen. Nach der Definition der Menge $\{x_j\}_{j=1}^L$ ist

$$\bigcup_{j=1}^{L}(\{x_j\} + \frac{\delta}{4}B_s) \subseteq D_\sigma(B_s) + \frac{\delta}{4}B_s \subseteq 2D_\sigma(B_s) \tag{3.28}$$

die Vereinigung von disjunkten Mengen.
Wenn wir auf (3.28) das Lebesguemaß $Vol$ anwenden, ergibt das:

$$L(\frac{\delta}{4})^{2s}Vol(B_s) \leq 2^{2s}(\sigma_1 \cdots \sigma_s)^2 Vol(B_s)$$

und somit:

$$L \leq (8/\delta)^{2s}(\sigma_1 \cdots \sigma_s)^2 \overset{(3.25)}{\leq} 2^k.$$

q.e.d.

Nachdem wir Satz 3.2.1 bewiesen haben, erhalten wir noch leicht folgendes Lemma.

### 3.2.2 Lemma

*Gelte $0 < p < \infty$ und seien X bzw. $D_\sigma$ wie im obigen Satz, so gilt folgende Äquivalenz:*

$$(e_k(D_\sigma))_{k\in\mathbb{N}} \in l_p \Leftrightarrow \sigma \in l_p.$$

## 3.3 Verallgemeinerung von Gordon-König-Schütt

Es ist nun schon 25 Jahre her, dass der Satz von Gordon-König-Schütt bewiesen wurde. Bisher ist es aber noch nicht gelungen den Satz unter ähnlichen Voraussetzungen auf Diagonaloperatoren zwischen beliebigen $l_p$ Räumen befriedigend, d.h. ohne zusätzliche Voraussetzungen an die Folge $\sigma$, zu verallgemeinern. Daher ist es umso erfreulicher, dass es im Rahmen einer Diplomarbeit gelungen ist, neue Erkenntnisse zu erlangen, welche wir hier in zwei Sätzen formulieren werden.

Dabei vereinbaren wir wieder die Schreibweise $a_n \sim b_n$, wenn gilt

$$\exists\, c, C > 0, \text{ so dass } \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } ca_n \leq b_n \leq Ca_n.$$

### 3.3.1 Bemerkung

*Gelte $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq 0$, so folgt:*

1. $\sigma_n = (\sigma_n \cdots \sigma_n)^{1/n} \leq (\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n}$ *und weiterhin* $(\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n} \searrow 0$.
2. *Falls $k \geq n$, so gilt $1/\sqrt{2} \leq 2^{-k/2n} \leq 1$, also $2^{-k/2n} \sim 1$*
   *Deswegen und wegen 1. gilt beim Satz von Gordon-König-Schütt sogar:*
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ 2^{-k/2n} (\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n} \right\} \sim \max_{n\leq k} \left\{ 2^{-k/2n} (\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n} \right\}. \tag{3.29}$$
3. *Für große $n$ gilt nach der Stirlingschen Formel*[1] *und wegen $n^{1/n} \to 1$:*
$$(n!)^{1/n} \sim n. \tag{3.30}$$

Wie wir auch aus dem Beweis entnehmen können, sind die folgenden Sätze für komplexe Folgenräume formuliert. Die analoge Aussage erhalten wir bei dem gleichen Beweis, indem wir $2^{-k/2n}$ durch $2^{-k/n}$ ersetzen.

### 3.3.2 Satz

*Sei $D_\sigma$ ein Diagonaloperator zwischen zwei Lorentzräumen $D_\sigma : l_{p,s} \to l_{q,t}$ mit $0 < q < p \leq \infty$, $0 < s \leq t \leq \infty$ und sei $(\sigma_n)$ die zu $D_\sigma$ gehörige Folge, für die o.B.d.A. $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq 0$ gilt. Falls nun $(n^{1/r}\sigma_n)$ monoton gegen Null fällt, wobei $r$ wie üblich durch $1/r + 1/p = 1/q$ definiert ist, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:*

$$e_{k+1}(D_\sigma) \sim \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ 2^{-k/2n} n^{1/r} (\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n} \right\}. \tag{3.31}$$

[1] $n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$

**Beweis**

1. Teil: $e_{k+1}(D_\sigma) \le c \sup_{n\in\mathbb{N}} \{2^{-k/2n} n^{1/r} (\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n}\}$
Seien $D_1 : l_{p,s} \to l_{p,s}$ bzw. $D_2 : l_{p,s} \to l_{q,t}$ Diagonaloperatoren, welche durch die Folgen $(k^{1/r}\sigma_k)$ bzw. $(k^{-1/r})$ definiert sind, so gilt offensichtlich $D_\sigma = D_2 D_1$

$$e_{k+1}(D_\sigma) = e_{k+1}(D_2 D_1) \le e_{k+1}(D_1) \underbrace{\|D_2\|}_{\text{beschränkt}} \overset{GKS}{\le} c \sup_{n\in N} \{2^{-k/2n} (\prod_{l=1}^{n} l^{1/r} \sigma_l)^{1/n}\}$$

$$\overset{(3.29)}{\le} c \max_{n\le k} \{2^{-k/2n} (\prod_{l=1}^{n} l^{1/r} \sigma_l)^{1/n}\} \overset{(3.30)}{\le} c \max_{n\le k} \{2^{-k/2n} n^{1/r} (\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n}\} \le$$

$$\le c \sup_{n\in N} \{2^{-k/2n} n^{1/r} (\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n}\}.$$

2. Teil: $e_{k+1}(D_\sigma) \ge c \sup_{n\in N} \{2^{-k/2n} n^{1/r} (\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n}\}$
Wir betrachten vorerst den Diagonaloperator $D_\sigma^n := D_\sigma|_{l^n_{p,s}}$.
Da $D_\sigma^n$ ein Diagonaloperator ist, stimmen seine Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$ gerade mit den ersten Folgegliedern $\sigma_1, ..., \sigma_n$ überein, deswegen erhalten wir:

$$(\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n} = (\lambda_1 \cdots \lambda_n)^{1/n} \le 2^{(n+k)/2n} e_{k+n+1}(D_\sigma^n) =$$

$$= \sqrt{2} \cdot 2^{k/2n} \, e_{n+k+1}((id_n : l^n_{p,s} \to l^n_{q,t}) \, D_\sigma^n) \le \sqrt{2} \cdot 2^{k/2n} \underbrace{e_n(id_n)}_{\sim n^{-1/r}} e_{k+1}(D_\sigma^n).$$

$$\Rightarrow (2^{-1/2} \cdot 2^{-k/2n} n^{1/r} \, (\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n}) \le e_{k+1}(D_\sigma^n) \le e_{k+1}(D_\sigma)$$

$$\overset{\sup_{n\in\mathbb{N}}}{\Rightarrow} c \sup_{n\in N} (2^{-k/2n} n^{1/r} (\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n}) \le e_{k+1}(D_\sigma).$$

Dabei haben wir in der ersten Zeile die Ungleichung von Carl angewandt.

q.e.d.

### 3.3.3 Satz

*Seien $0 < q \le p \le \infty$ sowie $D_\sigma : l_p \to l_q$ ein Diagonaloperator, induziert durch $\sigma \in l_r$, wobei $r$ wie üblich durch $1/r = 1/q - 1/p$ bestimmt ist. Falls nun $(n^\alpha \sigma_n)$ für ein $\alpha > 1/r$ monoton gegen Null, fällt und zusätzlich $(\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n} \sim (\sigma_1 \cdots \sigma_{2n})^{1/2n}$ gilt, so bekommen wir folgendes Verhalten:*

$$e_{k+1}(D_\sigma) \sim \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ 2^{-k/2n} n^{1/r} (\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n} \right\}.$$

**Beweis**

1. Teil
Wir zerlegen $D_\sigma$ in die Operatoren $D_1$ und $D_2$, welche wir mit den Folgen $(n^\alpha \sigma_n)$ und $(n^{-\alpha})$ identifizieren, so dass also gilt: $D_\sigma = D_2 D_1$.

$$\Rightarrow e_{2k}(D_\sigma) \leq e_{k+1}(D_1)e_k(D_2) \overset{(3.29),GKS}{\leq} c \max_{n\leq k}\{2^{-k/2n} \underbrace{(\prod_{l=1}^{n} l^\alpha \sigma_l)^{1/n}}_{\sim n^\alpha(\sigma_1\cdots\sigma_n)^{1/n}} \} \underbrace{k^{-\alpha+1/r}}_{\leq n^{-\alpha+1/r}}$$

$$\leq c \max_{n\leq k}\{2^{-k/2n} n^{1/r}(\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n}\} \leq c \sup_{n\in\mathbb{N}}\{2^{-k/2n} n^{1/r}(\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n}\}$$

2. Teil
Sei $D_\sigma^n := D_\sigma|_{l_p^n}$. Indem wir den Satz von Gordon-König-Schütt anwenden, erhalten wir die Ungleichung:

$$(\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n} 2^{-(n+k)/2n} \leq e_{n+k+1}(D_\sigma^n) \leq e_{k+1}(D_\sigma^n) \underbrace{e_n(id : l_p^n :\rightarrow l_q^n)}_{\sim n^{-1/r}}.$$

$$\Rightarrow e_{k+1}(D_\sigma) \geq e_{k+1}(D_\sigma^n) \geq 2^{-1/2} 2^{k/2n} n^{1/r}(\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n}$$
$$\overset{\sup_{n\in N}}{\Rightarrow} e_{k+1}(D_\sigma) \geq c \sup_{n\in\mathbb{N}}\{2^{-k/2n} n^{1/r}(\sigma_1 \cdots \sigma_n)^{1/n}\}$$

q.e.d.

Die Forderung $n^{1/r}\sigma_n \searrow 0$ mag auf den ersten Blick eine recht starke Einschränkung sein. Wenn wir jedoch ein Beispiel betrachten, erkennen wir, dass wir diese Forderung nicht vernachlässigen können:
seien $p, q, r, \alpha$ wie oben, und sei die zu $D_\sigma$ assoziierte Diagonalfolge gegeben durch

$$\sigma_k := k^{-1/r}(1 + \log k)^{-\alpha}, \tag{3.32}$$

so gibt es wegen der Wahl von $\alpha$ offensichtlich ein $\varepsilon > 0$ mit:

$$k^\alpha \sigma_k = k^\varepsilon (1 + \log k)^{-\alpha}. \tag{3.33}$$

Wir erkennen aus (3.33), dass $k^\alpha \sigma_k$ nicht gegen Null strebt, also die Voraussetzungen von Satz 3.3.3 nicht erfüllt sind.
Nach dem 4. Beispiel von Kapitel 2.1 gilt nun

$$\sigma_k \sim \sigma_{2k} \tag{3.34}$$

und nach Definition der $\sigma_k$ auch $(\sum_{k=n}^\infty \sigma_k^r)^{1/r} \sim (\sum_{k=2n}^\infty \sigma_k^r)^{1/r}$, denn wir haben

$$\sum_{k=2n}^{\infty} \sigma_k^r \sim \int_{2n}^{\infty} \frac{(1+\log x)^{-r\alpha}}{x} dx = \int_{1+\log 2n}^{\infty} t^{-r\alpha} dt = \frac{(1+\log 2n)^{1-r\alpha}}{1-r\alpha} \sim$$

$$\sim \frac{(1+\log n)^{1-r\alpha}}{1-r\alpha} = \int_{1+\log n}^{\infty} t^{-r\alpha} dt = \int_{n}^{\infty} \frac{(1+\log x)^{-r\alpha}}{x} dx \sim \sum_{k=n}^{\infty} \sigma_k^r. \tag{3.35}$$

Damit können wir Theorem 4 in [9] anwenden, um

$$e_n(D_\sigma) \sim \left( \sum_{k=n}^{\infty} \sigma_k^r \right)^{1/r} = \left( \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(1+\log k)^{-r\alpha}}{k} \right)^{1/r} \sim (\log n)^{1/r-\alpha} \tag{3.36}$$

zu erhalten.
Um zu überprüfen, ob Satz 3.3.3 das gleiche Ergebnis liefert, obwohl $k^\alpha \sigma_k$ nicht monoton gegen Null fällt, berechnen wir unter Beachtung von Bemerkung 4.1.3

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ 2^{-k/2n} n^{1/r} \prod_{i=1}^{n} \left( i^{-1/r} (\log i + 1)^\alpha \right)^{1/n} \right\} \overset{Stirling}{\sim} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ 2^{-k/2n} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} (1+\log i)^{-\alpha/n}}_{\sim(\log n+1)^{-\alpha}} \right\}. \tag{3.37}$$

Die Ableitung der Funktion $f(n) := 2^{-k/2n}(\log n + 1)^{-\alpha}$ ist gerade

$$g(n,k,\alpha)\{k \ln 2[\log n + 1] - 2\alpha n\}, \tag{3.38}$$

wobei g eine positive Funktion ist. Wenn wir die Nullstelle von f' berechnen und beachten, dass $\log n << n$ für große n ist, sehen wir, dass das Supremum von (3.37) bei $n = k$ angenommen wird, d.h.

$$e_n(D_\sigma) \sim (\log n + 1)^{-\alpha}. \tag{3.39}$$

Das steht nun im Widerspruch zu (3.36). Wir erkennen also, dass unsere ursprüngliche Forderung $n^{1/r}\sigma_n \searrow 0$ notwendig ist.

### 3.3.4 Folgerung

*Wenn unter den gleichen Voraussetzungen wie in Satz 3.3.3 noch $\sigma_k \sim \sigma_{2k}$ gilt, so kommen wir zu dem Ergebnis:*

$$e_k(D_\sigma : l_p \to l_q) \sim k^{1/r}\sigma_k. \tag{3.40}$$

Der Beweis ist ähnlich dem von Satz 3.3.3, wenn wir die Überlegungen vom 1. Beispiel aus Abschnitt 2.1 anwenden.

# Kapitel 4

# Anhang

## 4.1 Bemerkungen und Ergänzungen

Im Abschnitt über die Entropiezahlen von Einbettungen benötigen wir das Volumen der Einheitskugel $U_p^m$. Da es dazu eine Formel gibt, welche auch anderweitig nützlich sein kann, geben wir diese als eigenständiges Lemma an.

### 4.1.1 Lemma (Volumen von Einheitskugeln)

1. *Sei $0 < p < \infty$, so gilt für das Volumen der Einheitskugel in $l_p^m$*

$$Vol(U_p^m) = \pi^m \frac{\{\Gamma(1+2/p)\}^m}{\Gamma(1+2m/p)}. \tag{4.1}$$

2. *Unter Beachtung der Stirlingschen Formel erhält man*

$$Vol(U_p^m) \approx \pi^{(3m-1)/2} 2^{m-1} p^{(1-m)/2} m^{-2m/p}. \tag{4.2}$$

3. *Es gilt insbesondere*

   (a) $Vol(U_1^m) = \frac{2^m}{m!}$,

   (b) $Vol(U_\infty^m) = 2^m$.

Den Beweis dazu finden wir in [4, Prosposition 3.2.1].

### 4.1.2 Innere und äußere Entropiezahlen

Wir haben die Entropiezahlen $e_n$ für $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ wie folgt definiert

$$\varepsilon_n(T) := \inf \left\{ \sigma > 0 : \exists\, y_1, ..., y_n \in Y \text{ mit } T(U_X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (\{y_i\} + \sigma U_Y) \right\}. \tag{4.3}$$

Bildlich gesprochen fixieren wir die Anzahl der Kugeln, mit der das Bild der Einheitskugel überdeckt werden soll, und suchen den kleinsten Radius, der das erfüllt. Man nennt die auf diese Art entstandenen Zahlen auch **äußere Entropiezahlen**, um sie von der Definition der **inneren Entropiezahlen** zu unterscheiden:

$$\varphi_n(T) := \sup\{\rho > 0 : \exists\, p > n \text{ mit } y_1, ..., y_p \in T(U_X),\ \|y_i - y_j\| \geq 2\rho\, \forall i \neq j\}\,. \tag{4.4}$$

Die inneren Entropiezahlen geben also den Radius an, den genau n disjunkte Kugeln im Bild der Einheitskugel haben können. Die Mittelpunkte dieser Kugeln bilden in diesem Sinn eine maximale Teilmenge von $T(U_X)$. Wie Carl und Stephani in ihrem Buch *Entropy, compactness an the approximation of operators* [2, Seite 7] gezeigt haben, besteht die Beziehung

$$\varphi_n(T) \leq \varepsilon_n(T) \leq 2\varphi_n(T), \tag{4.5}$$

also insbesondere

$$\varepsilon_n(T) \sim \varphi_n(T). \tag{4.6}$$

Da eben gerade die Relation (4.6) besteht, reicht es sich im Allgemeinen auf eine Art von Entropiezahlen zu beschränken. Die gewonnenen Erkenntnisse gelten dann immer, sowohl für innere als auch für äußere Entropiezahlen.

### 4.1.3 Bemerkung

*Es gilt*

$$\prod_{i=1}^{n}(\log i + 1) \sim (\log n + 1)^n.$$

**Beweis**

Die Abschätzung in die eine Richtung ist trivial, denn es gilt offensichtlich:

$$\prod_{i=1}^{n}(\log i + 1) \leq (\log n + 1)^n.$$

Die andere Abschätzung beweisen wir per vollständiger Induktion. Es ist klar, dass die Behauptung für $n = 1$ erfüllt ist, also haben wir einen korrekten Induktionsanfang. Sei die Behauptung also für n bereits bewiesen, d.h. angenommen, es gibt ein $K \geq 1$ mit $(\log n + 1)^n \leq K \prod_{i=1}^{n}(\log i + 1)$. Wir zeigen, dass daraus die Behauptung für $n + 1$ folgt.

$$(\log(n+1)+1)^{n+1} = (\log(n+1)+1)^n(\log(n+1)+1) \overset{(*)}{\leq} K(\log n + 1)^n(\log(n+1)+1) \leq$$

$$\overset{IV}{\leq} K\prod_{i=1}^{n}(\log i + 1)[\log(n+1)+1] = K\prod_{i=1}^{n+1}(\log i + 1).$$

Und es bleibt nur noch $(*)$ zu zeigen, das ist aber ebenfalls einfach:

$$\log(n+1)+1 = \log(n(1+1/n))+1 = \log n + \log(1+1/n)+1 \leq \log n + \log 2 + 1 \leq \underbrace{\log 2 + 1}_{K}(\log n + 1)$$

<u>q.e.d.</u>

## 4.2 Symbole und Abkürzungen

| | |
|---|---|
| $(\lambda_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ | Folge der Eigenwerte des Operators $T$ |
| $(s_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ | Folge der s-Zahlen des Operators $T$, S. 7 |
| $(\varepsilon_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ | Folge der (inneren) Entropiezahlen des Operators $T$, S. 12 |
| $(e_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ | Folge der (dyadischen) Entropiezahlen des Operators $T$, S. 12 |
| $(\varphi_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ | Folge der äußeren Entropiezahlen des Operators $T$, S. 47 |
| $(a_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ | Folge der Approximationszahlen des Operators $T$, S. 8 |
| $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ | Folge der Approximationszahlen der Folge $x$, S. 8 |
| | |
| $c_{00}$ | die Menge der finiten (endlichen) Folgen |
| $c_0$ | die Menge der Nullfolgen |
| $c$ | die Menge der konvergenten Folgen |
| $l_p$ | die Menge der zur $p$-ten Potenz summierbaren Folgen |
| $l_\infty$ | die Menge der beschränkten Folgen |
| $l_p^n$ | der $\mathbb{K}^n$ mit der $l_p$-Norm |
| $l_\infty^n$ | der $\mathbb{K}^n$ mit der $l_\infty$-Norm |
| | |
| $\mathbb{N}$ | die Menge der natürlichen Zahlen: $\{1, 2, ...\}$ |
| $\mathbb{N}_0$ | die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null: $\{0, 1, 2, ...\}$ |
| $\mathbb{Z}$ | die Menge der ganzen Zahlen: $\{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ |
| $\mathbb{Q}$ | die Menge der rationalen Zahlen |
| $\mathbb{R}$ | die Menge der reellen Zahlen |
| $\mathbb{C}$ | die Menge der komplexen Zahlen |
| $\mathbb{K}$ | der Körper der reellen oder komplexen Zahlen |
| | |
| $X, Y, Z$ | Bezeichnung für Banachräume |
| $H, \mathcal{H}$ | Bezeichnung für Hilberträume |
| $T^*$ | der zu $T$ adjungierte Operator |
| $X'$ | der Dualraum von X |
| $X''$ | der Bidualraum von X |
| | |
| $\mathcal{L}$ | die Menge der linaren und **beschränkten(stetigen)** Operatoren |
| $\mathcal{K}$ | die Menge der kompakten Operatoren |
| $\mathcal{F}$ | die Menge der finiten (mit endlichdimensionalen Bild) Operatoren |

| | |
|---|---|
| $D_\sigma$ | Diagonaloperator bzgl. der assoziierten Folge $\sigma$, S. 8 |
| $x \sim y,\ x_n \sim y_n$ | $\exists c, C \geq 1:\ cx_n \leq y_n \leq Cx_n\ \forall n \in \mathbb{N}$ |
| $x^*$ | nicht fallende monotone Umordnung, S. 8 |
| $l_{p,u}$ | der Lorentzraum mit den Parametern $p$ und $u$, S. 9 |
| $r(T)$ | Spektralradius von $T$, S. 13 |
| $\mathcal{A}$ | Bezeichnung für Operatorenideale, S. 14 |
| $\alpha$ | Bezeichnung für eine Ideal-Quasinorm, S. 14 |
| $[\mathcal{L}_{p,q}^{(s)}, \lambda_{p,q}^{(s)}]$ | Bezeichnung für das (pseudo-)s-Zahlenideal, S. 14 |
| $K(t,a), K(A_0, A_1, t, a)$ | das Peetresche K-Funktional, S. 18 |
| $id$, $Id$, $I$ | die identische Abblildung |
| $Re(x)$ | Realteil von x |
| $Im(x)$ | Imaginärteil von x |
| $Vol$ | das $2n$-dimensionale Lebesguemaß |
| sup | Supremum |
| inf | Infimum |
| $\Gamma$ | die Gamma-Funktion, $\Gamma(x+1) := \int_{t=0}^{\infty} t^x e^{-t}$ dt |
| $e \approx 2,71828182846$ | die Eulersche Zahl |
| | |
| Carl | Ungleichung von Carl |
| GKS | Satz von Gordon-König-Schütt, S. 40 |
| Hölder | Höldersche Ungleichung |
| | |
| o.B.d.A. | ohne Beschränkung der Allgemeinheit |
| q.e.d. | quod erat demonstrandum(lat.: was zu beweisen war) |

# Literaturverzeichnis


[1] Jöran Bergh & Jörgen Löfström: *Interpolation Spaces.* Springer Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1976

[2] Bernd Carl & Irmtraud Stephani: *Entropy, compactness an the approximation of operators.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990

[3] Bernd Carl: *Entropy Numbers of Diagonal Operators with an Application to Eigenvalue Problems.* Journal of Approximation Theory, Volume 32, Number 2, February 1981, Pages 135-150

[4] David Eric Edmunds & Hans Triebel: *Function Spaces, Entropy Numbers, Differential Operators.* Cambridge University Press, Cambridge, 1996

[5] Aike Hinrichs: *Optimal Weyl Inequality in Banach Spaces.* American Mathematical Society, Volume 134, Number 3, Pages 731-735, 2005

[6] Hermann König: *Eigenvalue Distribution of Compact Operators.* Birkhäuser, 1986

[7] Thomas Kühn: *A Lower Estimate for Entropy Numbers.* Journal of Approximation Theory, Volume 110, Pages 120-124, 2001

[8] Thomas Kühn: *Entropy Numbers of General Diagonal Operators.* Revista Mathemática Complutense, 2005, 18; Núm 2, 479-491

[9] Thomas Kühn: *Entropy numbers of diagonal operators.* 13. 06. 2006

[10] Albrecht Pietsch: *Operator Ideals.* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1978

[11] Albrecht Pietsch: *Eigenvalues and s - Numbers.* Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K. G., Leipzig, 1985

[12] Jan Schneider: *Entropiezahlen für Einbettungen von Folgenräumen mit Gewichten.* Diplomarbeit, 2002

[13] Carsten Schütt: *Entropy Numbers of Diagonal Operators between Symmetric Banach Spaces.* Journal of Approximation Theory, Volume 40, Number 2, February 1984, Pages 121-128

[14] Hans Triebel: *Fractals and Spectra.* Birkhäuser, Basel, 1997

## Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

| **Ort** | **Datum** | **Unterschrift** |
|---|---|---|
| Leipzig | 13. September 2007 | ....................... |