Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

Bachelorarbeit

Überlegungen zum Einsatz von Methoden des gelenkten Entdeckungslernens im Geometrieunterricht

vorgelegt von:	Kai Vogel
Matrikelnummer:	1045390
eingereicht am:	27.08.2009
Betreuer:	Dr. H.-P. Linke

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **1**

1 Gelenktes Entdeckungslernen **2**

1.1 Was ist gelenktes Entdeckungslernen? 2

1.2 Darbietendes und entdeckendes Lernen 3

1.3 Methoden des entdeckenden Lernens (nach HOLLAND) 6

1.3.1 Induktive Satzfindung 7

1.3.2 Analyse einer Konfiguration 7

1.3.3 Lösen eines Konstruktionsproblems 8

1.3.4 Lösen eines Berechnungsproblems 8

1.4 Zusammenfassung 9

2 Lernsequenzen zum Entdeckungslernen **10**

2.1 Induktive Satzfindung 10

2.1.1 Winkelsummensatz für Vierecke 10

2.1.2 Satz des Thales 12

2.1.3 Peripheriewinkelsatz 13

2.1.4 Satz über die Mittelsenkrechten im Dreieck 15

2.1.5 Satz über die Winkelhalbierenden im Dreieck 17

2.2 Analyse einer Konfiguration 19

2.2.1 Satz über die Gegenwinkel im Sehnenviereck 19

2.2.2 Innenwinkelsatz für Dreiecke 21

2.2.3 Sehnensatz 22

2.3 Lösen eines Konstruktionsproblems 24

2.3.1 Satz über die Mittelsenkrechten im Dreieck 24

2.3.2 Satz über die Winkelhalbierenden im Dreieck 25

2.3.3 Höhenschnittpunktsatz für Dreiecke 27

2.3.4 Schwerpunktsatz für Dreiecke 28

2.3.5 Kathetensatz des Euklid 31

2.4 Lösen eines Berechnungsproblems 34
2.4.1 Satz des Pythagoras 34
2.4.2 Kosinussatz der Trigonometrie 36
2.4.3 Sinussatz der Trigonometrie 39
2.4.4 Innenwinkelsatz für Dreiecke 42
2.4.5 Satz des Thales 43
2.4.6 Trapezflächeninhalt 46
2.5 Fazit 49

Literaturverzeichnis **50**

Einleitung

„Das Lernen von Mathematik ist umso wirkungsvoller – sowohl im Hinblick auf handfeste Leistungen, spezielle Transferleistungen, als auch im Hinblick auf mögliche schwer faßbare bildende Formung –, je mehr es im Sinne eigener aktiver Erfahrungen betrieben wird, je mehr der Fortschritt im Wissen, Können und Urteilen des Lernenden auf selbständigen entdeckerischen Unternehmungen beruht.“[1] (Winter 1991, S. 1).

Entdeckendes Lernen spielt nicht nur im Mathematikunterricht eine große Rolle. Wer fähig ist, etwas zu entdecken, kann diese Kompetenz auch im alltäglichen Leben nutzen, um neue Zusammenhänge mit Hilfe von bereits vorhandenem Wissen zu erschließen. Diese Arbeit stellt Überlegungen an, wie Schüler Mathematik eigenständig entdecken können.

Zunächst soll allerdings geklärt werden, was entdeckendes Lernen ist. Nach einem Definitionsversuch werde ich das entdeckende Lernen mit dem darbietenden Lernen vergleichen und aufzeigen, welche Vorteile das Entdeckenlassen gegenüber dem Darbieten hat. Anschließend stelle ich die Methoden des entdeckenden Lernens nach Holland (1996) vor.

Im nächsten Teil meiner Arbeit wird aufgezeigt, wie sich verschiedene Sätze der Geometrie mit den vorgestellten Methoden des gelenkten Entdeckungslernens vom Schüler gewinnen lassen. Dabei werden die von Holland (1996) lediglich angedeuteten Lernsequenzen konkret aufbereitet. Mögliche Impulse werden formuliert und die erwartete Schülerleistung aufgezeigt. Es wird analysiert, inwieweit Prozessziele des Entdeckens realisiert werden können.

Die in dieser Arbeit dargestellten Überlegungen können in meinem späteren Berufsleben als Lehrer eine Grundlage für mehrere Unterrichtsvorbereitungen darstellen. Die in Kapitel 2 vorgestellten Lernsequenzen müssen dafür gegebenenfalls an die entsprechende Lerngruppe angepasst werden.

[1]Sämtliche in dieser Arbeit auftretenden Zitate wurden mit der in den entsprechenden Quellen verwendeten Rechtschreibung übernommen.

Kapitel 1

Gelenktes Entdeckungslernen

1.1 Was ist gelenktes Entdeckungslernen?

Bevor über den Einsatz von Methoden des gelenkten Entdeckungslernens im Geometrieunterricht nachgedacht werden kann, muss klar sein, was entdeckendes Lernen ist und warum auch vom gelenkten Entdeckungslernen gesprochen wird.

Entdeckenlassendes Lernen ist dadurch gekennzeichnet, dass der Lernende neues Wissen aktiv herleitet und konstruiert. So kann er komplexe Probleme lösen, indem er Hypothesen aufstellt, diese überprüft und gegebenenfalls anpasst. Er probiert verschiedene Lösungsansätze aus und wendet bereits bekannte Methoden an. Er nutzt aktiv sein Vorwissen und bedient sich seines Verstandes (vgl. Hasselhorn & Gold 2006, S. 262 ff.). Neben diesen Prozesszielen des Entdeckens geht es im Mathematikunterricht hauptsächlich darum, Argumente zu finden, um damit Zusammenhänge zu beweisen. Fallunterscheidungen können hierbei notwendig sein. Der Schüler generalisiert, analogisiert und spezifiziert bekannte Zusammenhänge (vgl. Holland 1996, S. 138). Durch diese Formen des Nachdenkens gelangt er zu neuen Einsichten, indem er eine gegebene Situation umordnet und erschließt. Das so gewonnene Wissen ist wesentlich tiefer im Gedächtnis verankert, als jenes Wissen, dass dem Schüler ‚fertig‘ präsentiert wird (vgl. Hasselhorn & Gold 2006, S. 265). Dadurch kann er sich leichter daran erinnern und die gewonnenen Einsichten lange behalten. Dies zeigt, dass der Wissenserwerb, der Erkenntnisfortschritt und die Fähigkeit, Probleme zu lösen, erst durch aktives Handeln möglich ist (vgl. Heinrich 1991, S. 2).

Dieses aktive Handeln muss allerdings von außen angeregt werden (vgl. Heinrich 1991, S. 2). Deshalb muss der Lernende bei dieser Art des Wissenserwerbs durch den Lehrer unterstützt werden. Es bedarf einer gewissen Lenkung von außen. Daher wird beim entdeckenlassenden Lernen auch vom gelenkten Entdeckungslernen gesprochen. Die Aufgabe des Lehrers besteht einerseits darin, ein geeignetes Problem auszuwählen, welches den Schüler neben der Möglichkeit etwas zu entdecken auch zur Lösungsfindung motivieren soll. Dementsprechend muss eine geeignete, vorstrukturierte Lernumgebung zur Verfügung gestellt werden (vgl. Hasselhorn & Gold 2006, S. 262 ff.). Diese muss nach Holland (1996) mehrere Kriterien erfüllen:

- Die Lernsituation muss ein Inhaltsziel haben, z. B. das Erlernen eines Verfahrens oder eines bestimmten Satzes. Dieses Ziel muss dem Schüler zu Beginn des Lernprozesses nicht zwingend klar sein. Nach der Lernsequenz sollte er es jedoch erkennen.

- Die Lernumgebung muss dem Schüler das Entdecken ermöglichen. Oben erwähnte Prozessziele des Entdeckens müssen erreichbar sein.

- Nicht nur das komplexe Problem muss den Schüler motivieren, sondern jede Teilaufgabe.

- Die Lernsituation muss an die Lernfähigkeiten der Lerngruppe angepasst sein. Dies bezieht sich vor allem auf die Feinheit, mit der die Lenkung von außen strukturiert ist. In leistungsstarken Klassen kann ein Impuls reichen, während in leistungsschwächeren Klassen mehrere Zwischenimpulse nötig sein können. Wichtig ist, dass jede Teilaufgabe mit den vorher gewonnenen Erkenntnissen lösbar ist (vgl. Holland 1996, S. 146).

Andererseits hat der Lehrer auch im Lernprozess selbst eine unterstützende Funktion. Er gibt Impulse, die den Lernprozess vorantreiben. Außerdem sollte er immer dann eingreifen, wenn die Gefahr besteht, dass falsche Zusammenhänge und Konzepte gefestigt werden. Am Ende des Lernprozesses muss das neue Wissen gesichert werden. Dies erfolgt mit Hilfe der Ergebnissicherung (vgl. Hasselhorn & Gold 2006, S. 262 ff.).

1.2 Darbietendes und entdeckendes Lernen

Ein wichtiger Punkt beim entdeckenden Lernen ist die Schwierigkeit des zu lösenden Problems. Der Schüler muss dessen Lösung durch kleine, vom Lehrer gegebene Impulse finden können. Aus der Lösung des einfachen Problems lassen sich durch Variationen und Verallgemeinerungen neue Erkenntnisse gewinnen (vgl. Holland 1996, S. 138).

Beim gelenkten Entdeckungslernen werden sowohl Inhaltsziele, wie die Erkenntnis eines Satzes oder einer Formel als auch die oben erwähnten Prozessziele erreicht. Ersteres ist auch durch darbietendes Lernen möglich. Hier wird dem Schüler das Wissen als ‚Fertigprodukt' präsentiert. Durch diese Art des Lernens ist es möglich, das inhaltliche Ziel zeitlich effektiv zu vermitteln. Dabei ist der Schüler lediglich rezeptiv und reproduktiv tätig. Er kann das dargestellte ‚Fertigprodukt' nachvollziehen und wiedergeben (vgl. HOLLAND 1996, S. 138 f.).

Eine darbietende Unterrichtsstunde beginnt im Allgemeinen damit, dass der Lehrer das Stundenziel bekannt gibt. Anschließend führt er die entsprechende Herleitung vor. Dabei gibt es bei vielen Sätzen mehrere Beweismöglichkeiten. Der Lehrer wählt nun diejenige Variante aus, von der er glaubt, dass sie am einfachsten verständlich ist (vgl. HOLLAND 1996, S. 140).

Soll im Gegensatz zu dieser Darbietung von ‚fertigem' Wissen den Schülern die Möglichkeit gegeben werden, selbst aktiv zu sein, wird auf Methoden des gelenkten Entdeckenlassens zurückgegriffen (vgl. HOLLAND 1996, S. 139). Dabei ist das Entdecken nicht mit einem Unterrichtsgespräch zu verwechseln, bei dem der Schüler durch zugespitzte Fragen auf die richtige Antwort hingetrieben wird (vgl. WINTER 1991, S. 3). Vielmehr geht es darum, ein inhaltlich relevantes Problem mit möglichst wenig Hilfe durch den Lehrer zu lösen. Je nach Leistung der Klasse kann es dabei gegebenenfalls nötig sein, das Problem in Teilprobleme zu gliedern (vgl. HOLLAND 1996, S. 139). Es ist auch wichtig, die unterschiedlichen Lerntypen in der Klasse zu verifizieren und entsprechende Wege der Entdeckung zu nutzen (vgl. AEPKERS 2002, S. 13). Im Lernprozess selbst muss jedes Teilproblem und damit jeder Schritt im Erkenntnisprozess eine eigene produktive Leistung des Lernenden erfordern. Auf diese Art lassen sich Lernsequenzen gestalten. Diese müssen die bereits oben erwähnten Eigenschaften erfüllen (vgl. HOLLAND 1996, S. 139).

Oftmals lassen sich solche Lernsequenzen in Form von angefertigten Arbeitsblättern realisieren. Bei der Arbeit mit dem Arbeitsmaterial bringt der Schüler seine bisherigen Kenntnisse ein und gewinnt dadurch einen neuen Satz, eine Formel oder ein Verfahren. Dabei steht die selbstständige Herleitung durch den Schüler im Vordergrund (vgl. HOLLAND 1996, S. 140).

Natürlich wird verglichen mit dem darbietenden Unterricht mehr Zeit benötigt, Inhaltsziele durch Entdecken zu erreichen (vgl. HOLLAND 1996, S. 140). Hierbei wird auch deutlich, dass der Schüler nicht die gesamte Mathematik entdecken kann. Lehrpläne geben die Inhalte vor, die sich der Schüler in einer bestimmten Zeit aneignen muss. Dadurch ist ein gewisses Mindesttempo des Lernens vorgeschrieben (vgl. WINTER 1991, S. 3).

Neben diesem zeitlichen Nachteil hat das Entdecken jedoch viele Vorteile. Eine zusammenfassende Gegenüberstellung liefert WINTER (1991) in der folgenden Tabelle 1.1.

Tabelle 1.1: Gegenüberstellung von Lernen durch Entdeckenlassen und Lernen durch Belehren (WINTER 1991, S. 4-5)

Lernen durch Entdeckenlassen	**Lernen durch Belehren**
Lehrer setzt auf die Neugier und den Wissensdrang.	Lehrer setzt stärker auf die Methoden seiner Vermittlung.
Lehrer betrachtet die Schüler als Mitverantwortliche am Lernprozeß.	Lehrer neigt stärker dazu, die Schüler als zu formende Objekte anzusehen.
Lehrer versteht sich als erzieherische Persönlichkeit und fühlt sich für die Gesamtentwicklung mitverantwortlich.	Lehrer versteht sich in erster Linie als Instrukteur, als Vermittler von Lerninhalten.
Lehrer ist sich der Begrenztheit didaktischer Einflußnahme bewußt; er weiß insbesondere, daß er auch zur Verdunklung beitragen kann.	Lehrer tendiert zu einem ausgeprägten Glauben an pädagogische Machbarkeit.
Lehrer versucht, die allgemeine Bedeutung des Lernstoffs zu erhellen.	Lehrer beschränkt sich hauptsächlich auf die innermathematische Einordnung des Stoffes.
Lehrer versucht, zentrale Ideen deutlich werden zu lassen.	Lehrer legt größeren Wert auf lokale Abgrenzung des Inhalts.
Lehrer versucht, den Beziehungsreichtum der Lerninhalte sichtbar werden zu lassen.	Lehrer hält Separationen und Isolationen für lernwirksamer.
Lehrer bietet herausfordernde, lebensnahe und nicht so arm strukturierte Situationen an.	Lehrer gibt das Lernziel - möglichst im engen Stoffkontext - an.
Lehrer ermuntert zum Beobachten, Erkunden, Probieren, Fragen.	Lehrer erarbeitet den neuen Stoff durch Darbieten oder durch gelenktes Unterrichtsgespräch.
Lehrer gibt Hilfen als Hilfen zum Selbstfinden.	Lehrer gibt Hilfen als Hilfen zur Produktion der gewünschten Antwort.
Lehrer fördert und schätzt auch intuitives Handeln hoch.	Lehrer tendiert zum möglichst raschen Gebrauch der Fachsprache.
Lehrer gibt der Eigendynamik von Lernprozessen, die sprunghaft und unsystematisch erscheinen, Raum.	Lehrer setzt auf kleinschrittiges und schwierigkeitsgradig gestuftes Vorgehen.
Lehrer hält die Schüler an, ihre Lösungsansätze selbst zu kontrollieren.	Lehrer fühlt sich verpflichtet, i. w. selbst Schülerbeiträge zu beurteilen.
Lehrer versucht, Schülerfehler (oder vermeintliche Schülerfehler) mit den Schülern zu analysieren.	Lehrer versucht nach Kräften, das Auftreten von Schülerfehlern zu unterbinden.
Lehrer thematisiert das Lernen und Verstehen. Insbesondere legt er Wert auf das Bewußtwerden heuristischer Strategien (Heurismen).	Lehrer vermeidet eher Reflexionen über das Lernen und über das Lösen von Problemen. Problemlösen vollzieht sich naiv.

Durch ihre hohe Eigenaktivität sind die Schüler konzentrierter und motivierter. Wenn der Lehrer die Herleitung einer Formel darbietet, ist das für die Schüler im Allgemeinen uninteressant (vgl. HOLLAND 1996, S. 142). Hinzu kommt das Problem, dass es schwer ist, die Schüler für mathematische Fragen zu begeistern. Das kann durch problemorientiertes entdeckendes Lernen realisiert werden. Schüler müssen abgeholt werden, wo sie stehen (vgl. WINTER 1991, S. 3).

Wenn die Schüler selbst aktiv werden und sie es durch eine geeignete Stufung der Lernsituation schaffen, jedes Teilproblem zu lösen, so wirkt sich dies positiv auf deren Selbstkonzept und damit auf die Lösung des nächsten Teilproblems aus (vgl. HOLLAND 1996, S. 142).

Durch das eigenständige Finden von Sätzen, Formeln und Verfahren fällt es dem Schüler leichter, deren Gültigkeit bzw. Richtigkeit einzusehen. Während darbietend gewonnenes Wissen vom Schüler nur gekannt und gehandhabt wird, hat der entdeckende Schüler die Möglichkeit, gefundenes Wissen in sein Vorwissen zu integrieren. Er stellt Verbindungen zu bereits Bekanntem her (vgl. HOLLAND 1996, S. 142). Auch BRUNER meint, „dass das Selbsterkannte und -entdeckte von einer anderen Behaltensqualität sei, als das durch eine Erklärung vermittelte“ (HASSELHORN & GOLD 2006, S. 264). Inwieweit so ein tiefes Verständnis beim darbietenden Lernen erreicht wird, lässt sich im Lernprozess selbst nur sehr schwer überprüfen (vgl. HOLLAND 1996, S. 142).

Gelenktes Entdeckungslernen hat also scheinbar mehr Vorteile als Nachteile. Wie bereits erwähnt, ist jedoch eine ausschließlich entdeckenlassende Gestaltung des Unterrichts aufgrund der stofflichen Fülle nicht möglich. Daher muss der Lehrer Gegenstände auswählen, die durch Entdeckungslernen neben den zu realisierenden Inhaltszielen auch Prozessziele erreichbar machen (vgl. HOLLAND 1996, S. 142).

1.3 Methoden des entdeckenden Lernens (nach HOLLAND)

HOLLAND (1996) unterscheidet vier Methoden des entdeckenden Lernens:

- die induktive Satzfindung,
- die Analyse einer Konfiguration,
- das Lösen eines Konstruktionsproblems und
- das Lösen eines Berechnungsproblems.

Sie dienen dazu, Sätze und Formeln zu finden. Außerdem soll der Schüler Einsicht in die allgemeine Gültigkeit dieser Sätze und Formeln gewinnen (vgl. HOLLAND 1996, S. 146).

Ich werde nun darstellen, wodurch diese Methoden gekennzeichnet sind. Eine ausführliche Darstellung von Beispielen soll in Kapitel 2 geschehen.

1.3.1 Induktive Satzfindung

Bei der induktiven Satzfindung kommt es zu einer deutlichen Trennung zwischen dem Entdecken des Satzes und dem Finden des Beweises. Holland (1996) stellt daher zwei Stufen des Entdeckens dar. In der ersten Stufe werden die Schüler durch Zeichnen und Messen zum Satz geführt. Sie vermuten und formulieren den möglichen Satz. Anschließend wird in der zweiten Stufe das Beweisproblem aufgezeigt. Die Schüler finden einen möglichen Beweis des Satzes. Dadurch erkennen sie seine Allgemeingültigkeit (vgl. Holland 1996, S. 147).

Beispiele für Sätze, die sich induktiv gewinnen lassen, sind der Winkelsummensatz für Vierecke, der Satz des Thales, der Peripheriewinkelsatz und die Schnittpunktsätze für die Mittelsenkrechten und Winkelhalbierenden im Dreieck (vgl. Holland 1996, S. 147).

Bei der induktiven Satzfindung ist es wichtig, dass das Beweisbedürfnis der Schüler geweckt wird. Sie dürfen nicht mit dem induktiv gefundenen Satz zufrieden sein, bevor sie ihn bewiesen haben. Dieses Bedürfnis zu erreichen, stellt sich oft als schwierig heraus und ist „selbst in Gymnasialklassen ein nicht ganz einfaches methodisches Problem“ (Holland 1996, S. 148). Dieses Bedürfnis sollte schon in den unteren Klassenstufen herausgebildet werden und sich danach durch den gesamten Mathematikunterricht ziehen.

Durch die induktive Satzfindung erlangt der Schüler verschiedene Fähigkeiten. Neben dem Inhaltsziel, den Satz zu kennen, lernt er, individuell Beispiele zu generieren und die daraus erwachsenden Vermutungen zu formulieren. Weiterhin lernt er, diese Vermutungen zu überprüfen, indem er einen Beweis selbstständig löst (vgl. Holland 1996, S. 148).

1.3.2 Analyse einer Konfiguration

Die Analyse einer Konfiguration ist ebenfalls ein zweistufiger Prozess. In der ersten Stufe wird vom Schüler eine geeignete geometrische Figur, die zu analysierende Konfiguration, gezeichnet. Dies geschieht nach Anweisung des Lehrers oder mit Hilfe einer Konstruktionsbeschreibung. Anschließend wird die Konfiguration unter einem vorgegebenen Gesichtspunkt analysiert. Hierdurch entdeckt der Schüler den entsprechenden Satz und erkennt gleichzeitig seine Allgemeingültigkeit (vgl. Holland 1996, S. 148). Es ist wichtig, dass die Schüler die Figur selbst zeichnen. Dadurch werden nicht zu viele Voraussetzungen hinein interpretiert. Dabei ist es wichtig, dass keine Spezialfälle gezeichnet werden (vgl. Holland 1996, S. 150).

Sätze, die sich durch diese Methode des gelenkten Entdeckungslernens gewinnen lassen, sind der Satz über die Gegenwinkel im Sehnenviereck, der Innenwinkelsatz für Dreiecke oder der Sehnensatz (vgl. Holland 1996, S. 148 ff.).

Die Analyse einer Konfiguration ist als Methode immer dann anwendbar, wenn die Beweisfigur im Laufe des Beweises nicht weiter ergänzt werden muss. Neben dem Inhaltsziel des zu findenden Satzes erlangt der Schüler durch diese Methode prozessorientierte Fähigkeiten. Er lernt, eine Konfiguration nach Anweisung zu zeichnen und in dieser Teilkonfigurationen zu entdecken. Er zieht bereits bekannte Sätze zur Argumentation heran. Dadurch entdeckt er neue Zusammenhänge, formuliert diese und überprüft seine Argumentation auf Allgemeingültigkeit (vgl. Holland 1996, S. 150).

1.3.3 Lösen eines Konstruktionsproblems

Holland (1996) unterteilt auch diese Methode des gelenkten Entdeckenlassens in zwei Stufen. Zunächst lösen die Schüler eine vom Lehrer erteilte Konstruktionsaufgabe. Die Richtigkeit der Konstruktion wird bewiesen. Durch zusätzliche Überlegungen entdecken sie in der zweiten Stufe einen neuen Satz und erkennen gleichzeitig dessen allgemeine Gültigkeit (vgl. Holland 1996, S. 150 f.).

Sätze, die auf diesem Weg entdeckt werden können, sind der Höhenschnittpunktsatz für Dreiecke, der Satz über die Mittelsenkrechten im Dreieck, der Satz über die Winkelhalbierenden im Dreieck, der Schwerpunktsatz für Dreiecke und der Kathetensatz des Euklid (vgl. Holland 1996, S. 151 ff.).

Bei der Lösung eines Konstruktionsproblems sollte die Begründung der Richtigkeit der Konstruktion den wesentlichen Teil des Beweises des entdeckten Satzes vorwegnehmen. Dabei ist es wichtig, dass die anfangs gestellte Aufgabe nicht zu schwer ist. Das Niveau, auf dem die Konstruktionsaufgabe gelöst wird, muss an die Klasse und gegebenenfalls auch an einzelne Schüler angepasst sein. Dies wird vor allem beim Grad der Ausführlichkeit von Konstruktionsbeschreibungen deutlich (vgl. Holland 1996, S. 153). Neben der Kenntnis des Satzes erlangt der Schüler durch diese Methode die Fähigkeit, ein Konstruktionsproblem zu lösen. Außerdem lernt er, die Richtigkeit einer Konstruktion zu begründen (vgl. Holland 1996, S. 154).

1.3.4 Lösen eines Berechnungsproblems

Die vierte und letzte Methode des gelenkten Entdeckungslernens nach Holland (1996) ist vor allem dann geeignet, wenn Formeln und Sätze gefunden werden sollen, in denen Zusammenhänge zwischen Größen deutlich werden. Der Lehrer stellt die Schüler vor ein Berechnungsproblem, dessen allgemeine Lösung den zu findenden Satz liefert. In leistungsschwächeren Klassen sollte mit einem speziellen Berechnungsproblem begonnen werden, sodass in diesem Fall auch von einem zweistufigen Prozess gesprochen werden kann. In der ersten Stufe wird ein spezielles Berechnungsproblem vom Schüler gelöst. In der zweiten Stufe werden nun Variablen eingeführt, mit denen man das Problem allgemein löst. So gelangt man zum gewünschten Satz (vgl. Holland 1996, S. 154).

Beispiele für Sätze, die sich durch die Lösung eines Berechnungsproblems finden lassen, sind der Kosinussatz sowie der Sinussatz der Trigonometrie, der Satz des Pythagoras, der Innenwinkelsatz für Dreiecke, der Satz des Thales oder der Satz über den Flächeninhalt des Trapezes (vgl. Holland 1996, S. 154 f.).

Bei dieser Methode ist es wichtig, dass die Schwierigkeit des Berechnungsproblems an das Leistungsvermögen der Schüler angepasst ist. In der zweiten Stufe können Termumformungen nötig sein. Der Lehrer muss die Schüler dazu motivieren, eine möglichst einfache Endformel zu bekommen (vgl. Holland 1996, S. 155). Der Schüler erlangt durch das Lösen eines Berechnungsproblems die Fähigkeit, ein spezielles Berechnungsproblem zu lösen und dieses durch die Einführung von Variablen zu verallgemeinern. So entdeckt er selbst die allgemeine Lösung des Problems. Nebenbei wird er immer wieder mit nötigen Termumformungen konfrontiert (vgl. Holland 1996, S. 155 f.).

1.4 Zusammenfassung

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass beim Entdeckungslernen die Aktivität der Schüler im Vordergrund steht. Dabei nutzen sie bekannte Zusammenhänge und erkennen Neues. Aber auch durch den Lehrer gegebene Impulse treiben den Lernprozess voran, sodass von einem gelenkten Entdeckungslernen gesprochen werden kann.

Bevor der Lehrer die Bearbeitung eines Inhaltsziels im Unterricht angeht, muss er sich die Frage stellen, ob dieses Inhaltsziel die Möglichkeit bietet, vom Schüler entdeckt zu werden, um somit gleichzeitig Prozessziele zu realisieren. Der Lehrer muss sich zwischen dem Entdeckenlassen und dem Darbieten entscheiden.

Sofern er sich für das Entdeckungslernen entscheidet, muss er weiterhin eine passende der vier vorgestellten Methoden auswählen. Sollten mehrere Methoden geeignet sein, so muss er abwägen, welche die für die Lerngruppe optimale Lösung ist. Die anzufertigende Lernsituation muss sich in jedem Fall nach dem Leistungsstand der Klasse richten.

Kapitel 2

Lernsequenzen zum Entdeckungslernen

In diesem Kapitel soll anhand ausgewählter Sätze gezeigt werden, wie sich die Methoden des gelenkten Entdeckungslernens umsetzen lassen. Dazu werden zu jedem Satz die nötigen Lernvoraussetzungen genannt. Nach der Formulierung des Satzes wird eine mögliche Lernsequenz vorgestellt und anschließend analysiert. Es wird gezeigt, inwieweit diese Lernsituationen dem Schüler die Möglichkeit zum Entdecken geben. Dabei stehen die von Holland (1996) angedeuteten Beispiele im Vordergrund.

2.1 Induktive Satzfindung

2.1.1 Winkelsummensatz für Vierecke

Die Schüler kennen bereits den Innenwinkelsatz für Dreiecke.

Satz 1 (Winkelsummensatz für Vierecke)**.** *In jedem Viereck beträgt die Summe der Innenwinkelgrößen 360°.*

Lernsequenz 1. Wir kennen den Innenwinkelsatz für Dreiecke. Gibt es einen ähnlichen Satz auch für Vierecke?

(1) Zeichne verschiedene Vierecke und bestimme die Summe der Innenwinkelgrößen!

(2) Formuliere deine Vermutung!

(3) Wie kann man ohne Nachmessen herausfinden, dass die Innenwinkelsumme in jedem Viereck 360° betragen muss? Hilft uns der Innenwinkelsatz für Dreiecke vielleicht weiter?

(4) Formuliere einen Satz über die Innenwinkelsumme im Viereck!

Analyse 1. Der einleitende Text hat eine motivierende Wirkung und macht dem Schüler das Lernziel klar.

(1) Die Schüler sollen verschiedene Vierecke zeichnen, die Innenwinkelgrößen messen und addieren. Sie generieren Beispiele.

(2) Aufgrund der Beispiele äußert der Schüler die Vermutung, dass die Innenwinkelsumme in allen Vierecken 360° beträgt.

(3) Der Schüler soll das Viereck in zwei Dreiecke zerlegen. Er muss also eine Figur in zwei Teilfiguren aufteilen (s. Abb. 2.1). Da er den Innenwinkelsatz für Dreiecke bereits kennt, weiß er, dass die Innenwinkelsumme der beiden Teildreiecke jeweils 180° beträgt. Es gilt also

$$\alpha_1 + \gamma_1 + \delta = 180^\circ \qquad \text{und}$$
$$\alpha_2 + \gamma_2 + \beta = 180^\circ.$$

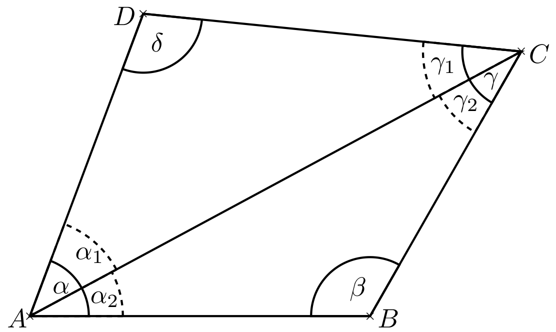


Abb. 2.1: Winkelsummensatz für Vierecke (induktive Satzfindung)

Die Schüler erkennen, dass alle Innenwinkel der beiden Dreiecke zu den Innenwinkeln des Vierecks gehören. Daraus können sie schließen, dass die Innenwinkelsumme im Viereck tatsächlich 360° betragen muss, denn

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \alpha_1 + \gamma_1 + \delta + \alpha_2 + \gamma_2 + \beta = 360^\circ.$$

Das Beweisproblem ist gelöst.

(4) Abschließend soll der gefundene Innenwinkelsatz für Vierecke formuliert werden.

2.1.2 Satz des Thales

Die Schüler verfügen über den Basiswinkelsatz und den Innenwinkelsatz für Dreiecke.

Satz 2 (Satz des Thales)**.** *Alle Peripheriewinkel über dem Durchmesser eines Kreises sind rechte Winkel.*

Lernsequenz 2. (1) Zeichne ein Dreieck $\triangle ABC$, dessen Seite c mit dem Halbkreisdurchmesser $\overline{AB}$ übereinstimmt! Der Punkt C soll auf dem Halbkreis liegen. Wie groß ist der Winkel γ?

(2) Zeichne weitere Dreiecke, bei denen eine Seite der Durchmesser des Halbkreises ist, auf dem der dieser Seite gegenüberliegende Punkt liegt! Wie groß ist jeweils der Winkel, der dem Halbkreisdurchmesser gegenüber liegt?

(3) Stelle eine Vermutung auf!

(4) Kann man ohne Nachmessen begründen, dass der Winkel γ immer $90°$ groß ist?

   (a) Verbinde den Punkt C in deinem ersten Beispiel mit dem Mittelpunkt M des Halbkreises!

   (b) Suche in der Figur nach gleich großen Winkeln und markiere diese mit derselben Farbe!

   (c) Begründe, warum gleich gefärbte Winkel gleich groß sind!

   (d) Begründe deine oben aufgestellte Vermutung mit Hilfe dir bereits bekannter Sätze!

(5) Formuliere einen Satz zu Peripheriewinkeln über dem Durchmesser eines Kreises!

Analyse 2. (1) Die Schüler zeichnen ein Dreieck $\triangle ABC$, wobei die Seite c Durchmesser des Umkreises ist. Sie stellen fest, dass γ ein rechter Winkel ist.

(2) Es werden nun weitere Beispiele generiert. Die Schüler zeichnen verschiedene Dreiecke, von denen eine Seite der Durchmesser des Kreises ist, auf dem der dieser Seite gegenüberliegende Punkt liegt. Für alle diese Dreiecke stellen sie fest, dass der Peripheriewinkel über dem Durchmesser des Kreises $90°$ groß ist.

(3) Die gefundene Vermutung wird formuliert.

(4) Nun sollen die Schüler einen Beweis für die aufgestellte Vermutung finden. Hierzu wird das Dreieck $\triangle ABC$ aus (1) in zwei Teildreiecke $\triangle AMC$ und $\triangle MBC$ zerlegt (s. Abb. 2.2).

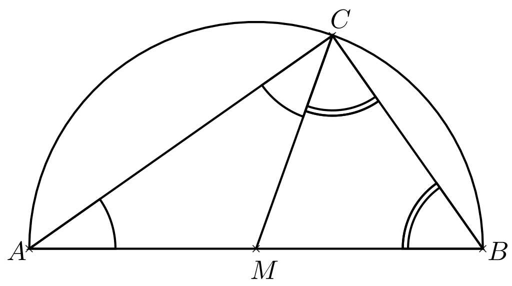


Abb. 2.2: Satz des Thales (induktive Satzfindung)

Beide Teildreiecke sind gleichschenklig, da je zwei Seiten dem Radius des Kreises entsprechen. Mit Hilfe des Basiswinkelsatzes sollen die Schüler die Gleichheit der Größe von jeweils zwei Winkeln begründen. Sie erhalten

$$\sphericalangle MAC = \sphericalangle ACM \qquad \text{und}$$
$$\sphericalangle CBM = \sphericalangle MCB.$$

Mit dem Innenwinkelsatz für Dreiecke begründen sie, dass $\gamma = 90°$ gelten muss, denn

$$180° = 2\sphericalangle ACM + 2\sphericalangle MCB \qquad \Longleftrightarrow$$
$$90° = \sphericalangle ACM + \sphericalangle MCB = \sphericalangle ACB = \gamma.$$

Durch die Anwendung bekannter Sätze wurde das Beweisproblem vom Schüler gelöst.

(5) Der Satz des Thales wird abschließend vom Schüler in mathematischer Sprechweise formuliert.

2.1.3 Peripheriewinkelsatz

Voraussetzung für die folgende Lernsequenz ist die Kenntnis des Satzes über die Gegenwinkel im Sehnenviereck.

Satz 3 (Peripheriewinkelsatz)**.** *Alle Peripheriewinkel über der gleichen Seite einer Sehne sind gleich groß.*

Lernsequenz 3. (1) Zeichne einen Kreis und eine Sehne $\overline{AB}$!

(a) Lege über einer Seite dieser Sehne verschiedene Punkte C_1, C_2 usw. auf dem Kreis fest und verbinde diese mit den beiden Punkten A und B der Sehne!

(b) Miss die Winkel $\sphericalangle AC_1B$, $\sphericalangle AC_2B$ usw.! Was stellst du fest?

(c) Formuliere deine Vermutung!

(2) Wie kann man dies ohne nachmessen begründen?

(a) Zeichne einen Punkt D so auf den Kreis, dass er auf der anderen Seite der Sehne liegt!

(b) Was für Figuren sind die Vierecke $ADBC_1$, $ADBC_2$ usw.?

(c) Was weißt du über die Gegenwinkel in diesen Vierecken?

(d) Begründe damit die Richtigkeit deiner Vermutung!

(3) Formuliere einen Satz zu Peripheriewinkeln über der gleichen Seite einer Sehne!

Analyse 3. (1) Zunächst werden von den Schülern verschiedene Peripheriewinkel über einer Seite einer Sehne gezeichnet und gemessen (s. Abb. 2.3). Sie stellen fest, dass alle gezeichneten Peripheriewinkel über der gleichen Seite der Sehne $\overline{AB}$ gleich groß sind. Die generierten Beispiele führen zu der zu formulierenden Vermutung, dass alle Peripheriewinkel über derselben Seite einer Sehne die gleiche Größe haben.

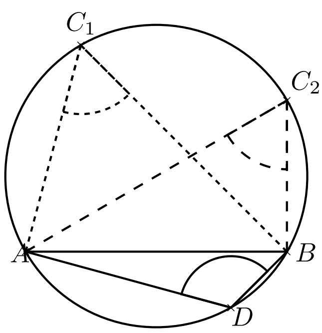


Abb. 2.3: Peripheriewinkelsatz (induktive Satzfindung)

(2) Nun werden sie vor die Aufgabe gestellt, diese Vermutung zu überprüfen. Dafür soll ein Punkt D auf der anderen Seite der Sehne gezeichnet werden.

Für die so entstehenden Sehnenvierecke gilt der bereits bekannte Satz über die Gegenwinkel im Sehnenviereck. Da sich der Winkel $\sphericalangle BDA$ nicht ändert, müssen demnach alle Winkel $\sphericalangle AC_1B$, $\sphericalangle AC_2B$ usw. gleich groß sein.

(3) Schlussendlich kann der Schüler den gefundenen und begründeten Satz formulieren.

2.1.4 Satz über die Mittelsenkrechten im Dreieck

Bevor der folgende Satz gewonnen werden kann, muss der Schüler die Eigenschaften der Mittelsenkrechten sowie des Kreises kennen gelernt haben.

Satz 4 (Satz über die Mittelsenkrechten im Dreieck)**.** *Die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt M, dem Mittelpunkt des Umkreises mit Radius r.*

Lernsequenz 4. (1) Zeichne ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ und zeichne die Mittelsenkrechten ein! Was stellst du fest?

(2) Zeichne ein anderes Dreieck $\triangle DEF$ und dessen Mittelsenkrechten! Was stellst du fest? Formulieren deine Vermutung!

(3) Gilt dies für alle Dreiecke? Kann man das allgemein begründen?

   (a) Welche Punkte liegen auf der Mittelsenkrechten m_a?

   (b) Welche Punkte liegen auf der Mittelsenkrechten m_b?

   (c) Welche Eigenschaft hat der Schnittpunkt dieser beiden Mittelsenkrechten?

   (d) Begründe damit, warum auch die dritte Mittelsenkrechte m_c durch diesen Punkt gehen muss!

(4) Miss die Abstände vom Schnittpunkt M der Mittelsenkrechten zu den Eckpunkten des Dreiecks! Was fällt dir auf? Begründe dies mit den in (3) verwendeten Beziehungen!

(5) Wo liegen alle Punkte, die vom Schnittpunkt M den gleichen Abstand $r = \overline{MA}$ haben?

(6) Formuliere einen Satz über die Mittelsenkrechten im Dreieck! Welche Rolle spielt ihr Schnittpunkt M?

Analyse 4. (1) Zunächst soll vom Schüler ein beliebiges Dreieck und dessen Mittelsenkrechten gezeichnet werden. Er stellt fest, dass sich die Mittelsenkrechten in einem Punkt M schneiden (s. Abb. 2.4).

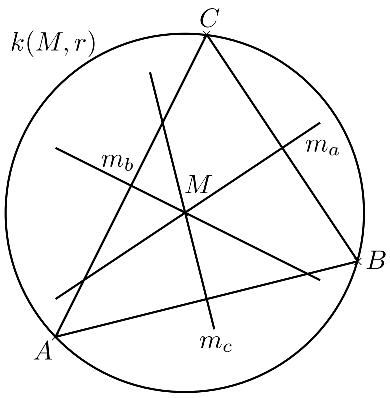


Abb. 2.4: Satz über die Mittelsenkrechten im Dreieck (induktive Satzfindung)

(2) Auch auf das zweite von ihm generierte Beispiel trifft dies zu. Die Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt. Er vermutet nun, dass sich die Mittelsenkrechten in jedem Dreieck in einem Punkt schneiden.

(3) Nun soll der Schüler begründen, dass die Vermutung für alle Dreiecke wahr ist. Hierzu muss er mit den Eigenschaften der Mittelsenkrechten argumentieren. Auf der Mittelsenkrechten m_a liegen alle Punkte, die von B und C den gleichen Abstand haben. Auf der Mittelsenkrechten m_b liegen alle Punkte, die von A und C den gleichen Abstand haben. Diese beiden Mittelsenkrechten schneiden sich in einem Punkt M, da die Seiten a und b und damit auch die zugehörigen Mittelsenkrechten nicht parallel sind. Für diesen Punkt gilt mit den oben vom Schüler genannten Eigenschaften der Mittelsenkrechten, dass dieser von allen Eckpunkten den gleichen Abstand hat. Daraus kann er schlussfolgern, dass auch die dritte Mittelsenkrechte m_c durch diesen Punkt gehen muss.

(4) Der Schüler soll nun durch Nachmessen feststellen, dass der Schnittpunkt M tatsächlich von allen Eckpunkten des Dreiecks den gleichen Abstand hat. Dies kann er mit den Eigenschaften aus (3) begründen.

(5) Nun muss der Schüler seine Kenntnisse über Ortslinien benutzen. Alle Punkte, die von einem Punkt M den Abstand r haben, liegen auf einem Kreis $k(M,r)$ mit Mittelpunkt M und Radius r. Das Beweisproblem ist nun vollständig gelöst.

(6) Schlussendlich kann der Schüler den Satz über die Mittelsenkrechten im Dreieck formulieren.

2.1.5 Satz über die Winkelhalbierenden im Dreieck

Die Schüler kennen bereits die Eigenschaften der Winkelhalbierenden und des Kreises.

Satz 5 (Satz über die Winkelhalbierenden im Dreieck)**.** *Die Innenwinkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt W, dem Mittelpunkt des Innenkreises mit dem Radius ρ.*

Lernsequenz 5. (1) Zeichne ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ und zeichne die Winkelhalbierenden ein! Was stellst du fest?

(2) Zeichne ein anderes Dreieck $\triangle DEF$ und dessen Winkelhalbierenden! Was stellst du fest? Formuliere deine Vermutung!

(3) Gilt dies für alle Dreiecke? Kann man das allgemein begründen?

  (a) Welche Punkte liegen auf der Winkelhalbierenden w_α?

  (b) Welche Punkte liegen auf der Winkelhalbierenden w_β?

  (c) Welche Eigenschaft hat der Schnittpunkt dieser beiden Winkelhalbierenden?

  (d) Begründe damit, warum auch die dritte Winkelhalbierende w_γ durch diesen Punkt gehen muss!

(4) Was kannst du über den Abstand des Schnittpunktes der Winkelhalbierenden zu den Dreiecksseiten aussagen? Benutze deine Erkenntnisse aus (3)! Überprüfe diese Tatsache an deinen Dreiecken!

(5) Der Abstand vom Schnittpunkt W zur Seite a sei ρ. Wo liegen alle Punkte, die vom Schnittpunkt W den gleichen Abstand ρ haben?

(6) Formuliere einen Satz über die Winkelhalbierenden im Dreieck! Welche Rolle spielt ihr Schnittpunkt W?

Analyse 5. (1) Zunächst soll vom Schüler ein beliebiges Dreieck und dessen Winkelhalbierenden gezeichnet werden. Er bemerkt, dass sich die Winkelhalbierenden in einem Punkt schneiden (s. Abb. 2.5).

(2) Dies trifft auch auf das zweite von ihm generierte Beispiel zu. Die Winkelhalbierenden des Dreiecks $\triangle DEF$ schneiden sich ebenfalls in einem Punkt. Dies legt die Vermutung nahe, dass sich die Winkelhalbierenden in jedem Dreieck in einem Punkt schneiden.

(3) Nun soll der Schüler begründen, dass seine Vermutung für alle Dreiecke wahr ist. Er muss die Eigenschaften der Winkelhalbierenden heranziehen. Auf der Winkelhalbierenden w_α liegen alle Punkte, die von den Seiten b und c den gleichen Abstand haben. Ebenso liegen auf der Winkelhalbierenden w_β alle Punkte, die von den Seiten a und c den gleichen Abstand haben. Die Winkelhalbierenden w_α und w_β schneiden sich in einem Punkt W, da sie nicht parallel sind. Für diesen Punkt gilt mit den oben vom Schüler genannten Eigenschaften der Winkelhalbierenden, dass er von allen drei Dreiecksseiten den gleichen Abstand hat. Damit muss auch die dritte Winkelhalbierende w_γ durch diesen Punkt gehen.

(4) Mit dem Wissen aus (3) kann der Schüler noch einmal begründen, dass der Schnittpunkt W von allen Dreiecksseiten den gleichen Abstand hat. Er überprüft dies an seinen generierten Beispielen.

(5) Nun muss der Schüler seine Kenntnisse über Ortslinien benutzen. Alle Punkte, die von einem Punkt W den Abstand ρ haben, liegen auf einem Kreis $k(W, \rho)$ mit Mittelpunkt W und Radius ρ.

(6) Schlussendlich kann der Schüler den Satz über die Winkelhalbierenden im Dreieck formulieren.

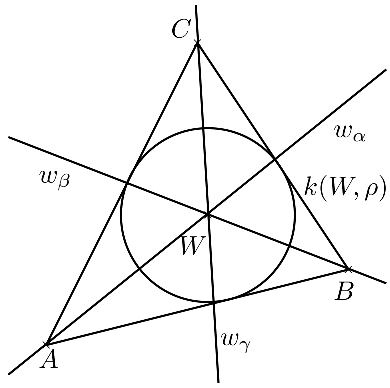


Abb. 2.5: Satz über die Winkelhalbierenden im Dreieck (induktive Satzfindung)

2.2 Analyse einer Konfiguration

2.2.1 Satz über die Gegenwinkel im Sehnenviereck

Die Schüler verfügen über den Basiswinkelsatz für gleichschenklige Dreiecke und den Winkelsummensatz für Vierecke.

Satz 6 (Satz über die Gegenwinkel im Sehnenviereck)**.** *In einem Sehnenviereck ist die Summe der gegenüberliegenden Winkel stets 180°.*

Lernsequenz 6. (1) (a) Zeichne einen Kreis mit dem Mittelpunkt M und ein Sehnenviereck $ABCD$ so, dass der Kreismittelpunkt im Inneren des Vierecks liegt!

(b) Verbinde die Eckpunkte des Sehnenvierecks mit dem Kreismittelpunkt M!

(2) Suche in der Figur nach gleich großen Winkeln und markiere diese jeweils gleichfarbig!

(3) Begründe, warum gleich gefärbte Winkel gleich groß sein müssen! Nutze einen dir bereits bekannten Satz!

(4) Betrachte jeweils zwei gegenüberliegende Winkel des Sehnenvierecks $ABCD$! Was fällt dir auf?

(5) Welche Beziehung besteht zwischen den Innenwinkeln in einem Viereck?

(6) Was kannst du daraus für die Summe der Größen zweier im Sehnenviereck $ABCD$ gegenüberliegender Winkel aussagen? Formuliere einen Satz über die Summe der Gegenwinkel im Sehnenviereck!

(7) Gilt dieser Satz für alle Sehnenvierecke?

(a) Zeichne ein Sehnenviereck, bei dem der Mittelpunkt des Kreises auf einer Vierecksseite liegt!

(b) Zeichne ein Sehnenviereck, bei dem der Mittelpunkt des Kreises außerhalb des Vierecks liegt!

Gilt der Satz auch für diese beiden Fälle? Begründe deine Entscheidung!

Analyse 6. (1) Hier soll der Schüler zunächst die zu analysierende Konfiguration zeichnen (s. Abb. 2.6).

(2) Die Schüler finden heraus, dass in jedem Teildreieck zwei Winkel gleich groß sind. Diese werden entsprechend eingefärbt.

(3) Der Schüler entdeckt, dass es sich bei den Teildreiecken um gleichschenklige Dreiecke handelt, da je zwei Seiten dem Radius des Kreises entsprechen. Nachdem er diese Teilkonfigurationen erkannt hat, kann er sein Ergebnis aus (2) mit dem ihm bereits bekannten Basiswinkelsatz begründen.

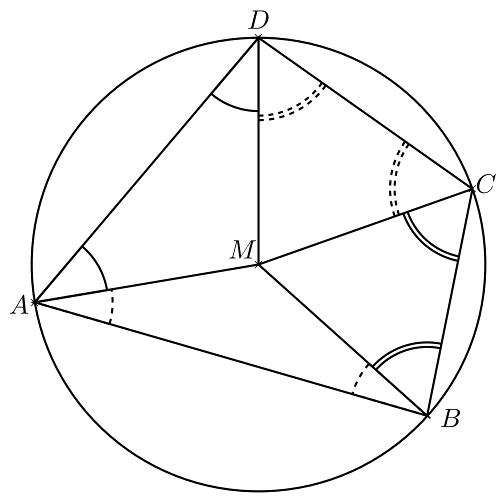


Abb. 2.6: Satz über die Gegenwinkel im Sehnenviereck (Analyse einer Konfiguration)

(4) Nun soll bemerkt werden, dass in je zwei gegenüberliegenden Winkeln jede verwendete Farbe genau einmal vorkommt. Für die Summe zweier Gegenwinkel erhält der Schüler beispielsweise

$$\sphericalangle \text{rot} + \sphericalangle \text{blau} + \sphericalangle \text{grün} + \sphericalangle \text{gelb}.$$

(5) Hier wendet der Schüler den bereits bekannten Winkelsummensatz für Vierecke an. Demzufolge weiß er, dass gilt

$$2\sphericalangle \text{rot} + 2\sphericalangle \text{blau} + 2\sphericalangle \text{grün} + 2\sphericalangle \text{gelb} = 360^\circ.$$

(6) Die Schüler sollen nun das Wissen aus (5) mit der Erkenntnis aus (4) verbinden und feststellen, dass gilt

$$\sphericalangle \text{rot} + \sphericalangle \text{blau} + \sphericalangle \text{grün} + \sphericalangle \text{gelb} = 180^\circ.$$

Jetzt kann dieser neue Zusammenhang als Satz formuliert werden.

(7) Dieser Teil ist wichtig, um den Schülern deutlich zu machen, dass die Allgemeingültigkeit von Aussagen und Schlussfolgerungen von der verwendeten Beweisfigur abhängen kann. Die bei diesem Satz nötige Fallunterscheidung wird nun vom Schüler durchgeführt. Er stellt fest, dass der Satz für alle Sehnenvierecke gilt.

2.2.2 Innenwinkelsatz für Dreiecke

Voraussetzung für die folgende Lernsequenz ist die Kenntnis des Stufenwinkelsatzes und des Wechselwinkelsatzes. Die Schüler wissen außerdem, dass ein gestreckter Winkel 180° groß ist.

Satz 7 (Innenwinkelsatz für Dreiecke)**.** *In jedem Dreieck ist die Summe der Innenwinkelgrößen gleich 180°.*

Lernsequenz 7. (1) (a) Zeichne ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$!

(b) Zeichne eine Parallele zu a durch A, zu b durch B und zu c durch C! So entsteht ein größeres Dreieck.

(2) Suche nach gleich großen Winkeln und markiere diese gleichfarbig!

(3) Warum müssen gleich gefärbte Winkel gleich groß sein?

(4) Welche Beziehung gilt für die drei Innenwinkel des Dreiecks?

(5) Formuliere einen Satz über die Summe der Innenwinkelgrößen im Dreieck!

Analyse 7. (1) Hier wird die zu analysierende Konfiguration von den Schülern gezeichnet (vgl. Abb. 2.7). Es würde natürlich ausreichen, eine der Parallelen zu zeichnen. Da die Schüler jedoch die Symmetrie des Problems erkennen sollen, ist es empfehlenswert, alle drei Parallelen zeichnen zu lassen.

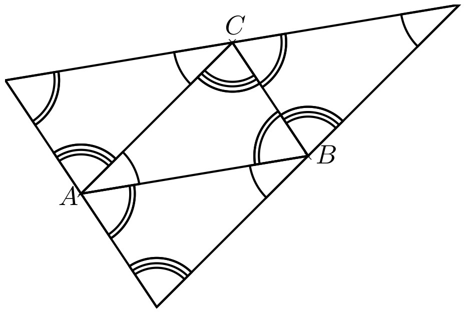


Abb. 2.7: Innenwinkelsatz für Dreiecke (Analyse einer Konfiguration)

(2) Die Schüler identifizieren gleich große Winkel und markieren diese entsprechend.

(3) Mit Hilfe der bereits bekannten Sätze über Wechselwinkel bzw. Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen begründet der Schüler sein Ergebnis aus (2).

(4) Der Schüler entdeckt nun, dass die gestreckten Winkel aus den Winkeln bestehen, die den drei Innenwinkeln des Dreiecks entsprechen. Sie wissen, dass der gestreckte Winkel 180° groß ist.

(5) Mit der gewonnenen Erkenntnis können die Schüler nun den Innenwinkelsatz für Dreiecke formulieren.

2.2.3 Sehnensatz

Bevor der unten stehende Satz gewonnen werden kann, muss der Schüler den Peripheriewinkelsatz, den Scheitelwinkelsatz und die Ähnlichkeitssätze für Dreiecke kennengelernt haben.

Satz 8 (Sehnensatz)**.** *Haben zwei Sehnen durch einen Punkt P im Inneren eines Kreises die Eckpunkte A, C bzw. B, D, dann gilt*

$$\overline{AP} : \overline{BP} = \overline{DP} : \overline{CP} \qquad \textit{bzw.}$$
$$\overline{AP} \cdot \overline{CP} = \overline{DP} \cdot \overline{BP}.$$

Lernsequenz 8. (1) (a) Zeichne ein Sehnenviereck $ABCD$!

(b) Zeichne die beiden Diagonalen ein! Nenne ihren Schnittpunkt P!

(2) Suche nach gleich großen Winkeln und markiere diese jeweils gleichfarbig!

(3) Warum müssen gleich gefärbte Winkel gleich groß sein? Nutze den Peripheriewinkelsatz und den Scheitelwinkelsatz, um diesen Zusammenhang zu begründen!

(4) Finde paarweise ähnliche Dreiecke und begründe deren Ähnlichkeit!

(5) Leite aus der Ähnlichkeit eine Beziehung zwischen den 4 Diagonalenabschnitten $\overline{AP}$, $\overline{BP}$, $\overline{DP}$ und $\overline{CP}$ ab!

(6) Formuliere einen Satz!

Analyse 8. (1) Hier wird die zu analysierende Konfiguration gezeichnet (s. Abb. 2.8). Die einheitliche Bezeichnung führt zur besseren Vergleichbarkeit des in (6) zu formulierenden Satzes.

(2) Die Schüler untersuchen die Figur und identifizieren gleich große Winkel. Diese werden entsprechend farbig markiert.

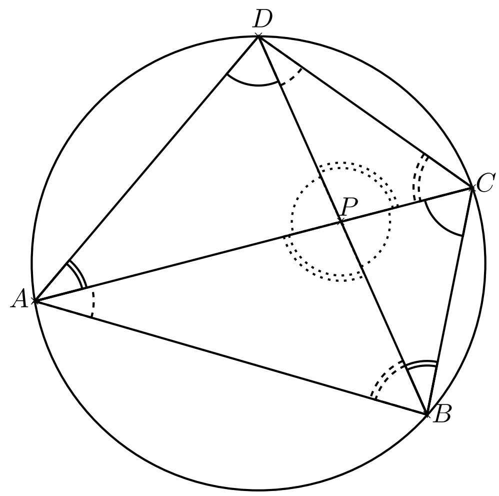


Abb. 2.8: Sehnensatz (Analyse einer Konfiguration)

(3) Mit Hilfe des Peripheriewinkelsatzes wird die Gleichheit der Winkel $\sphericalangle ADB$ und $\sphericalangle ACB$ begründet. Beides sind Peripheriewinkel über $\overline{AB}$. Analog zeigen die Schüler, dass die Winkel $\sphericalangle CAD$ und $\sphericalangle CBD$, $\sphericalangle DBA$ und $\sphericalangle DCA$ bzw. $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle BDC$ gleich groß sind. Mit dem Scheitelwinkelsatz wird die Gleichheit der Winkel $\sphericalangle DPA$ und $\sphericalangle BPC$ bzw. $\sphericalangle APB$ und $\sphericalangle CPD$ begründet.

(4) Mit der Gleichheit der drei Innenwinkel erkennen die Schüler die Ähnlichkeit der Dreiecke $\triangle APD$ und $\triangle BCP$ bzw. $\triangle ABP$ und $\triangle CDP$.

(5) Mit dieser Ähnlichkeit wissen die Schüler nun, dass die entsprechenden Seiten im gleichen Verhältnis zueinander stehen. Sie formulieren eine Beziehung, die äquivalent ist zu

$$\overline{AP} : \overline{BP} = \overline{DP} : \overline{CP}.$$

(6) Damit kann der gefundene Satz formuliert werden.

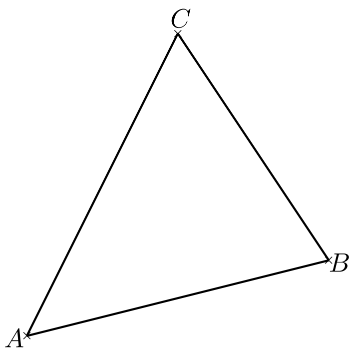
2.3 Lösen eines Konstruktionsproblems

2.3.1 Satz über die Mittelsenkrechten im Dreieck

Die Schüler kennen die Eigenschaften der Mittelsenkrechten und des Kreises.

Satz 9 (Satz über die Mittelsenkrechten im Dreieck)**.** *Die Mittelsenkrechten der Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt M, dem Mittelpunkt des Umkreises mit Radius r.*

Lernsequenz 9. (1) Gegeben ist das Dreieck $\triangle ABC$. Konstruiere einen Punkt M, der von allen drei Eckpunkten den gleichen Abstand r hat!



(a) Überlege dir zunächst, wo alle Punkte liegen, die von je zwei Eckpunkten den gleichen Abstand haben!

(b) Welcher Punkt M hat nun von allen drei Eckpunkten den gleichen Abstand?

(2) Die Eckpunkte haben vom gefundenen Punkt M den gleichen Abstand r. Wo liegen alle Punkte, die vom Schnittpunkt M den Abstand r haben?

(3) Formuliere einen Satz über die Mittelsenkrechten im Dreieck! Welche Rolle spielt ihr Schnittpunkt?

Analyse 9. (1) Hier sollen sich die Schüler daran erinnern, dass alle Punkte, die von A und B den gleichen Abstand haben, auf der Mittelsenkrechte von c liegen. Alle Punkte, die von B und C den gleichen Abstand haben, liegen auf der Mittelsenkrechte von a. Die Mittelsenkrechten m_a und m_c schneiden sich in einem Punkt M, da sie nicht parallel sind. Da m_c Mittelsenkrechte von c ist, gilt

$$|\overline{AM}| = |\overline{BM}|.$$

Da m_a Mittelsenkrechte von a ist, gilt außerdem

$$|\overline{BM}| = |\overline{CM}|.$$

Damit gilt aufgrund der Transitivität

$$|\overline{AM}| = |\overline{BM}| = |\overline{CM}|.$$

Der Punkt M hat von den drei Eckpunkten des Dreiecks den gleichen Abstand. Die Schüler müssen also die Mittelsenkrechten einzeichnen, um so den gesuchten Punkt M zu finden (s. Abb. 2.9). Das Konstruktionsproblem wurde gelöst.

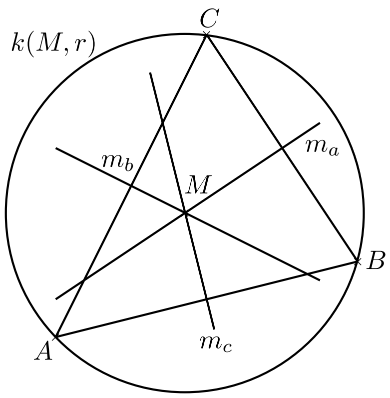


Abb. 2.9: Satz über die Mittelsenkrechten im Dreieck (Lösen eines Konstruktionsproblems)

(2) Nun muss der Schüler seine Kenntnisse über Ortslinien benutzen. Alle Punkte, die von einem Punkt M den Abstand r haben, liegen auf einem Kreis $k(M, r)$ mit Mittelpunkt M und Radius r.

(3) Abschließend können die Schüler den Satz über die Mittelsenkrechten im Dreieck formulieren.

2.3.2 Satz über die Winkelhalbierenden im Dreieck

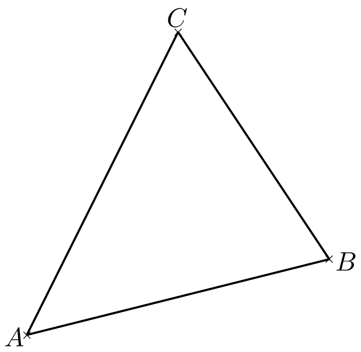
Der Schüler verfügt über Wissen zu den Eigenschaften der Winkelhalbierenden und des Kreises.

Satz 10 (Satz über die Winkelhalbierenden im Dreieck)**.** *Die Innenwinkelhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt W, dem Mittelpunkt des Innenkreises mit dem Radius ρ.*

Lernsequenz 10. (1) Gegeben ist das Dreieck $\triangle ABC$. Konstruiere einen Punkt W, der von allen drei Seiten des Dreiecks den gleichen Abstand ρ hat!

(a) Überlege dir zunächst, wo alle Punkte liegen, die von zwei Dreiecksseiten den gleichen Abstand haben!

(b) Welcher Punkt W hat nun von allen drei Dreiecksseiten den gleichen Abstand?



(2) Die Dreiecksseiten haben vom gefundenen Punkt W den gleichen Abstand ρ. Wo liegen alle Punkte, die vom Schnittpunkt W den Abstand ρ haben?

(3) Formuliere einen Satz über die Winkelhalbierenden im Dreieck! Welche Rolle spielt ihr Schnittpunkt?

Analyse 10. (1) Hier sollen sich die Schüler daran erinnern, dass alle Punkte, die von den Seiten a und b den gleichen Abstand haben, auf der Winkelhalbierenden von γ liegen. Alle Punkte, die von den Seiten b und c den gleichen Abstand haben, liegen auf der Winkelhalbierenden von α. Da sie nicht parallel sind, schneiden sich die Winkelhalbierenden w_α und w_γ in einem Punkt W. Dieser Punkt W hat (mit derselben Begründung wie beim Satz über die Mittelsenkrechten im Dreieck) von allen drei Dreiecksseiten den gleichen Abstand. Die Schüler müssen also die Winkelhalbierenden einzeichnen, um so den gesuchten Punkt W zu bestimmen (s. Abb. 2.10). Das Konstruktionsproblem wurde gelöst.

(2) Nun muss der Schüler seine Kenntnisse über Ortslinien benutzen. Alle Punkte, die von einem Punkt W den Abstand ρ haben, liegen auf einem Kreis $k(W, \rho)$ mit Mittelpunkt W und Radius ρ.

(3) Abschließend können die Schüler den Satz über die Winkelhalbierenden im Dreieck formulieren.

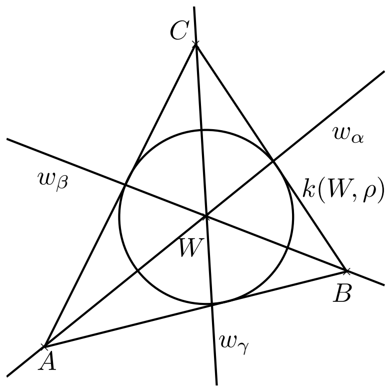


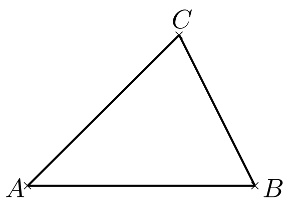
Abb. 2.10: Satz über die Winkelhalbierenden im Dreieck (Lösen eines Konstruktionsproblems)

2.3.3 Höhenschnittpunktsatz für Dreiecke

Voraussetzung für die folgende Lernsequenz ist die Kenntnis der Eigenschaften des Mittendreiecks und des Parallelogramms sowie des Satzes über die Mittelsenkrechten im Dreieck.

Satz 11 (Höhenschnittpunktsatz für Dreiecke)**.** *Die Höhen eines Dreiecks (oder ihre Verlängerungen) schneiden sich in einem Punkt.*

Lernsequenz 11. (1) (a) Zeichne zum gegebenen Dreieck $\triangle ABC$ ein Dreieck $\triangle RST$, so dass das Dreieck $\triangle ABC$ das Mittendreieck vom Dreieck $\triangle RST$ ist!



(b) Begründe, dass das Dreieck $\triangle ABC$ tatsächlich Mittendreieck vom Dreieck $\triangle RST$ ist!

(2) Zeichne die drei Mittelsenkrechten im Dreieck $\triangle RST$ ein!

(3) Was weißt du über die Mittelsenkrechten in einem Dreieck $\triangle RST$?

(4) Welche Bedeutung haben die Mittelsenkrechten von Dreieck $\triangle RST$ im Dreieck $\triangle ABC$?

(5) Formuliere einen Satz über die Höhen im Dreieck!

Analyse 11. (1) Die Schüler müssen sich zunächst an die Eigenschaften des Mittendreiecks erinnern. Jede Seite des Mittendreiecks ist parallel zu einer Seite des zugehörigen Dreiecks. Sie zeichnen also Parallelen durch die Eckpunkte zu den gegenüberliegenden Seiten (s. Abb. 2.11).
Nun müssen sie noch begründen, dass A, B, C die Seitenmitten des Dreiecks $\triangle RST$ sind. Hierzu nutzen sie ihr Wissen über Parallelogramme. Die Seiten $\overline{CR}$ bzw. $\overline{SC}$ liegen der Seite $\overline{AB}$ gegenüber und sind somit gleich lang. Analog wird gezeigt, dass A, B Seitenmitten sind. Die Konstruktionsaufgabe ist damit gelöst.

(2) Nun kommt es zu einer zusätzlichen Überlegung. Zunächst zeichnen die Schüler die Mittelsenkrechten im Dreieck $\triangle RST$ ein. Sie wissen, dass sich diese in einem Punkt schneiden (Satz über die Mittelsenkrechten im Dreieck).

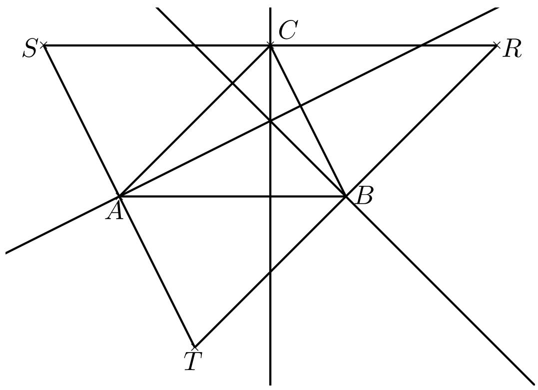


Abb. 2.11: Höhenschnittpunktsatz (Lösen eines Konstruktionsproblems)

(3) Die Schüler entdecken, dass die Mittelsenkrechten von $\triangle RST$ gleichzeitig die Höhen im Dreieck $\triangle ABC$ sind. Dies kann wieder mit den Eigenschaften der Mittelsenkrechten von $\triangle RST$ und den Eigenschaften des Mittendreiecks begründet werden. Der Schüler erkennt, dass sich auch die drei Höhen eines Dreiecks in einem Punkt schneiden.

(4) Abschließend kann der Schüler einen Satz über die Höhen im Dreieck formulieren.

2.3.4 Schwerpunktsatz für Dreiecke

Für die folgende Lernsequenz benötigt der Schüler Kenntnisse von Konstruktion und Eigenschaften des Mittendreiecks sowie Wissen über zentrische Streckungen und Seitenhalbierende. Außerdem muss er mit dem Strahlensatz umgehen können.

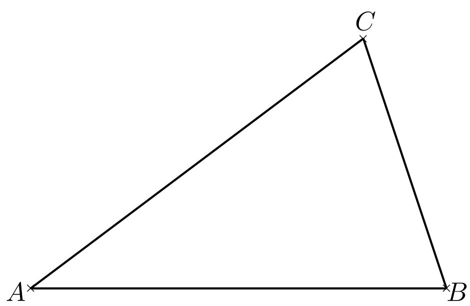
Satz 12 (Schwerpunktsatz für Dreiecke)**.** *Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt S (dem Schwerpunkt des Dreiecks) und teilen einander im Verhältnis 2:1.*

Lernsequenz 12. (1) Gegeben ist das Dreieck $\triangle ABC$. Konstruiere das Zentrum S einer zentrischen Streckung, die das Dreieck $\triangle ABC$ auf sein Mittendreieck $\triangle PQR$ abbildet! Dabei soll P die Seitenmitte von $\overline{BC}$ sein.

(a) Konstruiere zunächst das Mittendreieck $\triangle PQR$ vom Dreieck $\triangle ABC$!

(b) Überlege, welcher Punkt des Dreiecks $\triangle ABC$ durch die zentrische Streckung in welchen Punkt des Mittendreiecks $\triangle PQR$ übergeht!

(c) Konstruiere das Zentrum S der zentrischen Streckung!



(2) Auf welchen besonderen Linien des Dreiecks liegt der gefundene Punkt S?

(3) Wir wollen nun begründen, warum sich die drei Seitenhalbierenden im Punkt S schneiden. Wir betrachten dazu deine obige Zeichnung.

(a) Die Seitenhalbierenden $\overline{AP}$ und $\overline{BQ}$ schneiden sich in einem Punkt S.

(i) Welche Beziehungen gelten für die Seite $\overline{AB}$ des Dreiecks $\triangle ABC$ und die Seite $\overline{QP}$ des zugehörigen Mittendreiecks?

(ii) Was kannst du damit über die Verhältnisse $\frac{\overline{AS}}{\overline{AP}}$ bzw. $\frac{\overline{BS}}{\overline{BQ}}$ aussagen?

(b) Die Seitenhalbierenden $\overline{BQ}$ und $\overline{CR}$ schneiden sich ebenfalls in einem Punkt. Da wir nicht wissen, ob dieser mit dem Punkt S identisch ist, nennen wir ihn S'.

(i) Welche Beziehungen gelten für die Seite $\overline{BC}$ des Dreiecks $\triangle ABC$ und die Seite $\overline{QR}$ des zugehörigen Mittendreiecks?

(ii) Was kannst du damit über die Verhältnisse $\frac{\overline{BS'}}{\overline{BQ}}$ bzw. $\frac{\overline{CS'}}{\overline{CR}}$ aussagen?

(c) Vergleiche deine Ergebnisse aus (a) und (b). Warum muss $S' = S$ gelten?

(4) Formuliere einen Satz über die Seitenhalbierenden eines Dreiecks! In welchem Verhältnis teilen diese einander?
Bemerkung: Der Punkt S heißt Schwerpunkt des Dreiecks $\triangle ABC$.

Analyse 12. (1) Die Schüler sollen zunächst ein Konstruktionsproblem lösen. Sie konstruieren das Mittendreieck, indem sie die Mittelsenkrechten der einzelnen Seiten konstruieren und die so entstehenden Seitenmitten verbinden. Sie entdecken, dass bei der gesuchten zentrischen Streckung der Punkt A auf den Punkt P, der Punkt B auf den Punkt Q und der Punkt C auf den Punkt R abgebildet werden muss. Indem sie jeweils die zugehörigen Punkte miteinander verbinden, erhalten sie als Schnittpunkt den gesuchten Punkt S (s. Abb. 2.12).

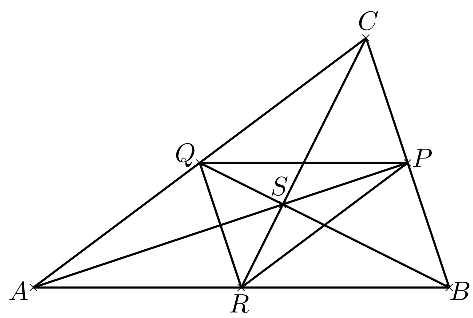


Abb. 2.12: Schwerpunktsatz (Lösen eines Konstruktionsproblems)

(2) Nun stellen die Schüler fest, dass S auf den drei Seitenhalbierenden $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$ und $\overline{CR}$ liegt.

(3) Dass sich die drei Seitenhalbierenden immer in einem Punkt schneiden, soll nun bewiesen werden. Da der Beweis nicht sehr einfach ist, werden dem Schüler nun Schritt für Schritt Impulse gegeben. Er betrachtet zunächst die Seitenhalbierenden $\overline{AP}$ und $\overline{BQ}$, die sich im Punkt S schneiden, da sie nicht parallel sind. Der Schüler muss nun sein Wissen über das Mittendreieck anwenden. Er weiß, dass die Seiten eines Mittendreiecks parallel und halb so lang wie die Seiten des zugehörigen Dreiecks sind. Um nun über die in (a) (ii) gefragten Verhältnisse Aussagen treffen zu können, muss der Schüler die Eigenschaften des Mittendreiecks mit den Strahlensätzen verknüpfen. Demnach gilt

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{BS}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{QP}} = \frac{2}{1}.$$

Analog geht er bei (b) vor und erhält

$$\frac{\overline{BS'}}{\overline{BQ}} = \frac{\overline{CS'}}{\overline{CR}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{QR}} = \frac{2}{1}.$$

S und S' liegen also beide auf $\overline{BQ}$ und zwar so, dass sie $\overline{BQ}$ von B aus im Verhältnis 2:1 teilen. Demnach erkennen die Schüler, dass tatsächlich $S' = S$ gilt und sich demnach die drei Seitenhalbierenden in einem Punkt S schneiden.

(4) Abschließend kann der Schwerpunktsatz formuliert werden.

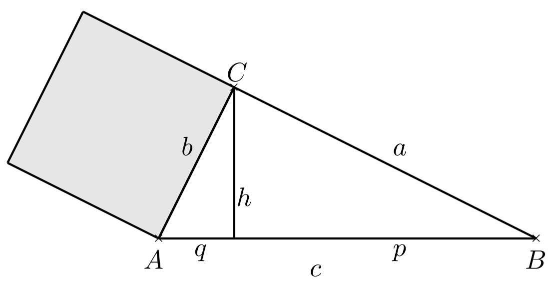
2.3.5 Kathetensatz des Euklid

Bevor unten stehender Satz gewonnen wird, muss der Schüler wissen, aus welchen Größen sich der Flächeninhalt eines Parallelogramms bestimmen lässt. Er muss weiterhin die Kongruenz von Dreiecken begründen können.

Satz 13 (Kathetensatz des Euklid)**.** *In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über einer Kathete flächeninhaltsgleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Hypotenusenabschnitt. Mit den am rechtwinkligen Dreieck üblichen Bezeichnungen gilt*

$$a^2 = cp \qquad \textit{und} \qquad b^2 = cq.$$

Lernsequenz 13. (1) Betrachte die folgende Figur! Gegeben ist das rechtwinklige Dreieck $\triangle ABC$ mit $\gamma = 90°$ und das Kathetenquadrat über der Seite b. Konstruiere ein zu diesem Kathetenquadrat flächeninhaltsgleiches Rechteck, dessen eine Seite die Seite c ist!
Hinweis: Konstruiere zunächst ein zum Kathetenquadrat flächeninhaltsgleiches Parallelogramm, dessen eine Seite die Seite c ist!



(2) Begründe, warum das von dir gefundene Rechteck und das Kathetenquadrat flächeninhaltsgleich sind!

(3) Welche Länge hat die andere Seite des von dir gefundenen Rechtecks?

   (a) Betrachte deine Zeichnung und suche nach zueinander kongruenten Dreiecken!

   (b) Begründe deren Kongruenz!

   (c) Was kannst du damit über die Länge der zweiten Seite des Rechtecks aussagen?

(4) Formuliere einen Satz, der widerspiegelt, dass das Kathetenquadrat über der Seite b flächeninhaltsgleich zu dem von dir gefundenen Rechteck ist!

(5) Formuliere einen analogen Satz, der das Kathetenquadrat über der Seite a enthält!

Analyse 13. (1) Die Schüler müssen zunächst erkennen, dass das gegebene Kathetenquadrat ein Parallelogramm mit Grundseite b und Höhe b ist. Das Parallelogramm $ABEF$ (s. Abb. 2.13) hat ebenfalls eine Grundseite b mit zugehöriger Höhe b. Damit ist dieses Parallelogramm flächeninhaltsgleich zum gegebenen Kathetenquadrat. Der Schüler muss nun dieses Parallelogramm mit der Grundseite c und der zugehörigen Höhe $|\overline{AH}|$ in ein flächeninhaltsgleiches Rechteck umwandeln. Er entdeckt, dass das Rechteck $ABGH$ die geforderten Eigenschaften erfüllt. Das Konstruktionsproblem wurde gelöst.

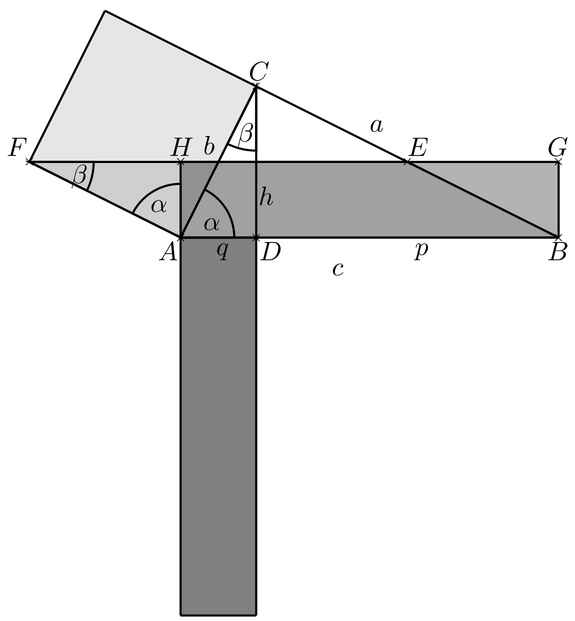


Abb. 2.13: Kathetensatz des Euklid (Lösen eines Konstruktionsproblems)

(2) Da sowohl das Kathetenquadrat als auch das Rechteck $ABGH$ eine Grundseite mit zugehöriger Höhe mit dem Parallelogramm $ABEF$ gemeinsam haben, kann der Schüler die Gleichheit der Flächeninhalte begründen.

(3) Die Schüler sollen nun erkennen, dass das gefundene Rechteck die Seitenlängen c und q hat. Sie finden heraus, dass die Dreiecke $\triangle FAH$ und $\triangle ADC$ zueinander kongruent sind. Mit der Gleichheit der drei Innenwinkel werden diese als zueinander ähnlich identifiziert. Die Seite $\overline{AC}$ im Dreieck $\triangle ADC$ entspricht dabei der Seite $\overline{AF}$ im Dreieck $\triangle FAH$. Beide haben die Länge b. Damit ist die Kongruenz begründet. Demzufolge muss die Länge der zweiten Seite des Rechtecks dem Hypotenusenabschnitt q entsprechen.

(4) Der Schüler kann nun die Gleichung $b^2 = cq$ formulieren.

(5) In Analogie zu (4) soll der Schüler abschließend die Gleichung $a^2 = cp$ formulieren.

2.4 Lösen eines Berechnungsproblems

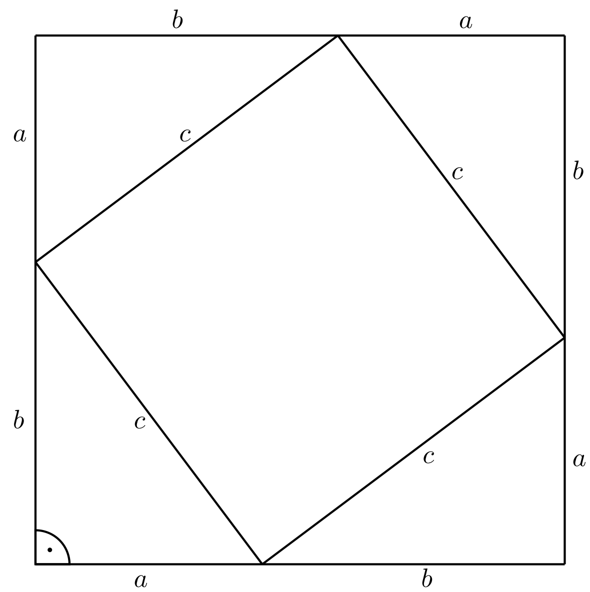
2.4.1 Satz des Pythagoras

Voraussetzung für die folgende Lernsequenz ist die Beherrschung von Flächenberechnungen von Quadraten und rechtwinkligen Dreiecken.

Satz 14 (Satz des Pythagoras)**.** *In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den Katheten gleich dem Flächeninhalt des Quadrates über der Hypotenuse. Es gilt*

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Lernsequenz 14. (1) Betrachte die folgende Figur! Gegeben sind die Längen der Seiten $a = 3$ cm, $b = 4$ cm. Wir suchen den Flächeninhalt des kleinen Quadrates. Bestimme hierfür den Flächeninhalt der gesamten Figur auf verschiedene Arten.



(2) Gegeben sind die Seiten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks mit $\gamma = 90°$. Bestimme die Länge der Seite c! Nutze deine Kenntnisse aus (1)!

(3) Formuliere einen mathematischen Satz! Vereinfache deine gefundene Gleichung so weit wie möglich!

Analyse 14. (1) Die Schüler stehen vor dem speziellen Berechnungsproblem, aus den Seitenlängen a und b den Flächeninhalt c^2 des kleinen Quadrates zu bestimmen. Dazu bestimmen sie zunächst den Flächeninhalt des großen Quadrates

$$A = (3\text{ cm} + 4\text{ cm})^2 = 49\text{ cm}^2.$$

Anschließend wird der Flächeninhalt als Summe der Flächeninhalte des kleinen Quadrates und der vier rechtwinkligen Dreiecke bestimmt. Es gilt

$$A = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = c^2 + 24\text{ cm}^2.$$

Da beide Flächeninhalte gleich sein müssen, erhält der Schüler die Gleichung

$$c^2 + 24\text{ cm}^2 = 49\text{ cm}^2$$

mit dem Flächeninhalt des kleinen Quadrates

$$c^2 = 25\text{ cm}^2.$$

Das spezielle Berechnungsproblem konnte mit Hilfe bekannter Flächeninhaltsformeln gelöst werden.

(2) Der Schüler soll nun das Problem für ein rechtwinkliges Dreieck allgemein lösen. Um sein Wissen aus (1) zu nutzen, muss er das rechtwinklige Dreieck in eine analoge Figur einbetten (s. Abb. 2.14).

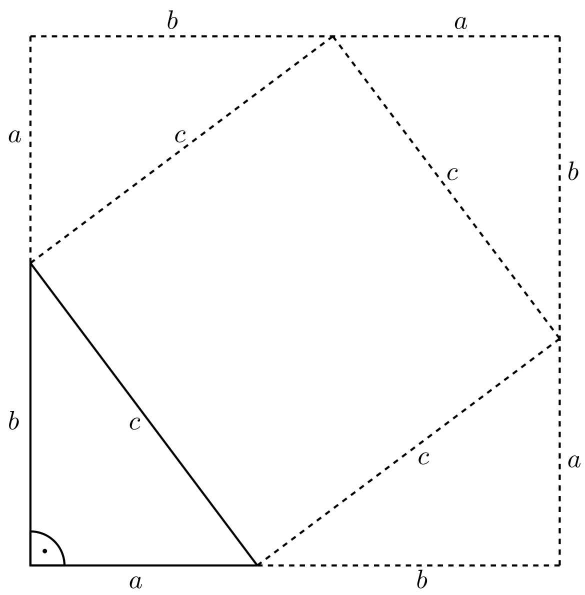


Abb. 2.14: Satz des Pythagoras (Lösen eines Berechnungsproblems)

Erneut bestimmt er den Flächeninhalt dieser Figur auf zwei verschiedene Wege. Für den Flächeninhalt des großen Quadrates erhält er

$$A = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Für die Summe der Flächeninhalte des kleinen Quadrates und der Flächeninhalte der vier rechtwinkligen Dreiecke erhält er

$$A = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot ab = c^2 + 2ab.$$

Gleichsetzen beider Formeln für den Flächeninhalt liefert den Satz des Pythagoras

$$\begin{aligned} a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 2ab \\ \Longrightarrow a^2 + b^2 &= c^2 \\ \Longrightarrow c &= \sqrt{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

(3) Nun sollen die Schüler den Satz des Pythagoras formulieren. Der Lehrer sollte an dieser Stelle den Impuls geben, dass Ausdrücke so weit wie möglich vereinfacht werden sollen. Daher muss die Wurzel durch Quadrieren wieder eliminiert werden, so dass die bekannte Form des Satzes entsteht.

2.4.2 Kosinussatz der Trigonometrie

Die Schüler kennen sowohl die Definitionen des Sinus und des Kosinus am rechtwinkligen Dreieck als auch den Satz des Pythagoras.

Satz 15 (Kosinussatz der Trigonometrie)**.** *In einem Dreieck mit den Seiten a, b, c und den Innenwinkeln α, β, γ gilt*

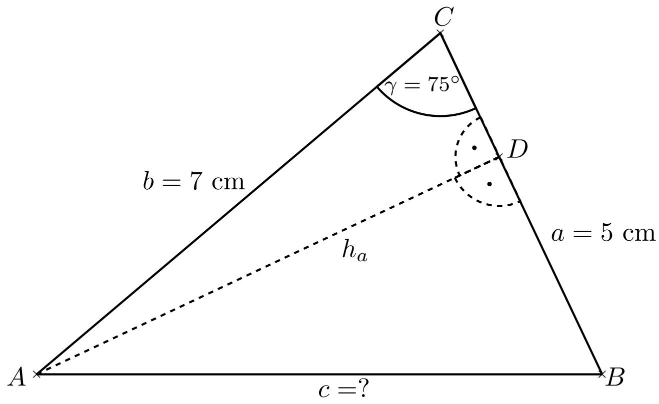
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Lernsequenz 15. (1) In einem Dreieck $\triangle ABC$ sind $a = 5$ cm, $b = 7$ cm und der eingeschlossene Winkel $\gamma = 75°$ gegeben. Berechne die Länge der Seite c! Nutze die dir bekannten Beziehungen in den Dreiecken $\triangle ABD$ und $\triangle ADC$ (D ist der Fußpunkt der Höhe h_a)!

(2) In einem spitzwinkligen Dreieck sind die Seiten a und b und der eingeschlossene Winkel γ gegeben. Bestimme die Länge der Seite c allgemein!

(3) Formuliere einen Satz, wie in einem spitzwinkligen Dreieck c^2 aus den Längen der Seiten a und b und der Größe des eingeschlossenen Winkels γ bestimmt werden kann!

(4) Gilt der Satz auch für rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke? Bestimme c^2 für diese Fälle!



Analyse 15. (1) Hier wird der Schüler mit einem speziellen Berechnungsproblem konfrontiert. Das spitzwinklige Dreieck $\triangle ABC$ wird durch seine Höhe h_a in die rechtwinkligen Dreiecke $\triangle ABD$ und $\triangle ADC$ zerlegt (s. Abb. 2.15). Für diese rechtwinkligen Dreiecke kennt der Schüler die Definitionen des Sinus und des Kosinus eines Winkels

$$\cos 75° = \frac{\overline{CD}}{7 \text{ cm}} \implies \overline{CD} = 7 \text{ cm} \cdot \cos 75° \approx 1,8 \text{ cm}$$
$$\sin 75° = \frac{h_a}{7 \text{ cm}} \implies h_a = 7 \text{ cm} \cdot \sin 75° \approx 6,8 \text{ cm}.$$

Hieraus bestimmt er

$$\overline{DB} = 5 \text{ cm} - 1,8 \text{ cm} = 3,2 \text{ cm}.$$

Schließlich wendet er den Satz des Pythagoras an und erhält

$$c^2 = (6,8 \text{ cm})^2 + (3,2 \text{ cm})^2 = 55,9 \text{ cm}^2 \implies c = 7,5 \text{ cm}.$$

Er konnte also mit Hilfe bekannter Sätze das spezielle Berechnungsproblem lösen.

(2) Nun folgt der Übergang zur allgemeinen Berechnung der Seite c. Damit ein zu (1) äquivalenter Lösungsweg möglich ist, wird zunächst von einem spitzwinkligem Dreieck ausgegangen. Dadurch liegt die verwendete Höhe h_a innerhalb der Dreiecks und die Seite a wird durch diese Höhe in die

Abschnitte $\overline{BD}$ und $\overline{DC}$ geteilt (s. Abb. 2.15). Für die entstandenen rechtwinkligen Dreiecke gelten die Beziehungen

$$\cos\gamma = \frac{\overline{CD}}{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{CD} = b\cos\gamma$$
$$\sin\gamma = \frac{h_a}{b} \qquad \Longrightarrow \qquad h_a = b\sin\gamma.$$

Hieraus kann der Schüler den Abschnitt $\overline{DB}$ bestimmen, es gilt

$$\overline{DB} = a - \overline{CD} = a - b\cos\gamma.$$

Erneut kommt der Satz des Pythagoras im Dreieck $\triangle ABD$ zur Anwendung. Der Schüler erhält

$$\begin{aligned} c^2 &= \overline{DB}^2 + h^2 \\ &= a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2\cos^2\gamma + b^2\sin^2\gamma \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ \Longrightarrow c &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}. \end{aligned}$$

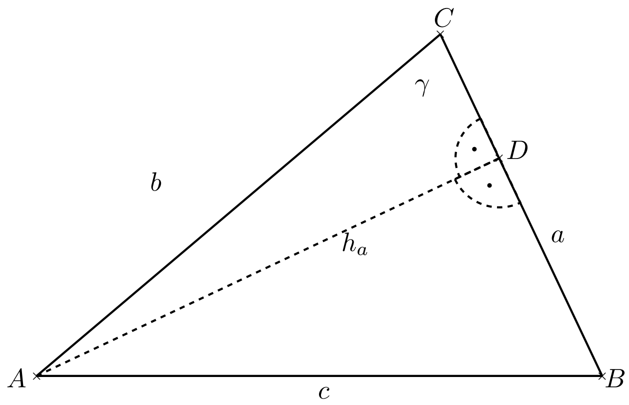


Abb. 2.15: Kosinussatz der Trigonometrie für ein spitzwinkliges Dreieck (Lösen eines Berechnungsproblems)

(3) Die Schüler formulieren den Kosinussatz, dessen Richtigkeit sie für spitzwinklige Dreiecke begründet haben.

(4) Die Schüler kennen bereits den Satz des Pythagoras. Sie erkennen, dass dieser ein Spezialfall des Kosinussatzes ist, denn für $\gamma = 90°$ ist $\cos\gamma = 0$ und damit wird der gefundene Kosinussatz zum Satz des Pythagoras, es gilt

$$c^2 = a^2 + b^2 - \underbrace{2ab\cos\gamma}_{=0} = a^2 + b^2.$$

Nun bleibt noch der Fall $\gamma > 90°$ zu diskutieren. Der Schüler verdeutlicht sich diesen Fall anhand einer Skizze (s. Abb. 2.16). Er stellt fest, dass die Höhe h_a nun außerhalb der Dreiecks $\triangle ABC$ liegt. Der Fußpunkt der Höhe sei wieder D.

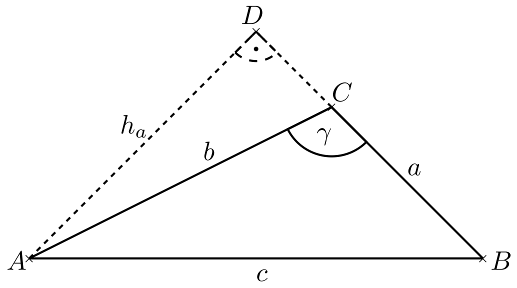


Abb. 2.16: Kosinussatz der Trigonometrie für ein stumpfwinkliges Dreieck (Lösen eines Berechnungsproblems)

Das Dreieck $\triangle ACD$ ist rechtwinklig. Es gilt

$$\sin(180° - \gamma) = \frac{h_a}{b} \qquad \Longrightarrow \qquad h_a = b\sin(180° - \gamma) = b\sin\gamma$$
$$\cos(180° - \gamma) = \frac{\overline{CD}}{b} \qquad \Longrightarrow \qquad \overline{CD} = b\cos(180° - \gamma) = -b\cos\gamma.$$

Für die Länge der Seite $\overline{DB}$ im Dreieck $\triangle ABD$ gilt nun

$$\overline{DB} = a + \overline{DC} = a - b\cos\gamma.$$

Hiermit kann der Schüler den Satz des Pythagoras im Dreieck $\triangle ABD$ anwenden und er erhält

$$\begin{aligned} c^2 &= h_a^2 + \overline{DB}^2 \\ &= b^2\sin^2\gamma + a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2\cos^2\gamma \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

Damit gilt der gefundene Kosinussatz für alle Dreiecke.

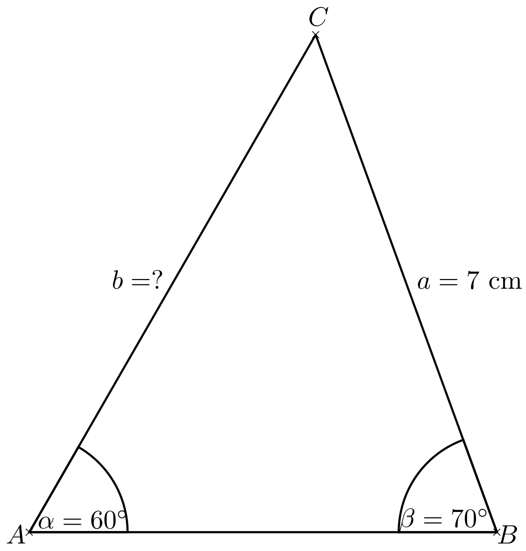
2.4.3 Sinussatz der Trigonometrie

Die Schüler verfügen bereits über die Definitionen des Sinus und des Kosinus am rechtwinkligen Dreieck.

Satz 16 (Sinussatz der Trigonometrie)**.** *In einem Dreieck sind die Verhältnisse der Seiten zum Sinus des gegenüberliegenden Winkels gleich. Es gilt*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Lernsequenz 16. (1) Gegeben ist ein Dreieck $\triangle ABC$ mit $a = 7$ cm, $\alpha = 60°$, $\beta = 70°$. Bestimme die Länge der Seite b!



(2) In einem Dreieck $\triangle ABC$ sind die Länge der Seite a und die Größen der Winkel α und β bekannt. Bestimme daraus die Länge der Seite b!

(3) Überlege, wie man analog die Länge der Seite c aus der Länge der Seite a und den Winkelgrößen α und γ bestimmen kann!

(4) Formuliere einen mathematischen Satz, der beide Zusammenhänge beinhaltet! Stelle deine in (2) und (3) gewonnenen Erkenntnisse als Gleichungsfolge dar!

Analyse 16. (1) Der Schüler wird zunächst vor ein konkretes Berechnungsproblem gestellt. Wenn der Schüler vor dem Sinussatz bereits den Kosinussatz entdeckt hat, kann beim Sinussatz auf den Hinweis, die Höhe h_c einzuzeichnen, verzichtet werden. Die Höhe h_c zerlegt das Dreieck $\triangle ABC$ in zwei rechtwinklige Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle BCD$ (s. Abb. 2.17). Für diese beiden Dreiecke nutzt der Schüler nun die ihm bekannten Beziehungen und erhält

$$\sin 70° = \frac{h_c}{7 \text{ cm}} \qquad \Longrightarrow \qquad h_c = 7 \text{ cm} \cdot \sin 70° \approx 6,6 \text{ cm}$$
$$\sin 60° = \frac{6,6 \text{ cm}}{b} \qquad \Longrightarrow \qquad b = \frac{6,6 \text{ cm}}{\sin 60°} \approx 7,6 \text{ cm}.$$

Mit Hilfe bekannter Sätze konnte das spezielle Berechnungsproblem gelöst werden.

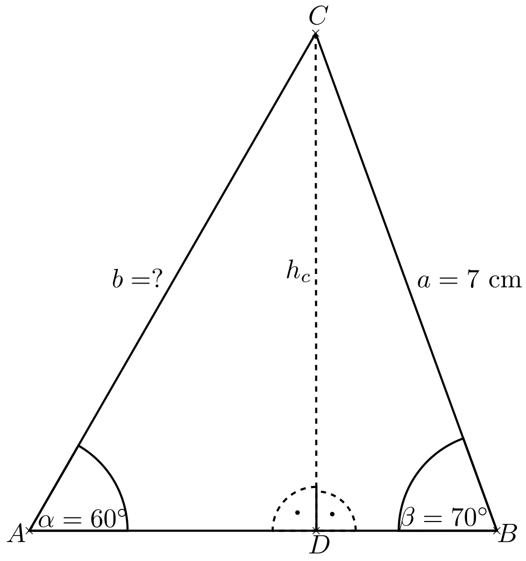


Abb. 2.17: Sinussatz der Trigonometrie (Lösen eines Berechnungsproblems)

(2) Nun soll der Schüler Variablen einführen und somit das Berechnungsproblem allgemein lösen. Analog zu (1) wird die Höhe h_c eingezeichnet und anschließend die Dreiecke $\triangle ADC$ und $\triangle BCD$ betrachtet. In diesen rechtwinkligen Dreiecken gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}
&\sin\beta = \frac{h_c}{a} && \Longrightarrow && h_c = a\sin\beta \\
&\sin\alpha = \frac{h_c}{b} && \Longrightarrow && h_c = b\sin\alpha \\
&\Longrightarrow b = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\beta.
\end{aligned}$$

(3) Analog zu den Überlegungen aus (2) erhält der Schüler den Zusammenhang

$$c = \frac{a}{\sin\alpha}\sin\gamma.$$

(4) Der Schüler ist nun in der Lage, einen zum Sinussatz äquivalenten Satz zu formulieren. Er schreibt beispielsweise die gefundenen Zusammenhänge wie folgt auf:

$$\begin{aligned}
b &= \frac{a}{\sin\alpha}\sin\beta \\
c &= \frac{a}{\sin\alpha}\sin\gamma.
\end{aligned}$$

Da der Wunsch besteht, den Zusammenhang möglichst einprägsam darzustellen, soll der Impuls, eine Gleichungsfolge zu formulieren, den Schüler dazu bringen, die aufgestellten Formeln genauer zu betrachten. Er stellt fest, dass beide Formeln den Faktor $\frac{a}{\sin\alpha}$ enthalten. Löst er beide Gleichungen nach diesem Faktor auf, erhält er die gewünschte Gleichungsfolge

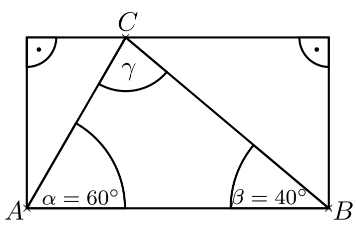
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

2.4.4 Innenwinkelsatz für Dreiecke

Bevor der folgende Satz mit Hilfe der unten stehenden Lernsequenz gewonnen werden kann, müssen die Schüler den Wechselwinkelsatz kennengelernt haben. Sie müssen wissen, dass ein gestreckter Winkel 180° groß ist.

Satz 17 (Innenwinkelsatz für Dreiecke)**.** *In jedem Dreieck ist die Summe der Innenwinkelgrößen gleich 180°.*

Lernsequenz 17. (1) Betrachte die folgende Figur! Gegeben sind die Größen der Winkel $\alpha = 60°$ und $\beta = 40°$. Bestimme die Größe des Winkels γ!



(2) Gegeben ist ein Dreieck mit den Innenwinkeln α, β und γ. Wie kann man die Größe des Winkels γ bestimmen, wenn man die Größe der Winkel α und β kennt?

(3) Wie kann man die Größe eines Winkels bestimmen, wenn man die Größen der anderen beiden Winkel kennt?

(4) Was kannst du über die Summe der Innenwinkelgrößen in einem Dreieck sagen? Formuliere einen Satz!

Analyse 17. (1) Der Schüler wird zunächst vor ein spezielles Berechnungsproblem gestellt. Er erkennt, dass das Dreieck in ein Rechteck eingebettet ist. α' ist Wechselwinkel zu α und β' ist Wechselwinkel zu β (s. Abb. 2.18). Da die geschnittenen Geraden parallel sind, kann der Schüler den Wechselwinkelsatz anwenden. Es gilt

$$\alpha' = 60^\circ \qquad \text{und} \qquad \beta' = 80^\circ.$$

Da α', β' und γ einen gestreckten Winkel bilden, weiß der Schüler, dass gilt

$$180^\circ = 60^\circ + 80^\circ + \gamma \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma = 40^\circ.$$

Das spezielle Berechnungsproblem konnte mit Hilfe bereits bekannter Sätze gelöst werden.

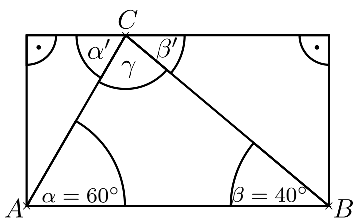


Abb. 2.18: Innenwinkelsatz für Dreiecke (Lösen eines Berechnungsproblems)

(2) Nun soll der Schüler das Problem allgemein lösen. Seine Argumentation stützt sich wieder auf den Wechselwinkelsatz für die Winkel α und α' bzw. β und β'. Die Winkel α', β' und γ bilden einen gestreckten Winkel. Daher gilt

$$180^\circ = \alpha' + \beta' + \gamma = \alpha + \beta + \gamma \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta.$$

Das Problem konnte allgemein gelöst werden.

(3) In Analogie zu (2) findet der Schüler die Formeln

$$\alpha = 180^\circ - \beta - \gamma \qquad \text{und} \qquad \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma.$$

(4) Wie der Schüler bereits in (2) erkannt hat, beträgt die Summe der Innenwinkelgrößen in einem Dreieck 180°. Dies kann er nun als Innenwinkelsatz formulieren.

2.4.5 Satz des Thales

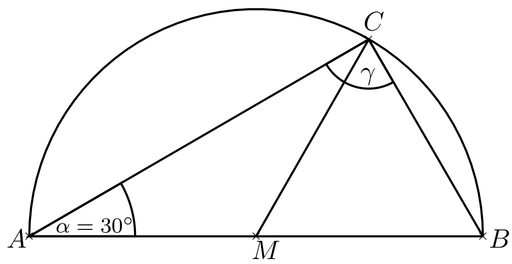
Die Schüler kennen bereits den Basiswinkelsatz und den Innenwinkelsatz für Dreiecke. Außerdem wissen sie, dass ein gestreckter Winkel 180° groß ist.

Satz 18 (Satz des Thales). *Alle Peripheriewinkel über dem Durchmesser eines Kreises sind rechte Winkel.*

Lernsequenz 18. (1) Betrachte die folgende Figur! $\overline{AB}$ ist Durchmesser des gegebenen Halbkreises mit Mittelpunkt M und Radius r. Die Größe des Winkels α beträgt 30°. Wie groß ist γ?

(a) Überlege zunächst, in welche Teilfiguren das Dreieck $\triangle ABC$ durch die Strecke $\overline{MC}$ zerlegt wird!

(b) Bestimme danach aus dem gegebenen Winkel α solange andere Winkel der Figur, bis du die Größe des Winkels γ kennst!



(2) Wie groß ist der Winkel γ, wenn α beliebig ist? Gehe analog zu (1) vor!

(3) Formuliere einen Satz zu Peripheriewinkeln über dem Durchmesser von Halbkreisen!

Analyse 18. (1) Der Schüler wurde vor ein konkretes Berechnungsproblem gestellt. Es gibt nun mehrere mögliche Wege, wie er vorgehen kann. Hier soll ein möglicher Weg beschrieben werden.
Er erkennt zunächst, dass $\overline{MC}$ das Dreieck $\triangle ABC$ in zwei gleichschenklige Dreiecke $\triangle AMC$ und $\triangle MBC$ zerlegt (s. Abb. 2.19).

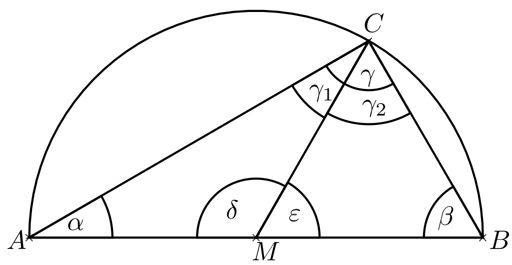


Abb. 2.19: Satz des Thales (Lösen eines Berechnungsproblems)

Mit Hilfe des Basiswinkelsatzes für das Dreieck $\triangle AMC$ erhält er

$$\gamma_1 = \alpha = 30^\circ.$$

Nun muss er den Innenwinkelsatz im Dreieck $\triangle AMC$ anwenden. Dieser liefert

$$180^\circ = 30^\circ + 30^\circ + \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \delta = 120^\circ.$$

Da $\delta + \varepsilon$ ein gestreckter Winkel ist, ergibt sich hieraus sofort

$$180^\circ = 120^\circ + \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon = 60^\circ.$$

Aufgrund des im Dreieck $\triangle MBC$ geltenden Basiswinkelsatzes weiß der Schüler, dass gilt

$$\beta = \gamma_2.$$

Der Innenwinkelsatz im Dreieck $\triangle MBC$ liefert nun

$$180^\circ = 60^\circ + 2\gamma_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma_2 = 60^\circ.$$

Da sich der Winkel γ aus den Winkeln γ_1 und γ_2 zusammensetzt, gilt

$$\gamma = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ.$$

Das spezielle Berechnungsproblem wurde gelöst.

(2) Analog zu (1) soll das Problem nun allgemein gelöst werden. $\overline{MC}$ zerlegt das Dreieck $\triangle ABC$ wieder in zwei gleichschenklige Dreiecke $\triangle AMC$ und $\triangle MBC$. Der Basiswinkelsatz für das Dreieck $\triangle AMC$ liefert

$$\gamma_1 = \alpha.$$

Mit dem Innenwinkelsatz im Dreieck $\triangle AMC$ erhält man

$$180^\circ = 2\alpha + \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \delta = 180^\circ - 2\alpha.$$

$\delta + \varepsilon$ ist ein gestreckter Winkel, somit gilt

$$180^\circ = \delta + \varepsilon = 180^\circ - 2\alpha + \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \varepsilon = 2\alpha.$$

Im Dreieck $\triangle MBC$ gilt ebenso der Basiswinkelsatz. Dieser liefert

$$\beta = \gamma_2.$$

Mit dem Innenwinkelsatz im Dreieck $\triangle MBC$ erhalten die Schüler schließlich

$$180^\circ = 2\alpha + 2\gamma_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \gamma_2 = 90^\circ - \alpha.$$

Da sich der Winkel γ aus den Winkeln γ_1 und γ_2 zusammensetzt, gilt

$$\gamma = \alpha + (90^\circ - \alpha) = 90^\circ.$$

Das Problem konnte allgemein gelöst werden.

(3) Schließlich kann der Schüler den Satz des Thales formulieren.

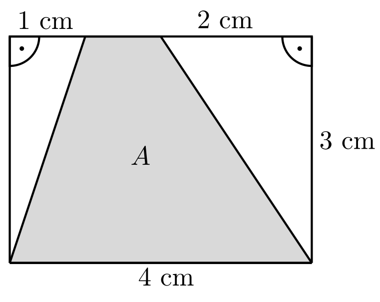
2.4.6 Trapezflächeninhalt

Die Schüler verfügen bereits über die Formeln zur Berechnung der Flächeninhalte von Rechtecken und von rechtwinkligen Dreiecken. Ebenso wissen sie, dass der Flächeninhalt additiv ist.

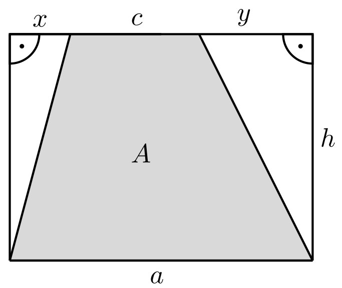
Satz 19 (Trapezflächeninhalt). *Für den Flächeninhalt eines Trapezes mit den parallelen Seiten a, c und der Höhe h gilt*

$$A = \frac{(a+c)h}{2}.$$

Lernsequenz 19. (1) Betrachte die folgende Figur! Bestimme den Flächeninhalt A des Trapezes! Bestimme dazu zunächst die Flächeninhalte von Figuren, deren Flächeninhalt du kennst und überlege, wie du daraus A bestimmen kannst!



(2) Betrachte nun diese Figur und bestimme ihren Flächeninhalt! Gehe analog zu (1) vor!



(3) Überlege, wie man den Flächeninhalt A nur aus des Kenngrößen des Trapezes (a, c, h) bestimmen kann!
Hinweis: Überlege zunächst, welche Beziehung zwischen den Größen x, y, a und c besteht und setze diesen Zusammenhang in deine Formel aus (2) ein!

(4) Formuliere einen Satz, wie man den Flächeninhalt eines Trapezes bestimmen kann!

Analyse 19. (1) Die Schüler stehen vor einem speziellen Berechnungsproblem. Sie sollen erkennen, dass sich der Flächeninhalt A als Differenz aus dem Flächeninhalt A_1 des Rechteckes und der Summe der Flächeninhalte A_2 und A_3 der beiden Dreiecke ergibt. Für den Flächeninhalt des Rechteckes erhalten sie

$$A_1 = 3\text{ cm} \cdot 4\text{ cm} = 12\text{ cm}^2.$$

Für die Flächeninhalte der beiden Dreiecke berechnen sie

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 1\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 1,5\text{ cm}^2 \qquad \text{und}$$
$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot 2\text{ cm} \cdot 3\text{ cm} = 3\text{ cm}^2.$$

Damit ergibt sich für den gesuchten Flächeninhalt

$$A = 12\text{ cm}^2 - (1,5\text{ cm}^2 + 3\text{ cm}^2) = 7,5\text{ cm}^2.$$

Das Berechnungsproblem wurde gelöst.

(2) Analog zu (1) soll das Problem nun allgemein gelöst werden. Für den Flächeninhalt A_1 des Rechteckes gilt die Formel

$$A_1 = a \cdot h.$$

Nun werden die Flächeninhalte der beiden Dreiecke bestimmt. Sie lauten

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot x \cdot h \qquad \text{und}$$
$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot y \cdot h.$$

Damit gilt für den gesuchten Flächeninhalt

$$A = \left(a - \frac{x+y}{2}\right) \cdot h.$$

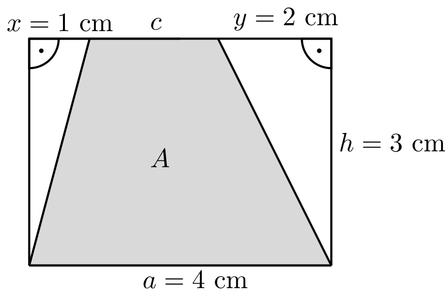


Abb. 2.20: Trapezflächeninhalt (Lösen eines Berechnungsproblems)

(3) Da die in (2) gefundene Formel Größen enthält, die keine Kenngrößen des Trapezes sind (x und y), sollen diese nun so formuliert werden, dass ausschließlich Kenngrößen des Trapezes enthalten sind (s. Abb. 2.20). Die Schüler erkennen dazu, dass gilt

$$a = x + c + y \qquad \Longrightarrow \qquad x + y = a - c.$$

Diesen Zusammenhang setzen sie in die in (2) gefundene Formel ein und erhalten schließlich

$$A = \left(a - \frac{a-c}{2}\right) \cdot h = \frac{(a+c)h}{2}.$$

Diese Berechnungsformel enthält nur noch die geforderten Größen a, c und h.

(4) Nun kann der Schüler den Satz für die Flächenberechnung von Trapezen formulieren.

2.5 Fazit

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass viele mathematische Sätze die Erstellung einer Lernsequenz zum gelenkten Entdeckungslernen ermöglichen. Dabei wird in der Vorbereitung der entsprechenden Unterrichtsstunde und auch bei der Durchführung selbiger mehr Zeit benötigt. Jedoch ist das von den Schülern auf diesem Weg gewonnene Wissen wesentlich belastbarer als jenes Wissen, das rezeptiv gewonnen wurde.

Ebenfalls wurde diskutiert, dass sich nicht der gesamte Mathematikunterricht mit dieser Form des Lernens durchführen lässt. Der Lehrplan schreibt gewisse Lernziele vor, die innerhalb eines Schuljahres zu erreichen sind. Dementsprechend muss der Lehrer Sätze auswählen, die er den Schüler entdecken lässt. Andere Lerninhalte müssen hingegen dargeboten werden.

Die in dieser Arbeit vorgestellten Lernsequenzen stellen lediglich Überlegungen zum Einsatz von Methoden des gelenkten Entdeckungslernens dar. Die Funktionalität dieser Lernsequenzen muss natürlich in der Praxis erprobt werden. Gegebenenfalls müssen die Impulse umformuliert bzw. an die Lerngruppe angepasst werden.

Als Weiterführung dieser Arbeit wäre die Erforschung der Effektivität vom entdeckenlassenden Lernen ein interessantes Gebiet, das gegebenenfalls im Rahmen einer Masterarbeit erschlossen werden kann. Hierbei könnten beispielsweise zwei vergleichbare Klassen über einen längeren Zeitraum beobachtet werden. In einer Klasse wird das Wissen eines speziellen Themengebietes lediglich dargeboten, während die andere Klasse große Teile dieses Wissens selbst erschließt. Anschließend könnten beide Klassen die gleiche Leistungskontrolle bzw. Klassenarbeit zu diesem Thema schreiben. Dabei wird das erworbene Wissen und dessen Belastbarkeit überprüft. Ein Vergleich der erzielten Ergebnisse liefert Erkenntnisse darüber, welche Lernform wirklich effektiver ist. Dabei muss unbedingt beachtet werden, dass auch das entdeckende Lernen gelernt werden muss. Demnach muss die entsprechende Klasse vor dem untersuchten Themengebiet ausreichend Kontakt mit Lernsequenzen des gelenkten Entdeckenlassens gehabt haben.

Literaturverzeichnis

- AEPKERS, M., LIEBIG, S. (2002): Entdeckendes, forschendes und genetisches Lernen. Hohengehren: Schneider.
- HAMEYER, U., SCHLICHTING, F. (Hrsg.) (2002): Entdeckendes Lernen. Kronshagen: Körner.
- HASSELHORN, M., GOLD, A. (2006): Pädagogische Psychologie. Erfolgreiches Lernen und Lehren. Stuttgart: Kohlhammer.
- HOLLAND, G. (1996): Geometrie in der Sekundarstufe. Didaktische und methodische Fragen. 2. Auflage. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum.
- WINTER, H. (1991): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik. 2., verbesserte Auflage. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe, insbesondere sind wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet. Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandlung auch nachträglich zur Aberkennung des Abschlusses führen kann.

Leipzig, den 27.08.2009

Ort, Datum Unterschrift