Universität Leipzig

Fakultät für Mathematik und Informatik

Mathematisches Institut

Die Esscher- und Wang-Transformation und ihre Anwendung zur Bestimmung von Prämien von Risikoverträgen

Diplomarbeit

vorgelegt von Jun Ye

geb. am 14.08.1982

Studiengang: Wirtschaftsmathematik

Betreuer Professor Riedel

Leipzig, Oktober 2013

Ich möchte mich ganz herzlich für die hilfreiche und umfassende Betreuung von Herrn Professor Manfred Riedel bedanken.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einführung

Zur Evaluierung von Risikoverträgen ist es notwendig, Prämie zu spezifizieren. In dieser Arbeit werden Prämien aus Prämienprinzipien vorgeschlagen, die auf die Esscher- bzw. Wang-Transformationen beruhen. Diese Transformationen leiten sich aus Gleichgewicht-Preismodellen her.

Zunächst werden in Kapitel 2 Prämienprinzipien vorgestellt und grundlegende Eigenschaften, die Prämienprinzipien erfüllen sollten, eingeführt. Anhand von Beispielen wie die Exponential-Prämien, Esscher-Prämien und die Wang-Prämien, werden diese Eigenschaften untersucht.

In Kapitel 3 wird das Gleichgewicht-Preismodell, das auf Bühlmann zurückgeht, eingeführt und die Kriterien für das Marktäquilibrium hergeleitet. Daraus lassen sich das Marktäquilibrium für exponentielle Nutzenfunktion gewinnen. Es wird gezeigt, dass mit gewissen Zusatzvoraussetzungen das Marktäquilibrium unabhängig von den freien Reserven des Marktes sind, wenn die Nutzenfunktionen exponentiell sind. Die Darstellungen des Marktäquilibriums von Nutzenfunktionen der Linearkombination von Expontialfunktionen werden hergeleitet. Im Fall, dass die Nutzenfunktionen Expontialfunktionen sind, ergibt sich die sogenannte Esscher-Transformation und damit verbunden das Esscher-Prinzip. Durch eine weitere Modifizierung ergibt sich die Wang-Transformation und das Wang-Prinzip.

Diese Prämienprinzipien lassen sich allgemein durch Verteilungstransformationen herleiten. Diese Prinzipien werden im Kapitel 4 eingeführt und ihre Eigenschaften untersucht.

Kapitel 2

Prämienprinzipien

2.1 Definition des Prämienprinzips

Wir betrachten ein diskretes Risikomodell. Die Schäden im Intervall $[j, j+1)$ werden durch eine Zufallsvariablen X_j modelliert. Eine nichtnegative Zufallsvariable heißt in der Risikotheorie Risiko. Wir setzen voraus, dass ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ gegeben ist, auf dem im Weiteren alle Zufallsvariable definiert sind. Die Folge $(X_j)_{j=1,2,...}$ sei in der ganzen Arbeit unabhängig und identisch verteilt. Die Verteilungsfunktion von $X_j \geqslant 0$ sei F, d.h. es gelte

$$F(x) = P(X_j \leqslant x) \quad j = 1, 2, ..., \quad x \geqslant 0.$$

Bekanntlich erfüllt die Verteilungsfunktion F einer Zufallsvariable folgende Bedingungen:

(i) F ist monoton wachsend.

(ii) F ist rechtsstetig.

(iii) Es gelten die Bedingungen

$$F(-\infty) := \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

und

$$F(\infty) := \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

In Anlehnung daran heißt eine Funktion $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$, die die Bedingungen (i), (ii) und (iii) erfüllt, eine Verteilungsfunktion.
Eine Verteilungsfunktion F erzeugt ein Borel-Maß P_F. Definiert man P_F auf Intervalle $(a, b]$, $a < b$, durch

$$P_F((a, b]) := F(b) - F(a),$$

so kann man zeigen, dass P_F eindeutig zu einem Borel-Maß erweitert werden kann (vgl. [6] Seite 313). Umgekehrt definiert jedes Borel-Maß Q durch

$$F_Q(x) := Q((-\infty, x])$$

eine Verteilungsfunktion F_Q. Die Abbildung $F \to P_F$ ist also bijektiv. Zur Vereinfachung notieren wir sowohl die Verteilungsfunktion F als auch das entsprechende Maß durch das Symbol F.
Wir benutzen in dieser Arbeit als Integral das Maßintegral. Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Funktion, die bezüglich des Maßes P_F, das durch eine Verteilungsfunktion F erzeugt wird, integrierbar ist. Dann notieren wir

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) P_F(dx) =: \int_{\mathbb{R}} g(x) F(dx).$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{M}$ **die Menge der Verteilungsfunktionen**, d.h. es gelte

$$\mathcal{M} = \{F : F - Verteilungsfunktion\}$$

Das n-te Moment $m_{n,F}$ der Verteilungsfunktion F ist durch

$$m_{n,F} = \int_{\mathbb{R}} x^n F(dx), \quad n = 0, 1, 2...$$

definiert, falls das Maßintegral auf der rechte Seite existiert.
Als Prämien für ein Intervall $[j, j+1)$ betrachten wir eine Vorschrift, die der Verteilungsfunktion $F \in \mathcal{M}$ des Risikos X_j eine positive reelle Zahl zuordnet. Diese Idee führt zu folgender formaler Definition.

Definition 2.1.1 *Ein Prämienprinzip H ist eine Abbildung*

$$H : D_H \subseteq \mathcal{M} \to [0, \infty).$$

In diesem Fall ist $H(F)$ die Prämie, falls die Risikoverteilung F ist. Mitunter wird die Symbolik der Prämie nach Prämienprinzip H vereinfacht. Es sei $X \sim F$. Für das Risiko $X \sim F$ schreibt man

$$H(X) := H(F)$$

Hierbei ist zu berücksichtigen, dass $H(X)$ keine Zufallsgröße ist.

Wir führen einige Beispiel von Prämienprinzipien an.

Beispiel 2.1.2 (Erwartungswertprinzip) *Das Prämienprinzip H_e heißt Erwartungswertprinzip, falls für $\alpha \geqslant 0$*

$$H_e(F) = (1 + \alpha) m_{1,F}.$$

Hierbei gilt

$$D_{H_e} = \{F \in \mathcal{M} : m_{1,F} < \infty\}.$$

Dieses Prämienprinzip verallgemeinert die Nettoeinmalprämie aus der Lebensversicherungsmathematik. Der Parameter α wird als Versicherungszuschlag bezeichnet.

2.2 Momenterzeugende Funktion

Als weiteres Prämienprinzip führen wir das Esscher-Prinzip ein.
Dazu benötigen wir den Begriff der momenterzeugenden Funktion, auf den wir nun eingehen.
Wir definieren die momenterzeugende Funktion der Verteilungsfunktion F durch

$$M_F(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} F(dx),$$

falls das Integral auf der rechten Seite existiert. Es sei

$$K_F = \{t \in \mathbb{R} : \quad M_F(t) < \infty\}$$

die Konvergenzmenge der momenterzeugenden Funktion M_F. Weiter sei

$$r_{-,F} := \inf\{t \in \mathbb{R} : M_F(t) < \infty\} \leqslant 0$$

und

$$r_{+,F} := \sup\{t \in \mathbb{R} : M_F(t) < \infty\} \geqslant 0.$$

Hierbei heißt $r_{-,F}$ der linke Konvergenzradius von M_F und $r_{+,F}$ der rechte Konvergenzradius von M_F. Es gilt folgende Aussage.

Satz 2.2.1 *Es sei F eine Verteilungsfunktion. Dann gilt*

$$(r_{-,F}, r_{+,F}) \subseteq K_F \tag{2.2.1}$$

und

$$\mathbb{R} \setminus [r_{-,F}, r_{+,F}] \cap K_F = \varnothing. \tag{2.2.2}$$

für $r_{-,F} = r_{+,F} = 0$ ist 2.2.1 trivial. Es sei $r_{-,F} < r_{+,F}$.

Beweis: a) Es sei $t \in \mathbb{R}$ mit $r_{-,F} < t < r_{+,F}$. Es existiert aufgrund der Definition von $r_{-,F}$ eine reelle Zahl $t_1 \leqslant 0$, $r_{-,F} < t_1 < t$, mit

$$M_F(t_1) < \infty. \tag{2.2.3}$$

Analog existiert eine reelle Zahl $0 \leqslant t_2$, $t < t_2 < r_{+,F}$, mit

$$M_F(t_2) < \infty. \tag{2.2.4}$$

Weiter haben wir

$$M_F(t_j) = \int_{(-\infty,0]} e^{t_j x} F(dx) + \int_{(0,\infty)} e^{t_j x} F(dx), \quad j = 1, 2 \tag{2.2.5}$$

Da $e^{t_1 x} \leqslant 1$ für $x > 0$, existiert das zweite Integral auf der rechten Seite von (2.2.5) für $j = 1$. Damit ist (2.2.3) gleichwertig mit

$$\int_{(-\infty,0]} e^{t_1 x} F(dx) < \infty. \tag{2.2.6}$$

Analog ist (2.2.4) gleichwertig mit

$$\int_{(0,\infty)} e^{t_2 x} F(dx) < \infty. \tag{2.2.7}$$

Wir unterscheiden nun drei Fälle: (i) $t < 0$, (ii) $t = 0$ und (iii) $t > 0$.
Fall (i): Hier gilt für $x \leqslant 0$

$$e^{tx} \leqslant e^{t_1 x}$$

und somit folgt wegen (2.2.6)

$$0 \leqslant \int_{(-\infty,0]} e^{tx} F(dx) < \infty.$$

Damit erhalten wir

$$\int_{(-\infty,0]} e^{tx} F(dx) + \int_{(0,\infty)} e^{tx} F(dx) = M_F(t) < \infty,$$

d.h. $t \in K_F$.
Fall (ii): Da $M_F(t) = 1$ gilt $t \in K_F$.
Fall (iii): Der Beweis erfolgt analog zu Fall (i).
Aus $x > 0$ folgt mit (2.2.7)

$$0 \leqslant \int_{(0,\infty)} e^{tx} F(dx) \leqslant \int_{(0,\infty)} e^{t_2 x} F(dx) < \infty. \tag{2.2.8}$$

Da $\int_{(-\infty,0]} e^{tx} F(dx) \leqslant 1$, erhalten wir $M_F(t) < \infty$, d.h. $t \in K_F$. Damit ist Aussage (2.2.1) gezeigt.

b) Wir zeigen (2.2.2). Aus Analogiegründen beschränken wir uns darauf zu zeigen, dass aus $t > r_{+,F}$ die Beziehung $t \notin K_F$ folgt. Dies wird indirekt bewiesen. Es sei also $t \in K_F$, damit gilt $M_F(t) < \infty$. Diese Ungleichung ist gleichwertig mit

$$\int_{(0,\infty)} e^{tx} F(dx) < \infty.$$

Für alle $t_3, 0 \leqslant t_3 < t$, haben wir

$$e^{t_3 x} \leqslant e^{tx}, \quad x > 0$$

und somit ergibt sich

$$\int_{(0,\infty)} e^{t_3 x} F(dx) \leqslant \int_{(0,\infty)} e^{tx} F(dx) < \infty.$$

Damit folgt $M_F(t_3) < \infty$. Aufgrund der Wahl von t_3 ergibt sich $r_{+,F} \geqslant t$. Dies widerspricht der Voraussetzung $r_{+,F} < t$ und somit ist (2.2.2) bewiesen.

Folgerung 2.2.2 *Es sei F eine Verteilungsfunktion. Dann gilt eine der folgenden Beziehungen:*

$$K_F = (r_{-,F}, r_{+,F}),$$

$$K_F = [r_{-,F}, r_{+,F}),$$

$$K_F = (r_{-,F}, r_{+,F}],$$

$$K_F = [r_{-,F}, r_{+,F}].$$

Dies folgt unmittelbar (2.2.1) und (2.2.2).

Satz 2.2.3

Es sei F eine Verteilungsfunktion. Dann ist $M_F(t)$ für $t \in (r_{-,F}, r_{+,F})$ beliebig oft differenzierbar und es gilt

$$M_F^{(n)}(t) = \int_{\mathbb{R}} x^n e^{tx} F(dx), \quad t \in (r_{-,F}, r_{+,F}). \tag{2.2.9}$$

Beweis: Nur im Fall $r_{-,F} < r_{+,F}$ ist (2.2.9) nachzuweisen. Wir unterscheiden zwei Fälle (i) $t \leqslant 0$ und (ii) $t > 0$.
Die Fälle beweist man analog. Deswegen gehen wir nur auf Fall (ii) ein.

Fall(ii): Wir beweisen mit Hilfe vollständiger Induktion, dass die n-te Ableitung $M^{(n)}(t)$ für $n = 1, 2, ...$ von $M(t)$ existiert.
Es sei $n = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{M(t+h) - M(t)}{h} &= \int_{\mathbb{R}} e^{tx} \left(\frac{e^{hx} - 1}{h} \right) F(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} e^{tx} \left(\frac{e^{hx} - 1}{h} \right) dF(dx). \end{aligned} \tag{2.2.10}$$

Zunächst zeigen wir die Ungleichung

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} \right| \leqslant e^z I_{(0,\infty)}(z) + I_{(-\infty,0]}(z), \quad z \neq 0. \tag{2.2.11}$$

Wir betrachten zwei Fälle (a) $z > 0$ und (b) $z < 0$
Fall (a) Offenbar gilt

$$\int_0^z e^t dt = e^z - 1.$$

Damit folgt

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} \right| = \frac{e^z - 1}{| z |} = \frac{1}{z} \int_0^z e^t dt \leqslant e^z.$$

Fall (b) Offenbar gilt

$$\int_{-|z|}^0 e^t dt = 1 - e^{-|z|}.$$

Damit folgt

$$\left| \frac{e^z - 1}{z} \right| = \frac{1 - e^{-|z|}}{z} = \frac{1}{| z |} \int_{-|z|}^0 e^t dt \leqslant 1.$$

Somit ist (2.2.11) gezeigt. Wegen (2.2.11) gilt für den Integranden auf der rechte Seite von (2.2.10)

$$\begin{aligned}\left| e^{tx} \frac{e^{hx} - 1}{h} \right| &= e^{tx} \left| \frac{e^{hx} - 1}{hx} \right| |x| \\ &\leqslant e^{(t+h)x} |x| I_{(0,\infty)}(hx) + |x| I_{(-\infty,0)}(hx) e^{tx} =: g_h(x).\end{aligned}$$

Wir zeigen, dass g_h bezüglich F integrierbar über $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist.
Dazu sind die beide Fälle α) h>0 und β) h<0 zu betrachten. Da beide Fälle

analog behandelt werden können, beschränken wir uns auf Fall α).
Zu Fall α). Offenbar gilt

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} g_h(x)F(dx) = \int_{(0,+\infty)} e^{(t+h)x} xF(dx) + \int_{(-\infty,0)} \mid x \mid e^{tx}F(dx) \quad (2.2.12)$$

Wir wählen $\epsilon > 0$ so, dass die Ungleichung $t-\epsilon > r_{-,F}$ gilt. Außerdem wählen wir eine Konstante $c > 0$ so, dass

$$c\epsilon > 1. \quad (2.2.13)$$

Es gilt die Ungleichung

$$x \leqslant ce^{\epsilon x}, \quad x \geqslant \frac{1}{\epsilon} > 0. \quad (2.2.14)$$

Um diese Ungleichung nachzuweisen, bilden wir die Hilfsfunktion

$$w : \left[\frac{1}{\epsilon}, \infty\right) \to [0, \infty),$$

die durch $w(x) = ce^{\epsilon x} - x$ definiert ist. Es gilt dann nach (2.2.13)

$$w\left(\frac{1}{\epsilon}\right) = ce - \frac{1}{\epsilon} = \frac{c\epsilon e - 1)}{\epsilon} > 0.$$

Außerdem folgt

$$w'(x) = c\epsilon e^{\epsilon x} - 1 > c\epsilon - 1 > 0.$$

Damit ist w streng monoton wachsend und es gilt $w(x) \geqslant 0$. Dies ist gleichwertig mit (2.2.14).
Wegen (2.2.14) folgt aus (2.2.12) aufgrund der Wahl von ϵ

$$\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} g_h(x)F(dx) = c\int_{(\frac{1}{\epsilon},\infty)} e^{(t+h+\epsilon)x}F(dx) + \frac{1}{\epsilon}e^{(t+h)\frac{1}{\epsilon}} \int_{(0,\frac{1}{\epsilon})} F(dx)$$
$$+\frac{1}{\epsilon}\int_{[-\frac{1}{\epsilon},0)} F(dx) + c\int_{(-\infty,-\frac{1}{\epsilon})} e^{(t-\epsilon)x}F(dx) < \infty. \quad (2.2.15)$$

Damit besitzt g_h mit $0 < h < h_1$ eine integrierbare Majorante. Wir können den Satz von Lebesgue anwenden und erhalten wegen (2.1.10) nämlich

$$f(x) = ce^{(t+h_1+\epsilon)x}I_{(\frac{1}{\epsilon},\infty)}(x) + \frac{1}{\epsilon}e^{(t+h_1)\frac{1}{\epsilon}}I_{(0,\frac{1}{\epsilon})} + \frac{1}{\epsilon}I_{[-\frac{1}{\epsilon},0]} + ce^{(t-\epsilon)x}I_{\left(-\infty,-\frac{1}{\epsilon}\right)}.$$

$$M'(t) = \int_{\mathbb{R}} x e^{tx} F(dx),$$

da

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{hx} - 1}{h} = x.$$

Es gelte die Behauptung (2.2.9) für $n = k$. Wir bilden

$$\frac{M^{(k)}(t+h) - M^k(t)}{h} = \int_{\mathbb{R}} x^k e^{tx} \frac{e^{xh} - 1}{h} F(dx) = \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} x^k e^{tx} \frac{e^{xh} - 1}{h} F(dx)$$

Hier haben wir ebenfalls die Fälle α) $h > 0$ und β) $h < 0$ zu betrachten. Wie zum Beweis des Induktionsanfangs beschränken wir uns auf den Fall α).

Zu Fall α)

Es gilt dann

$$\left| x^k e^{tx} \frac{e^{th-1}}{h} \right| \leqslant g_h(x) \mid x \mid^k .$$

Es sei $h_1 > 0$ gegeben. Wir wählen $\epsilon > 0$ so, dass die Ungleichung

$$t - (k+1)\epsilon > r_{-,F}$$

gilt. Analog zum Beweis des Induktionsanfangs erhalten wir für $0 < h \leqslant h_1$

$$g_h(x) \mid x \mid^k \leqslant f_1(x),$$

wobei

$$\begin{aligned} f_1(x) : &= c^{k+1} e^{t+h_1+\epsilon(k+1)} I_{[\frac{1}{\epsilon},\infty)}(x) + e^{(t+h_1)\frac{1}{\epsilon}} I_{[0,\frac{1}{\epsilon}]}(x) \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{k+1} \\ &+ \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{k+1} I_{[-\frac{1}{\epsilon},0)}(x) + c^{k+1} e^{(t-(k+1)\epsilon)x} I_{(-\infty,\frac{1}{\epsilon})} \end{aligned}$$

gesetzt wird. Damit besitzt $g_h(x)|x|^k$ eine integrierbare Majorante. Nach dem Satz von Lebesgue folgt also

$$\begin{aligned} M^{(k+1)}(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{M^k(t+h) - M^k(t)}{h} \\ &= \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} x^k e^{tx} x F(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^{k+1} e^{tx} F(dx). \end{aligned}$$

Dies ist aber gerade die Induktionsbehauptung. □

Bemerkung 2.2.4 *Ist insbesondere* $0 \in (r_-, r_+)$*, so gilt*

$$M_F^{(j)}(0) = m_{j,F},\ j = 1, 2, ...$$

Beispiel 2.2.5 (Esscher-Prinzip)
Wir betrachten Verteilungsfunktionen, die eine momenterzeugende Funktion mit nicht trivialem Konvergenzgebiet besitzen. Mit Hilfe der momenterzeugenden Funktion wird das Esscher-Prinzip eingeführt. Es sei $a \in \mathbb{R}$*. Weiter sei*

$$D_{H_{es,a}} := \{F \in \mathcal{M} : r_{-,F} < a < r_{+,F}\}.$$

Das Esscher-Prinzip $H_{es,a}$ *ist durch*

$$H_{es,\theta}(F) = \frac{M_{F,a}{}'(a)}{M_F(a)}$$

definiert, falls $F \in D_{H_{es,a}}$*. Nach Satz 2.2.3 ist* $H_{es,a} : D_{H_{es,a}}$ *wohl definiert. In diesem Fall ist* $D_{H_{es,a}}$ *der Definitionsbereich von* $H_{es,a}$*. Es gilt also* $H_{es,a} : D_{H_{es,a}} \to \mathbb{R}_+$*.*

2.3 Kriterium für Prämienprinzipien

Die allgemeine Definition der Prämienprinzipien lässt offen, welche Abbildung gewählt werden sollte. Ähnlich wie in der mathematischen Statistik in der Eigenschaften für Schätzfunktion gefordert werden, stellt man Forderungen für Prämienprinzipien auf. Wir führen hier einige wichtige Eigenschaften an.

A1. Das Prämienprinzip H heißt **streng erwartungswertübersteigend**, falls für $F \in D_H \cap D_{H_e}$

$$H(F) > m_{1,F} \tag{2.3.1}$$

gilt.

Diese Forderung ergibt sich aus dem Hauptsatz der Ruintheorie. Er besagt,

dass mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 kein Ruin eintritt, falls die Prämien größer als der erwartete Schaden sind, d.h. dass die Bedingung (2.3.1) erfüllt ist.
Falls anstelle von (2.3.1)

$$H(F) \geqslant m_{1,F}$$

gilt, so heißt H erwartungswertübersteigend.
A2. Das Prämienprinzip H **übersteigt nicht den Maximalschaden**, falls

$$H(F) \leqslant M_F := \inf\{x : F(x) = 1\} = \sup(t : F(t) < 1) \tag{2.3.2}$$

Ein Versicherungsvertrag wird offensichtlich nur dann abgeschlossen werden, wenn das zu erwartende Risiko größer als die zu zahlende Prämie ist.
A3. Das Prämienprinzip H heißt **translationsäquivariant**, falls

$$H(F_c) = H(F) + c,\ c \in \mathbb{R},$$

wobei $F_c(x) := F(x - c), \quad x \geqslant 0$, gesetzt werde.
Hierbei wird vorausgesetzt, dass nicht nur $F \in D_H$, sondern auch $F_c \in D_H$ für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt, d.h. $\{F_c : c \in \mathbb{R},\ F \in D_H\} \subseteq D_H$. Dies lässt sich einfach als

$$H(X + c) = H(X) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

schreiben. Die Eigenschaft A3 bedeutet, dass die Prämie sich um einen Betrag verschiebt, falls die Schäden sich um diesen Betrag verschieben.
A4. Das Prämienprinzip H heißt **additiv**, falls

$$H(F * G) = H(F) + H(G)$$

gilt.
Sind unabhängige Risiken $X \sim F$ und $Y \sim G$ gegeben, so ist H additiv, falls

$$H(X + Y) = H(X) + H(Y)$$

gilt.
Hierbei muss also der Definitionsbereich D_H folgende Eigenschaft erfüllen:

Wenn $F, G \in D_H$, so auch $F * G \in D_H$. Mit anderen Worten: der Definitionsbereich ist bezüglich der Faltung abgeschlossen.
Diese Eigenschaft besagt, dass die Prämien unabhängiger Schäden sich addieren.

Zum Anreiz des Versicherten, sollte sich eine Versicherung zu zwei unabhängigen Schäden bei einen Versicherungsunternehmen rentieren, d.h. die Prämien beider Versicherungen sollten kleiner oder gleich der Summe der Prämien sein, falls die Versicherungsverträge einzeln abgeschlossen werden. Dies führt zur Subadditivität.

A5. Das Prämienprinzip H heißt **subadditiv**, falls

$$H(F * G) \leqslant H(F) + H(G). \tag{2.3.3}$$

F und G sind Verteilungsfunktion. Dann bezeichnet $F * G$ die Faltung von F und G, d.h.

$$F * G(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x-u)G(du).$$

Falls die Risiken $X \sim F$ und $Y \sim G$ unabhängig sind, kann es in der Form

$$H(X+Y) \leqslant H(X) + H(Y)$$

geschrieben werden.

Mitunter wird auch die Superaddtivität betrachtet.

A6. Das Prämienprinzip H ist **superadditiv**, falls

$$H(F * G) \geqslant H(F) + H(G)$$

gilt.

Falls $X \sim F$ und $Y \sim G$ unabhängig sind, kann man diese Bedingung in der Form

$$H(X+Y) \geqslant H(X) + H(Y)$$

schreiben. Hierbei wird ebenfalls vorausgesetzt, dass D_H bezüglich der Faltung abgeschlossen ist.

Bemerkung 2.3.1

(i) Ist ein Prämienprinzip H additiv und gilt $\delta_c \in D_H$ so haben wir

$$H(\delta_{c_1+c_2}) = H(\delta_{c_1}) + H(\delta_{c_2}).$$

Unter der Voraussetzung A2, dass H nicht den Maximalschaden übersteigt und das $H(\delta_1) = 1$, folgt bekanntlich(vgl. [5] Seite 458-460)

$$H(\delta_c) = c,\ \ c \in \mathbb{R}.$$

Da eine konstante Zufallsvariable und ein beliebige Zufallsvariable unabhängig sind, ergibt sich aus A4

$$H(F_c) = H(F * \delta_c) = H(F) + H(\delta_c) = H(F) + c$$

d.h. H ist translationäquivariant.
(ii) Ein Prämienprinzip, dass sowohl subadditiv als auch superadditiv ist, ist additiv.

(iii) Ein Prämienprinzip, dass additiv ist, ist subadditiv und superadditiv.

A7.(Iterativität) Wir nehmen an, dass wir ein inhomogenes Portfolio von Versicherten haben. Die Zufallsvariable Y zerlegt dieses Portfolio in homogene Teilklassen. Die Verteilungsfunktion des Risikos in der Klasse, die durch $Y = y$ beschrieben wird, ist die Verteilungsfunktion $F_{X|Y=y}$. Die Prämie nach einem Prämienprinzip H ist dann in dieser Klasse $H(F_{X|Y=y})$. Damit variiert die Prämie von Teilklasse zu Teilklasse. Man betrachtet nun Prämien in den Teilklassen als abgeleitete Risiken. Damit führen wir eine Zufallsvariable X_K gemäß

$$\omega \in \Omega \to Y(\omega) = y \to H(F_{X|Y=y}) =: X_K(\omega)$$

ein, falls die Abbildung messbar ist. Zur Vereinfachung schreiben wir

$$H(F_{X|Y}) := X_K.$$

Die Verteilungsfunktion von X_K sei $F_{X,K}$. Die resultierende Gesamtprämie im Portfolio ist dann $H(F_{X,K})$.
Das Prämienprinzip H heißt **iterativ**, falls die Gesamtprämie sich nicht von der Prämie ohne Klassifizierung unterscheidet, d.h. falls

$$H(F_{X,K}) = H(F)$$

gilt. Diese Bedingung lässt sich äquivalent als

$$H(H(F_{X|Y})) = H(F)$$

schreiben.
Wir untersuchen abschließend, welche der obige Eigenschaften das Erwartungswertprinzip, Exponentialprinzip und das Esscher-Prinzip haben.

Beispiel 2.3.2 (Erwartungswertprinzip) *Es sei $H_e : D_{He} \to [0, \infty)$ mit $\alpha > 0$ ein Erwartungswertprinzip, d.h. es gelte*

$$H_e(F) = (1+\alpha)m_{1,F}, \quad F \in D_{He}.$$

Damit ist dieses Prinzip streng erwartungswertübersteigend.
Es erfüllt im Allgemeinen nicht die Eigenschaft A2. Dies zeigt folgendes Beispiel. Es sei

$$F = (1-t)\delta_0 + t\delta_b, \quad 0 < t < 1, \quad b > 0.$$

Dann gilt

$$H_e(F) = b(1+\alpha).$$

Die Ungleichung (2.3.2) ist gleichwertig mit

$$tb(1+\alpha) \leqslant b,$$

d.h. sie ist nicht erfüllt, falls

$$1 > t > \frac{1}{1+\alpha}.$$

Das Erwartungsprinzip ist wegen der Linearität des Erwartungswertes sowohl additiv, als auch subadditiv und superadditiv. Jedoch ist es nicht translationsäquivariant, da

$$H(\delta_0) = (1+\alpha) > 1$$

Wir zeigen nun, dass das Erwartungswertprinzip mit $\alpha \geqslant 0$ genau dann iterativ ist, falls $\alpha = 0$ oder $EX \neq 0$.

Weiter sei $EX \neq 0$.
Es seien $X \sim F$ und $Y \sim G$ gegeben. Dann gilt

$$H_e(X \mid Y = y) = (1 + \alpha)E(X \mid Y = y).$$

Somit folgt

$$H_e(X \mid Y) = (1 + \alpha)E(X \mid Y)$$

Dann folgt

$$H_e(H_e(X \mid Y)) = (1 + \alpha)^2 EE(X \mid Y) = (1 + \alpha)^2 EX \tag{2.3.4}$$

Außerdem gilt

$$H_e(X) = (1 + \alpha)EX \tag{2.3.5}$$

Aus (2.3.4) und (2.3.5) folgt die Behauptung.

□

Beispiel 2.3.3 (Exponentialprinzip) *Es sei $X \sim F$ und die Verteilungsfunktion F besitze einen positiven rechten Konvergenzradius, d.h. $r_{+,F} > 0$. Dann ist das Exponentialprinzip durch*

$$H_{exp,\alpha}(X) = H_{exp,\alpha}(F) = \frac{\ln M_F(a)}{a}$$

definiert. Hierbei bezeichne M_F die momenterzeugende Funktion von F und es gelte

$$0 < a < r_{+,F}.$$

Damit gilt

$$D_{H_{exp,\alpha}} = \{F : 0 < \alpha < r_{+,F}\}.$$

Wir zeigen, dass $H_{exp,\alpha}$ die Eigenschaften A1, A2, A3 und A4 erfüllt.
Zu Eigenschaft A1.
Wir benötigen, dass der Logarithmus der momenterzeugenden Funktion konvex ist.

Es sei F eine Verteilungsfunktion mit $F(0-) = 0$ und es existiere $M_F(t)$. Dann ist

$$G(x) = \int_{[0,x]} \frac{e^{tu} F(du)}{M_F(t)}$$

eine Verteilungsfunktion.

Damit ist die Varianz $\sigma^2(G)$ der Verteilungsfunktion G nicht negativ.

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\sigma^2(G) = \int_{[0,\infty)} x^2 G(dx) - \left(\int_{[0,\infty)} x G(dx) \right)^2 \geqslant 0$$

Auf Grund der Definition von G erhalten wir

$$\begin{aligned} \sigma^2(G) &= \int_{[0,\infty)} x^2 e^{tx} \frac{F(dx)}{M_F(t)} - \left(\int_{[0,\infty)} \frac{x e^{tx} F(dx)}{M_F(t)} \right)^2 \\ &= \frac{M_F^{(2)}(t) M_F(t) - (M_F'(t))^2}{M_F^2(t)} \\ &= (\ln M_F(t))^{(2)} \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Somit ist $t \to \ln M_F(t)$ konvex.

Also gilt

$$\ln M_F(x) \geqslant \ln M_F^{'}(0)(x - 0) = x m_{1,F} X, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Wählen wir $x = a$, so folgt, dass das Exponentialprinzip erwartungswertübersteigend ist, d.h. es gilt A1.

Zu Eigenschaft A2.

Es gelte $X \sim F$ und $X \leqslant M$. für eine gewisse Konstante M.

Dann folgt

$$H_{exp,\alpha}(F) \leqslant \frac{\ln E e^{aX}}{a} \leqslant \frac{\ln E e^{aM}}{a} = M,$$

d.h. A2 ist erfüllt.

Zu Eigenschaft A3 und A4.

Wir untersuchen, ob die Subadditivität des Exponentialprinzips additiv ist.

Für eine unabhängige Zufallsgröße X und Y gilt

$$\begin{aligned}
H_{\exp,\alpha}(X+Y) &= \frac{1}{a}\ln M_{X+Y}(a) \\
&= \frac{1}{a}(\ln M_X(a) + \ln M_Y(a)) \\
&= H_{\exp,\alpha}(X) + H_{\exp,\alpha}(Y)
\end{aligned}$$

Es gilt somit die Additivität.
Für $F = \delta_c$, gilt

$$H_{\exp,\alpha}(\delta_c) = \frac{1}{a}\ln e^{ac} = c$$

Somit ist $H_{\exp,\alpha}$ auch translationsäquivariant.
Zu Eigenschaft A5 und A6
Aus Bemerkung 2.3.1 ii) folgt Exponentialprinzip sowohl subadditiv als auch superadditiv ist.
Zu Eigenschaft A7.
Nun untersuchen wir die Iterativität des Exponentialprinzips.
Es sei $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; v heißt Gewichtsfunktion. Es sei $z \in [0,1]$. Die kleinste nichtnegative Lösung $S_v^z(F) =: s$ von

$$\int_0^\infty v(x - zs)dF(x) = v((1-z)s) \tag{2.3.7}$$

definiert ein Funktional; es heißt ***Schweizer-Prinzip***. *Es sei stets vorausgesetzt, dass $v(0) = 0$. Wir wählen nun als Gewichtsfunktion*

$$v(x) = \frac{e^{ax} - 1}{a} \tag{2.3.8}$$

Dann ist (2.3.7) gleichwertig mit

$$e^{-zs}\int_0^\infty e^{ax}F(dx) = e^{a(1-z)s},$$

d.h. es gilt

$$s = H_{\exp,s}(F)$$

Damit ist dieses Schweizer-Prinzip unabhängig von z, $0 \leqslant z \leqslant 1$.
Wir können das Exponentialprinzip als Mittelwertprinzip, d.h. als Schweizer-Prinzip mit $z = 0$, auffassen. Da v nach (2.3.8) eine Inverse besitzt, gibt es

somit auch

$$H_{exp,\alpha}(X) = v^{-1}Ev(X). \tag{2.3.9}$$

Diese Darstellung hilft, die Iterativität des Exponentialprinzips nachzuweisen. Es gilt natürlich wegen (2.3.9) und dem Satz der totalen Erwartung für eine beliebige Zufallsgröße Y

$$\begin{aligned} H_{exp,\alpha}(x) &= v^{-1}EE(v(X) \mid Y) \\ &= v^{-1}Evv^{-1}E(v(X) \mid Y) \\ &= v^{-1}Ev(v^{-1}E(v(X) \mid Y)) \\ &= v^{-1}Ev(H_{exp,\alpha}(X \mid Y)) \\ &= H_{exp}(H_{exp,\alpha}(X \mid Y)) \end{aligned}$$

Somit ist das Exponentialprinzip iterativ.

Beispiel 2.3.4 (Esscher-Prinzip) *Wir betrachten die Eigenschaften des Esscher-Prinzips $H_{es,\alpha}$*
Falls $F(M) = 1$ für $0 < M < \infty$ gilt die Ungleichung

$$M_F'(a) = \int_0^M xe^{ax}F(dx) \leqslant MM_F(a), \quad a > 0.$$

Damit gilt $H_{es,\alpha}(F) \leqslant M$, d.h. das Esscherprinzip übersteigt nicht den Maximalschaden, d.h. es gilt A2.
In Beispiel 2.2.2 haben wir gezeigt, dass $\ln M_F(t)$ konvex ist.
Mit dieser Eigenschaft zeigen wir, dass $H_{es,\alpha}$ erwartungswertübersteigend ist.
Da $\ln M_F(x)$ konvex ist, ist $(\ln M_F(x))'$ monoton wachsend. Damit gilt

$$H_{es,\alpha}(F) = (\ln M_F(x))'_{|x=a} \geqslant (\ln M_F(x))'_{|x=0},$$

d.h. wir haben

$$H_{es,\alpha}(F) \geqslant m_{1,F}.$$

Somit ist $H_{es,\alpha}$ erwartungswertübersteigend. Wir untersuchen nun, ob das Esscher-Prinzip streng erwartungswertübersteigend ist. Dies ist gleichwertig damit, dass

$$(\ln M_F(x))'_{x=a} > (\ln M_F(x))'_{x=a}$$

ist. Dies ist gleichwertig mit

$$\int_0^a (\ln M_F(u))^{(2)} du < 0,$$

d.h.

$$(\ln M_F(u))^{(2)} > 0, u \in [0, a].$$

Auf Grund von (2.3.6) ist dies erfüllt, falls G nicht ausgeartet ist, d.h. $G = \delta_c$ *für ein gewisse* $c \in [0, \infty)$.
Damit gilt

$$M_G(s) = e^{cs}, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{2.3.10}$$

Außerdem haben wir

$$M_G(s) = \frac{M_F(s+a)}{M_F(a)}, \quad s \leqslant 0 \tag{2.3.11}$$

Deshalb existiert $M_F(s)$ *für* $s \in \mathbb{R}$.
Außerdem folgt aus (2.3.10) und (2.3.11)

$$M_F(s+a) = e^{c(s+a)} e^{-ca} M_F(a)$$

Insbesondere ergibt sich für $s = -a$

$$1 = M_F(0) = e^{-ca} M_F(a),$$

d.h. es gilt

$$M_F(s+a) = e^{c(s+a)}, \quad s \in \mathbb{R}$$

bzw.

$$M_F(s) = e^{cs}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Auf Grund des Eindeutigkeitssatzes für momenterzeugende Funktionen, folgt

$$F = \delta_c.$$

Damit erhalten wir, dass das Esscher-Prinzip streng erwartungswertübersteigend ist, falls die Verteilungsfunktion F nicht ausgeartet ist.

Wir untersuchen die Additivität des Esscher-Prinzips. Es sei $X \sim F$ und $Y \sim G$ unabhängig. Für das Esscher-Prinzip erhalten wir

$$\begin{aligned} H_{es,\alpha}(F * G) = H_{es,\alpha}(X+Y) &= \frac{M'_{X+Y}(a)}{M_{X+Y}(a)} \\ &= \frac{M'_X(a)M_Y(a) + M_X(a)M'_Y(a)}{M_X(a)M_Y(a)} \\ &= \frac{M'_X(a}{M_X(a)} + \frac{M'_Y(a)}{M_Y(a)} \\ &= H_{es,\alpha}(X) + H_{es,\alpha}(Y) \\ &= H_{es,\alpha}(F) + H_{es,\alpha}(G) \end{aligned}$$

Es gilt somit die Additivität.
Insbesondere gilt

$$H_{es,\alpha}(\delta_c) = \frac{ce^{ac}}{e^{ac}} = c,$$

Somit ist $H_{es,\alpha}$ auch translationsäquivariant.
Nun untersuchen wir die Iterativität des Esscher-Prinzips.
Es sei die bedingte Verteilungsfunktion von X unter $Y = y$ die Exponentialverteilung $Exp(y)$ mit dem Parameter y, d.h.
es gelte

$$F_{X|Y=y}(x) = 1 - e^{-yx}, \quad x \geqslant 0$$

In diesem Fall folgt

$$F_X(x) = \int_0^\infty \left(1 - e^{-yx}\right) G(dy) = 1 - M_G(-x) \tag{2.3.12}$$

Weiter sei G eine Zweipunktverteilung in w_1 und w_2, für

$$0 < a < w_1 < w_2 \tag{2.3.13}$$

d.h.

$$G = (1-t)\delta_{w_1} + t\delta_{w_2}, \quad \mathit{mit} \quad 0 < t < 1.$$

Dann haben wir

$$M_G(s) = (1-t)e^{w_1 s} + te^{w_2 s}.$$

Damit ergibt sich aus (2.3.12)

$$\begin{aligned} F_X(x) &= 1-(1-t)e^{-xw_1}-te^{-xw_2} \\ &= (1-t)(1-e^{-w_1x})+t(1-e^{-w_2x}), \end{aligned}$$

d.h. F_X *ist eine Mischung von Exponentialverteilungen.*
Dann erhalten für die momenterzeugende Funktion von $F_X = F$

$$M_F(s) = (1-t)\frac{w_1}{w_1-s}+t\frac{w_2}{w_2-s}, \quad s < w_1.$$

Daraus folgt

$$M_F'(s) = (1-t)\frac{w_1}{(w_1-s)^2}+t\frac{w_2}{(w_2-s)^2}.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} H_{es,a}(X) &= H_{es,a}(F) \\ &= \frac{(1-t)w_1(w_2-a)^2+tw_2(w_1-a)^2}{(1-t)w_1(w_1-a)(w_2-a)^2+tw_2(w_2-a)(w_2-a)^2}. \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Nun leiten wir die momenterzeugende Funktion der Verteilungsfunktion $F_{X|Y=y}$ *her. Dazu leiten wir mit der momenterzeugende Funktion von* $F_{X|Y=y}$ *her. Es gilt*

$$M_{F(X|Y=y)}(s) = \frac{y}{y-s}, \quad s < y.$$

Damit folgt

$$H_{es,a}(X \mid Y=y) = H(F_{X|Y=y}) = \frac{1}{y-a}, \; a < y.$$

Die Zufallsgröße $H(X \mid Y) = \frac{1}{y-a}$ *besitzt eine Zweipunktverteilung und zwar gilt*

$$F_{H_{es,a}(X|Y)}(x) = (1-t)\frac{\delta_1}{w_1-a}+t\frac{\delta_1}{w_2-a}$$

Hierbei setzen wir voraus, dass

$$a < w_1 \quad (2.3.15)$$

ist.
Die momenterzeugende Funktion von $H(X \mid Y)$ *ist damit*

$$M_{H_{es}(X|Y)}(s) = (1-t)e^{s\frac{1}{w_1-a}}+te^{s\frac{1}{w_2-a}}.$$

Damit folgt

$$H_{es}(H_{es}(X \mid Y)) = \frac{(1-t)\frac{1}{w_1-a}e^{\frac{a}{w_1-a}} + t\frac{1}{w_2-a}e^{\frac{a}{w_2-a}}}{(1-t)e^{\frac{a}{w_1-a}} + te^{\frac{a}{w_2-a}}}$$
$$= \frac{(1-t)(w_2-a)e^{\frac{a}{w_1-a}} + t(w_1-a)e^{\frac{a}{w_2-a}}}{\left((1-t)e^{\frac{a}{w_1-a}} + te^{\frac{a}{w_2-a}}\right)(w_1-a)(w_2-a)}. \tag{2.3.16}$$

Wir bilden die Hilfsfunktion (vgl. (2.3.14) und (2.2.10))

$$h(t) = H_{es}(X) - H_{es}(H_{es}(X \mid Y)).$$

Wir haben

$$h(0) = h(1) = 0.$$

Wenn wir die Parameter a, w_1, w_2 und t so wählen können, dass $h \neq 0$, so ist $H_{es,a}$ nicht iterativ.
Konkret zeigen wir, dass wir die Parameter a, w_1, w_2 und t so wählen können, dass $h\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$.
Zunächst gilt

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{w_1(w_2-a)^2 + w_2(w_1-a)^2}{w_1(w_1-a)(w_2-a)^2 + w_2(w_2-a)(w_1-a)^2}$$
$$- \frac{(w_2-a)e^{\frac{a}{w_1-a}} + (w_1-a)e^{\frac{a}{w_2-a}}}{\left(e^{\frac{a}{w_1-a}} + e^{\frac{a}{w_2-a}}\right)(w_1-a)(w_2-a)}.$$

Weiter wählen wir w_1, w_2 und z. Da $w_1 - a < w_2 - a$ ist, können wir w_2 so wählen, dass $2(w_1 - a) = w_2 - a$ ist. Also setzen wir

$$z := w_1 - a > 0$$

so gilt also

$$2z = w_2 - a.$$

Dann folgt

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{z^2(4w_1 + w_2)}{z^3(4w_1 + 2w_2)} - \frac{z\left(2e^{\frac{a}{z}} + e^{\frac{a}{2z}}\right)}{2z^2\left(e^{\frac{a}{z}} + e^{\frac{a}{2z}}\right)}$$
$$= \frac{1}{2z}\left(\frac{4w_1 + w_2}{2w_1 + w_2} - \frac{2e^{\frac{a}{z}} + e^{\frac{a}{2z}}}{e^{\frac{a}{z}} + e^{\frac{a}{2z}}}\right).$$

Weiter setzen wir

$$y = e^{\frac{a}{2z}} \in (1, \infty)$$

so gilt

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2z}\left(\frac{4w_1 + w_2}{2w_1 + w_2} - \frac{2y+1}{y+1}\right)$$

Da $y \to \frac{2y+1}{y+1} = 2 - \frac{1}{y+1}$ *nicht die konstante Funktion ist, können wir den Parametern* $a > 0$ *so wählen, dass* $h\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$*, d.h.* $H_{es,a}$ *ist nicht iterativ.*

Das Esscher-Prinzip und das Exponentialprinzip haben einen interessanten Zusammenhang.
Es gilt nämlich

$$H_{exp,a}(F) \leqslant H_{es,a}(F) \tag{2.3.17}$$

Zum Beweis nehmen wir an, dass $\ln M_F(a)$ eine konvexe Funktion ist. Damit ist $(\ln M_F(t))'$ monoton wachsend. Wegen $\ln M_F(0) = 0$ betrachten wir die Ungleichung

$$\begin{aligned} H_{exp,a}(F) = \frac{\ln M_F(a)}{a} &= \frac{1}{a}\int_0^a (\ln M_F(t))' dt \\ &\leqslant (\ln M_F(a))' = \frac{M'(a)}{M_F(a)} = H_{es,a}(F) \end{aligned}$$

und somit folgt (2.2.12).

Kapitel 3

Gleichgewicht-Preis-Modelle

3.1 Bühlmanns Gleichgewicht-Preis-Modell

Wir erläutern Bühlmanns Gleichgewicht-Preis-Modell. Wir betrachten den Risikoaustausch zwischen n Versicherungsagenten. Jeder Agent wird durch seine **Nutzenfunktion** $u_j : \mathbb{R} \to [0, \infty), \quad j = 1, 2, 3, ..., n$, charakterisiert. Hierbei wird vorausgesetzt, dass

$$u_j^{(1)} > 0 \quad und \quad u_j^{(2)} < 0,\ j = 1, 2, ..., n \tag{3.1.1}$$

gilt.
Wir setzen ein weitere Normierung voraus:

$$u_j(0) = 0 \; und \; u_j^{(1)}(0) = 1. \tag{3.1.2}$$

Außerdem besitze der j-te Agent die **freie Reserve** w_j. Es wird vorausgesetzt, dass der j-te Agent ein **potentielles Risiko** X_j hat. Dieses Risiko wird abgefangen dadurch, dass der j-te Agent auf einem geschlossenen Markt einen Risikoaustausch der Höhe Y_j realisiert, d.h. entweder verkauft oder kauft. Der j-te Agent wird als Versicherungsunternehmen interpretiert. Dabei bedeutet

Y_j die Summe aller Versicherungspolicen, die vom j-ten Agenten verkauft bzw. gekauft werden. Das Risiko X_j gehört zum j-ten Agenten. Der Risikoaustausch Y_j ist frei über den Markt für den j-ten Agent verfügbar. Die Risiken $X_j, j = 1, 2, ..., n$, und der Risikoaustausch $Y_j, j = 1, 2, ..., n$, werden als Zufallsgrößen über einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ modelliert.
Das Prämienprinzip H für den Risikoaustausch Y_j wird durch eine Zufallsgröße $S : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert, und zwar ist

$$H(Y_j) = EY_jS, \quad j = 1, 2, ..., n, \tag{3.1.3}$$

der Preis für den j-ten Risikoaustausch. Hierbei wird natürlich vorausgesetzt, dass

$$E \mid Y_jS \mid < \infty, \; j = 1, 2, ..., n \tag{3.1.4}$$

ist.
Wir setzen weiter voraus, dass

$$E(\mid S \mid) < \infty \tag{3.1.5}$$

ist.
Wir gehen davon aus, dass der Markt abgeschlossen ist und führen folgende Definition ein.

Definition 3.1.1 *Der Zufallsvektor* $\underline{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$ *heißt* ***Risikoaustausch des Markts****, wenn*

$$\sum_{j=1}^{n} Y_j = 0,$$

fast überall gilt.

Wir definieren nun das Gleichgewicht des Marktes.
Es sei $\mathfrak{Y}$ die Menge aller Zufallsvektoren $\underline{Y}$, wobei (3.1.4) und

$$E \mid u_j(w_j - X_j + Y_j - H(Y_j)) \mid < \infty, \quad j = 1, 2, ..., n \tag{3.1.6}$$

erfüllt sind.
Weiter sei $\mathfrak{Y}_j$ **die Menge aller Risikoaustausche** Y_j des j-ten Agenten, d.h. es existiert ein Risikoaustausch $\underline{Y} \in \mathfrak{Y}$, für den die j-te Komponente Y_j ist.

Definition 3.1.2 *Das Paar $(S, \underline{Y}^*)$ heißt **Äquilibrium des Marktes**, falls*

$$\begin{aligned} \max(Y_j \in \mathfrak{Y}_j: \ & Eu_j(w_j - X_j + Y_j - H(Y_j))) \\ &= Eu_j(w_j - X_j + Y_j^* - H(Y_j^*)), \quad j = 1, 2, ..., n \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

erfüllt ist, (3.1.3) gilt und $\underline{Y}^*$ eine Risikoaustausch ist.

Es sei $(S, \underline{Y}^*)$ das Äquilibrium des Marktes für die Nutzenfunktion

$$u_j, \ j = 1, 2, ..., n$$

. Dann ist $(S, \underline{Y}^*)$ ebenfalls ein Äquilibrium des Marktes für die Nutzenfunktion $u_j^{(0)}, \ j = 1, 2, ..., n$, aus der Klasse

$$\{C_j u_j(0) + D_j : C_j > 0, \ D_j \in \mathbb{R}\}.$$

Deshalb haben wir die Normierung (3.1.2) eingeführt.
Zunächst leiten wir eine hinreichende und notwendige Bedingung für (3.1.7) her.

Satz 3.1.3
a) *Es gelte (3.1.1) und (3.1.6). Die Bedingung (3.1.7) ist erfüllt, falls eine Risikoaustausch $\underline{Y}^* \in \mathfrak{Y}$ und eine Zufallsgröße S existiert, für die $S \geqslant 0$ fast überall gilt, so dass*

$$\begin{aligned} & u_j^{(1)}(w_j - X_j + Y_j^* - H(Y_j^*)) \\ &= SEu_j^{(1)}(w_j - X_j + Y_j^* - H(Y_j^*)), \quad j = 1, 2, ..., n \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

fast überall gilt.
b) *Die Nutzenfunktionen u_j und $u_j^{(1)}, \ j = 1, 2, ..., n$, seien beschränkt. Weiter gelte (3.1.1), (3.1.4) für $Y = \underline{Y}^*$ und (3.1.7). Dann existiert $\underline{Y}^* \in \mathfrak{Y}$ derart, dass (3.1.8) erfüllt ist. Außerdem gilt $S > 0$ fast überall.*

Beweis: a) Wir zeigen, dass (3.1.8) hinreichend für (3.1.7) ist.
Es gelte also (3.1.8). Wegen (3.1.1) folgt $S \geqslant 0$.
Aus (3.1.8) folgt

$$Eu_j^{(1)}(w_j - X_j + Y_j^* - H(Y_j^*)) = ESEu_j^{(1)}(w_j - X_j + Y_j^* - H(Y_j^*)).$$

Insbesondere ist (3.1.5) erfüllt.
Da $u_j^{(1)} > 0$ ist, ergibt sich

$$ES = 1. \tag{3.1.9}$$

Da die Nutzenfunktion nach (3.1.1) konkav ist, gilt für ein $z_0 \in \mathbb{R}$

$$u_j(z) \leqslant u_j(z_0) + u_j^{(1)}(z_0)(z - z_0), \;\; z \in \mathbb{R}. \tag{3.1.10}$$

Wir setzen für einen Risikoaustausch $\underline{Y} \in \mathfrak{Y}$

$$Z := w_j - X_j + Y_j - H(Y_j)$$

und für $\underline{Y}^*$

$$Z_0 := w_j - X_j + Y_j^* - H(Y_j^*).$$

Wegen (3.1.8) gilt

$$u_j^{(1)}(Z_0) = SC_j,$$

wobei

$$C_j := Eu_j^{(1)}(w_j - X_j + Y_j^* - H(Y_j^*)).$$

Wegen (3.1.10) folgt also

$$u_j(Z) \leqslant u_j(Z_0) + SC_j(Z - Z_0).$$

Wir erhalten mit (3.1.9)

$$\begin{aligned}
Eu_j(Z) &\leqslant Eu_j(Z_0) + C_j(E(ZS - Z_0S)) \\
&\leqslant Eu_j(Z_0) + C_jE(Z - Z_0)S \\
&\leqslant Eu_j(Z_0 + C_jE((Y_j - H(Y_j)) - (Y_j^* - H(Y^*)))S \\
&\leqslant Eu_j(Z_0) + C_j((EY_jS - H(Y_j)) - (EY_j^*S - H(Y_j^*))).
\end{aligned}$$

Wegen (3.1.3) folgt also

$$Eu_j(Z) \leqslant Eu_j(Z_0).$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$Eu_j(w_j - X_j + Y_j - H(Y_j)) \leqslant Eu_j(w_j - X_j + Y_j^* - H(Y_j^*)).$$

Damit ist (3.1.7) erfüllt.

b) Wir zeigen nun, dass die Bedingung (3.1.8) für (3.1.7) notwendig ist.
Es gelte also für einen Risikoaustausch $\underline{Y}^* \in \mathfrak{Y}$ die Bedingung (3.1.7).
Es sei $A \in \mathfrak{A}$. Weiter sei I_A die Indikatorfunktion zu A.
Offenbar gilt für $t \in \mathbb{R}$

$$E \mid (Y_j^* + tI_A)S \mid \leqslant E \mid Y_j^* S \mid + \mid t \mid E \mid I_A S \mid .$$

Da $\underline{Y} \in \mathfrak{Y}$ und (3.1.5) gilt, erhalten wir

$$E \mid (Y_j + tI_A)S \mid < E \mid Y_j^8 S \mid + \mid t \mid E \mid S \mid < \infty.$$

Wegen der Beschränktheit von $u_j,\ j = 1, 2, ..., n$, gilt

$$E \mid u_j(T) \mid < \infty,\ j = 1, 2, ..., n$$

für alle Zufallsvariablen T.
Damit ist

$$E \mid u_j(w_j - X_j + Y_j + tI_A - H(Y_j + \epsilon I_A))) \mid < \infty$$

erfüllt.
Damit gilt $\underline{Y} + tI_A\underline{1} \in \mathfrak{Y}$ für $t \in \mathbb{R}$, wobei $\underline{1}$ der n-dimensionale Vektor, der alle Komponente gleich 1 hat, ist. Wir führen die Funktion $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ gemäß

$$g(t) = Eu_j(w_j - X_j + Y_j^* + tI_A - H(Y_j^* + tI_A))$$

ein. Wegen (3.1.7) haben wir

$$max(g(t) :\ t \in \mathbb{R} = g(0). \tag{3.1.11}$$

Wir zeigen, dass g differenzierbar ist.
Es gilt

$$H(Y_j^* + tI_A) = E(Y_j^* + tI_A)S = H(Y_j^*) + tEI_AS.$$

Somit folgt

$$g(t) = Eu_j(w_j - X_j + Y_j^* - H(Y_j^*) + t(I_A - EI_AS)).$$

Zur Vereinfachung setzen wir

$$Z := w_j - X_j + Y_j^* - H(Y_j^*)$$

und

$$W := I_A - EI_AS.$$

Dann haben wir

$$g(t) = Eu_j(Z + tW).$$

Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$\begin{aligned} C &:= \left| \frac{u_j(Z + (t+h)W) - u_j(Z + tW)}{h} \right| \\ &\leqslant \sup\left\{ | u_j^{(1)}(x) | : \ x \in \mathbb{R} \right\} | W | < \infty. \end{aligned}$$

Da $E \mid W \mid < \infty$ ist, können wir den Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} &\lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \\ =& \lim_{h \to 0} E \frac{u_j(Z + (t+h)W) - u_j(Z + tW)}{h} \\ =& \lim_{h \to 0} E \frac{u_j(Z + (t+h)W) - u_j(Z + tW)}{h} I_{W \neq 0} \\ =& Eu_j^{(1)}(Z + tW) W I_{W \neq 0} \\ =& Eu_j^{(1)}(Z + tW) W. \end{aligned}$$

Damit ist g differenzierbar und es gilt

$$g^{(1)}(t) = Eu^{(1)}(w_j - X_j + Y_j^* - H(Y_j^*) + t(I_A - H(I_A))(I_A - H(I_A)).$$

Wegen (3.1.11) gilt somit $g^{(1)}(0) = 0$, d.h.

$$Eu^{(1)}(w_j - X_j + Y_j^* - H(Y_j^*))(I_A - H(I_A)) = 0.$$

Die letzte Bedingung ist gleichwertig mit

$$\begin{aligned} &Eu_j^{(1)}(w_j - X_j + Y_j^* - H(Y_j^*))I_A \\ =&ESI_A Eu_j^{(1)}(w_j - X_j + Y_j^* - H(Y_j^*)). \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Wir definieren die Zufallsvariable L durch

$$L := Eu_j^{(1)}(w_j - X_j + Y_j^* - H(Y_j^*)) - SEu_j^{(1)}(w_j - X_j + Y_j - H(Y_j^*)). \tag{3.1.13}$$

Nach (3.1.12) gilt

$$ELI_A = 0 \tag{3.1.14}$$

für alle $A \in \mathfrak{A}$. Es sei

$$L = L_+ - L_-,$$

wobei $L_+ = max(0, L_-) \geqslant 0$ der Positivteil und $L_- := max(0, -L)$ der Negativteil von L bezeichnen.
Weiter sei

$$A_n = \{L_+ \geqslant \frac{1}{n}\}.$$

Aus (3.1.14) folgt (3.1.8). Dann erhalten wir

$$0 = ELI_{A_n} = EL_+ I_{A_n} \geqslant \frac{1}{n} P(A_n).$$

Wegen (3.1.14) haben wir

$$P(A_n) = 0, \ n = 1, 2, ...$$

.

Da $A_n \subseteq A_{n+1}, n = 1, 2, ...$ gilt, folgt

$$\lim_{n \to \infty} P(A_n) = P(L_+ > 0) = 0. \tag{3.1.15}$$

Analog folgt

$$P(L_- < 0) = 0. \tag{3.1.16}$$

Wegen (3.1.15) und (3.1.16) gilt $L = 0$ fast überall, d.h. aus (3.1.14) folgt die Bedingung (3.1.8).Wie wir im ersten Teil des Beweises gesehen hatten, folgt aus (3.1.8), dass $S > 0$ fast überall. □

Bemerkung 3.1.4 *Existiert ein Äquilibrium des Marktes, so gilt nach dem Beweis von Satz 3.1.3 stets $S > 0$ fast überall und $ES = 1$.*

Wir zeigen, dass die Zufallsvariable $S \geqslant 0$ aus Satz 3.1.3 eine Funktion des Gesamtrisikos Z des Marktes und der freien Reserven w_j der Agenten ist.

Folgerung 3.1.5 *Es gelte (3.1.1). Es existiere das Äquilibrium des Marktes. Dann gilt für $Z = \sum_{j=1}^{n} X_j$ und gewisse Funktionen $K_1 : [0,\ \infty) \times [0,\ \infty)^{n\times} \to [0,\ \infty)$ und $K_{2,j} : [0,\ \infty) \times [0,\ \infty)^{n\times} \to \mathbb{R},\ j = 1, 2,$*

$$S = K_1(Z,\ w_1, ..., w_n) \tag{3.1.17}$$

und

$$\tilde{Y}_j = Y_j^* - ESY_j^* = X_j + K_{2,j}(Z,\ w_1, ..., w_2). \tag{3.1.18}$$

Beweis:

Nach Satz 3.1.3 gilt

$$C_j(w_j)S = u_j^{(1)}(w_j - X_j + \tilde{Y}_j), \tag{3.1.19}$$

wobei

$$C_j(w_j) = Eu_j^{(1)}(w_j - X_j + \tilde{Y}_j) > 0.$$

Nach Voraussetzung (3.1.1) existiert die Inverse, $(u_j^{(1)})^{-1}$ zu $u_j^{(1)}$. Dann gilt wegen (3.1.19)

$$w_j - X_j + \tilde{Y}_j = (u_j^{(1)})^{-1}(SC_j(w_j)), \quad j = 1, ..., n. \tag{3.1.20}$$

Summieren wir bezüglich $j = 1, 2, ..., n$, so folgt

$$\sum_{j=1}^{n} w_j - Z = \sum_{j=1}^{n} (u_j^{(1)})^{-1}(SC_j(w_j)).$$

Also gilt

$$Z - \sum_{j=1}^{n} w_j = -\sum_{j=1}^{n} (u_j^{(1)})^{-1}(SC_j(w_j)). \qquad (3.1.21)$$

Wir betrachten die Funktion $g : [0, \infty) \times [0, \infty)^{n\times} \to \mathbb{R}$, *die durch*

$$g(s,\ w_1, ..., w_n) := -\sum_{j=1}^{n} (u_j^{(1)})^{-1}(sC_j(w_j))$$

definiert ist.
Nach der Voraussetzung (3.1.1) folgt

$$\frac{\partial g(s,\ w_1, ..., w_n)}{\partial s} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{C_j(w_j)}{u_j^{(2)}(u_j^{(1)} sC_j(w_j))} > 0.$$

Somit existiert eine Inverse $g^{-1}(\cdot, w_1, ..., w_n)$ *von* $g(\cdot, w_1, ..., w_n)$, *wobei* $w_1, w_2, ...w_n$ *fest gewählt sind. Wir führen die Funktion* K_1 *durch*

$$K_1(z, w_1, ...w_2) := g^{-1}(z - \sum_{k=1}^{n} w_k,\ w_1, ..., w_n)$$

ein. Es gilt wegen (3.1.21) die Behauptung (3.1.17) □

Unter gewissen Voraussetzungen ist die einzige Nutzenfunktion, die die Eigenschaft hat, dass das Äquilibrium unabhängig von den freien Reserven der Agenten ist, die Expotentialfunktion.

Satz 3.1.6 *Es gelte (3.1.1) und (3.1.2). Weiter gelte*

$$\frac{\partial E u_j^{(1)}(t+V)}{\partial t} = E u_j^{(2)}(t+V),\ j = 1, ..., n \qquad (3.1.22)$$

für alle Zufallsgrößen V *für die* $Eu_j^{(2)}(t+V)$ *existiert.*
Es existiere ein Äquilibrium $(S,\ Y^*)$ *des Marktes und es gelte*

$$(Y^* - H(Y_j^*) - X_j)(\Omega) = \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, n. \qquad (3.1.23)$$

Das Äquilibrium $(S,\ Y^*)$ des Marktes ist genau dann unabhängig von den freien Reserven $w_1, ..., w_n$, falls

$$u_j(x) = \frac{1 - e^{-\alpha_j x}}{\alpha_j},\ j = 1, \ldots, n$$

für eine gewisse Konstante $\alpha_j > 0$ gilt.

Beweis: *Es sei das Äquilibrium des Markts unabhängig von $w_1, ..., w_n$. Nach Satz 3.1.3 gilt*

$$u_j^{(1)}(w_j + V_j) = SEu_j^{(1)}(w_j + V_j),\ j = 1, \ldots, n, \tag{3.1.24}$$

wobei

$$V_j = Y_j^* - H(Y_j^*) - X_j.$$

Wegen der Voraussetzung (3.1.22) folgt nach Differentiation von (3.1.24) bezüglich w_j

$$u_j^{(2)}(w_j + V_j) = SEu_j^{(2)}(w_j + V_j),\ j = 1, \ldots, n. \tag{3.1.25}$$

Wegen (3.1.24) gilt also

$$\begin{aligned} u_j^{(2)}(w_j + V_j) =& SEu_j^{(1)}(w_j + V_j)\frac{Eu_j^{(2)}(w_j + V_j)}{Eu_j^{(1)}(w_j + V_j)} \\ =&: u_j^{(1)}(w_j + V_j)C(w_j). \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

Es sei bemerkt, dass (3.1.1) die Bedingung $Eu_j^{(1)}(w_j, ..., V_j) > 0$ nach sich zieht.

Zur Vereinfachung der Notation wird der Index j in (3.1.26) weiterhin weggelassen. Die Behauptung für alle $j = 1, \ldots, n$ sind natürlich identisch.

Damit lässt sich (3.1.26) in der Form

$$u^{(2)}(w + t) = u^{(1)}(w + t)C(w),\ t \in \mathbb{R} \tag{3.1.27}$$

schreiben.

Damit folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\ln u^{(1)}(w + t)\right) = C(w).$$

Es sei $a \in \mathbb{R}$. Nach Integration über $[a, t]$ folgt

$$\ln u^{(1)}(w+t) = C(w)t + D(w),\ t \geqslant a,$$

wobei

$$D(w) := \ln u^{(1)}(w+a) - C(w)a.$$

Damit folgt

$$u^{(1)}(w+t) = E(w)e^{C(w)t},\ t \geqslant a$$

mit

$$E(w) := e^{D(w)} > 0.$$

Nach Voraussetzung (3.1.1) folgt

$$u^{(2)}(w+t) = E(w)C(w)e^{C(w)t} < 0,\ t \geqslant a,$$

d.h. wir erhalten

$$C(w) < 0. \tag{3.1.28}$$

Wir setzen deshalb

$$F(w) := -C(w) > 0$$

und erhalten,

$$u^{(1)}(w+t) = E(w)e^{-F(w)t},\ t \geqslant a. \tag{3.1.29}$$

Wir zeigen, dass $E(w)$ und $F(w)$ in (3.1.29) unabhängig von a sind. Es sei $a_1 < a_2$. Dann haben wir

$$u^{(1)}(w+t) = E_1(w)e^{-F_1(w)t},\ t \geqslant a_1$$

und

$$u^{(1)}(w+t) = E_2(w)e^{-F_2(w)t},\ t \geqslant a_2 > a_1$$

für gewisse $E_1(w),\ E_2(w),\ F_1(w),\ F_2(w) > 0$. Dann ergibt sich

$$E_1(w)e^{-F_1(w)t} = E_2(w)e^{-F_2(w)t},\ t \geqslant a_2. \tag{3.1.30}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\frac{E_1(w)}{E_2(w)} = e^{(F_1(w)-F_2(w))t},\ t \geqslant a_2.$$

Hieraus folgt unmittelbar

$$F_1(w) = F_2(w)$$

und damit aus (3.1.30)

$$E_1(w) = E_2(w).$$

Damit ist $E(w)$ und $F(w)$ in (3.1.29) unabhängig von a. Es folgt also

$$u^{(1)}(w+t) = E(w)e^{-F(w)t}, \ t \in \mathbb{R}. \tag{3.1.31}$$

Wir zeigen, dass F unabhängig von w ist.
Wegen (3.1.24) und (3.1.31) erhalten wir

$$e^{-F(w)V} = SEe^{-F(w)V}. \tag{3.1.32}$$

Wir nehmen indirekt an, dass es freie Reserven $w^{(1)} \neq w^{(2)}$ gibt mit

$$F(w^{(1)}) \neq F(w^{(2)}). \tag{3.1.33}$$

Wegen (3.1.32) gilt also

$$e^{-F(w^{(k)})V} = SEe^{-F(w^{(k)})V}, \ k = 1, 2.$$

Damit folgt

$$e^{(F(w^{(2)})-F(w^{(1)}))V} = \frac{Ee^{-F(w^{(1)})V}}{Ee^{-F(w^{(2)})V}}. \tag{3.1.34}$$

Da die rechte Seite nicht von $\omega \in \Omega$ abhängig ist, folgt für fast alle $\omega \in \Omega$

$$(F(w^{(2)}) - F(w^{(1)}))V(\omega) = A$$

für eine gewisse Konstante $A \in \mathbb{R}$.
Nach (3.1.33) gilt somit

$$V(\omega) = \frac{A}{F(w^{(2)}) - F(w^{(1)})}$$

für fast alle $\omega \in \Omega$. Dies widerspricht der Voraussetzung (3.1.23).
Also ist F:=F(w) unabhängig von w. Wegen (3.1.31) gilt also

$$u^{(1)}(w+t) = E(w)e^{-Ft}, \ t \in \mathbb{R}$$

bzw.

$$e^{Ft}u^{(1)}(w+t) = E(w),\ t \in \mathbb{R}.$$

Wir differenzieren bezüglich t und erhalten

$$e^{Ft}(Fu^{(1)}(w+t) + u^{(2)}(w+t)) = 0,\ t \in \mathbb{R},$$

d.h. es gilt

$$\frac{\partial}{\partial t}(\ln u^{(1)}(w+t)) = -F,\ t \in \mathbb{R}.$$

Dies ist gleichwertig mit

$$(\ln u^{(1)}(x))' = -F,\ x \in \mathbb{R}.$$

Daraus folgt, wie wir oben schon gesehen hatten,

$$u^{(1)}(x) = e^{-Fx}E,\ x \in \mathbb{R}$$

mit einer gewissen Konstante $E > 0$.
Damit ergibt sich

$$u(x) = e^{-Fx}E + D,\ x \in \mathbb{R}$$

für eine gewisse Konstante D. Wegen der Normierung (3.1.2) folgt somit

$$u(x) = \frac{1 - e^{-Fx}}{F}.$$

Da diese Schlussweise für jeden Index $j = 1, ..., n$ angewendet werden kann, ergibt sich die Behauptung. □

3.2 Anwendung auf exponentielle Nutzenfunktionen

Wir bestimmen in diesem Abschnitt das Äquilibrium, falls die Nutzenfunktion exponentiell ist.
Wir setzen voraus, dass

$$u_j(x) = \frac{1}{\alpha_j}(1 - e^{-\alpha_j x}), \quad j = 1, 2, ..., n \tag{3.2.1}$$

gilt. In diesen Fall heißt $\alpha_j > 0$ eine **Risikoaversion**.
Auf Grund von Satz 3.1.6 ist zu vermuten, dass das Äquilibrium (S, Y^*) des Marktes unabhängig von den freien Reserven $w_j,\ j = 1, 2, ..., n$, ist.
Zur Abkürzung setzen wir

$$Z = \sum_{j=1}^{n} X_j \tag{3.2.2}$$

und

$$\alpha := \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\alpha_j}}. \tag{3.2.3}$$

Satz 3.2.1 *Es gelte* $E\left|X_j e^{\alpha \sum_{k=1}^{n} X_k}\right| < \infty, j = 1, 2, ..., n$, *und (3.2.1). Dann ist* $(S, \underline{Y}^*)$ *genau dann ein Äquilibrium des Marktes mit den Risiken* $X_j,\ j = 1, 2, ..., n$, *falls*

$$S := \frac{e^{\alpha Z}}{E e^{\alpha Z}} \tag{3.2.4}$$

und

$$\underline{Y}^* = \begin{pmatrix} Y_1^* \\ \vdots \\ Y_n^* \end{pmatrix}$$

mit

$$Y_j^* = X_j - \frac{\alpha}{\alpha_j} Z - \frac{E(X_j - \frac{\alpha}{\alpha_j} Z) e^{\alpha Z}}{E e^{\alpha Z}} + \mu_j, \tag{3.2.5}$$

für gewisse $\mu_j,\ j = 1, 2, ..., n$, *beliebig mit der Nebenbedingung* $\sum_{j=0}^{n} \mu_j = 0$ *gegeben sind.*

Beweis:

a) Wir werden Satz 3.1.3 anwenden. Zunächst setzen wir voraus, dass ein Äquilibrium des Marktes existiert und leiten seine Darstellung her.
Wir bemerken, dass

$$u_j^{(1)}(x) = e^{-\alpha_j x}$$

gilt. Weiter setzen wir

$$\tilde{Y}_j := Y_j^* - H(Y_j^*).$$

Da $\underline{Y}^*$ ein Risikoaustausch ist, gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{Y}_j = \sum_{j=1}^{n} Y_j^* - ES \sum_{j=1}^{n} Y_j^* = 0. \tag{3.2.6}$$

Dann gilt

$$u_j^{(1)}(w_j - X_j + \tilde{Y}_j) = e^{-\alpha_j w_j + \alpha_j (X_j - \tilde{Y}_j)}.$$

Die Bedingung (3.1.8) ist somit äquivalent zu

$$e^{\alpha_j (X_j - Y_j)} = SEe^{\alpha_j (X_j - \tilde{Y}_j)} =: SC_j. \tag{3.2.7}$$

Hieraus folgt

$$X_j - \tilde{Y}_j = \frac{\ln C_j + \ln S}{\alpha_j}. \tag{3.2.8}$$

Wegen (3.2.2), (3.2.3) und (3.2.6) folgt daraus

$$Z = \ln S \frac{1}{\alpha} + M,$$

wobei

$$M := \sum_{j=1}^{n} \frac{\ln C_j}{\alpha_j}$$

gesetzt wurde. Damit gilt

$$e^{\alpha(Z-M)} = S$$

und wegen (3.1.9) haben wir

$$Ee^{\alpha Z} e^{-\alpha M} = 1,$$

d.h. es gilt

$$S = \frac{e^{\alpha Z}}{Ee^{\alpha Z}} \ . \tag{3.2.9}$$

Wegen (3.2.8) gilt also

$$\begin{aligned} X_j - \tilde{Y}_j &= \frac{\ln C_j}{\alpha_j} + \frac{\alpha Z}{\alpha_j} - \frac{\ln Ee^{\alpha Z}}{\alpha_j} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha_j} Z + \frac{\ln C_j - \ln Ee^{\alpha Z}}{\alpha_j} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha_j} Z + D_j, \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

wobei

$$D_j := \frac{\ln C_j - \ln Ee^{\alpha Z}}{\alpha_j}$$

gesetzt wurde und (3.2.9) benutzt wurde.
Aus (3.2.10) folgt wegen (3.2.6)

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = Z + \sum_{j=1}^{n} D_j.$$

Es gilt somit

$$\sum_{j=1}^{n} D_j = 0. \tag{3.2.11}$$

Wegen Bemerkung 3.1.4 gilt

$$ES\tilde{Y}_j = 0.$$

Aus (3.2.10) folgt damit

$$EX_jS = \frac{\alpha}{\alpha_j} EZS + D_j,$$

d.h. es gilt

$$D_j = E(X_j - \frac{\alpha}{\alpha_j} Z)S.$$

Verwenden wir (3.2.9), so gilt

$$D_j = \frac{E(X_j - \frac{\alpha}{\alpha_j} Z)e^{\alpha Z}}{Ee^{\alpha Z}}.$$

Nach (3.2.10) gilt damit

$$\tilde{Y}_j = X_j - \frac{\alpha}{\alpha_j} Z - \frac{E(X_j - \frac{\alpha}{\alpha_j} Z)e^{\alpha Z}}{Ee^{\alpha Z}}$$

und somit haben wir

$$Y_j^* = X_j - \frac{\alpha}{\alpha_j} Z - \frac{E(X_j - \frac{\alpha}{\alpha_j} Z)e^{\alpha Z}}{Ee^{\alpha Z}} + ESY_j^*,$$

d.h. es gilt (3.2.5) mit $\mu_j = ESY_j^*$. Natürlich ist

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j = ES\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j^*\right) = 0.$$

b) Es seien $(S_1, \underline{Y_1^*})$ und $(S_2, \underline{Y_2^*})$ zwei Äquilibrium des Marktes. Dann folgt aus Teil a)

$$S_1 = S_2$$

und

$$Y_{j,1}^* = X_j - \frac{\alpha}{\alpha_j} Z - \frac{E(X_j - \frac{\alpha}{\alpha_j} Z) e^{\alpha Z}}{E e^{\alpha Z}} + ESY_{j,1}^*,$$

sowie

$$Y_{j,2}^* = X_j - \frac{\alpha}{\alpha_j} Z - \frac{E(X_j - \frac{\alpha}{\alpha_j} Z) e^{\alpha Z}}{E e^{\alpha Z}} + ESY_{j,2}^*,$$

für $j = 1, 2, ..., n$. Damit erhalten wir

$$Y_{j,2}^* - Y_{j,1}^* = ES(Y_{j,2}^* - Y_{j,1}^*) =: \lambda_j.$$

Daraus folgt

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 0.$$

Damit folgt

$$Y_{j,2}^* = Y_{j,1}^* + \lambda_j.$$

Hat also $\overline{Y_1}$ die Gestalt

$$Y_{j,1}^* = X_j - \frac{\alpha}{\alpha_j} Z - \frac{E(X_j - \frac{\alpha}{\alpha_j} Z) e^{\alpha Z}}{E e^{\alpha Z}} + \mu_j, \ j = 1, 2, ... \ ,$$

so folgt

$$Y_{j,2}^* = X_j - \frac{\alpha}{\alpha_j} Z - \frac{E(X_j - \frac{\alpha}{\alpha_j} Z) e^{\alpha Z}}{E e^{\alpha Z}} + (\mu_j + \lambda_j), \ j = 1, 2, ...$$

Damit lassen sich alle Äquilibrium des Marktes durch (3.2.4) und (3.2.5) beschreiben.

c) Um den Beweis abzuschließen, zeigen wir, dass $(S, \underline{Y}^*)$ wobei S durch (3.2.4) und $\underline{Y}^*$ durch (3.2.5) bestimmt sind, die Identität (3.1.8) erfüllt.
Es gilt dann

$$H(Y_j^*) = \mu_j.$$

Weiter folgt

$$u_j^{(1)}(w_j - X_j + Y_j^* - H(Y_j^*)) = e^{-\alpha_j w_j + \alpha Z + \alpha_j \frac{E\left(X_j - \frac{\alpha}{\alpha_j} Z\right) e^{\alpha Z}}{E e^{\alpha Z}}}. \qquad (3.2.12)$$

Wir bilden die Erwartung auf beiden Seiten der letzten Identität und erhalten

$$E(u_j^{(1)}(w_j - X_j + Y_j - H(Y_j^*))) = e^{-\alpha_j w_j + \alpha_j \frac{E\left(X_j - \frac{\alpha}{\alpha_j} Z\right) e^{\alpha Z}}{E e^{\alpha Z}}} E e^{\alpha Z}.$$

Damit folgt

$$SE(u_j^{(1)}(w_j - X_j + Y_j - H(Y_j^*))) = e^{\alpha Z - \alpha_j w_j + \alpha_j \frac{E\left(X_j - \frac{\alpha}{\alpha_j} Z\right)}{E e^{\alpha Z}}}. \qquad (3.2.13)$$

Wegen (3.2.12) und (3.2.13) ist also (3.1.8) für $(S, \underline{Y}^*)$ erfüllt.
Im Weiteren betrachten wir das Äquilibrium des Marktes unter der Voraussetzung, dass die Nutzenfunktionen die Gestalt

$$u_j(x) = \frac{\gamma_j}{\alpha_j}(1 - e^{-\alpha_j x}) + \frac{1 - \gamma_j}{\beta}(1 - e^{-\beta_j x}), \; j = 1, 2, ..., n \qquad (3.2.14)$$

haben, wobei $\alpha_j > 0, \; \beta_j > 0$ und $\gamma_j \in [0, 1]$ gilt.
In diesem Fall gelten die Voraussetzungen (3.1.1) und die Normierung (3.1.2).
In diesem Fall ist auf Grund von Satz 3.1.6 zu vermuten, dass das Äquilibrium von der freie Reserven $w_j, \; j = 1, 2, ..., n$ abhängig ist.
Wir leiten ein Darstellung des Äquilibriums des Marktes her, die durch einen Fixpunkt einer gewissen Funktion bestimmt wird.
Es seien $H_j : [0, \infty) \to [0, \infty)$ die Inversen der Funktionen

$$t \to \gamma e^{-\alpha_j w_j + \alpha_j t} + (1 - \gamma) e^{-\beta_j w_j + \beta t}, \; j = 1, 2, ..., n$$

Auf Grund der Voraussetzung (3.1.1) sind die Funktionen $H_j, \; j = 1, 2, ..., n$ wohl definiert.
Weiter sei für $\underline{c} = (c_1, c_2, ..., c_n) \in [0, \infty)^{n\times}$ die Funktion $K(t, \; \underline{c}) : [0, \infty) \to [0, \infty)$, die Inverse zur Funktion $t \to \sum_{j=1}^{n} H_j(tc_j)$.
Schließlich definieren wir mit Hilfe $H_j, \; j = 1, 2, ..., n$, und K die Funktion $W : [0, \infty)^{n\times} \to [0, \infty)$, wobei die j-te Komponente w_j von W durch

$$w_j(\underline{c}) = \gamma e^{-\alpha_j w_j} E e^{\alpha H_j(K(z, \underline{c}) c_j)} + (1 - \gamma) e^{-\beta_j w_j} E e^{\beta H_j(K(z, \underline{c}) c_j)}$$

definiert ist.

Satz 3.2.2 *Es gelte (3.2.14). Weiter existiere ein Äquilibrium* $(\underline{Y}^*, S)$ *des Marktes.*
Dann gilt

$$S = K(Z, \underline{c}) \tag{3.2.15}$$

und

$$Y_j^* = X_j - H_j(K(z, c_1, ..., c_n)c_j) + \mu_j, \; j = 1, 2, .., n, \tag{3.2.16}$$

wobei

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j = 0$$

und $\underline{c} = (c_1, c_2, ..., c_n)^T$ *ein Fixpunkt der Funktion* W *ist.*

Beweis: Wir wenden Satz 3.1.3 an. Zunächst sei bemerkt, dass

$$u_j^{(1)}(w_j - X_j + \tilde{Y}_j) = \gamma e^{-\alpha_j w_j + \alpha_j (X_j - \tilde{Y}_j)} + (1-\gamma) e^{-\beta_j w_j + \beta_j (X_j - \tilde{Y}_j)}.$$

Weiter sei $\tilde{Y}_j := Y_j^* + H(Y_j^*)$.
Damit ist die Identität (3.1.8) gleichwertig mit

$$H_j^{-1}(X_j - \tilde{Y}_j) = Sc_j, \tag{3.2.17}$$

wobei

$$c_j = \gamma e^{-\alpha_j w_j} E e^{\alpha_j (X_j - \tilde{Y}_j)} + (1-\gamma) e^{-\beta_j w_j} E e^{\beta_j (X_j - \tilde{Y}_j)} \tag{3.2.18}$$

Aus (3.2.17) folgt

$$X_j - \tilde{Y}_j = H_j(Sc_j). \tag{3.2.19}$$

Wegen $\sum_{j=1}^{n} \tilde{Y}_j = 0$ erhalten wir aus (3.2.19)

$$Z = \sum_{j=1}^{n} X_j = \sum_{j=1}^{n} H_j(Sc_j),$$

d.h. (3.2.15) ist gezeigt.
Aus (3.2.15) und (3.2.19) folgt

$$\tilde{Y}_j = X_j - H_j(K(Z, \underline{c})c_j), \; j = 1, 2, ..., n. \tag{3.2.20}$$

Da
$$\sum_{j=1}^{n} H(Y_j^*) = \sum_{j=1}^{n} ESY_j^* = ES\sum_{j=1}^{n} Y_j^* = 0,$$
erhalten wir aus (3.2.20) die Darstellung (3.2.16) mit
$$\mu_j := ESY_j^*,\ j = 1, ..., n$$
Mit Hilfe von (3.2.15) und (3.2.16) lässt sich (3.2.18) in der Form
$$\begin{aligned} c_j &= \gamma e^{-\alpha_j w_j} Ee^{\alpha_j (H_j(K(Z,\underline{c})c_j))} + (1-\gamma)e^{\beta_j w_j} Ee^{-\beta_j (H_j(K(Z,\underline{c})c_j))} \\ &= W_j(c_j),\ j = 1, 2, ..., n, \end{aligned}$$
schreiben, d.h. $\underline{c} = (c_1, ..., c_n)^T$ ist ein Fixpunkt von W.
Damit ist Satz 3.2.1 vollständig gezeigt. □

Bemerkung 3.2.3 *Unter der Voraussetzung von Satz 3.2.1 ist das Äquilibrium des Marktes $(S, \underline{Y}^*)$ unabhängig vom freien Reserve der Agenten.*

Satz 3.2.1 suggeriert ein Prämienprinzip H mit einer Zufallsgröße S, die durch (3.2.4) definiert ist.
Ist X ein Risiko, das mit der Markt verbunden ist, so ist dann
$$H_B(X, \alpha) = \frac{EXe^{\alpha Z}}{Ee^{\alpha Z}} \tag{3.2.21}$$
eine Risikoprämie. Sie hängt von der Zufallsvektor $(X, Z)^T$ ab.
Falls X eines der Risiken des Marktes ist, so sind X und $Z - X$ unabhängig, Hierbei setzen wir voraus, dass alle Risiken $X_1, X_2, ..., X_n$ unabhängig sind.
Deshalb betrachten wir das Risikoprinzip (3.2.21) unter der Voraussetzung, dass die Risiken X und $Z - X$ unabhängig sind. Dann gilt für die Prämie von X
$$\frac{EXe^{\alpha Z}}{Ee^{\alpha Z}} = \frac{EXe^{\alpha(X+Z-X)}}{Ee^{\alpha(X+Z-X)}} = \frac{EXe^{\alpha X}e^{Z-X}}{Ee^{\alpha X}e^{\alpha(Z-X)}}.$$
Da die beiden Zufallsgröße $Xe^{\alpha X}$ und $e^{\alpha(Z-X)}$ ebenfalls unabhängig sind, folgt weiter
$$\frac{EXe^{\alpha Z}}{Ee^{\alpha Z}} = \frac{EXe^{\alpha X}}{Ee^{\alpha X}}\frac{Ee^{\alpha(Z-X)}}{Ee^{\alpha(Z-X)}} = \frac{EXe^{\alpha X}}{Ee^{\alpha X}}. \tag{3.2.22}$$

Unter der Voraussetzung der Unabhängigkeit der Zufallsgröße X und Z-X ist also die Prämie unabhängig von der Summer Z der Risiken der Marktes. Nach Beispiel 2.2.5 ist dies gerade das Esscher-Prinzip. Es gilt also

$$H_{es}(F,\alpha) = H_B(X,\alpha) = \frac{EXe^{\alpha X}}{Ee^{\alpha X}}.$$

3.3 Modifiziertes Preismodell von Bühlmann

Wir setzen zusätzlich zu den Voraussetzungen des Preismodells von Bühlmann aus Abschnitt 3.2 weitere Bedingungen voraus.
Wir werden sehen, dass das Prämienprinzip (3.2.22) sich unter den gemachten Voraussetzungen modifiziert.
Wir erinnern zunächst an die verallgemeinerte Inverse F^- einer Verteilungsfunktion F. Sie ist durch

$$F^-(t) := \begin{cases} sup(x : F(x) \leqslant t) & \{x : F(x) \leqslant t\} \neq \emptyset \\ -\infty & \{x : F(x) \leqslant t\} = \emptyset \end{cases} \tag{3.3.1}$$

definiert. Für $t \in (0,1)$ ist $F^-(t)$ endlich.
Die zusatzbedingungen lauten:
A1. Für die Verteilungsfunktion des Gesamtrisikos aller mit dem Markt verbundenen Risiken gelte

$$Z \sim N(\mu, \sigma^2).$$

A2. Es existiert Zufallsgröße $V_j \sim N(0,1)$, so dass der Zufallsvektor $(V_j, Z)^T$ bivariat normalverteilt ist, und zwar gelte für den Korrelationskoeffizienten zwischen V_j und Z

$$Kor(V_j, Z) = \rho,\ j = 1, 2, ..., n.$$

Weiter sei

$$X_j = F^-(\Phi(V_j)),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung bezeichnet, d.h.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Satz 3.3.1 *Mit den Voraussetzungen **A1** und **A2** gilt für H_B aus (3.2.21)*

$$H_B(X_j, \alpha) = \frac{E(X_j e^{\alpha\sigma\rho V_j})}{E(e^{\alpha\sigma\rho V_j})} = \frac{EX_j e^{\alpha\sigma\rho} F^-(X_j)}{Ee^{\alpha\sigma\rho} F^-(X_j)} = \frac{EF^-(\Phi(V_j) e^{\alpha\delta V_j})}{Ee^{\alpha\delta V_j}}. \tag{3.3.2}$$

Beweis:

Es sei

$$Z_0 := \frac{Z - \mu}{\sigma}. \tag{3.3.3}$$

Dann ist bekanntlich $Z_0 \sim N(0, 1)$.

Außerdem gilt nach Voraussetzung **A2**

$$Kor(V_j, Z_0) = \rho, \;\; j = 1, 2, ..., n.$$

Da $Var(V_j) = 1$ und $Var(Z_0) = 1$ erfüllt sind, gilt

$$\rho = cov(V_j, Z_0) = E(V_j Z_0). \tag{3.3.4}$$

Die Zufallsgröße Y sei durch

$$Y := Z_0 - \rho V_j \tag{3.3.5}$$

definiert.

Da der Zufallsvektor $(Y, V_j)^T$ eine lineare Transformation des Zufallsvektors $(Z_0, V_j)^T$ ist, ist der Zufallsvektor $(Y, V_j)^T$ bivariat normal verteilt.

Die Transformation lautet nämlich

$$\begin{pmatrix} Y \\ V_j \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_0 \\ V_j \end{pmatrix}.$$

Wir bestimmen die Kovarianz zwischen Y und V_j. Es gilt wegen (3.3.4)

$$\begin{aligned} cov(Y, V_j) &= cov(Z_0 - \rho V_j, V_j) \\ &= E(Z_0 - \rho)V_j \\ &= E(Z_0 V_j) - \rho E(V_j^2) \\ &= \rho - \rho = 0. \end{aligned}$$

Bekanntlich ist die letzte Identität gleichwertig mit der Unabhängigkeit von Y und V_j.
Für die Risikoprämie von Bühlmann gilt dann mit (3.3.3), (3.3.5) und Voraussetzung A2

$$H_B(X_j, \alpha) = \frac{E(X_j e^{\alpha(\sigma Z_0 + \mu)})}{E(e^{\alpha(\sigma Z_0 + \mu)})} = \frac{E(X_j e^{\alpha\sigma(\rho V_j + Y)})}{E(e^{\alpha\sigma(\rho V_j + Y)})}$$

und somit

$$H_B(X_j, \alpha) = \frac{E(X_j e^{\alpha\sigma\rho V_j})E(e^{\alpha\sigma Y})}{E(e^{\alpha\sigma\rho V_j})E(e^{\alpha\sigma Y})} = \frac{E(X_j e^{\alpha\sigma\rho V_j})}{E(e^{\alpha\sigma\rho V_j})},$$

d.h. es gilt (3.3.2).

□

Bemerkung 3.3.2 *Da $V_j \sim N(0,1)$, folgt*

$$F_{\Phi(V_j)}(y) = P(\Phi(V_j) \leqslant y) = P(V_j \leqslant \Phi^{-1}(y)) = \Phi(\Phi^{-1}(y)) = y, \; y \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $\Phi(V_j) \sim U(0,1)$. Voraussetzung A2 besagt, dass $X_j \sim F$ (vgl. Satz 3.3.1) .

Bemerkung 3.3.3 *Die Prämie (3.3.2) ist offenbar ebenfalls unabhängig von der Summe der Risiken des Marktes.*

Kapitel 4

Prämienprinzipien durch die Transformationen

4.1 Einführung

Das Esscher-Prinzip kann neben der Begründung durch das Bühlmann-Preis-Modell auch auf eine andere Art interpretiert werden.Wir bemerken, dass für $\alpha > 0$

$$F^*(x) = \frac{\int_{[0,x]} e^{\alpha t} F(dt)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\alpha t} F(dt)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

eine Verteilungsfunktion ist und dass

$$H_{es}(F) = m_{1,F^*}$$

gilt.
Dies suggeriert die Einführung von Prämienprinzipien mit Hilfe von Transformationen der Risikoverteilung.
Die Transformation

$$F \to F^*$$

heißt **Esscher-Transformation**. Sie ist für alle Verteilungsfunktionen erklärt, für die $M_F(\alpha) < \infty$.
Wir betrachten ein Risiko $X \sim F \in \mathbb{M}$. Außerdem sei eine Transformation T in $\mathbb{M}$ gegeben, d.h. eine Abbildung

$$T : F \in D_T \subseteq \mathbb{M} \to F^* = T(F) \in [0, \infty) = \mathbb{R}_+.$$

Dann können wir das **Transformationsprinzip** wie folgt einführen.

Definition 4.1.1 *Es sei $T : D_T \subset \mathbb{M} \to \mathbb{R}_+$ eine Abbildung, wobei $T(F)$ für alle $F \in D_T$ das erste Moment besitzt. Dann heißt das Prämienprinzip H_T, das durch*

$$H_T(F) = m_{1,T(F)} = m_{1,F^*} \tag{4.1.1}$$

*definiert ist, **Transformationsprinzip mit der Abbildung T** oder kurz **T-Prinzip**. Die Transformation T bezeichnet man auch als **Verteilungsfunktionstransformation**.*

Es seien die Zufallsgröße $X \sim F$ und $X^* \sim F^* = T(F)$ gegeben. Dann können wir (4.1.1) äquivalent in der Form

$$H_T(X) = H_e(X^*)$$

schreiben.

Beispiel 4.1.2 *Wie bemerkt, ist das Esscher-Prinzip ein Transformationsprinzip. Hierbei gilt*

$$T_\alpha(F)(x) = F^*(x) = \frac{\int_{[0,x]} e^{t\alpha} F(dt)}{M_F(\alpha)} \tag{4.1.2}$$

und

$$D_{T_a} = \{F \in \mathbb{M} : r_{+,F} > \alpha\}. \tag{4.1.3}$$

Offenbar gilt für alle $F \in D_{T_\alpha}$, dass F^* das erste (sogar alle Momente) Moment besitzt.

Wir betrachten eine besondere Teilklasse von Verteilungsfunktionstransformationen.

Satz 4.1.3
a) *Es sei* $G : [0,1] \to [0,1]$ *monoton wachsend, rechtsstetig und außerdem in 1 linksstetig. Weiter sei*

$$G(0) = 0 \tag{4.1.4}$$

und

$$G(1) = 1 \tag{4.1.5}$$

erfüllt.
Dann ist

$$T_G : F \subset D_{T_G} \to G(F) = F^* \tag{4.1.6}$$

ein Verteilungsfunktionstransformation.
b) *Es existiere* $m_{1,F}$ *und* G *sei differenzierbar und besitze eine beschränkte Ableitung. Dann existiert* m_{1,F^*}*.*

Beweis:
a) Natürlich ist F^* monoton wachsend. Außerdem gilt

$$F^*(\infty) := \lim_{x\to\infty} F^*(x) = \lim_{x\to\infty} G(F(x)) = G(1) = 1$$

und

$$F^*(-\infty) = \lim_{x\to\infty} F^*(x) = \lim_{x\to\infty} G(F(x)) = G(0) = 0.$$

Weiter folgt

$$F^*(x+0) = \lim_{t\downarrow x} F^*(t) = \lim_{t\downarrow x} G(F(t)) = G(F(x)) = F^*(x),$$

d.h. F^* ist rechtsstetig. Damit ist F^* eine Verteilungsfunktion.
b) Aufgrund des Mittelwertsatz existiert für alle $x \in \mathbb{R}$ eine Zahl mit $t \in (0,1)$ mit

$$1 - G(F(x)) = G(1) - G(F(x)) = G^{(1)}(t)(1 - F(x)).$$

Damit folgt

$$1 - G(F(x)) \leqslant sup(G^{(1)}(t) : t \in (0,1))(1 - F(x)).$$

Schließlich erhalten wir aus der Ungleichung

$$m_{1,F^*} = \int_0^\infty (1 - G(F(x)))dx \leqslant sup(G^{(1)}(t); t \in (0,1))m_{1,F} < \infty$$

die Behauptung.

$\square$

Zur Vereinfachung setzen wir

$$D_{T_G} =: D_G.$$

Bemerkung 4.1.4 *Wenn die Verteilungsfunktion F auf einem Intervall konzentriert ist, folgt $F \in D_G$.*
Um dies zu zeigen, nehmen wir an, dass die Verteilungsfunktion F auf $[a,b]$ konzentriert ist. Dann gilt

$$m_{1,F^*} := \int_a^b (1 - G(F(x)))dx \leqslant b - a < \infty.$$

Beispiel 4.1.5 *Wir wissen, dass das Esscher-Prinzip ein Transformationsprinzip ist.(vgl. Beispiel 4.1.2)*
Jedoch wird das Esscher-Prinzip nicht durch eine Transformation T_G wie in (4.1.6) definiert, beschrieben.
Um dies zu zeigen, nehmen wir an, dass mit (4.1.2) und (4.1.6)

$$T_\alpha(F)(x) = T_G(F(x)) = G(F(x)),\ x \in \mathbb{R}$$

gilt.
Dann haben wir

$$\frac{\int_{[0,x]} e^{\alpha t} F(dt)}{M_F(\alpha)} = G(F(x)) \tag{4.1.7}$$

Wir wählen mit $\lambda > 0$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ \alpha \geqslant 0.$$

In diesem Fall gilt wegen (4.1.3) $F \in D_{T_\alpha}$ genau dann, wenn $\alpha < \lambda$.
Die Identität (4.1.7) ist in diesem Fall äquivalent zu

$$1 - e^{(a-\lambda)x} = G(1 - e^{-\lambda x}).$$

Damit gilt für $t = 1 - e^{-\lambda x} \in (0,1)$

$$G(t) = 1 - (1-t)^{1-\frac{a}{\lambda}}.$$

Die rechte Seite hängt von λ ab, jedoch nicht die linke Seite. Damit ist der Ansatz (4.1.7) falsch, d.h. das Esscher-Prinzip ist nicht durch eine Transformation T_G aus Satz 4.1.3 abgedeckt.

4.2 Spezielle Transformationen von den Verteilungsfunktionen

Die Teilklasse der Verteilungsfunktionstransformation, die in Satz 4.1.3 beschrieben wird, hängt von der Abbildung G ab.
Wir führen nun eine Teilklasse solcher Verteilungsfunktionstransformationen ein, wobei G durch eine monoton wachsende Funktion bestimmt ist, die von einer Verteilungsfunktion abhängt.(vgl. 3.3.1)
Dazu benötigen wir ein Hilfsresultat für die verallgemeinerte Inverse einer Verteilungsfunktion.

Lemma 4.2.1 *Es sei F eine Verteilungsfunktion. Dann ist $F^{-}(t) = x$ eindeutig durch die Ungleichung*

$$F(x-) \leqslant t < F(x+\epsilon) \tag{4.2.1}$$

für beliebige $\epsilon > 0$ bestimmt.

Beweis: Auf Grund der Definition von $F^{-}(t) = x$ gilt

$$F(x - \epsilon_1) \leqslant t < F(x + \epsilon_2)$$

für $\epsilon_1,\ \epsilon_2 > 0$. Für $\epsilon_1 \to 0$ folgt

$$F(x-) \leqslant t < F(x + \epsilon)$$

mit $\epsilon = \epsilon_2 > 0$, d.h. es gilt (4.2.1).
Wir beweisen indirekt, dass die Bedingung (4.2.1) den Wert $F^{-}(t)$ bestimmt. Dazu nehmen wir an, dass x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ existieren, so dass

$$F(x_1-) \leqslant t < F(x_1 + \epsilon) \tag{4.2.2}$$

und

$$F(x_2-) \leqslant t < F(x_2 + \epsilon) \tag{4.2.3}$$

für $\epsilon > 0$ erfüllt ist. Wir wählen $\epsilon_1 > 0$ mit

$$x_1 + \epsilon_1 < x_2.$$

Schließlich sei n genügend groß gewählt, so dass

$$x_1 + \epsilon_1 < x_2 - \frac{1}{n}.$$

Dann folgt

$$F(x_1 + \epsilon_1) \leqslant F(x_2 - \frac{1}{n})$$

und schließlich für $n \to \infty$

$$F(x_1 + \epsilon_1) \leqslant F(x_2-).$$

Wegen (4.2.2) und (4.2.3) gilt

$$t < F(x_1 + \epsilon_1) \leqslant F(x_2-) \leqslant t.$$

Dies ist offensichtlich ein Widerspruch. Also ist definierte $F^{-}(t)$ durch die Ungleichung (4.2.1) eindeutig.

□

Zufallsgrößen mit einer Verteilungsfunktion können mit Hilfe der verallgemeinerten Inverse von F und einer gleichmäßig in $(0, 1)$ verteilten Zufallsgröße, erzeugt werden.

Satz 4.2.2 *Es sei F eine Verteilungsfunktion und $U \sim U(0,1)$. Dann ist $F^{-}(U) \sim F$.*

Beweis:
Offenbar ist F^{-} Borel-messbar. Damit ist $y = F^{-}(U)$ eine Zufallsgröße.
Auf Grund von Lemma 4.2.1 haben wir

$$[0, F(x-)) \subseteq \{u \geqslant 0 : F^{-}(u) \leqslant x\} \subseteq [0, F(x+\epsilon))$$

für beliebige $\epsilon > 0$.
Damit folgt

$$\begin{aligned} F(x-) &= P(U \in [0, F(x-)]) \\ &\leqslant P(F^{-}(U) \leqslant x) \\ &\leqslant P(U \in [0, F(x+\epsilon)]) = F(x+\epsilon). \end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, folgt

$$F(x-) \leqslant P(F^{-}(U) \leqslant x) \leqslant F(x)$$

Hieraus folgt

$$P(F^{-}(U) \leqslant x) = F(x)$$

für alle Stetigkeitsstellen x von F.
Da die Menge der Stetigkeitsstellen der Verteilungsfunktion F dicht in $\mathbb{R}$ ist und da sowohl $x \to P(F^{-}(u) \leqslant x)$ als auch F rechtsstetig sind, folgt

$$P(F^{-}(u) \leqslant x) := F(x), \ x \in \mathbb{R},$$

d.h. die Behauptung ist gezeigt. □

Satz 4.2.3
Es sei $H : (0,1) \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion mit

$$H(0+) =: \lim_{t \downarrow 0} H(t) = -\infty \tag{4.2.4}$$

und

$$H(1-) =: \lim_{t \uparrow 1} H(t) = \infty. \tag{4.2.5}$$

Weiter existiere für $\lambda > 0$, so dass

$$\int_0^1 e^{\lambda H(t)} dt < \infty. \tag{4.2.6}$$

Die Funktion $H_\lambda : [0, \infty) \to [0, \infty)$ sei durch

$$H_\lambda(u) := \frac{\int_0^u e^{\lambda H(t)} dt}{\int_0^1 e^{\lambda H(t)} dt} \tag{4.2.7}$$

definiert.

***a)** Die Funktion H_λ ist streng monoton wachsend und es gilt $H_\lambda(0) = 0$ und $H_\lambda(1) = 1$.*

***b)** Die Bedingung*

$$m_{1, T_{H_\lambda}(F)} < \infty$$

ist gleichwertig mit

$$\left| \int_0^1 e^{\lambda H(t)} F^-(t) dt \right| < \infty.$$

Insbesondere gilt

$$m_{1, T_{H_\lambda}(F)} = \frac{\int_0^1 e^{\lambda H(t)} F^-(t) dt}{\int_0^1 e^{\lambda H(t)} dt}. \tag{4.2.8}$$

Bemerkung 4.2.4 *Unter der Voraussetzung von Satz 4.2.3 ist $G = H_\lambda$ eindeutig durch H und $\lambda > 0$ bestimmt. Wir schreiben deshalb*

$$\hat{D}_{H,\lambda} = D_{H_\lambda}.$$

Beweis:

a) Es sei $G = H_\lambda$. Wegen der Definition von G ist G streng monoton wachsend. Es folgt mittelbar aus (4.2.7) $G(0) = 0$ und $G(1) = 1$.

b) Es gilt

$$F^*(x) = T_G(F(x)) = \frac{\int_0^{F(x)} e^{\lambda H(t)} dt}{\int_0^1 e^{\lambda H(t)} dt}.$$

Damit folgt

$$1 - F^*(x) = \overline{F^*(x)} = \frac{\int_{F(x)}^1 e^{\lambda H(t)} dt}{\int_0^1 e^{\lambda H(t)} dt}.$$

Weiter haben wir

$$m_{1,F^*} = \int_0^\infty \overline{F^*(x)} dx = \frac{\int_0^\infty (\int_{F(x)}^1 e^{\lambda H(t)} dt) dx}{\int_0^1 e^{\lambda H(t)} dt} =: \frac{C}{\int_0^1 e^{\lambda H(t)}} dt. \tag{4.2.9}$$

Es sei

$$B = \{(t, x) : x \geqslant 0 \text{ und } F(x) \leqslant t \leqslant 1\}.$$

Es gilt somit

$$C = \int_0^\infty \left(\int_{F(x)}^1 e^{\lambda H(t)} dt \right) dx = \int_B e^{\lambda H(t)} dt dx.$$

Wir wenden nun den Satz von Fubini-Tonelli an. Zu diesem Zweck bestimmen wir die Projektion von B auf die x-Achse. Es gilt für $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$B_t = \{x : x \geqslant 0 \text{ und } F(x) \leqslant t\}.$$

Wenn $F(0) > t$, so gilt offenbar $B_t = \emptyset$.
Damit gilt

$$B_t = [0, F^-(t)]$$

oder

$$B_t = [0, F^-(t)).$$

Im ersten und zweiten Fall ergibt sich

$$\int_{B_t} dx = F^-(t).$$

Somit erhalten wir

$$C = \int_{F(0)}^1 e^{\lambda H(t)} (\int_{B_t} dx) dt = \int_{F(0)}^1 e^{\lambda H(t)} \left(\int_{B_t} dt \right) = \int_{F(0)}^1 e^{\lambda H(t)} F^-(t) dt. \tag{4.2.10}$$

Für t mit $F(0) > t$ gilt natürlich $F^-(t) = 0$. Damit erhalten wir

$$C = \int_0^1 e^{\lambda H(t)} F^-(t) dt.$$

Wegen (4.2.9) ist somit $m_{1,F^*} < \infty$ gleichwertig mit

$$\int_0^1 e^{\lambda H(t)} F^-(t) dt < \infty,$$

d.h. Teil b) ist bewiesen.

$\square$

Beispiel 4.2.5 *Wir zeigen, dass die Prämie (3.3.2) durch eine Verteilungsfunktionstransformation gewonnen werden kann.*
Offenbar gilt mit $\lambda := \alpha\sigma$ wegen (3.3.2)

$$H_B(X_j, \alpha) = \frac{E(F^-(\Phi(V_j))e^{\lambda V_j})}{E(e^{\lambda V_j})}. \tag{4.2.11}$$

Anderseits gilt wegen $V_j \sim N(0,1)$ nach Bemerkung 3.3.2 ist $\Phi(V_j) \sim U(0,1)$
Aus (4.2.11) erhalten wir

$$H_B(X_j,\ \alpha) := \frac{\int_0^1 F^-(t) e^{\lambda \Phi^{-1}(t)} dt}{E e^{\lambda V_j}}. \tag{4.2.12}$$

Nach Voraussetzung A2 und Satz 3.3.1 gilt also $X_j = F^-(\Phi(V_j)) \sim F$.
Damit definiert (4.2.12) das Prämienprinzip

$$H_W(F) := \frac{\int_0^1 F^-(t) e^{\lambda \Phi^{-1}(t)} dt}{E e^{\lambda V_j}}.$$

Bekanntlich gilt für die momenterzeugende Funktion von $V_j \in N(0,1)$

$$E e^{\lambda V_j} = e^{\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Damit haben wir

$$H_W(F) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \int_0^1 F^-(t) e^{\lambda \Phi^{-1}(t)} dt. \tag{4.2.13}$$

Wir zeigen, dass diese Prämie ein T-Prinzip ist.
Für $\lambda > 0$ betrachten wir die Transformation T_λ

$$T_\lambda : F \to \Phi(\Phi^{-1} \circ F - \lambda).$$

Diese Transformation wird durch die Klasse der Transformation, die in Satz 4.1.3 definiert ist, beschrieben.

$$G(t) = \Phi(\Phi^{-1}(t) - x),\ 0 < t < 1.$$

Die Funktion G ist in $(0,1)$ monoton wachsend und stetig. Setzen wir

$$G(0) := \lim_{t \downarrow 0} G(t)$$

und

$$G(1) := \lim_{t \uparrow 0} G(t).$$

Außerdem ist G in 0 damit rechtsstetig und in 1 linksstetig.
So haben wir $G(0) = 0$ und $G(1) = 1$ und G ist monoton wachsend und rechtsstetig, d.h. die Voraussetzungen von Satz 4.1.3 sind erfüllt. Außerdem gilt

$$T_\lambda(F(x)) = G(F(x)) =: F^* \tag{4.2.14}$$

d.h. (4.1.6) ist erfüllt.
*Die Transformation T_λ heißt **Wang-Transformation** und das entsprechende Prämienprinzip ist das **Wang-Prinzip**.*
Für die Prämie (3.3.2) gilt also

$$H_W(F) = m_{1,F^*}.$$

Für $\lambda = 0$ gilt natürlich $F^* = F$, d.h. $T_G(x) = x$.
Damit gilt $D_G = \{F : m_{1,F} < \infty\}$.
Wir werden diesen Fall im Weiteren ausschließen und setzen $\lambda > 0$ voraus.
Für $\lambda > 0$ scheint die Bestimmung des Definitionsbereichs schwierig zu sein.
Satz 4.1.3 b) kann nicht angewendet werden, da wegen

$$G^{(1)}(t) = e^{t\Phi^{-1}(t)} e^{-\frac{\lambda}{2}}$$

das Supremum von $G^{(1)}$ über $t \in [0,1]$ unendlich ist.
Wir zeigen, dass F mit

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-a}{b}\right) \tag{4.2.15}$$

für $a \in \mathbb{R}$ *und* $b > 0$ *in* D_{H_W} *liegt, d.h.* $F \in D_{H_W}$.
Die Verteilungsfunktion wird auch als $F = N(a, b^2)$ *notiert.*
In diesem Fall gilt

$$\Phi^{-1}(F(x)) = \Phi^{-1}\Phi\left(\frac{x-a}{b}\right) = \frac{x-a}{b}$$

und somit folgt

$$F^*(x) = \Phi\left(\frac{x}{b} - \left(\frac{a}{b} + \lambda\right)\right) = \Phi\left(\frac{x-(a+\lambda b)}{b}\right).$$

Somit haben wir gezeigt:
Wenn $F = N(a, b^2)$*, so ist* $F^* = N(a + \lambda b, b^2)$.
Damit ist

$$m_{1,F^*} = a + \lambda b$$

und

$$\{N(a, b^2),\ a \in \mathbb{R},\ b > 0\} \subseteq D_{H_W}. \tag{4.2.16}$$

Wir werden zeigen, dass die Prämien aus Beispiel 4.2.5 ebenfalls auf einem Prämienprinzip, das in Satz 4.2.3 beschrieben ist, beruhen. Dieses Prämienprinzip ergibt sich aus einem modifizierten Bühlmann-Preismodell ergibt. Die Funktion G hat die Darstellung (4.2.7) mit $H_\lambda = \Phi^{-1}$.
Wir untersuchen die Eigenschaften des Wang-Prämienprinzips.
Zunächst zeigen wir, dass das Wang-Prämienprinzip nicht erwartungwertübersteigend ist, d.h. die Eigenschaft A1 nicht erfüllt.
Zu diesem Zweck wählen wir mit $\alpha \in [0, 1]$ die Verteilungsfunktion

$$F_\alpha(x) = \alpha\delta_{\frac{1}{2}}(x) + (1-\alpha)\delta_0(x).$$

Offenbar gilt

$$m_{1,F_\alpha} = \frac{\alpha}{2}.$$

Zur Bestimmung des Wang-Prämienprinzips leiten wir zunächst die verallgemeinerte Inverse zu F_α her. Nach Definition gilt nämlich

$$F_\alpha^-(t) := \begin{cases} \frac{1}{2} & 0 < t < \alpha \\ 0 & \alpha \leqslant t < 1 \end{cases}$$

Damit erhalten wir nach Satz 4.2.3

$$m_{1,H_W(F_\alpha)} = \frac{1}{2}\int_0^\alpha e^{\lambda\Phi^{-1}(t)}dt.$$

Wir nehmen indirekt an, dass A1 gilt, d.h. wir haben

$$H_W(F_\alpha) \geqslant m_{1,F_\alpha} = \frac{\alpha}{2}. \tag{4.2.17}$$

Dann ist (4.2.17) gleichwertig mit

$$h(\alpha) := \alpha - \int_0^\alpha e^{\lambda\Phi^{-1}(t)}dt \leqslant 0. \tag{4.2.18}$$

Wir untersuchen die Hilfsfunktion $h : [0,1) \to \mathbb{R}$ offenbar gilt $h(0) = 0$. Wir haben nach Substitution $y = \Phi^{-1}(t)$

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{\lambda\Phi^{-1}(t)}dt &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda y}\Phi(y)dy \\ &= e^{\frac{\lambda^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\frac{(y-\lambda)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy \\ &= e^{\frac{\lambda^2}{2}}. \end{aligned} \tag{4.2.19}$$

Damit gilt

$$h(1) = 1 - \int_0^1 e^{\lambda\Phi^{-1}(t)}dt = 1 - e^{\frac{\lambda^2}{2}} < 0.$$

Außerdem folgt für die Ableitung von h

$$h^{(1)}(\alpha) = 1 - e^{\lambda\Phi^{-1}(\alpha)}.$$

Daraus folgt, dass h für $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ monoton wachsend ist und für $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$ monoton fallend ist. Damit existiert ein $\alpha_0 < \frac{1}{2}$ derart, dass $h(\alpha_0) > 0$, d.h. für F_{α_0} ist A1 nicht erfüllt.

Nun zeigen wir, dass das Wang-Prämienprinzip nicht den Maximalschaden übersteigt, d.h. A2 ist erfüllt.

Es sei F Verteilungsfunktion mit dem größten Wachstumspunkt $M < \infty$, d.h.

$$M := \sup(x : F(x) < 1).$$

Dies ist gleichwertig mit

$$F^{-}(t) \leqslant M,$$

für $t \in (0,1)$. Dann folgt aus Satz 4.2.3 und (4.2.13)

$$H_W(F) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \int_0^1 e^{\lambda\Phi^{-1}(t)} F^{-}(t)dt \leqslant M e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \int_0^1 e^{\lambda\Phi^{-1}(t)} dt.$$

Wegen (4.2.19) folgt

$$H_W(F) \leqslant M.$$

Schließlich zeigen wir, dass das Wang-Prämienprinzip translationsäquivariant ist.
Es sei F ein Verteilungsfunktion und für $c \in \mathbb{R}$

$$F_c(x) = F(x-c).$$

Die Eigenschaft A3 ist gleichwertig mit

$$H_W(F_c) = H_W(F) + c.$$

Wir schließen aus der Definition der verallgemeinerten Inversen, dass

$$F_c^{-}(t) = F^{-}(t) + c$$

gilt. Damit folgt aus (4.2.13)

$$\begin{aligned} H_W(F_c) &= e^{-\frac{\lambda^2}{2}} \int_0^1 F_c^{-}(t) e^{\lambda\Phi^{-1}(t)} dt \\ &= e^{-\frac{\lambda^2}{2}} (F^{-}(t) e^{\lambda\Phi^{-1}(t)} + c e^{\frac{\lambda^2}{2}}) \\ &= H_W(F) + c, \end{aligned}$$

d.h. A3 ist erfüllt.

Beispiel 4.2.6

Im Folgenden zeigen wir, dass die Wang-Transformation auch durch Satz 4.2.3 beschrieben werden kann.
Wir wenden Satz 4.2.3 für $H(t) = \Phi^{-1}(t)$, $t \in (0,1)$ an. Offenbar sind die

Voraussetzungen (4.2.4) und (4.2.5) erfüllt. Auch die Voraussetzung (4.2.6). Um dies zu sehen, substituieren wir $s = \Phi^{-1}(t)$ und erhalten für $u > 0$ und $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^u e^{\lambda\Phi^{-1}(t)}dt &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} e^{\lambda s}\varphi(s)ds = e^{\frac{\lambda^2}{2}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \frac{e^{-\frac{(s-\lambda)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}ds \\ &= e^{\frac{\lambda^2}{2}}\Phi(\Phi^{-1}(u) - \lambda).\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\int_0^1 e^{\lambda\Phi^{-1}(t)}dt = e^{\frac{\lambda^2}{2}} < \infty. \tag{4.2.20}$$

Damit erfüllt $\Phi^{-1}(t)$ die Voraussetzungen von Satz 4.2.3 und für die entsprechende Funktion H_λ gilt

$$H_\lambda(u) := \frac{\int_0^u e^{\lambda\Phi^{-1}(t)}dt}{\int_0^1 e^{\lambda\Phi^{-1}(t)}dt} = \Phi(\Phi^{-1}(u) - \lambda).$$

Falls F^* aus (4.2.14) das erste Moment besitzt, so gilt nach Satz 4.2.3

$$m_{1,F^*} = \int_0^1 F^-(t)e^{\lambda\Phi^{-1}(t)}dt,$$

d.h. die Prämie (3.3.2) ist ein T-Prämie mit der Transformation T_λ, da T_λ durch Funktion H_λ mit der Darstellung (4.2.7) gegeben ist.
Wir haben offenbar

$$\hat{D}_{\Phi^{-1},\lambda} = \left\{ F : \mathbb{M} \left| \left| \int_0^1 e^{\lambda\Phi^{-1}(t)}F^-(t)dt \right| < \infty \right. \right\}.$$

Also ist $F \in \hat{D}_{\Phi^{-1},\lambda}$ genau dann, wenn

$$\left| \int_0^1 e^{\lambda\Phi^{-1}(t)}F^-(t)dt \right| < \infty. \tag{4.2.21}$$

Substituieren wir $s = \Phi^{-1}(t)$, so erhalten

$$\int_0^1 e^{\lambda\Phi^{-1}(t)}F^-(t)dt = e^{\frac{\lambda^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(s-\lambda)^2}{\sqrt{2}}}}{\sqrt{2\pi}}F^-(\Phi(s))ds.$$

Es sei $Z \sim N(0,1)$. Somit ist die Bedingung (4.2.21) gleichwertig mit

$$\left|EF^{-}(\Phi(Z+\lambda))\right| < \infty. \tag{4.2.22}$$

Mit Hilfe der Bedingung (4.2.22) lässt sich sofort das Resultat (4.2.16) von Beispiel 4.2.5 nachweisen. Es sei $F = N(a, b^2)$. Damit gilt

$$F^{-}(t) = a + b\Phi^{-1}(t)$$

und somit folgt

$$\left|EF^{-}(\Phi(Z+\lambda))\right| = a + b\lambda < \infty.$$

□

Wir betrachten nun eine Teilklasse der Transformation, die das Esscher-Prinzip enthält.

Satz 4.2.7 *Es sei $K : \mathbb{R} \to [0,\ \infty)$ und es gelte für eine Verteilungsfunktion F*

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t)F(dt) < \infty. \tag{4.2.23}$$

a) *Dann ist*

$$\tilde{K}(F)(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} K(t)F(dt)}{\int_{-\infty}^{\infty} K(t)F(dt)} \tag{4.2.24}$$

eine Verteilungsfunktion.

b) *Es gilt*

$$m_{1,\tilde{K}(F)} < \infty \tag{4.2.25}$$

genau dann, wenn

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} tK(t)F(dt)\right| < \infty. \tag{4.2.26}$$

In diesem Fall gilt

$$m_{1,\tilde{K}(F)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} tK(t)F(dt)}{\int_{-\infty}^{\infty} K(t)F(dt)}. \tag{4.2.27}$$

Beweis:
Unmittelbar aus der Definition (4.2.24) folgt, dass $\tilde{K}(F)$ eine Verteilungsfunktion ist, falls (4.2.23) erfüllt ist.
Für das erste Moment von $\tilde{K}(F)$ gilt offenbar (4.2.27) und (4.2.27) ist nur dann endlich, falls (4.2.26) erfüllt. $\square$

Bemerkung 4.2.8
a) *Der Definitionsbereich von $\tilde{K}$ sei $D_{\tilde{K}}$. Es gilt offenbar*

$$D_{\tilde{K}} = \left\{ F: \int_{-\infty}^{\infty} K(t)F(dt) < \infty, \; \left| \int_{-\infty}^{\infty} tK(t)F(dt) \right| < \infty \right\}.$$

b) *Für $K(t)$ mit*

$$K(t) = \begin{cases} e^{\alpha t} & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

ist das $\tilde{K}$-Prinzip das Esscher-Prinzip.
c) *Für K mit*

$$K(t) = \begin{cases} e^{\lambda H(t)} & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

wobei $\lambda > 0$ und H die Voraussetzungen von Satz 4.2.3 erfüllt, ist das $\tilde{K}$-Prinzip das Verteilungsfunktionsprinzip aus Satz 4.2.3.

4.3 Beziehung zwischen Verteilungsfunktionen und Quantilfunktionen

Auf Grund des modifizierten Preis-Modells von Bühlmann ergibt sich die Frage, wie die Verteilungsfunktion durch die verallgemeinerten Inverse beschrieben werden kann.
Zunächst untersuchen wir Eigenschaften der verallgemeinerte Inverse F^{-} einer Verteilungsfunktion F.

Auf Grund der Definition sieht man, dass die Funktion F^- monoton wachsend und rechtsstetig ist.
Zur Bestimmung der verallgemeinerten Inverse ist folgendes Resultat hilfreich. Diese verallgemeinerte Inverse werden wir nun als Quantilfunktion bezeichnen und beginnen mit ihrer Definition.

Definition 4.3.1 *Eine Funktion $Q : (0,1) \to \mathbb{R}$ heißt Quantilfunktion, falls sie monoton wachsend und rechtsstetig ist.*

Analog zur Quantilfunktion einer Verteilungsfunktion wird $Q^- : \mathbb{R} \to [0,1]$ durch

$$Q^-(x) := \begin{cases} sup(t \in (0,1), Q(t) \leqslant x) & \{t : Q(t) \leqslant x\} \neq \emptyset \\ 0 & \{t : Q(t) \leqslant x\} = \emptyset \end{cases}$$

definiert.
Im Weiteren sei das Supremum einer leeren Menge gleich 0. Dann können wir die Definition von Q^- kurz durch

$$0 \leqslant Q^-(x) = sup(t \in (0,1) : \; Q(t) \leqslant x)$$

notieren.
Offenbar sind Q und Q^- monoton wachsend. Zur Vereinfachung schreiben wir

$$\lim_{x \downarrow x_0} Q(x) =: Q(x_0 + 0)$$

und

$$\lim_{x \uparrow x_0} Q(x) =: Q(x_0 - 0).$$

Analog wird $Q^-(x_0 + 0)$ und $Q^-(x_0 - 0)$ eingeführt.
Wir untersuchen nun die Eigenschaften einer Quantilfunktion und ihrer Inversen.

Satz 4.3.2
a) *Für alle $t \in (0,1)$ gilt*

$$Q^-(Q(t)) \geqslant t. \tag{4.3.1}$$

Außerdem gilt

$$Q^-(Q(t)) = t. \tag{4.3.2}$$

genau dann, wenn für beliebig ϵ mit $0 < \epsilon < 1 - t$,

$$Q(t + \epsilon) > Q(t). \tag{4.3.3}$$

b) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < Q^-(x) < 1$ gilt*

$$Q(Q^-(x)) \geqslant x. \tag{4.3.4}$$

Die Beziehung

$$Q(Q^-(x)) = x \tag{4.3.5}$$

gilt, wenn für beliebige ϵ, $0 < \epsilon < 1 - Q^-$

$$Q(Q^-(x) + \epsilon) > Q(Q^-(x)). \tag{4.3.6}$$

c) *Q^- ist Verteilungsfunktion.*
d) *Es gilt $(Q^-)^- = Q$.*

Beweis: a) Es sei $t \in (0, 1)$. Weiter sei ϵ mit $0 < \epsilon < 1 - t$. Dann gilt

$$Q(t - \epsilon) \leqslant Q(t).$$

Die Definition von Q^- liefert

$$t - \epsilon \leqslant Q^-(Q(t)).$$

Da ϵ beliebig gewählt werden kann, folgt (4.3.1).
Es gelte (4.3.2). Dann folgt für ϵ mit $0 < \epsilon < 1 - t$ die Ungleichung

$$t + \epsilon > Q^-(Q(t))$$

und somit ergibt sich wegen der Definition von Q^- sofort (4.2.3).
Es gelte (4.3.3) für ϵ mit $0 < \epsilon < 1 - t$. Dann folgt auf Grund der Definition von Q^-

$$t + \epsilon > Q^-(Q(t)).$$

Für $\epsilon \to 0$ ergibt sich

$$t \geqslant Q^-(Q(t)).$$

Wegen (4.3.1) folgt somit (4.3.2).

b) Es existiert eine monoton fallende Folge $(t_n)_{n=1,2,\ldots}$ mit $t_n > Q^-(x)$ und

$$\lim_{n\to\infty} t_n = Q^-(x).$$

Dann haben auf Grund der Definition von Q^-

$$Q(t_n) > x.$$

Wegen der Rechtsstetigkeit von Q folgt also für $n \to \infty$

$$Q(Q^-(x)) \geqslant x,$$

d.h. es gilt (4.3.4).

Es gelte (4.3.5). Dann folgt für $\epsilon,\ 0 < \epsilon < 1 - Q^-(x)$,

$$Q(Q^-(x) + \epsilon) > x = Q(Q^-(x))$$

d.h. es gilt (4.3.6).

c) Es sei $x_1 \leqslant x_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} Q^-(x_1) &= \sup(t \in (0,1) : Q(t) \leqslant x_1) \\ &\leqslant \sup(t \in (0,1)) : Q(t) \leqslant x_2) = Q^-(x_2), \end{aligned}$$

d.h. Q^- ist monoton wachsend.

Offenbar gilt damit

$$Q^-(x_0 + 0) \geqslant Q^-(x_0).$$

Um zu zeigen, dass

$$Q^-(x_0 + 0) = Q^-(x_0),$$

nehmen wir indirekt an, dass es ein x_0 gibt mit

$$Q^-(x_0 + 0) > Q^-(x_0).$$

Wir wählen t so, dass

$$Q^-(x_0+0) > t > Q^-(x_0)$$

gilt.
Damit existiert eine monoton fallende Folge $(x_n)_{n=1,2\dots}$, die gegen x_0 konvergiert, mit $Q^-(x_n) > t > Q^-(x_0)$. Aus der Ungleichung $t < Q^-(x_n)$ folgt aus der Definition von Q^-

$$Q(t) \leqslant x_n$$

und somit

$$Q(t) \leqslant x_0. \tag{4.3.7}$$

Aus der Ungleichung $t > Q^-(x_0)$ ergibt sich

$$Q(t) > x_0.$$

Diese Ungleichung steht im Widerspruch zu (4.3.7). Damit ist die Annahme falsch und Q^- ist rechtsstetig.
Wir zeigen nun, dass

$$Q^-(\infty) := Q^-(\infty+0) = 1. \tag{4.3.8}$$

Für $t,\ 0 < t < 1$, gilt mit a) (4.3.1), d.h.

$$t \leqslant Q^-(Q(t)) \leqslant Q^-(\infty) \leqslant 1.$$

Für $t \to 1$ ergibt

$$Q^-(\infty+0) = 1.$$

Wir zeigen nun

$$Q^-(\infty) = Q^-(-\infty+0) = 0. \tag{4.3.9}$$

Wir zeigen (4.3.9) indirekt. Es gelte

$$Q^-(-\infty+0) > 0.$$

Wir wählen $t \in (0,1)$ mit

$$Q^-(-\infty+0) > t > 0.$$

Dann gilt

$$Q^{-}(x) > t > 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. es gilt

$$Q(t) \leqslant x$$

und somit folgt

$$Q(t) = -\infty$$

im Widerspruch zur Definition von Q. Damit ist (4.3.9) gezeigt.

d) Auf Grund der Definition der Inversen und c) folgt

$$(Q^{-})^{-}(t) = \sup(x : \ Q^{-}(x) \leqslant t).$$

Es sei $x < (Q^{-})^{-}(t)$. Dann gilt $Q^{-}(x) \leqslant t$. Damit gibt es zwei Möglichkeiten: (i) $Q^{-}(x) < t$ und (ii) $Q^{-}(x) = t$.

Im Fall (i) erhalten wir

$$x < Q(t).$$

Für $x \uparrow (Q^{-})^{-}(t)$ folgt

$$(Q^{-})^{-}(t) \leqslant Q(t). \tag{4.3.10}$$

Im Fall (ii) wählen wir x' mit

$$x < x' < (Q^{-})^{-}(t).$$

Damit gilt

$$Q^{-}(x) \leqslant Q^{-}(x') \leqslant t.$$

Folglich gilt

$$Q^{-}(x) = Q^{-}(x') = t.$$

Weiter erhalten wir aus der Definition von Q^{-}

$$Q(t) \leqslant x < x' < Q(t + \epsilon)$$

für ϵ mit $0 < \epsilon < 1 - \epsilon$. Wegen der Rechtsstetigkeit von Q folgt der Widerspruch

$$Q(t) \leqslant x < x' \leqslant Q(t).$$

Also ist der Fall (ii) unmöglich.
Weiter sei $x > (Q^-)^-(t)$. Dann gilt

$$Q^-(x) > t$$

und somit

$$Q(t) \leqslant x.$$

Für $x \downarrow (Q^-)^-(t)$ folgt

$$Q(t) \leqslant (Q^-)^-(t). \tag{4.3.11}$$

Wegen (4.3.10) und (4.3.11) erhalten wir die Behauptung.

□

Wir zeigen, dass Sprünge der Quantilfunktion Intervallen der Inversen entsprechen, in denen die Inverse konstant ist. Auch die Umkehrung erweist sich als richtig.

Satz 4.3.3
Es sei Q eine Quantilfunktion
a) *Gilt für $t \in (0,1)$*

$$Q(t-) < Q(t) \tag{4.3.12}$$

so ist

$$Q^-(x) = t \tag{4.3.13}$$

für $x \in [Q(t-), Q(t))$ erfüllt.
b) *Gilt (4.3.13) für $x \in [A, B)$ mit $A < B$, so ist (4.3.12) erfüllt.*
c) *Gilt für $x \in \mathbb{R}$*

$$Q^-(x-) < Q^-(x), \tag{4.3.14}$$

so ist

$$Q(t) = x \tag{4.3.15}$$

für $t \in [Q^-(x-), Q(x))$ erfüllt.
d) *Ist (4.3.15) für $t \in [a, b)$ mit $a < b$ erfüllt, so folgt (4.3.14).*

Beweis: a)
Ist (4.3.12) für ein $t \in (0,1)$ erfüllt, so folgt (4.3.13) mit $x \in [Q(t-), Q(t))$ unmittelbar aus der Definition der Inverse Q^- und der Rechtsstetigkeit von Q^-.
b) Aus (4.3.13) folgt auf Grund der Definition von Q^-

$$Q(t-\epsilon) \leqslant x < Q(t+\epsilon),$$

für $\epsilon > 0$ und $0 < t-\epsilon < t+\epsilon < 1$. Nach Grenzübergang $\epsilon \to 0$ ergibt sich

$$Q(t-) \leqslant x \leqslant Q(t).$$

Auf Grund der Wahl von x haben wir schließlich

$$Q(t-) \leqslant A < B < Q(t),$$

d.h. (4.3.12) ist erfüllt.
c) Es gilt (4.3.14) mit $x \in \mathbb{R}$. Wir wählen $t \in (0,1)$ und $\epsilon > 0$ so, dass

$$Q^-(x-\epsilon) \leqslant Q^-(x-) < t < Q^-(x)$$

erfüllt ist. Dann folgt aus der Definition der Inverse Q^-

$$x - \epsilon < Q(t) \leqslant x.$$

Für $\epsilon \to 0$ folgt (4.3.15) für $t \in [Q^-(x-), Q(x))$.
d) Es gelte (4.3.15) für $t \in [a,b)$. Dann erhalten wir für $\epsilon > 0$

$$Q^-(x-\epsilon) < t \leqslant Q^-(x).$$

Für $\epsilon \to 0$ folgt

$$Q^-(x-) \leqslant a < b \leqslant Q^-(x),$$

d.h. es ist (4.3.14) erfüllt. □

Satz 4.3.4 *Die Inverse einer Quantilfunktion bestimmt eindeutig die Quantilfunktion.*

Beweis:
Es seien Q_1 und Q_2 zwei Quantilfunktionen mit

$$Q_1^- = Q_2^-.$$

Dann folgt aus Satz 4.3.2 d)

$$Q_1 = (Q_1^-)^- = (Q_2^-)^- = Q_2.$$

□

Der Definitionsbereich der Transformation T_G aus Satz 4.2.3 können wir mit Hilfe der Quantilfunktion der Verteilungsfunktion beschreiben.
Es sei

$$\hat{D}_{H,\lambda}^- = \left\{ Q : Q - Quantilfunktion, \ \left| \int_0^1 e^{\lambda H(t)} Q(t) dt \right| < \infty \right\}.$$

Nach den Sätzen 4.3.2 und 4.3.4 gilt offenbar $F \in \hat{D}_H$ genau dann, wenn $F^- \in \hat{D}_H^-$.
Die Struktur von $\hat{D}_H^-$ ist einfach zu beschreiben.

Satz 4.3.5 *Es sei $H : (0,1) \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende Funktion mit den Eigenschaften (4.2.4), (4.2.5) und (4.2.6). Es sei $x_1, \ x_2 \geqslant 0$ und $\lambda > 0$, wenn $Q_1, Q_2 \in \hat{D}_{H,\lambda}^-$, so auch*

$$x_1 Q_1 + x_2 Q_2 \in \hat{D}_{H,\lambda}^-.$$

Beweis:
Es gelte $Q_1, \ Q_2 \in \hat{D}_{H,\lambda}^-$. Wir erhalten

$$-\infty < \int_0^1 e^{\lambda H(t)} Q_j(t) dt < \infty, \ j = 1, 2.$$

Dann gilt

$$-\infty < \int_0^1 e^{-\lambda H(t)} (x_1 Q_1(t) + x_2 Q_2(t)) dt < \infty,$$

falls $x_1, \ x_2 > 0$. Außerdem ist $x_1 Q_1 + x_2 Q_2$ eine Quantilfunktion.

□

Definition 4.3.6 *Es sei F eine Verteilungsfunktion. Weiter sei $(b_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ eine nichtnegative Folge und es gelte*

$$c_j = \sum_{s=-\infty}^{j} b_j < \infty, \; j \in \mathbb{Z}. \tag{4.3.16}$$

Schließlich sei $(y_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ eine monoton wachsende und unbeschränkte Folge mit

$$y_j + b_j < y_{j+1}, \; j \in \mathbb{Z}. \tag{4.3.17}$$

Es gelte

$$\lim_{s\to\infty} (y_j - c_{j-1}) = \infty.$$

Dann heißt

$$\tilde{F}(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} F(y_j - c_{j-1}) I_{[y_j, y_j+b_j)}(x) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} F(x - c_j) I_{[y_j+b_j, y_{j+1})}(x) \tag{4.3.18}$$

gestreckte Verteilungsfunktion *zu F.*

Bemerkung 4.3.7 *Für die Folge $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ mit $c_j = a$ gilt offenbar*

$$\tilde{F}^{-}(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} F(y_j - a) I_{[y_j, y_j+b_j)}(x) + F(x - a) \sum_{j\in\mathbb{Z}} I_{[y_j+b_j, y_{j+1})}(x).$$

Insbesondere gilt für $b_j = 0$, $j \in \mathbb{Z}$

$$\tilde{F}(x) = F(x - a).$$

Satz 4.3.8 *Es sei F eine Verteilungsfunktion. Weiter sei $(b_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ eine nicht negative Folge, die (4.3.16) und $(y_j)_{j=1,2,\ldots}$ eine monoton wachsende unbeschränkte Folge mit*

$$y_j + b_j < y_{j+1}, \; j \in \mathbb{Z}. \tag{4.3.19}$$

Weiter sei

$$\lim_{j\to\infty} (y_j - c_{j-1}) = \infty.$$

a) *Dann ist die Funktion $\tilde{F}$, die durch (4.3.18) mit (4.3.17) definiert ist, eine Verteilungsfunktion.*
b) *Es gilt für die Quantilfunktion von $\tilde{F}$*

$$\tilde{F}^{-}(t) = F^{-}(t) + \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j I_{[F(y_j - c_{j-1}),\ F(y_{j+1} - c_j))}(t). \tag{4.3.20}$$

c) *Es gelten für eine monoton wachsende Funktion $H : (0,1) \to \mathbb{R}$ die Bedingungen*

$$H(0+) = \lim_{t \downarrow 0} H(t) = -\infty$$

und

$$H(1-) = \lim_{t \uparrow 1} H(t) = \infty.$$

Weiter gelte

$$\int_0^1 e^{\lambda H(t)} dt < \infty.$$

Weiter sei $F^{-} \in \hat{D}_H^{-}$.
Dann gilt $\tilde{F} \in \hat{D}_{H,\lambda}$, wenn

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}}^{\infty} c_j \int_{F(y_j - c_{j-1})}^{F(y_{j+1} - c_j)} e^{\lambda H(t)} dt < \infty. \tag{4.3.21}$$

Beweis:
a) Auf Grund der Definition von $\tilde{F}$ gilt

$$\lim_{x \to -\infty} \tilde{F}(x) = 0$$

und

$$\lim_{x \to \infty} \tilde{F}(x) = 1.$$

Außerdem ist $\tilde{F}$ rechtsstetig.
Auf Grund der Definition von $\tilde{F}$ ist $\tilde{F}$ in den Intervallen $(y_j,\ y_j + b_j)$ stetig und in den Intervallen $(y_j + b_j,\ y_{j+1})$ rechtsstetig.

Wir überprüfen, dass $\tilde{F}$ auch in y_j bzw. $y_j + b_j$ rechtsstetig ist.
In ersten Fall erhalten wir für $0 < \epsilon < b_j$

$$\tilde{F}(y_j + \epsilon) = F(y_j - c_{j-1}),$$

d.h. es gilt

$$\tilde{F}(y_j + 0) = F(y_j - c_{j-1}) = \tilde{F}(y_j) \tag{4.3.22}$$

und $\tilde{F}$ ist in y_j rechtsstetig.
Wir betrachten nun die Rechtsstetigkeit von $\tilde{F}$ in $y_j + b_j$.
Wir wählen $0 < \epsilon < y_{j+1} - (y_j + b_j)$.
Dann gilt

$$\tilde{F}(y_j + b_j + \epsilon) = F(y_j + b_j + \epsilon - c_j) = F(y_j - c_{j-1} + \epsilon)$$

und somit folgt

$$\tilde{F}(y_j + b_j + \epsilon) = F(y_j - c_{j-1}) = \tilde{F}(y_{j-1} + b_j). \tag{4.3.23}$$

Wir zeigen, dass $\tilde{F}$ auch monoton wachsend ist. Da $\tilde{F}$ auf Grund der Definition monoton wachsend in den Intervallen $[y_j,\ y_j + b_j)$, $[y_j + b_j, y_{j+1})$, $j \in \mathbb{Z}$ ist, genügt es nachzuweisen, dass für $j \in \mathbb{Z}$

$$\tilde{F}(y_j + b_j-) \leqslant \tilde{F}(y_j + b_j) \tag{4.3.24}$$

und

$$\tilde{F}(y_j-) \leqslant \tilde{F}(y_j). \tag{4.3.25}$$

Da

$$\tilde{F}(y_j + b_j-) = \tilde{F}(y_j - c_{j-1}), \tag{4.3.26}$$

ist die Ungleichung (4.3.24) wegen (4.3.23) erfüllt.
Weiter gilt nach Definition

$$\tilde{F}(y_j-) = F(y_j - c_{j-1}-)$$

und somit ist die Ungleichung (4.3.25) wegen (4.3.22) erfüllt.
b) Es sei $t \in (0,1)$ Dann existiert eine ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ mit

$$y_z \leqslant \tilde{F}^{-}(t) < y_{z+1}. \tag{4.3.27}$$

Wir betrachten weiter zwei Fälle

(i) $y_z \leqslant \tilde{F}^{-}(t) < y_z + b_z$.

(ii) $y_z + b_z \leqslant \tilde{F}^{-}(t) < y_{z+1}$.

Zu Fall (i). In diesem Fall haben wir auf Grund der Definition der Inversen $\tilde{F}^{-}$

$$\tilde{F}(y_z) \leqslant t < \tilde{F}(y_z + b_z).$$

Wegen (4.3.23) und (4.3.22) ergibt sich

$$F(y_z - c_{z-1}) \leqslant t < F(y_z + b_z - c_z) = F(y_z - c_{z-1}).$$

Dies ist offenbar ein Widerspruch. Also kann der Fall (i) nicht auftreten.
Zu Fall (ii). Nach Lemma 4.2.1 haben wir

$$\tilde{F}(x-) \leqslant t < \tilde{F}(x + \epsilon). \tag{4.3.28}$$

Für $x \in (y_z + b_z, y_{z+1})$ haben wir

$$\tilde{F}(x-) = F(x - c_z-).$$

Für $x = y_z + b_z$ gilt

$$\tilde{F}(x-) = \tilde{F}(y_z + b_z-) = F(y_z - c_{z-1}) \geqslant F(x - c_z) \geqslant F(x - c_z-).$$

Also gilt für $y \in [y_z + b_z, y_{z+1})$

$$\tilde{F}(x-) \geqslant F(x - c_z-). \tag{4.3.29}$$

Außerdem gilt für $0 < \epsilon < b_z$

$$\tilde{F}(x + \epsilon) = F(x - c_z + \epsilon). \tag{4.3.30}$$

Mit (4.3.29) und (4.3.30) ist die Ungleichung (4.3.28) gleichwertig mit

$$F(x - c_z) \leqslant t < F(x - c_z + \epsilon).$$

Wenden wir erneut Lemma 4.2.1 an, so folgt

$$x - c_z = F^-(t),$$

d.h. es gilt

$$\tilde{F}^-(t) = x = F^-(t) + c_z. \tag{4.3.31}$$

Auf Grund der Definition von z erhalten wir

$$\tilde{F}(y_z + b_z) \leqslant t < \tilde{F}(y_{z+1})$$

bzw.

$$F(y_z - c_{z-1}) \leqslant t < F(y_{z+1} - c_z).$$

Auf Grund von (4.3.19) gilt

$$y_j - c_{j-1} < y_{j+1} - c_j,$$

d.h. die Folge $(y_j - c_{j-1})_{j\in\mathbb{Z}}$ ist streng monoton wachsend.
Damit ist (4.3.31) gleichwertig mit

$$\tilde{F}^-(t) = F^-(t) + \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j I_{[F(y_j - c_{j-1}),\ F(y_{j+1} - c_j))}(t),$$

d.h. es gilt (4.3.20).
c) Wegen (4.3.21) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \int_{F(y_k)-c_k}^{F(y_{k+1})-c_k} e^{\lambda H(t)} dt &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{F(y_k)-c_{k-1}}^{F(y_{k+1})-c_k} c_k e^{\lambda H(t)} dt \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_0^1 c_k I_{[F(y_k),\ F(y_{k+1}))} dt \\
&= \int_0^1 e^{\lambda H(t)} \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_j I_{[F(y_j - c_{j-1}),\ F(y_{j+1} - c_j))}(t) dt.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt wegen $F^- \in \hat{D}^-_{h,\lambda}$ nach Satz 4.2.3

$$\mid \int_0^1 F^-(t)e^{\lambda H(t)}dt \mid < \infty.$$

Wegen Satz 4.3.8 b) und Satz 4.2.3 ist $\tilde{F} \in \hat{D}^-_{H,\lambda}$, da

$$\int_0^1 e^{\lambda H(t)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j I_{[F(y_j - c_{j-1}),\ F(y_{j+1}-c_j))} dt < \infty. \tag{4.3.32}$$

□

Folgerung 4.3.9 *Es gelte zusätzlich*

$$\lim_{j\to\infty} c_j = c < \infty. \tag{4.3.33}$$

Weiter sei H wie in Satz 4.3.8 gewählt. Dann ist $F \in \hat{D}_{H,\lambda}$ und $\tilde{F} \in \hat{D}_{H,\lambda}$ äquivalent.

Beweis:

a) Es sei $F \in \hat{D}_{H,\lambda}$. Wegen (4.3.33) ist die Folge $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ nach oben beschränkt. Es sei C eine obere Schranke.

Dann gilt

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j \int_{F(y_j-c_{j-1})}^{y_{j+1}-c_j} e^{\lambda H(t)}dt \leqslant C \int_0^1 e^{\lambda H(t)}dt < \infty, \tag{4.3.34}$$

d.h. (4.3.21) ist erfüllt. Nach Satz 4.3.8 c) ist das $\tilde{F} \in \hat{D}_{H,\lambda}$

b) Es sei $\tilde{F} \in \hat{D}_{H,\lambda}$. Dann haben wir mit Satz 4.3.8 b), (4.3.34) und (4.3.30)

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^1 e^{\lambda H(t)} F^-(t)dt \right| \\ \leqslant &\left| \int_0^1 e^{\lambda H(t)} F^-(t)dt \right| + \int_0^1 e^{\lambda H(t)} \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j I_{[F(y_j-c_{j-1}),\ F(y_{j+1}-c_j))}(t)dt < \infty, \end{aligned}$$

d.h. $F \in D_{H,\lambda}$.

Beispiel 4.3.10 *Wir kehren zu Beispiel 4.2.6 zurück. Danach ist* $\Phi \in \hat{D}_\Phi$*. Die monoton wachsende und nicht negative Folge* $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ *erfülle die Bedingung*

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \int_{\Phi(y_{j+1}-c_j)}^{\Phi(y_j-c_{j-1})} e^{\lambda\Phi^{-1}(t)}dt < \infty.$$

Hierbei ist $(y_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ eine monoton wachsende und unbeschränkt Folge. Dann ist die gestreckte Verteilungsfunktion $\tilde{\Phi}$ in $\hat{D}_\Phi$ enthalten. Wählen wir die Folge $(c_j)_{j=1,2,\ldots}$ so dass

$$\lim_{j\to\infty} c_j = c,$$

so erhalten wir nach Folgerung 4.3.9, dass $\tilde{\Phi} \in D_{\Phi^{-1},\lambda}$. Dies verallgemeinert Beispiel 4.2.6 und dies zu beweisen, wählen wir $F = N(0, b^2)$. Da $F^{-1} = b\Phi^{-1}$, gilt $F \in D_{\Phi^{-1},\lambda}$.
Nach Behauptung x gibt es Folge $(y_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ derart, dass $\tilde{F} = F(x-a)$, d.h. für $F = N(a, b^2)$ erhalten wir $F \in D_{\Phi^{-1},\lambda}$.

Symbolverzeichnis

$\mathbb{N}$	Menge der positiven ganzen Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}_+$	Menge der nicht negativen reellen Zahlen
$\mathfrak{B}$	σ-Algebra der Borelschen Teilmengen von $\mathbb{R}$
$(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$	Wahrscheinlichkeitsraum
F_Y	Verteilungsfunktion der Zufallsgröße Y
$E(Y)$	Erwartungswert der Zufallsgröße Y
$Var(Y)$	Varianz der Zufallsgröße Y
$m_{k,F}$	k-te Moment der Verteilungsfunktion
V_λ	Varianzprinzip
H	Prämienprinzip
H_e	Erwartungswertprinzip
H_{es}	Esscher-Prinzip
H_W	Wang-Prinzip
$x \uparrow t$	x konvergiert linksseitig gegen t
$x \downarrow t$	x konvergiert rechtsseitig gegen t
$\psi(u)$	Ruinwahrscheinlichkeit
u	freie Reserve im Risikomodell
$r_{-,F}$	linke Konvergenzradius von $G(\cdot, F)$
$r_{+,F}$	rechte Konvergenzradius von $G(\cdot, F)$

Literaturverzeichnis

[1] Kijima M. (2006) A multivariate extension of equilibrium pricing tansforms: the multivariate Esscher and Wang Transforms for Pricing Financial and Insurance Risks, Astin Bulletin 36(1), pp. 269-283

[2] Bühlmann, H. (1980) An economic premium principle, Astin Bulletin, **11**, pp. 52-60

[3] Wang, S. S. (2002) A universal framework for pricing financal and insurance risiks, Astin Bulletin, **32**, pp. 213-234

[4] Wang, S. S. (2003) Equilibrium pricing transforms: New results using Bülmann's 1980 economie model, Astin Bulletin, **33**, pp. 57-73

[5] William Feller (1950) An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 1, 3rd Edition, Wiley, New York

[6] Jürgen Elstrodt (2004) Maß-und Integrationstheorie, Springer, Auflage: 4. korr. Aufl. pp. 313

Eidesstattliche Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe, insbesondere sind wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet. Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandlung auch nachträglich zur Aberkennung des Abschlusses führen kann.

Ort, Datum **Unterschrift**