

Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

Approximation durch Fourierreihen

Bachelorarbeit

Name des Studenten: Volkmar Albert Hofmann
Matrikelnummer: 1015938
Studiengang: Polyvalenter Bachelor Lehramt Mathematik und Physik
Abgabedatum: 10.08.2009
Betreuer: Prof. Dr. Günter Berger

Vorwort

Mit der Approximation von Funktionen durch Fourierreihen beschäftigt sich die vorliegende Arbeit. Ziel der Überlegungen ist die Zusammenfassung der grundlegenden Erkenntnisse über Fourierreihen. Dabei wird neben der Betrachtung ihrer Notwendigkeit und theoretischen Basis auch die Analyse diverser Beispiele mit Bezug zur Physik und Elektrotechnik im Vordergrund stehen. Ferner wird auf die verschiedenen Sichtweisen von Analysis und Numerik in diesem Zusammenhang eingegangen. So soll die Lektüre zum sicheren Umgang mit Fourierreihen befähigen und kann gewissermaßen als Literatur zum begleitenden Selbststudium angesehen werden. Zum Verständnis sind lediglich gute Kenntnisse aus der Integralrechnung notwendig.

Inhaltsverzeichnis

1	Fourierreihenentwicklung	3
1.1	Motivation	3
1.2	Koeffizientenbestimmung nach Euler-Fourier	4
1.3	Verallgemeinerung auf beliebige Intervalle	8
2	Konvergenzbetrachtungen	12
2.1	Dirichletsches Integral	12
2.2	Kriterium von Dini	14
3	Numerische Fourieranalyse	17
3.1	Trapezregel für zwölf Ordinatenwerte	17
3.2	Simpsonsche Regel für zwölf Ordinatenwerte	23
3.3	Methode der kleinsten Quadrate	26
4	Zusammenfassung	30
5	Literaturverzeichnis	32
6	Selbständigkeitserklärung	33

Kapitel 1

Fourierreihenentwicklung

1.1 Motivation

In der Natur und in der Technik treten häufig periodische Funktionen auf. Als Beispiele seien die Spannung und die Stromstärke im Wechselstromkreis, sowie die Auslenkung bei Schwingungen genannt. Betrachtet man das Fadenpendel für kleine Auslenkwinkel, so kann die Auslenkung als Funktion in Abhängigkeit von der Zeit durch eine Sinusfunktion dargestellt werden. Für kompliziertere Anordnungen kann diese Funktion eine wesentlich schwierigere Form annehmen. Man stelle sich zum Beispiel ein Fadenpendel, an dessen Ende eine Feder mit einem weiteren Fadenpendel hängt, vor und lasse beliebige Auslenkwinkel zu.

Die Idee der Entwicklung einer Fourierreihe lässt sich an dieser Stelle gut nachvollziehen. Der mathematische Umgang mit Sinusfunktionen gestaltet sich in Bezug auf Differentiation und Integration relativ einfach. Vorteilhaft wäre es demnach, wenn sich eine beliebige periodische Funktion als Summe verschiedener Sinusfunktionen darstellen ließe. Vorest soll angenommen werden, dass eine solche Darstellung möglich sei.

Definition 1.1 (Fourierreihe). Sei f eine Funktion der Periode 2π und g eine unendliche Reihe mit $g(x) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(mx + \alpha_m) = f(x)$. Aufgrund des Additionstheorems $\sin(mx + \alpha_m) = \sin mx \cos \alpha_m + \sin \alpha_m \cos mx$ und den Festlegungen $A_0 = a_0$, $a_m = A_m \sin \alpha_m$, $b_m = A_m \cos \alpha_m$ gilt:

$$g(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mx + b_m \sin mx) = f(x) \quad (1.1)$$

g sei die Fourierreihe der Funktion f .

1.2 Koeffizientenbestimmung nach Euler-Fourier

Es stellt sich nun natürlich die Frage wie bei Vorgabe dieser Funktion f die Koeffizienten a_0 , a_m und b_m ihrer Fourierreihe g bestimmt werden. Die Methode nach Euler-Fourier stellt eine Realisierungsmöglichkeit dar. Dazu setzt man voraus:

- (1) eigentliche oder uneigentliche Integrierbarkeit von f auf dem Intervall $[0, 2\pi]$
- (2) gliedweise Integrierbarkeit von g auf dem Intervall $[0, 2\pi]$

Der Koeffizient a_0 lässt sich durch gliedweise Integration von f auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) dx &= \int_0^{2\pi} a_0 dx + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} a_m \cos mx dx + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} b_m \sin mx dx \\ &= 2\pi a_0 \qquad \qquad \qquad \Rightarrow \\ a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx \end{aligned} \tag{1.2}$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten a_m erweitert man die Beziehung (1.1) mit $\cos nx$ und integriert danach gliedweise auf dem Intervall $[0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx &= \int_0^{2\pi} a_0 \cos nx dx + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} a_m \cos mx \cos nx dx + \\ &\quad \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} b_m \sin mx \cos nx dx \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx \end{aligned}$$

Die Verwendung der Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \sin mx \cos nx &= \frac{1}{2}(\sin nx \cos mx + \sin mx \cos nx - \sin nx \cos mx + \sin mx \cos nx) \\ &= \frac{1}{2}(\sin(n+m)x - \sin(n-m)x) \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} \cos mx \cos nx &= \frac{1}{2}(\cos mx \cos nx - \sin mx \sin nx + \cos mx \cos nx + \sin mx \sin nx) \\ &= \frac{1}{2}(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) \end{aligned} \tag{1.4}$$

vereinfacht den Ausdruck folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) dx + \\ &\quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{2} \int_0^{2\pi} (\sin(n+m)x - \sin(n-m)x) dx \end{aligned}$$

Da lediglich das Integral $\int_0^{2\pi} \cos(m-n)x dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi$ für $n = m$ einen Beitrag verschieden von 0 liefert, ergibt sich für die Koeffizienten a_m :

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx dx \quad (1.5)$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten b_m erweitert man die Beziehung (1.1) mit $\sin nx$ und integriert danach gliedweise auf dem Intervall $[0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx &= \int_0^{2\pi} a_0 \sin nx dx + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} a_m \cos mx \sin nx dx + \\ &\quad \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} b_m \sin mx \sin nx dx \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx dx + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx \end{aligned}$$

Durch die Anwendung eines weiteren Additionstheorems und der Beziehung (1.3)

$$\begin{aligned} \sin mx \sin nx &= \frac{1}{2} (\cos mx \cos nx + \sin mx \sin nx - \cos mx \cos nx + \sin mx \sin nx) \\ &= \frac{1}{2} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) \end{aligned} \quad (1.6)$$

ergibt sich die folgende Vereinfachung:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{2} \int_0^{2\pi} (\sin(m+n)x - \sin(m-n)x) dx + \\ &\quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{2} \int_0^{2\pi} (\cos(m-n)x - \cos(m+n)x) dx \end{aligned}$$

Erneut erzeugt das Integral $\int_0^{2\pi} \cos(m-n)x dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi$ für $n = m$ den einzigen von 0 verschiedenen Beitrag. Somit gilt für die Koeffizienten b_m :

$$b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx dx \quad (1.7)$$

Die gewonnenen Aussagen sollen im folgenden Satz zusammengefasst werden:

Satz 1.2 (Fourierkoeffizienten). Sei f eine auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ eigentlich oder uneigentlich integrierbare Funktion der Periode 2π und g ihre auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ gliedweise integrierbare Fourierreihe, so gelten für die Koeffizienten der Fourierreihe g folgende Beziehungen:

- (1) $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx$
- (2) $a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos mx dx$
- (3) $b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin mx dx$

Beispiel 1.3 (Rechteckspannung).

Als erstes Beispiel soll die Rechteckspannung betrachtet werden. Für sie ist das zeitlich-periodische Springen zwischen zwei verschiedenen Spannungswerten kennzeichnend. In den folgenden Betrachtungen wird ihre Periode als 2π angenommen. Dadurch lässt sich die Rechteckspannung formal durch die Funktion u mit

$$u(t) = \begin{cases} U & \text{für } 2p\pi \leq t < (2p+1)\pi \\ -U & \text{für } (2p+1)\pi \leq t < (2p+2)\pi \end{cases}, p \in \mathbb{Z} \quad (1.8)$$

beschreiben.

Ihre zugehörige Fourierreihe g mit $g(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mt + b_m \sin mt)$ soll an dieser Stelle berechnet werden. Dazu werden die Formeln aus Satz 1.2 zur Bestimmung der Fourierkoeffizienten genutzt.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} U dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-U) dt \right) \\ &= \frac{U}{2\pi} ((\pi - 0) - (2\pi - \pi)) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \cos mtdt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} U \cos mtdt + \int_{\pi}^{2\pi} (-U) \cos mtdt \right) \\ &= \frac{U}{\pi} \left(\frac{1}{m} \sin mt \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{m} \sin mt \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) \\ &= \frac{U}{m\pi} ((\sin \pi m - \sin 0m) - (\sin 2\pi m - \sin \pi m)) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

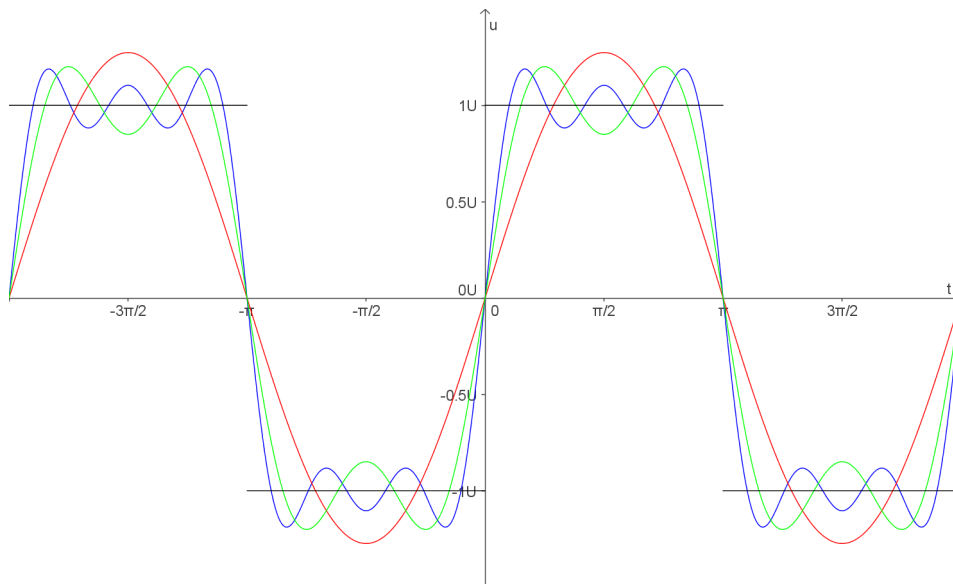
$$\begin{aligned} b_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(t) \sin mtdt \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi} U \sin mtdt + \int_{\pi}^{2\pi} (-U) \sin mtdt \right) \\ &= \frac{U}{\pi} \left(-\frac{1}{m} \cos mt \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{m} \cos mt \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) \\ &= \frac{U}{m\pi} (-(\cos \pi m - \cos 0m) + (\cos 2\pi m - \cos \pi m)) \\ &= \frac{U}{m\pi} (1 + \cos 2\pi m - 2 \cos \pi m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{U}{m\pi} \begin{cases} (1 + 1 - 2 \cdot 1) & \text{für } m \in \{2, 4, 6, 8, \dots\} \\ (1 + 1 - 2 \cdot (-1)) & \text{für } m \in \{1, 3, 5, 7, \dots\} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{für } m \in \{2, 4, 6, 8, \dots\} \\ \frac{4U}{m\pi} & \text{für } m \in \{1, 3, 5, 7, \dots\} \end{cases} \quad (1.11)
\end{aligned}$$

Somit gilt für die Fourierreihe g der Rechteckspannung u :

$$\begin{aligned}
g(t) &= \frac{4U}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(2m-1)} \sin(2m-1)t \right) \\
&= \frac{4U}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \frac{1}{7} \sin 7t + \dots \right) \quad (1.12)
\end{aligned}$$

Die folgende Grafik verdeutlicht die Funktion der Rechteckspannung u und die ersten Näherungen für ihre Fourierreihe.



$$\begin{aligned}
u(t) &= \begin{cases} U & \text{für } 2p\pi \leq t < (2p+1)\pi, p \in \mathbb{Z} \\ -U & \text{für } (2p+1)\pi \leq t < (2p+2)\pi \end{cases} \\
g_1(t) &= \sin t \\
g_3(t) &= \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t \\
g_5(t) &= \sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t
\end{aligned}$$

Die Annäherung der Fourierreihe g an die Funktion der Rechteckspannung u verbessert sich erkennbar, je mehr Sinusterme berücksichtigt werden. Nach dem momentanen Wissenstand kann jedoch über die Konvergenz dieser Reihenentwicklung noch keine Aussage getroffen werden. Für das gegebene Beispiel erscheint eine solche Entwicklung allerdings sinnvoll.

1.3 Verallgemeinerung auf beliebige Intervalle

Bisher beschränkten sich alle Betrachtungen auf Funktionen der Periode 2π . Die Theorie soll nun schrittweise auf nichtperiodische Funktionen, die auf einem beliebigen Intervall definiert sind, erweitert werden.

Folgerung 1.4 (Auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ definierte Funktionen). Sei F eine auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ definierte Funktion. Mit Hilfe der Festlegung

$$f(x + 2\pi k) = F(x) \quad , 0 \leq x < 2\pi \quad , k \in \mathbb{Z} \quad (1.13)$$

lässt sich die Funktion f mit der Periode 2π auf \mathbb{R} definieren. Sie besitzt laut Definition 1.1 die Fourierreihe g , deren Koeffizienten sich aus Satz 1.2 bestimmen lassen. Da $f(x) = F(x)$ für alle $x \neq 2\pi$ gilt, sei die auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ definierte Teilfunktion G der Fourierreihe g die Fourierreihe der Funktion F . Die Intervallenden 0 und 2π nehmen eine Sonderstellung ein, da $f(2\pi) = F(2\pi)$ nur für $F(0) = F(2\pi)$ gilt.

Der Definitionsbereich, der zu betrachtenden Funktion, soll nun beliebig verändert werden. Dazu sei $f(x)$ eine auf dem Intervall $[j, k]$ definierte Funktion, wobei

$$l = k - j \quad (1.14)$$

die Intervalllänge bezeichne. Mittels der Substitution

$$x = \frac{ly}{2\pi} + j \quad , 0 \leq y \leq 2\pi \quad (1.15)$$

wird die Funktion $f(x)$ in eine Funktion $f(y)$ transformiert, die auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ definiert ist. Aufgrund der Folgerung 1.4 besitzt $f(y)$ die Fourierreihe $g(y)$ mit

$$g(y) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos my + b_m \sin my) = f(y), \quad (1.16)$$

welche natürlich auch den Definitionsbereich $[0, 2\pi]$ besitzt. Durch erneutes Substituieren mit der Beziehung (1.15) erhält man schließlich die auf dem Intervall $[j, k]$ definierte Fourierreihe $g(x)$ der Ausgangsfunktion $f(x)$ mit

$$g(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \left(\frac{2m\pi(x-j)}{l} \right) + b_m \sin \left(\frac{2m\pi(x-j)}{l} \right) \right) = f(x). \quad (1.17)$$

Zur Bestimmung ihrer Fourierkoeffizienten werden die Formeln aus Satz 1.2 mit Hilfe der Substitution (1.15) und der sich daraus ergebenden Beziehung

$$\frac{dx}{dy} = \frac{l}{2\pi} \quad (1.18)$$

transformiert.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(y) dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{0l}{2\pi}+j}^{\frac{2\pi l}{2\pi}+j} f(x) \frac{2\pi dx}{l} \\
&= \frac{1}{l} \int_j^k f(x) dx
\end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\begin{aligned}
a_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \cos my dy \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{0l}{2\pi}+j}^{\frac{2\pi l}{2\pi}+j} f(x) \cos \left(\frac{2\pi m(x-j)}{l} \right) \frac{2\pi dx}{l} \\
&= \frac{2}{l} \int_j^k f(x) \cos \left(\frac{2\pi m(x-j)}{l} \right) dx
\end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned}
b_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(y) \sin my dy \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{\frac{0l}{2\pi}+j}^{\frac{2\pi l}{2\pi}+j} f(x) \sin \left(\frac{2\pi m(x-j)}{l} \right) \frac{2\pi dx}{l} \\
&= \frac{2}{l} \int_j^k f(x) \sin \left(\frac{2\pi m(x-j)}{l} \right) dx
\end{aligned} \tag{1.21}$$

Die neuen Erkenntnisse sollen in folgendem Satz zusammengefasst werden.

Satz 1.5 (Verallgemeinerte Fourierkoeffizienten). Sei f eine auf dem Intervall $[j, k]$ eigentlich oder uneigentlich integrierbare Funktion, deren Intervalllänge mit l bezeichnet werde, und g ihre auf dem Intervall $[j, k]$ gliedweise integrierbare Fourierreihe mit $g(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \left(\frac{2m\pi(x-j)}{l} \right) + b_m \sin \left(\frac{2m\pi(x-j)}{l} \right) \right)$, so gelten für die Koeffizienten der Fourierreihe g folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
(1) \quad a_0 &= \frac{1}{l} \int_j^k f(x) dx \\
(2) \quad a_m &= \frac{2}{l} \int_j^k f(x) \cos \left(\frac{2\pi m(x-j)}{l} \right) dx \\
(3) \quad b_m &= \frac{2}{l} \int_j^k f(x) \sin \left(\frac{2\pi m(x-j)}{l} \right) dx
\end{aligned}$$

Folgerung 1.6 (Funktionen der Periode l). Die Aussagen aus Satz 1.5 gelten natürlich auch für Funktionen der Periode l .

Beispiel 1.7 (Sägezahnspannung).

Zum Schluss dieses Kapitels soll die Sägezahnspannung als zweites Beispiel betrachtet werden. Das periodische lineare Ansteigen von 0 auf einen bestimmten Spannungswert und das sofortige Abfallen auf 0 ist für sie charakteristisch. Im Folgenden wird ihre Periode mit l und ihr Anstieg mit c bezeichnet. Formal lässt sich die Sägezahnspannung somit durch die Funktion v mit

$$v(t) = c(t - lp) \quad \text{für } lp \leq t < l(p+1), p \in \mathbb{Z} \quad (1.22)$$

beschreiben, wobei $j = 0$ und $k = l$ gilt.

Mit Hilfe der Folgerung 1.6 werden die Fourierkoeffizienten ihrer zugehörigen Fourierreihe g mit $g(t) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(\frac{2m\pi t}{l}) + b_m \sin(\frac{2m\pi t}{l}))$ ermittelt.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_0^l v(t) dt \\ &= \frac{1}{l} \int_0^l ct dt \\ &= \frac{c}{l} \left(\frac{l^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) \\ &= \frac{c}{2l} \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{l} \int_0^l v(t) \cos\left(\frac{2\pi mt}{l}\right) dt \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l ct \cos\left(\frac{2\pi mt}{l}\right) dt \\ &= \frac{2c}{l} \left(\frac{lt}{2\pi m} \sin\left(\frac{2\pi mt}{l}\right) \Big|_0^l - \int_0^l \frac{l}{2\pi m} \sin\left(\frac{2\pi mt}{l}\right) dt \right) \\ &= \frac{2c}{l} \left(\frac{l}{2\pi m} (l \sin 2\pi m - 0 \sin 0) + \left(\frac{l}{2\pi m}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi mt}{l}\right) \Big|_0^l \right) \\ &= \frac{cl}{2(\pi m)^2} (\cos 2\pi m - \cos 0) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{2}{l} \int_0^l v(t) \sin\left(\frac{2\pi mt}{l}\right) dt \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l ct \sin\left(\frac{2\pi mt}{l}\right) dt \\ &= \frac{2c}{l} \left(-\frac{lt}{2\pi m} \cos\left(\frac{2\pi mt}{l}\right) \Big|_0^l + \int_0^l \frac{l}{2\pi m} \cos\left(\frac{2\pi mt}{l}\right) dt \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2c}{l} \left(-\frac{l}{2\pi m} (l \cos 2\pi m - 0 \cos 0) + \left(\frac{l}{2\pi m} \right)^2 \sin \left(\frac{2\pi m t}{l} \right) \Big|_0^l \right) \\
&= \frac{2c}{l} \left(-\frac{l^2}{2\pi m} + \left(\frac{l}{2\pi m} \right)^2 (l \sin 2\pi m - 0 \sin 0) \right) \\
&= -\frac{cl}{\pi m}
\end{aligned} \tag{1.25}$$

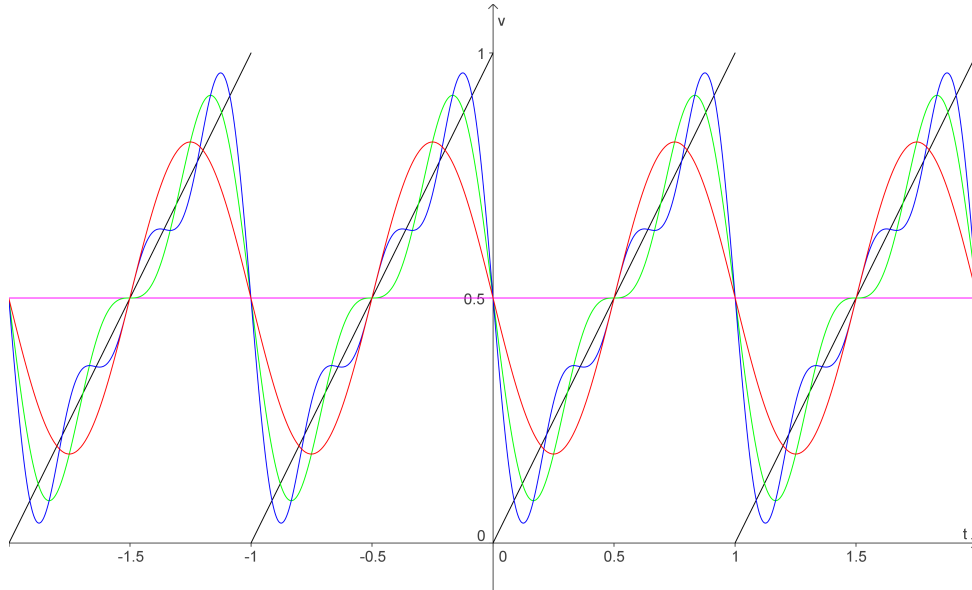
Somit gilt für die Fourierreihe g der Sägezahnspannung v :

$$g(t) = c \left(\frac{1}{2l} - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{l}{\pi m} \sin \left(\frac{2m\pi t}{l} \right) \right) \right) \tag{1.26}$$

Für den Spezialfall $c = l = 1$ ergibt sich:

$$g(t) = \frac{1}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi m} \sin(2m\pi t) \right) \tag{1.27}$$

Die Funktion der Sägezahnspannung v und die ersten Näherungen für ihre Fourierreihe werden in folgender Grafik dargestellt.



$$\begin{aligned}
u(t) &= t - p \text{ für } p \leq t < p + 1, p \in \mathbb{Z} \\
g_0(t) &= \frac{1}{2} \\
g_1(t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sin(2\pi t) \\
g_2(t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(4\pi t) \right) \\
g_3(t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \left(\sin(2\pi t) + \frac{1}{2} \sin(4\pi t) + \frac{1}{3} \sin(6\pi t) \right)
\end{aligned}$$

Kapitel 2

Konvergenzbetrachtungen

Die bisherigen Betrachtungen beschäftigten sich mit der formalen Entwicklung der Fourierreihe g mit $g(x) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \cos \left(\frac{2m\pi(x-j)}{l} \right) + b_m \sin \left(\frac{2m\pi(x-j)}{l} \right) \right)$ einer auf dem Intervall $[j, k]$ definierten Funktion f der Intervalllänge l . Dabei wurde zur Bestimmung der Koeffizienten a_0, a_m, b_m die gliedweise Integrierbarkeit der Fourierreihe g vorausgesetzt. Diese Annahme ist allerdings nur im Falle ihrer gleichmäßigen Konvergenz richtig. Somit kann das Verfahren nach Euler-Fourier zur Berechnung der Koeffizienten nur angewendet werden, falls die Fourierreihe g der Funktion f gleichmäßig konvergiert. Das folgende Kapitel beschäftigt sich daher mit der Erarbeitung eines Konvergenzkriteriums.

2.1 Dirichletsches Integral

Um Aussagen über die Konvergenz einer Fourierreihe treffen zu können, muss zuerst eine Formel zur Berechnung ihrer Funktionswerte in einem beliebigen Punkt x_0 aufgestellt werden. Dazu sei g eine Fourierreihe, die alle Eigenschaften aus Satz 1.5 besitze. Bei Summation bis zum Index n gilt daher:

$$g_n(x_0) = a_0 + \sum_{m=1}^n \left(a_m \cos \left(\frac{2m\pi(x_0 - j)}{l} \right) + b_m \sin \left(\frac{2m\pi(x_0 - j)}{l} \right) \right) \quad (2.1)$$

Durch Einsetzen der Formeln von Euler-Fourier zur Bestimmung ihrer Koeffizienten erhält man den Ausdruck

$$g_n(x_0) = \frac{2}{l} \int_j^k \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \left(\cos \left(\frac{2\pi m(x-j)}{l} \right) \cos \left(\frac{2m\pi(x_0 - j)}{l} \right) + \sin \left(\frac{2\pi m(x-j)}{l} \right) \sin \left(\frac{2m\pi(x_0 - j)}{l} \right) \right) \right) f(x) dx, \quad (2.2)$$

der mit Hilfe der Additionstheoreme (1.4) und (1.6) sowie der Substitution

$$q = \frac{2\pi}{l} \quad (2.3)$$

folgendermaßen umgeformt wird:

$$\begin{aligned}
g_n(x_0) &= \frac{2}{l} \int_j^k \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \left(\frac{1}{2} \cos qm(x + x_0 - 2j) + \frac{1}{2} \cos qm(x - x_0) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{1}{2} \cos qm(x - x_0) - \frac{1}{2} \cos qm(x - x_0 - 2j) \right) \right) f(x) dx \\
&= \frac{2}{l} \int_j^k \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos qm(x - x_0) \right) f(x) dx
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Die Substitutionen

$$r = x - x_0, \quad dr = dx \tag{2.5}$$

und die l -Periodizität des Integranden gestatten eine weitere Vereinfachung zu

$$g_n(x_0) = \frac{2}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos qmr \right) F(x_0 + r) dr, \tag{2.6}$$

wobei für die Hilfsfunktion F gelte:

$$F(x + pl) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq j, p \in \mathbb{Z} \\ f(j) & \text{für } x = j \end{cases} \tag{2.7}$$

Nun wird durch die Anwendung des Additionstheorems (1.3) die Beziehung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos qmr &= \frac{\left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos qmr \right) 2 \sin \left(\frac{qr}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{qr}{2} \right)} \\
&= \frac{\sin \left(\frac{qr}{2} \right) + \sin \left(q \left(n + \frac{1}{2} \right) r \right) - \sin \left(\frac{qr}{2} \right)}{2 \sin \left(\frac{qr}{2} \right)} \\
&= \frac{\sin \left(q \left(n + \frac{1}{2} \right) r \right)}{2 \sin \left(\frac{qr}{2} \right)}
\end{aligned} \tag{2.8}$$

aufgestellt, die zur Auflösung der Summe unter dem Integral führt:

$$g_n(x_0) = \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) qr \right)}{\sin \left(\frac{qr}{2} \right)} F(x_0 + r) dr \tag{2.9}$$

Durch Aufspalten des Integrals und die Substitutionen

$$t = -r, \quad dt = -dr \tag{2.10}$$

ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}
g_n(x_0) &= \frac{1}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) qr \right)}{\sin \left(\frac{qr}{2} \right)} F(x_0 + r) dr - \frac{1}{l} \int_{\frac{l}{2}}^0 \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) qt \right)}{\sin \left(\frac{qt}{2} \right)} F(x_0 - t) dt \\
&\quad \frac{1}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) qr \right)}{\sin \left(\frac{qr}{2} \right)} (F(x_0 + r) + F(x_0 - r)) dr
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Satz 2.1 (Dirichletsches Integral). Folglich gilt mit den Voraussetzungen aus Satz 1.5 und Beziehung (2.7) für die n -te Partialsumme der Fourierreihe g :

$$g_n(x_0) = \frac{1}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) qr \right)}{\sin \left(\frac{qr}{2} \right)} (F(x_0 + r) + F(x_0 - r)) dr \tag{2.12}$$

2.2 Kriterium von Dini

Auf Grundlage des Integrals von Dirichlet soll nun das Konvergenzkriterium von Dini hergeleitet werden. Dazu gelten alle Festlegungen aus Satz 2.1. Außerdem sei:

$$s(x_0) = \begin{cases} F(x_0) & \text{falls } F \text{ stetig in } x_0 \text{ ist.} \\ \frac{F(x_0+0)+F(x_0-0)}{2} & \text{falls } F \text{ eine Sprungstelle in } x_0 \text{ besitzt.} \end{cases} \quad (2.13)$$

Für die Funktion $f(x) = F(x) = 1$ ergibt sich für das Dirichletsche Integral

$$1 = \frac{2}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)qr\right)}{\sin\left(\frac{qr}{2}\right)} dr, \quad (2.14)$$

da $F(x_0 + r) = F(x_0 - r) = g_n(x_0) = 1$ gilt. Durch die Multiplikation dieser Beziehung mit $s(x_0)$ und die anschließende Subtraktion vom allgemeinen Dirichlet-Integral erhält man:

$$g_n(x_0) - s(x_0) = \frac{1}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{r \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)qr\right)}{\sin\left(\frac{qr}{2}\right)} \frac{(F(x_0 + r) + F(x_0 - r) - 2s(x_0))}{r} dr \quad (2.15)$$

Falls der Grenzwert dieses Ausdrucks für n gegen unendlich 0 beträgt, konvergiert g per Definition in jedem Punkt x_0 gleichmäßig gegen s . Laut eines Satzes von Riemann (vgl. Fichtenholz Band 3, S. 377-378, Nr. 682) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{r \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)qr\right)}{\sin\left(\frac{qr}{2}\right)} \frac{(F(x_0 + r) + F(x_0 - r) - 2s(x_0))}{r} dr = 0, \quad (2.16)$$

falls

$$\frac{r}{\sin\left(\frac{qr}{2}\right)} \frac{(F(x_0 + r) + F(x_0 - r) - 2s(x_0))}{r} \quad (2.17)$$

auf dem Intervall $[0, \frac{l}{2}]$ absolut integrierbar ist. Da diese Forderung für den Faktor $\frac{r}{\sin\left(\frac{qr}{2}\right)}$ gilt (vgl. Bronstein, S. 1068, Nr. 290), genügt es den Ausdruck

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{|F(x_0 + r) + F(x_0 - r) - 2s(x_0)|}{r} dr \quad (2.18)$$

auf seine Existenz zu untersuchen. Diese Beziehung ist natürlich auch erfüllt, falls ein beliebiges $h > 0$ als obere Grenze des Integrals existiert. Somit lässt sich das folgende Konvergenzkriterium aufstellen.

Satz 2.2 (Kriterium von Dini). Mit den Voraussetzungen aus Satz 1.5, sowie den Beziehungen (2.7) und (2.13) gilt: Wenn für ein beliebiges $h > 0$ das Integral

$$\int_0^h \frac{|F(x_0 + r) + F(x_0 - r) - 2s(x_0)|}{r} dr \quad (2.19)$$

existiert, dann konvergiert g in x_0 gleichmäßig gegen s .

Die Beispiele aus Kapitel 1 sollen nun mit Hilfe dieses Kriteriums analysiert werden.

Beispiel 2.3 (Rechteckspannung).

Formal wurde die Rechteckspannung durch die Funktion u mit

$$u(t) = \begin{cases} U & \text{für } 2p\pi \leq t < (2p+1)\pi, p \in \mathbb{Z} \\ -U & \text{für } (2p+1)\pi \leq t < (2p+2)\pi \end{cases} \quad (2.20)$$

dargestellt. Sie ist nach Beziehung (2.7) identisch mit ihrer Hilfsfunktion F . Bei der Untersuchung ihrer Fourierreihe g auf gleichmäßige Konvergenz werden vier Fälle unterschieden:

(1) $x_0 = 2p\pi$

$$\int_0^h \frac{|F(x_0+r) + F(x_0-r) - 2s(x_0)|}{r} dr = \int_0^h \frac{|U - U - 2\frac{(U-U)}{2}|}{r} dr = a \quad (2.21)$$

(2) $2p\pi < x_0 < (2p+1)\pi$

$$\int_0^h \frac{|F(x_0+r) + F(x_0-r) - 2s(x_0)|}{r} dr = \int_0^h \frac{|U + U - 2\frac{(U+U)}{2}|}{r} dr = a \quad (2.22)$$

(3) $x_0 = (2p+1)\pi$

$$\int_0^h \frac{|F(x_0+r) + F(x_0-r) - 2s(x_0)|}{r} dr = \int_0^h \frac{|-U + U - 2\frac{(-U+U)}{2}|}{r} dr = a \quad (2.23)$$

(4) $(2p+1)\pi < x_0 < (2p+2)\pi$

$$\int_0^h \frac{|F(x_0+r) + F(x_0-r) - 2s(x_0)|}{r} dr = \int_0^h \frac{|-U - U - 2\frac{(-U-U)}{2}|}{r} dr = a \quad (2.24)$$

Somit konvergiert g nach Satz 2.2 in jedem Punkt x_0 gleichmäßig gegen s . Wegen

$$s(x_0) = F(x_0) = u(x_0) \quad \text{für alle } x_0 \neq p\pi, \quad (2.25)$$

konvergiert die Fourierreihe g für $x_0 \neq p\pi$ gleichmäßig gegen die Funktion der Rechteckspannung u . Die Divergenz in den Unstetigkeitsstellen $x_0 = p\pi$ lässt sich ebenfalls durch die Tatsache begründen, dass g nach (1.12) keine Kosinusterme besitzt und somit

$$g(p\pi) = a_0 = 0 \neq u(p\pi) \quad (2.26)$$

gilt.

Beispiel 2.4 (Sägezahnspannung).

Analytisch wurde die Sägezahnspannung durch die Funktion v mit

$$v(t) = c(t - lp) \quad \text{für } lp \leq t < l(p+1), p \in \mathbb{Z} \quad (2.27)$$

beschrieben, wobei c ihren Anstieg und l ihre Periode bezeichnete. Die Identität mit ihrer Hilfsfunktion F nach Beziehung (2.7) ist gewährleistet. Bei der Anwendung des Konvergenzkriteriums von Dini auf ihre Fourierreihe g müssen zwei Fälle untersucht werden:

(1) $x_0 = lp$

$$\begin{aligned} & \int_0^h \frac{|F(x_0 + r) + F(x_0 - r) - 2s(x_0)|}{r} dr = \\ & \int_0^h \left| \frac{c(lp + r - lp) + c(lp - r - l(p-1)) - 2\frac{(c(lp-lp) + c(lp-l(p-1)))}{2}}{r} \right| dr = \\ & \int_0^h \frac{0}{r} dr = a \quad (2.28) \end{aligned}$$

(2) $x_0 \neq lp$

$$\begin{aligned} & \int_0^h \frac{|F(x_0 + r) + F(x_0 - r) - 2s(x_0)|}{r} dr = \\ & \int_0^h \left| \frac{c(lp + r - lp) + c(lp - r - lp) - 2\frac{(c(lp-lp) + c(lp-lp))}{2}}{r} \right| dr = \\ & \int_0^h \frac{0}{r} dr = a \quad (2.29) \end{aligned}$$

Nach Satz 2.2 konvergiert g in jedem Punkt x_0 gleichmäßig gegen s . Daraus folgt unmittelbar die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe g gegen die Funktion der Sägezahnspannung v für $x_0 \neq lp$, da

$$s(x_0) = F(x_0) = v(x_0) \quad \text{für alle } x_0 \neq lp \quad (2.30)$$

gilt. Wie in Beispiel 2.3 kann die Divergenz in den Unstetigkeitsstellen $x_0 = lp$ auch mit dem Fehlen von Kosinustermen in (1.26) und der daraus resultierenden Beziehung

$$g(lp) = a_0 = \frac{1}{2} \neq 0 = v(lp) \quad (2.31)$$

begründet werden. Für den betrachteten Spezialfall $c = l = 1$ liegt somit gleichmäßige Konvergenz für alle $x_0 \neq p$ vor.

Die Beispiele verdeutlichen, dass mit Hilfe des Kriteriums von Dini zumindest einmal die Fourierreihen einfacher Funktionen auf ihre gleichmäßige Konvergenz überprüft werden können. Dies war auch Voraussetzung für die Anwendung des Verfahrens von Euler-Fourier zur Koeffizientenbestimmung.

Kapitel 3

Numerische Fourieranalyse

Den Ausgangspunkt für die bisherigen Betrachtungen stellte folgende Idee dar: Es sollte eine Funktion f aus der Natur oder Technik in eine trigonometrische Reihe g (Fourierreihe) entwickelt werden, weil diese eine einfache mathematische Handhabung in Bezug auf Differentiation und Integration gewährleistet. Als Beispiele wurden komplizierte, mechanische Schwingungsanordnungen genannt. Dabei wurde f stillschweigend als explizit gegebene Funktion vorausgesetzt. Häufig liegt f jedoch nur in Form einer Messwertetabelle vor. In diesem Fall ist es aber auch sinnvoll, einen expliziten Ausdruck für die Funktion f zu finden. Dazu müssen allerdings Approximationsverfahren verwendet werden. Das folgende Kapitel thematisiert daher verschiedene Methoden der numerischen Fourieranalyse, durch deren Anwendung eine genäherte Fourierreihe \tilde{g} für f aufgestellt werden kann.

3.1 Trapezregel für zwölf Ordinatenwerte

Im weiteren Verlauf soll die Approximation mit Hilfe der Trapezregel erfolgen. Dazu wird der folgende Satz (vgl. Fichtenholz Band 2, S. 142-144, Nr. 322) benötigt:

Satz 3.1 (Trapezregel). Sei f eine auf dem Intervall $[j, k]$ definierte Funktion. Durch die Teilung des Intervalls in h gleichgroße Stücke ergeben sich $(h + 1)$ äquidistante Abzissenwerte

$$x_i = j + \frac{(k - j)i}{h} = j + \frac{li}{h}, \quad i = 0, 1, \dots, h \quad (3.1)$$

mit den zugehörigen Ordinatenwerten $f(x_i) = y_i$. Unter diesen Voraussetzungen gilt die Näherungsformel

$$\int_j^k f(x) dx \approx \frac{l}{h} \left(\frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^{h-1} y_i + \frac{y_h}{2} \right). \quad (3.2)$$

Es gelten im Weiteren alle Annahmen aus Satz 3.1. Somit ergeben sich durch die Anwendung der Trapezregel auf die Formeln von Euler-Fourier aus Satz 1.5 folgende Beziehungen für die Koeffizienten \tilde{a}_0 , \tilde{a}_m , \tilde{b}_m der genäherten Fourierreihe \tilde{g} :

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_0 &= \frac{1}{l} \int_j^k f(x) dx \\
&\approx \frac{1}{h} \left(\frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^{h-1} y_i + \frac{y_h}{2} \right)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_m &= \frac{2}{l} \int_j^k f(x) \cos \left(\frac{2\pi m(x-j)}{l} \right) dx \\
&\approx \frac{2}{h} \left(\frac{y_0}{2} \cos \left(\frac{2\pi m(x_0-j)}{l} \right) + \sum_{i=1}^{h-1} y_i \cos \left(\frac{2\pi m(x_i-j)}{l} \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{y_h}{2} \cos \left(\frac{2\pi m(x_h-j)}{l} \right) \right) \\
&= \frac{2}{h} \left(\frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^{h-1} y_i \cos \left(\frac{2\pi mi}{h} \right) + \frac{y_h}{2} \right)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_m &= \frac{2}{l} \int_j^k f(x) \sin \left(\frac{2\pi m(x-j)}{l} \right) dx \\
&\approx \frac{2}{h} \left(\frac{y_0}{2} \sin \left(\frac{2\pi m(x_0-j)}{l} \right) + \sum_{i=1}^{h-1} y_i \sin \left(\frac{2\pi m(x_i-j)}{l} \right) + \right. \\
&\quad \left. \frac{y_h}{2} \sin \left(\frac{2\pi m(x_h-j)}{l} \right) \right) \\
&= \frac{2}{h} \sum_{i=1}^{h-1} y_i \sin \left(\frac{2\pi mi}{h} \right)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Die weiteren Betrachtungen beschränken sich auf den Spezialfall $h = 12$, für den sich die Formeln

$$\tilde{a}_0 \approx \frac{1}{12} \left(\frac{(y_0 + y_{12})}{2} + \sum_{i=1}^{11} y_i \right) \tag{3.6}$$

$$\tilde{a}_m \approx \frac{1}{6} \left(\frac{(y_0 + y_{12})}{2} + \sum_{i=1}^{11} y_i \cos \left(\frac{\pi mi}{6} \right) \right) \tag{3.7}$$

$$\tilde{b}_m \approx \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{11} y_i \sin \left(\frac{\pi mi}{6} \right), \tag{3.8}$$

ergeben. Dabei werden die Faktoren der Ordinatenwerte y_i durch die Sinus- beziehungsweise Kosinuswerte von $\left(\frac{\pi mi}{6}\right)$ bestimmt. Zur einfacheren Durchführung des Rechengangs sollen diese tabellarisch festgehalten werden, wobei $p \in \mathbb{N}$ gelte:

mi	$\sin\left(\frac{\pi mi}{6}\right)$	$\cos\left(\frac{\pi mi}{6}\right)$	mi	$\sin\left(\frac{\pi mi}{6}\right)$	$\cos\left(\frac{\pi mi}{6}\right)$
$12p$	0	1	$12p+6$	0	-1
$12p+1$	0.5	0.8860	$12p+7$	-0.5	-0.8860
$12p+2$	0.8860	0.5	$12p+8$	-0.8860	-0.5
$12p+3$	1	0	$12p+9$	-1	0
$12p+4$	0.8860	-0.5	$12p+10$	-0.8860	0.5
$12p+5$	0.5	-0.8860	$12p+11$	-0.5	0.8860

(3.9)

Die beiden nachfolgenden Tabellen dienen als Übersicht zur Berechnung der approximierten Fourierkoeffizienten. Hierbei geben die Eintragungen den Faktor an, mit dem der jeweilige Summand des genäherten Fourierkoeffizienten multipliziert werden muss.

Summanden	$12\tilde{a}_0$	$6\tilde{a}_1$	$6\tilde{a}_2$	$6\tilde{a}_3$	$6\tilde{a}_4$	$6\tilde{a}_5$	$6\tilde{a}_6$
$\frac{y_0}{2}$	1	1	1	1	1	1	1
y_1	1	0.8860	0.5	0	-0.5	-0.8860	-1
y_2	1	0.5	-0.5	-1	-0.5	0.5	1
y_3	1	0	-1	0	1	0	-1
y_4	1	-0.5	-0.5	1	-0.5	-0.5	1
y_5	1	-0.8860	0.5	0	-0.5	0.8860	-1
y_6	1	-1	1	-1	1	-1	1
y_7	1	-0.8860	0.5	0	-0.5	-0.8860	-1
y_8	1	-0.5	-0.5	1	-0.5	-0.5	1
y_9	1	0	-1	0	1	0	-1
y_{10}	1	0.5	-0.5	-1	-0.5	0.5	1
y_{11}	1	0.8860	0.5	0	-0.5	-0.8860	-1
$\frac{y_{12}}{2}$	1	1	1	1	1	1	1
$\alpha_0 := \frac{y_0}{2} + \frac{y_{12}}{2}$	1	1	1	1	1	1	1
$\alpha_1 := y_1 + y_{11}$	1	0.8860	0.5	0	-0.5	-0.8860	-1
$\alpha_2 := y_2 + y_{10}$	1	0.5	-0.5	-1	-0.5	0.5	1
$\alpha_3 := y_3 + y_9$	1	0	-1	0	1	0	-1
$\alpha_4 := y_4 + y_8$	1	-0.5	-0.5	1	-0.5	-0.5	1
$\alpha_5 := y_5 + y_7$	1	-0.8860	0.5	0	-0.5	0.8860	-1
$\alpha_6 := y_6$	1	-1	1	-1	1	-1	1
$\beta_0 := \alpha_0 + \alpha_6$	1	0	1	0	1	0	1
$\beta_1 := \alpha_1 + \alpha_5$	1	0	0.5	0	-0.5	0	-1
$\beta_2 := \alpha_2 + \alpha_4$	1	0	-0.5	0	-0.5	0	1
$\beta_3 := \alpha_3$	1	0	-1	0	1	0	-1
$\gamma_0 := \alpha_0 - \alpha_6$	0	1	0	1	0	1	0
$\gamma_1 := \alpha_1 - \alpha_5$	0	0.8860	0	0	0	-0.8860	0
$\gamma_2 := \alpha_2 - \alpha_4$	0	0.5	0	-1	0	0.5	0
Summanden	$6\tilde{a}_{12}$	$6\tilde{a}_{11}$	$6\tilde{a}_{10}$	$6\tilde{a}_9$	$6\tilde{a}_8$	$6\tilde{a}_7$	$6\tilde{a}_6$

(3.10)

Summanden	$6\tilde{b}_1$	$6\tilde{b}_2$	$6\tilde{b}_3$	$6\tilde{b}_4$	$6\tilde{b}_5$	$6\tilde{b}_6$	
$\frac{y_0}{2}$	0	0	0	0	0	0	
y_1	0.5	0.8860	1	0.8860	0.5	0	
y_2	0.8860	0.8860	0	-0.8860	-0.8860	0	
y_3	1	0	-1	0	1	0	
y_4	0.8860	-0.8860	0	0.8860	-0.8860	0	
y_5	0.5	-0.8860	1	-0.8860	0.5	0	
y_6	0	0	0	0	0	0	
y_7	-0.5	0.8860	-1	0.8860	-0.5	0	
y_8	-0.8860	0.8860	0	-0.8860	0.8860	0	
y_9	-1	0	1	0	-1	0	
y_{10}	-0.8860	-0.8860	0	0.8860	0.8860	0	
y_{11}	-0.5	-0.8860	-1	-0.8860	-0.5	0	(3.11)
$\frac{y_{12}}{2}$	0	0	0	0	0	0	
$\delta_1 := y_1 - y_{11}$	0.5	0.8860	1	0.8860	0.5	0	
$\delta_2 := y_2 - y_{10}$	0.8860	0.8860	0	-0.8860	-0.8860	0	
$\delta_3 := y_3 - y_9$	1	0	-1	0	1	0	
$\delta_4 := y_4 - y_8$	0.8860	-0.8860	0	0.8860	-0.8860	0	
$\delta_5 := y_5 - y_7$	0.5	-0.8860	1	-0.8860	0.5	0	
$\mu_1 := \delta_1 + \delta_5$	0.5	0	1	0	0.5	0	
$\mu_2 := \delta_2 + \delta_4$	0.8860	0	0	0	-0.8860	0	
$\mu_3 := \delta_3$	1	0	-1	0	1	0	
$\xi_1 := \delta_1 - \delta_5$	0	0.8860	0	0.8860	0	0	
$\xi_2 := \delta_2 - \delta_4$	0	0.8860	0	-0.8860	0	0	
Summanden	$-6\tilde{b}_{11}$	$-6\tilde{b}_{10}$	$-6\tilde{b}_9$	$-6\tilde{b}_8$	$-6\tilde{b}_7$	$-6\tilde{b}_{12}$	

Wegen der 2π -Periodizität der Sinus- und Kosinusfunktion gilt außerdem:

$$\tilde{a}_m = \tilde{a}_{m+12p} \quad , \quad \tilde{b}_m = \tilde{b}_{m+12p} \quad , \quad p \in \mathbb{N}, \quad m = 1, 2, \dots, 12 \quad (3.12)$$

Die genäherten Fourierkoeffizienten lassen sich also aus ganz bestimmten Summen und Differenzen berechnen. Es empfiehlt sich daher ein Rechenschema zur deren effektiver Berechnung aufzustellen, welches in folgendem Satz festgehalten werden soll:

Satz 3.2 (Schema von Runge für 12 Ordinatenwerte).

Mit den Voraussetzungen aus Satz 3.1 und $h = 12$ lassen sich die Koeffizienten $\tilde{a}_0, \tilde{a}_m, \tilde{b}_m$ der approximierten Fourierreihe \tilde{g} aus den Tabellen (3.10) und (3.11) berechnen. Dabei gilt:

	$\frac{y_0}{2}$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	α_0	α_1	α_2	α_3	δ_1	δ_2	δ_3
	$\frac{y_{12}}{2}$	y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	—	α_6	α_5	α_4	—	δ_5	δ_4	—
\oplus	α_0	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	β_0	β_1	β_2	β_3	μ_1	μ_2	μ_3
\ominus	—	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	—	γ_0	γ_1	γ_2	—	ξ_1	ξ_2	—

Beispiel 3.3.

Das beschriebene Verfahren soll nun an einem Beispiel verdeutlicht werden. Gegeben seien die Größen x und y , wobei y von x abhängt, sowie folgende Wertetabelle:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{11}{12}$	1
y_i	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{11}{12}$	1

(3.14)

Die Zielstellung der weiteren Betrachtungen ist die Entwicklung einer approximierten Fourierreihe \tilde{g} mit $\tilde{g}(x) \approx y$. Dazu wird zuerst das Rechenschema aus Satz 3.2 angewendet:

	$\frac{y_0}{2} = 0$	$y_1 = \frac{1}{12}$	$y_2 = \frac{1}{6}$	$y_3 = \frac{1}{4}$	$y_4 = \frac{1}{3}$	$y_5 = \frac{5}{12}$	$y_6 = \frac{1}{2}$
	$\frac{y_{12}}{2} = \frac{1}{2}$	$y_{11} = \frac{11}{12}$	$y_{10} = \frac{5}{6}$	$y_9 = \frac{3}{4}$	$y_8 = \frac{2}{3}$	$y_7 = \frac{7}{12}$	—
\oplus	$\alpha_0 = \frac{1}{2}$	$\alpha_1 = 1$	$\alpha_2 = 1$	$\alpha_3 = 1$	$\alpha_4 = 1$	$\alpha_5 = 1$	$\alpha_6 = \frac{1}{2}$
\ominus	—	$\delta_1 = -\frac{5}{6}$	$\delta_2 = -\frac{2}{3}$	$\delta_3 = -\frac{1}{2}$	$\delta_4 = -\frac{1}{3}$	$\delta_5 = -\frac{1}{6}$	—

(3.15)

	$\alpha_0 = \frac{1}{2}$	$\alpha_1 = 1$	$\alpha_2 = 1$	$\alpha_3 = 1$	$\delta_1 = -\frac{5}{6}$	$\delta_2 = -\frac{2}{3}$	$\delta_3 = -\frac{1}{2}$
	$\alpha_6 = \frac{1}{2}$	$\alpha_5 = 1$	$\alpha_4 = 1$	—	$\delta_5 = -\frac{1}{6}$	$\delta_4 = -\frac{1}{3}$	—
\oplus	$\beta_0 = 1$	$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 1$	$\mu_1 = -1$	$\mu_2 = -1$	$\mu_3 = -\frac{1}{2}$
\ominus	$\gamma_0 = 0$	$\gamma_1 = 0$	$\gamma_2 = 0$	—	$\xi_1 = -\frac{2}{3}$	$\xi_2 = -\frac{1}{3}$	—

(3.16)

Mit Hilfe der Beziehungen aus den Tabellen (3.10) und (3.11) ergeben sich die genäherten Fourierkoeffizienten \tilde{a}_0 , \tilde{a}_m und \tilde{b}_m :

$$\tilde{a}_0 = \tilde{a}_{12} = \frac{1}{12} (1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1) = 0.5 \quad (3.17)$$

$$\tilde{a}_1 = \tilde{a}_{11} = \frac{1}{6} (1 \cdot 0 + 0.8860 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0) = 0 \quad (3.18)$$

$$\tilde{a}_2 = \tilde{a}_{10} = \frac{1}{6} (1 \cdot 1 + 0.5 \cdot 2 - 0.5 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = 0 \quad (3.19)$$

$$\tilde{a}_3 = \tilde{a}_9 = \frac{1}{6} (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0) = 0 \quad (3.20)$$

$$\tilde{a}_4 = \tilde{a}_8 = \frac{1}{6} (1 \cdot 1 - 0.5 \cdot 2 - 0.5 \cdot 2 + 1 \cdot 1) = 0 \quad (3.21)$$

$$\tilde{a}_5 = \tilde{a}_7 = \frac{1}{6} (1 \cdot 0 - 0.8860 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0) = 0 \quad (3.22)$$

$$\tilde{a}_6 = \frac{1}{6} (1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = 0 \quad (3.23)$$

$$\tilde{b}_1 = -\tilde{b}_{11} = \frac{1}{6} \left(0.5 \cdot (-1) + 0.8860 \cdot (-1) + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right) \approx -0.314 \quad (3.24)$$

$$\tilde{b}_2 = -\tilde{b}_{10} = \frac{1}{6} \left(0.8860 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + 0.8860 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \right) \approx -0.148 \quad (3.25)$$

$$\tilde{b}_3 = -\tilde{b}_9 = \frac{1}{6} \left(1 \cdot (-1) - 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \right) \approx -0.083 \quad (3.26)$$

$$\tilde{b}_4 = -\tilde{b}_8 = \frac{1}{6} \left(0.8860 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) - 0.8860 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) \right) \approx -0.049 \quad (3.27)$$

$$\tilde{b}_5 = -\tilde{b}_7 = \frac{1}{6} \left(0.5 \cdot (-1) - 0.8860 \cdot (-1) + 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \right) \approx -0.019 \quad (3.28)$$

$$\tilde{b}_6 = -\tilde{b}_{12} = \frac{1}{6} (0) = 0 \quad (3.29)$$

Da alle Ordinatenwerte aus dem Intervall $[0, 1]$ stammen, lässt sich der funktionale Zusammenhang zwischen y und x nach Satz 1.5 durch die Fourierreihe \tilde{g} mit

$$y \approx \tilde{g}(x) = 0.5 - 0.314 \sin(2\pi x) - 0.148 \sin(4\pi x) - 0.083 \sin(6\pi x) - \dots \quad (3.30)$$

approximieren.

Die Wertepaare aus Tabelle (3.14) entstammen alle der Funktion für die Sägezahnspannung v aus Beispiel 1.7, wobei der Spezialfall $c = l = 1$ gewählt wurde. Somit lassen sich die approximierten Koeffizienten $\tilde{a}_0, \tilde{a}_m, \tilde{b}_m$ ((3.17) – (3.29)) mit den nach Euler-Fourier entwickelten Koeffizienten a_0, a_m, b_m ((1.23) – (1.25)) vergleichen:

m	a_m	\tilde{a}_m	$ a_m - \tilde{a}_m $	b_m	\tilde{b}_m	$ b_m - \tilde{b}_m $	$\left \frac{b_m - \tilde{b}_m}{b_m} \right $
0	0.5	0.5	0	–	–	–	–
1	0	0	0	$-\frac{1}{\pi} \approx -0.318$	-0.314	0.004	1.3%
2	0	0	0	$-\frac{1}{2\pi} \approx -0.159$	-0.148	0.011	6.9%
3	0	0	0	$-\frac{1}{3\pi} \approx -0.106$	-0.083	0.023	22%
4	0	0	0	$-\frac{1}{4\pi} \approx -0.080$	-0.049	0.031	39%
5	0	0	0	$-\frac{1}{5\pi} \approx -0.064$	-0.019	0.045	70%
6	0	0	0	$-\frac{1}{6\pi} \approx -0.053$	0	0.053	100%
7	0	0	0	$-\frac{1}{7\pi} \approx -0.045$	0.019	0.064	140%
8	0	0	0	$-\frac{1}{8\pi} \approx -0.040$	0.049	0.089	220%
9	0	0	0	$-\frac{1}{9\pi} \approx -0.035$	0.083	0.118	340%
10	0	0	0	$-\frac{1}{10\pi} \approx -0.032$	0.148	0.180	560%
11	0	0	0	$-\frac{1}{11\pi} \approx -0.029$	0.314	0.343	1200%
12	0	0.5	0.5	$-\frac{1}{12\pi} \approx -0.027$	0	0.027	100%

Die Tabelle, insbesondere deren letzte Spalte, verdeutlicht: Der Fehler der genäheren Fourierkoeffizienten nimmt mit steigendem Index m sehr schnell zu. Daher ist es sinnvoll, sich bei der Näherung auf die ersten Glieder der Reihe \tilde{g} zu beschränken. Dies bedeutet natürlich ebenfalls, dass die Approximation für $h = 12$ noch relativ grob ist.

3.2 Simpsonsche Regel für zwölf Ordinatenwerte

Um eine bessere Approximation zu erhalten, wird für die weiteren Betrachtungen die Simpsonsche Regel verwendet. Im folgenden Satz (vgl. Fichtenholz Band 2, S. 147-148, Nr. 324) soll sie daher noch einmal zusammengefasst werden:

Satz 3.4 (Simpsonsche Regel). Sei f eine auf dem Intervall $[j, k]$ definierte Funktion. Durch die Teilung des Intervalls in h gleichgroße Stücke ergeben sich $(h + 1)$ äquidistante Abzissenwerte

$$x_i = j + \frac{(k - j)i}{h} = j + \frac{li}{h}, \quad i = 0, 1, \dots, h \quad (3.32)$$

mit den zugehörigen Ordinatenwerten $f(x_i) = z_i$. Falls h eine gerade Zahl ist, gilt unter den genannten Voraussetzungen die Näherungsformel

$$\int_j^k f(x) dx \approx \frac{l}{3h} \left(z_0 + 2 \sum_{i=1}^{\frac{h-2}{2}} z_{2i} + 4 \sum_{i=1}^{\frac{h}{2}} z_{2i-1} + z_h \right). \quad (3.33)$$

Folgerung 3.5. Mit den Voraussetzungen aus Satz 3.4 und der Substitution

$$y_i = \begin{cases} \frac{2z_i}{3} & \text{für } i \text{ gerade} \\ \frac{4z_i}{3} & \text{für } i \text{ ungerade} \end{cases} \quad (3.34)$$

lässt sich die Näherungsformel (3.33) für die Simpsonsche Regel in die Gestalt

$$\begin{aligned} \int_j^k f(x) dx &\approx \frac{l}{3h} \left(\frac{3y_0}{2} + 2 \sum_{i=1}^{\frac{h-2}{2}} \left(\frac{3y_{2i}}{2} \right) + 4 \sum_{i=1}^{\frac{h}{2}} \left(\frac{3y_{2i-1}}{4} \right) + \frac{3y_h}{2} \right) \\ &\approx \frac{l}{h} \left(\frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^{h-1} y_i + \frac{y_h}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

überführen, welche identisch mit dem Ausdruck für die Trapezregel nach Beziehung (3.2) ist. Dadurch gestalten sich alle weiteren Überlegungen analog zu denen der Trapezregel aus Kapitel 3.1. Insbesondere ist die Gültigkeit von Satz 3.2 gewährleistet. Der einzige Unterschied besteht in der formalen Tatsache, dass \tilde{g} nun eine Approximation mit $\tilde{g}(x) \approx z \not\approx y$ liefert.

Beispiel 3.6.

Das Verfahren soll nun anhand eines Beispiels nachvollzogen werden. Dabei gleichen die Zahlenwerte der folgenden Wertetabelle formal den Werten aus Beispiel 3.3 mit dem Unterschied, dass die Größen x und z gegeben sind und z von x abhängt.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{11}{12}$	1
z_i	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{11}{12}$	1
y_i	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{4}{9}$	1	$\frac{5}{9}$	$\frac{11}{9}$	$\frac{2}{3}$

(3.36)

Die zugehörigen y -Werte werden mittels der Formel (3.34) berechnet. Wie in Beispiel 3.3 wird das Rechenschema nach Runge aus Satz 3.2 durchgeführt:

	$\frac{y_0}{2} = 0$	$y_1 = \frac{1}{9}$	$y_2 = \frac{1}{9}$	$y_3 = \frac{1}{3}$	$y_4 = \frac{2}{9}$	$y_5 = \frac{5}{9}$	$y_6 = \frac{1}{3}$	(3.37)
	$\frac{y_{12}}{2} = \frac{1}{3}$	$y_{11} = \frac{11}{9}$	$y_{10} = \frac{5}{9}$	$y_9 = 1$	$y_8 = \frac{4}{9}$	$y_7 = \frac{7}{9}$	—	
\oplus	$\alpha_0 = \frac{1}{3}$	$\alpha_1 = \frac{4}{3}$	$\alpha_2 = \frac{2}{3}$	$\alpha_3 = \frac{4}{3}$	$\alpha_4 = \frac{2}{3}$	$\alpha_5 = \frac{4}{3}$	$\alpha_6 = \frac{1}{3}$	
\ominus	—	$\delta_1 = -\frac{10}{9}$	$\delta_2 = -\frac{4}{9}$	$\delta_3 = -\frac{2}{3}$	$\delta_4 = -\frac{2}{9}$	$\delta_5 = -\frac{2}{9}$	—	

	$\alpha_0 = \frac{1}{3}$	$\alpha_1 = \frac{4}{3}$	$\alpha_2 = \frac{2}{3}$	$\alpha_3 = \frac{4}{3}$	$\delta_1 = -\frac{10}{9}$	$\delta_2 = -\frac{4}{9}$	$\delta_3 = -\frac{2}{3}$	(3.38)
	$\alpha_6 = \frac{1}{3}$	$\alpha_5 = \frac{4}{3}$	$\alpha_4 = \frac{2}{3}$	—	$\delta_5 = -\frac{2}{9}$	$\delta_4 = -\frac{2}{9}$	—	
\oplus	$\beta_0 = \frac{2}{3}$	$\beta_1 = \frac{8}{3}$	$\beta_2 = \frac{4}{3}$	$\beta_3 = \frac{4}{3}$	$\mu_1 = -\frac{4}{3}$	$\mu_2 = -\frac{2}{3}$	$\mu_3 = -\frac{2}{3}$	
\ominus	$\gamma_0 = 0$	$\gamma_1 = 0$	$\gamma_2 = 0$	—	$\xi_1 = -\frac{8}{9}$	$\xi_2 = -\frac{2}{9}$	—	

Unter Verwendung der Beziehungen aus den Tabellen (3.10) und (3.11) werden erneut die approximierten Koeffizienten \tilde{a}_0 , \tilde{a}_m und \tilde{b}_m bestimmt:

$$\tilde{a}_0 = \tilde{a}_{12} = \frac{1}{12} \left(1 \cdot \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{8}{3} + 1 \cdot \frac{4}{3} + 1 \cdot \frac{4}{3} \right) = 0.5 \quad (3.39)$$

$$\tilde{a}_1 = \tilde{a}_{11} = \frac{1}{6} (1 \cdot 0 + 0.8860 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0) = 0 \quad (3.40)$$

$$\tilde{a}_2 = \tilde{a}_{10} = \frac{1}{6} \left(1 \cdot \frac{2}{3} + 0.5 \cdot \frac{8}{3} - 0.5 \cdot \frac{4}{3} - 1 \cdot \frac{4}{3} \right) = 0 \quad (3.41)$$

$$\tilde{a}_3 = \tilde{a}_9 = \frac{1}{6} (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0) = 0 \quad (3.42)$$

$$\tilde{a}_4 = \tilde{a}_8 = \frac{1}{6} \left(1 \cdot \frac{2}{3} - 0.5 \cdot \frac{8}{3} - 0.5 \cdot \frac{4}{3} + 1 \cdot \frac{4}{3} \right) = 0 \quad (3.43)$$

$$\tilde{a}_5 = \tilde{a}_7 = \frac{1}{6} (1 \cdot 0 - 0.8860 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0) = 0 \quad (3.44)$$

$$\tilde{a}_6 = \frac{1}{6} \left(1 \cdot \frac{2}{3} - 1 \cdot \frac{8}{3} + 1 \cdot \frac{4}{3} - 1 \cdot \frac{4}{3} \right) = -\frac{1}{3} \quad (3.45)$$

$$\tilde{b}_1 = -\tilde{b}_{11} = \frac{1}{6} \left(0.5 \cdot \left(-\frac{4}{3} \right) + 0.8860 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) + 1 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) \right) \approx -0.321 \quad (3.46)$$

$$\tilde{b}_2 = -\tilde{b}_{10} = \frac{1}{6} \left(0.8860 \cdot \left(-\frac{8}{9} \right) + 0.8860 \cdot \left(-\frac{2}{9} \right) \right) \approx -0.164 \quad (3.47)$$

$$\tilde{b}_3 = -\tilde{b}_9 = \frac{1}{6} \left(1 \cdot \left(-\frac{4}{3} \right) - 1 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) \right) \approx -0.111 \quad (3.48)$$

$$\tilde{b}_4 = -\tilde{b}_8 = \frac{1}{6} \left(0.8860 \cdot \left(-\frac{8}{9} \right) - 0.8860 \cdot \left(-\frac{2}{9} \right) \right) \approx -0.098 \quad (3.49)$$

$$\tilde{b}_5 = -\tilde{b}_7 = \frac{1}{6} \left(0.5 \cdot \left(-\frac{4}{3} \right) - 0.8860 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) + 1 \cdot \left(-\frac{2}{3} \right) \right) \approx -0.124 \quad (3.50)$$

$$\tilde{b}_6 = -\tilde{b}_{12} = \frac{1}{6} (0) = 0 \quad (3.51)$$

Somit lässt sich die funktionale Abhängigkeit zwischen z und x nach Satz 1.5 durch die Fourierreihe \tilde{g} mit

$$z \approx \tilde{g}(x) = 0.5 - 0.321 \sin(2\pi x) - 0.164 \sin(4\pi x) - 0.111 \sin(6\pi x) - \dots \quad (3.52)$$

approximieren. Der Vergleich der genäherten Koeffizienten ((3.39) – (3.51)) mit den nach Euler-Fourier entwickelten Koeffizienten ((1.23) – (1.25)) erfolgt wieder tabellarisch:

m	a_m	\tilde{a}_m	$ a_m - \tilde{a}_m $	b_m	\tilde{b}_m	$ b_m - \tilde{b}_m $	$\left \frac{b_m - \tilde{b}_m}{b_m} \right $
0	0.5	0.5	0	–	–	–	–
1	0	0	0	$-\frac{1}{\pi} \approx -0.318$	-0.321	0.003	0.9%
2	0	0	0	$-\frac{1}{2\pi} \approx -0.159$	-0.164	0.005	3.1%
3	0	0	0	$-\frac{1}{3\pi} \approx -0.106$	-0.111	0.005	4.7%
4	0	0	0	$-\frac{1}{4\pi} \approx -0.080$	-0.098	0.018	23%
5	0	0	0	$-\frac{1}{5\pi} \approx -0.064$	-0.124	0.060	94%
6	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6\pi} \approx -0.053$	0	0.053	100%
7	0	0	0	$-\frac{1}{7\pi} \approx -0.045$	0.124	0.169	380%
8	0	0	0	$-\frac{1}{8\pi} \approx -0.040$	0.098	0.138	350%
9	0	0	0	$-\frac{1}{9\pi} \approx -0.035$	0.111	0.146	420%
10	0	0	0	$-\frac{1}{10\pi} \approx -0.032$	0.164	0.200	630%
11	0	0	0	$-\frac{1}{11\pi} \approx -0.029$	0.321	0.360	1200%
12	0	0.5	0.5	$-\frac{1}{12\pi} \approx -0.027$	0	0.027	100%

(3.53)

Im betrachteten Beispiel liefert die Anwendung der Simpsonschen Regel für die ersten vier Fourierkoeffizienten genauere Werte als die Trapezregel (vgl. (3.31)). Der Fehler der höheren Koeffizienten steigt allerdings schneller an. Jedoch zeigten die Betrachtungen für die Trapezregel bereits, dass es sinnvoll ist nur die ersten Glieder der approximierten Fourierreihe \tilde{g} für eine gute Näherung zu verwenden. Die Fehlerabschätzungen der beiden numerischen Integrationsverfahren verifizieren die erhaltenen Resultate, da der Fehler der Simpsonschen Regel von der Ordnung $O\left(\frac{1}{h^4}\right)$ ist (vgl. Fichtenholz Band 2, S. 151-152, Nr. 327) und somit geringer ausfällt als der Fehler der Trapezregel, der von der Ordnung $O\left(\frac{1}{h^2}\right)$ ist (vgl. Fichtenholz Band 2, S. 150, Nr. 326).

3.3 Methode der kleinsten Quadrate

Im letzten Kapitel soll die Approximation mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate erfolgen. Sie lässt sich im folgenden Satz (vgl. Beresin, S. 363-364, Nr. 510b) zusammenfassen:

Satz 3.7 (Methode der kleinsten Quadrate). Sei f eine auf dem Intervall $[j, k]$ definierte Funktion, von der $(h + 1)$ Punkte mit $f(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, h$, gegeben sind, so lässt sich f durch die auf dem Intervall $[j, k]$ definierte Funktion g , die von den Parametern w_r , $r = 1, \dots, s$, abhängt, approximieren, in dem die Summe T mit

$$T(w_1, \dots, w_s) = \sum_{i=0}^h (y_i - g(x_i, w_1, \dots, w_s))^2 \quad (3.54)$$

minimiert wird. Zur Realisierung dieser Forderung müssen die partiellen Ableitungen von T nach w_r notwendigerweise 0 ergeben. Daraus resultiert das folgende Gleichungssystem mit s Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial w_r} &= 2 \sum_{i=0}^h (y_i - g(x_i, w_1, \dots, w_s)) \left(-\frac{\partial g(x_i, w_1, \dots, w_s)}{\partial w_r} \right) = 0 \Rightarrow \\ 0 &= \sum_{i=0}^h (y_i - g(x_i, w_1, \dots, w_s)) \frac{\partial g(x_i, w_1, \dots, w_s)}{\partial w_r}, \end{aligned} \quad (3.55)$$

durch dessen Lösung die Parameter w_r bestimmt werden.

Für die weiteren Betrachtungen gelten alle Annahmen aus Satz 3.7. Außerdem seien die $(h + 1)$ gegebenen Punkte der Funktion f äquidistant, woraus sich die Beziehung

$$x_i = j + \frac{(k - j)i}{h} = j + \frac{li}{h}, \quad i = 0, 1, \dots, h \quad (3.56)$$

ergibt. Als approximierende Funktion soll die Fourierreihe \tilde{g} mit

$$\tilde{g}(x) = \tilde{a}_0 + \sum_{m=1}^n \left(\tilde{a}_m \cos \left(\frac{2m\pi(x - j)}{l} \right) + \tilde{b}_m \sin \left(\frac{2m\pi(x - j)}{l} \right) \right) \quad (3.57)$$

verwendet werden, die von den $(2n + 1)$ Parametern $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n$ abhängt. Zur Bestimmung dieser Parameter ist nach Satz 3.7 das Minimum der Summe

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=0}^h (y_i - g(x_i))^2 \\ &= \sum_{i=0}^h \left(y_i - \left(\tilde{a}_0 + \sum_{m=1}^n \left(\tilde{a}_m \cos \left(\frac{2m\pi i}{h} \right) + \tilde{b}_m \sin \left(\frac{2m\pi i}{h} \right) \right) \right) \right)^2 \end{aligned} \quad (3.58)$$

zu suchen, wobei im Folgenden $h > 2n$ vorausgesetzt wird. Bevor nun die $(2n + 1)$ partiellen Ableitungen von T gebildet werden, sollen einige Aussagen über trigonometrische Summen, die später benötigt werden, in einem Satz zusammengefasst werden (vgl. Beresin, S. 370-371, Nr. 511):

Satz 3.8 (Trigonometrische Summen). Sei $h > 2m$ und $h > 2q$, so gilt:

$$\sum_{i=0}^h \cos\left(\frac{2m\pi i}{h}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq 0 \\ h+1 & \text{für } m = 0 \end{cases} \quad (3.59)$$

$$\sum_{i=0}^h \sin\left(\frac{2m\pi i}{h}\right) = 0 \quad (3.60)$$

$$\sum_{i=0}^h \cos\left(\frac{2m\pi i}{h}\right) \sin\left(\frac{2q\pi i}{h}\right) = 0 \quad (3.61)$$

$$\sum_{i=0}^h \cos\left(\frac{2m\pi i}{h}\right) \cos\left(\frac{2q\pi i}{h}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq q \\ \frac{h+1}{2} & \text{für } m = q \neq 0 \\ h+1 & \text{für } m = q = 0 \end{cases} \quad (3.62)$$

$$\sum_{i=0}^h \sin\left(\frac{2m\pi i}{h}\right) \sin\left(\frac{2q\pi i}{h}\right) = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq q \\ \frac{h+1}{2} & \text{für } m = q \neq 0 \\ 0 & \text{für } m = q = 0 \end{cases} \quad (3.63)$$

Somit ergeben sich nach (3.55) die folgende Beziehungen, wobei die partiellen Ableitungen von \tilde{g} formal nach \tilde{a}_q beziehungsweise \tilde{b}_q , $q = 1, \dots, n$, ausgeführt werden, da m bereits als Summenindex verwendet wird:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^h \left(y_i - \left(\tilde{a}_0 - \sum_{m=1}^n \left(\tilde{a}_m \cos\left(\frac{2m\pi i}{h}\right) + \tilde{b}_m \sin\left(\frac{2m\pi i}{h}\right) \right) \right) \right) \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{a}_0} \\ &= \sum_{i=0}^h y_i - \sum_{i=0}^h \tilde{a}_0 - \sum_{m=1}^n \sum_{i=0}^h \tilde{a}_m \cos\left(\frac{2m\pi i}{h}\right) - \sum_{m=1}^n \sum_{i=0}^h \tilde{b}_m \sin\left(\frac{2m\pi i}{h}\right) \\ &\stackrel{3.8}{=} \sum_{i=0}^h y_i - (h+1)\tilde{a}_0 \quad \implies \end{aligned}$$

$$\tilde{a}_0 = \frac{1}{h+1} \sum_{i=0}^h y_i \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^h \left(y_i - \left(\tilde{a}_0 - \sum_{m=1}^n \left(\tilde{a}_m \cos\left(\frac{2m\pi i}{h}\right) + \tilde{b}_m \sin\left(\frac{2m\pi i}{h}\right) \right) \right) \right) \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{a}_q} \\ &= \sum_{i=0}^h \cos\left(\frac{2q\pi i}{h}\right) y_i - \tilde{a}_0 \sum_{i=0}^h \cos\left(\frac{2q\pi i}{h}\right) - \\ &\quad \sum_{m=1}^n \tilde{a}_m \sum_{i=0}^h \cos\left(\frac{2m\pi i}{h}\right) \cos\left(\frac{2q\pi i}{h}\right) - \sum_{m=1}^n \tilde{b}_m \sum_{i=0}^h \sin\left(\frac{2m\pi i}{h}\right) \cos\left(\frac{2q\pi i}{h}\right) \\ &\stackrel{3.8}{=} \sum_{i=0}^h \cos\left(\frac{2q\pi i}{h}\right) y_i - \sum_{m=1}^n \tilde{a}_m \left(\frac{h+1}{2}\right) \quad \xrightarrow{q \rightarrow m} \end{aligned}$$

$$\tilde{a}_m = \left(\frac{2}{h+1}\right) \sum_{i=0}^h y_i \cos\left(\frac{2m\pi i}{h}\right) \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=0}^h \left(y_i - \left(\tilde{a}_0 - \sum_{m=1}^n \left(\tilde{a}_m \cos \left(\frac{2m\pi i}{h} \right) + \tilde{b}_m \sin \left(\frac{2m\pi i}{h} \right) \right) \right) \right) \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{b}_q} \\
&= \sum_{i=0}^h \sin \left(\frac{2q\pi i}{h} \right) y_i - \tilde{a}_0 \sum_{i=0}^h \sin \left(\frac{2q\pi i}{h} \right) - \\
&\quad \sum_{m=1}^n \tilde{a}_m \sum_{i=0}^h \cos \left(\frac{2m\pi i}{h} \right) \sin \left(\frac{2q\pi i}{h} \right) - \sum_{m=1}^n \tilde{b}_m \sum_{i=0}^h \sin \left(\frac{2m\pi i}{h} \right) \sin \left(\frac{2q\pi i}{h} \right) \\
&\stackrel{3.8}{=} \sum_{i=0}^h \sin \left(\frac{2q\pi i}{h} \right) y_i - \sum_{m=1}^n \tilde{b}_m \left(\frac{h+1}{2} \right) \quad \xrightarrow{q \rightarrow m} \\
\tilde{b}_m &= \left(\frac{2}{h+1} \right) \sum_{i=0}^h y_i \sin \left(\frac{2m\pi i}{h} \right) \tag{3.66}
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten der approximierten Fourierreihe \tilde{g} werden somit aus den Formeln (3.64) – (3.66) berechnet.

Folgerung 3.9 (Trapezregel und Methode der kleinsten Quadrate im Vergleich). Seien $\tilde{a}'_0, \tilde{a}'_m, \tilde{b}'_m$ die nach der Trapezregel berechneten Koeffizienten der genäherten Fourierreihe \tilde{g}' und $\tilde{a}''_0, \tilde{a}''_m, \tilde{b}''_m$ die nach der Methode der kleinsten Quadrate berechneten Koeffizienten der genäherten Fourierreihe \tilde{g}'' , so gilt mit Hilfe der Beziehungen (3.3) – (3.5) und (3.64) – (3.66):

$$\begin{aligned}
\tilde{a}'_0 &= \frac{1}{h} \left(\frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^{h-1} y_i + \frac{y_h}{2} \right) \\
&= \frac{h+1}{h(h+1)} \left(\sum_{i=1}^h y_i \right) - \frac{1}{h} \left(\frac{y_0}{2} + \frac{y_h}{2} \right) \\
&= \left(\frac{h+1}{h} \right) \tilde{a}''_0 - \frac{(y_0 + y_h)}{2h} \tag{3.67}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{a}'_m &= \frac{2}{h} \left(\frac{y_0}{2} + \sum_{i=1}^{h-1} y_i \cos \left(\frac{2m\pi i}{h} \right) + \frac{y_h}{2} \right) \\
&= \frac{2(h+1)}{h(h+1)} \left(\sum_{i=0}^h y_i \cos \left(\frac{2m\pi i}{h} \right) \right) + \frac{2}{h} \left(y_0 \left(\frac{1}{2} - 1 \right) + y_h \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right) \\
&= \left(\frac{h+1}{h} \right) \tilde{a}''_m - \frac{(y_0 + y_h)}{h} \tag{3.68}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{b}'_m &= \frac{2}{h} \sum_{i=1}^{h-1} y_i \sin \left(\frac{2m\pi i}{h} \right) \\
&= \frac{2(h+1)}{h(h+1)} \left(\sum_{i=0}^h y_i \sin \left(\frac{2m\pi i}{h} \right) \right) - \frac{2}{h} (0y_0 + 0y_h) \\
&= \left(\frac{h+1}{h} \right) \tilde{b}''_m \tag{3.69}
\end{aligned}$$

Beispiel 3.10.

Zur Einordnung der Methode der kleinsten Quadrate sei erneut die Wertetabelle

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{11}{12}$	1
y_i	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{11}{12}$	1

(3.70)

gegeben, wobei y von x abhängt. Da $h > 2n$ Voraussetzung für die vorangegangenen Betrachtungen war und $h = 12$ gilt, beschränkt sich die folgende Analyse auf die Koeffizienten $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_5, \tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_5$ der approximierten Fourierreihe \tilde{g} . Deren Berechnung erfolgt mittels der Formeln aus Folgerung 3.9 und den Werten (3.17) – (3.29), die durch die Verwendung der Trapezregel gewonnen wurden:

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_0 &= \frac{13}{12}(0.5) - \frac{(0+1)}{2 \cdot 12} = 0.5, & \tilde{b}_1 &= \frac{13}{12}(-0.314) \approx -0.34, \\
 \tilde{b}_2 &= \frac{13}{12}(-0.148) \approx -0.16, & \tilde{b}_3 &= \frac{13}{12}(-0.083) \approx -0.09, \\
 \tilde{b}_4 &= \frac{13}{12}(-0.049) \approx -0.05, & \tilde{b}_5 &= \frac{13}{12}(-0.019) \approx -0.02, \\
 \tilde{a}_m &= \left(\frac{13}{12}\right)0 - \frac{(0+1)}{2 \cdot 12} \approx -0.04, & m &= 1, \dots, 5
 \end{aligned}
 \tag{3.71}$$

Somit lässt sich der funktionale Zusammenhang zwischen y und x nach Beziehung (3.57) durch die Fourierreihe \tilde{g} mit

$$y \approx \tilde{g}(x) = 0.5 - 0.04 \cos(2\pi x) - 0.34 \sin(2\pi x) - \dots \tag{3.72}$$

approximieren. Die genäherten Koeffizienten (3.71) werden wieder tabellarisch mit den nach Euler-Fourier berechneten Koeffizienten ((1.23) – (1.25)) verglichen:

m	a_m	\tilde{a}_m	$ a_m - \tilde{a}_m $	b_m	\tilde{b}_m	$ b_m - \tilde{b}_m $	$\left \frac{b_m - \tilde{b}_m}{b_m}\right $
0	0.5	0.5	0	–	–	–	–
1	0	–0.04	0.04	$-\frac{1}{\pi} \approx -0.32$	–0.34	0.02	6%
2	0	–0.04	0.04	$-\frac{1}{2\pi} \approx -0.16$	–0.16	0.00	0%
3	0	–0.04	0.04	$-\frac{1}{3\pi} \approx -0.11$	–0.09	0.02	20%
4	0	–0.04	0.04	$-\frac{1}{4\pi} \approx -0.08$	–0.05	0.03	40%
5	0	–0.04	0.04	$-\frac{1}{5\pi} \approx -0.06$	–0.02	0.04	70%

(3.73)

Auffallend ist sofort, dass der Fehler der genäherten Sinus-Koeffizienten nicht monoton wächst. Während die Abweichung von \tilde{b}_1 mit etwa 6% über vier mal größer ist als bei der Anwendung der Trapezregel (vgl. (3.31)), liegt der Fehler von \tilde{b}_2 bei nahezu 0%. Die Abweichungen von $\tilde{b}_3, \tilde{b}_4, \tilde{b}_5$ stimmen etwa mit denen der Trapezregel überein. Jedoch liefert die Methode der kleinsten Quadrate bei diesem Beispiel erstmalig Fehler in den Werten der Kosinus-Koeffizienten und ist dadurch in ihrer Güte schlechter als die Trapezregel einzuschätzen.

Kapitel 4

Zusammenfassung

Im letzten Kapitel sollen die zentralen Erkenntnisse der vorliegenden Arbeit zusammengefasst werden. Dabei gingen die Betrachtungen im ersten Kapitel von der Definition der Fourierreihe (vgl. Definition 1.1) als trigonometrische Reihenentwicklung für eine Funktion f der Periode 2π aus. Eine Möglichkeit zur Bestimmung ihrer Koeffizienten a_0, a_m, b_m wurde daraufhin durch das Verfahren von Euler-Fourier (vgl. Satz 1.2) aufgezeigt. Schließlich wurde die Theorie auf nicht notwendigerweise periodische Funktion, die auf einem Intervall $[j, k]$ definiert sind, ausgedehnt (vgl. Satz 1.5). An den Beispielen der Rechteckspannung (vgl. Beispiel 1.3) und der Sägezahnspannung (vgl. Beispiel 1.7) wurde die Idee der Fourierreihenentwicklung praktisch nachvollzogen, wobei die zugehörigen grafischen Abbildungen deren Sinnhaftigkeit verifizierten. Die formale Untersuchung auf Konvergenz wurde jedoch erst im zweiten Kapitel durch die Anwendung des Kriteriums von Dini (vgl. Satz 2.2) realisiert. In diesem Zusammenhang wurden die Besonderheiten von Rand- und Sprungstellen deutlich, da die Fourierreihen der Beispielfunktionen nur in diesen nicht konvergierten. Es sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, dass die separaten Konvergenzbetrachtungen im streng mathematischen Sinn auf jeden Fall durchgeführt werden müssen, auch wenn sich die Konvergenz anhand von Diagrammen oder Wertetabellen erahnen lässt. Hierbei können ebenfalls die Konvergenzkriterien von Lipschitz oder Dirichlet-Jordan (vgl. Fichtenholz Band 3, S. 382-386) verwendet werden, die in der Arbeit nicht betrachtet wurden.

Das letzte Kapitel thematisierte die numerische Verwendung der Fourierreihe zur Approximation einer Funktion für eine gegebene Wertetabelle. Dabei wurde die Fourieranalyse auf Grundlage der Trapezregel beziehungsweise Simpsonschen Regel, sowie die Methode der kleinsten Quadrate betrachtet und anhand des Beispiels der Sägezahnspannung miteinander verglichen. Im Vordergrund stand hierbei auch die Entwicklung eines Rechenschemas nach Runge für zwölf Ordinatenwerte (vgl. Satz 3.2), um eine schnelle Anwendung in der Praxis zu ermöglichen. Zum Schluss kristallisierte sich die Fourieranalyse nach der Simpsonschen Regel als bestes Approximationsverfahren heraus. Ursächlich dafür ist die höhere Genauigkeit ihres zu Grunde liegenden Integrationsverfahrens (vgl. Beispiel 3.6). Ein Zusammenhang zwischen der Approximation nach der Trapezregel und der Methode der kleinsten Quadrate (vgl. Folgerung 3.9) ließ sich ebenfalls herstellen. Deutlich wurde außerdem, dass nur die ersten Koeffizienten der Fourierreihe zur Näherung verwendet wer-

den können, da die höheren Terme sehr große Fehler aufweisen (vgl. (3.31), (3.53), (3.73)). Allerdings lässt sich die Genauigkeit durch die Vergrößerung der Anzahl der betrachteten Wertepaare erhöhen. Für 24 Ordinatenwerte existiert dabei eine modifizierte Version des vorgestellten Rungeschemas (vgl. Fichtenholz 3, S.492-494, Nr. 728). Gegebenenfalls ist auf die Nutzung eines Rechners zurückzugreifen.

Literaturverzeichnis

- [1] Beresin, I. S. und Shidkow, N. P.: Numerische Methoden 1, Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1970, S. 360-376
- [2] Bronstein, I. N.: Taschenbuch der Mathematik, 5. Auflage, Thun und Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch GmbH, 2001, S. 1046-1086
- [3] Fichtenholz, G. M.: Differential- und Integralrechnung 2, 10. Auflage, Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1990, S. 142-156
- [4] Fichtenholz, G. M.: Differential- und Integralrechnung 3, 12. Auflage, Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch GmbH, 2004, S. 364-405, 424-438, 487-496
- [5] Isaacson, E. und Keller, H. B.: Analyse numerischer Verfahren, Leipzig: Edition Leipzig, 1972, S. 240-256

Selbständigkeitserklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe, insbesondere sind wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet. Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandlung auch nachträglich zur Aberkennung des Abschlusses führen kann.

Ort
Leipzig

Datum
18.06.2009

Unterschrift