

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

Diplomarbeit

Der Longstaff-Schwartz-Algorithmus und seine Erweiterung für
Multiple Stopping Probleme am Beispiel von Swingoptionen.

Leipzig, August 2010

vorgelegt von

Sven Rehmman

Studiengang Diplom-Wirtschaftsmathematik

Betreuender Hochschullehrer:

Prof. Dr. Rüdiger Frey

Fakultät für Mathematik und Informatik

Fachbereich Optimierung und Finanzmathematik

Danksagung

Mein Dank gilt Herrn Prof. Frey, der mich auf das Thema für diese Arbeit aufmerksam gemacht hat und mir im Laufe meines Studiums alle nötigen Grundlagen vermittelt, um es zu bearbeiten.

Weiterhin möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, die mir dieses Studium ermöglicht haben und mir in arbeitsintensiven Zeiten Rückhalt gaben.

Ein großes Danke geht auch an meine Freundin und meine Freunde - ihr habt auf unterschiedlichste Art und Weise dazu beigetragen, diesen Teil meines Lebens so lebenswert zu machen.

Danke!

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	1
1.1	Einleitung	1
1.2	Mathematische Konzepte - Stoppzeiten	2
1.3	Der Snell-Envelope und optimales Stoppen	4
2	Longstaff-Schwartz-Algorithmus	6
2.1	Simulation zur Preisbestimmung	6
2.2	Einführendes Beispiel	7
2.3	Formelle Beschreibung	13
2.4	Konvergenz des Algorithmus	18
3	Praktische Aspekte	26
3.1	Implementierung in Matlab	26
3.2	Rainbow-Option	30
3.3	Wahl der Basisfunktionen	33
3.4	Ansätze zur Verbesserung	36
4	Swingoptionen	40
4.1	Begriffsklärung und Strommärkte	40
4.2	Ein Modell für Strompreise	41
4.3	Das Multiple Stopping Problem	45
4.4	Eigenschaften des Marginalwertes	49
4.5	Rekursive Entwicklung der optimalen Strategie	54
4.6	Der Fall mehrerer gleichzeitiger Ausübungsrechte	60
5	Zusammenfassung	67

Literaturverzeichnis	V
A Simulation korrelierter Assets	VIII
B Quellcode für den Longstaff-Schwartz-Algorithmus	IX

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Einleitung

Für nur wenige Derivate existiert eine Formel zur Preisbestimmung in geschlossener Form. Gerade bei der Bewertung von Optionen amerikanischen Typs muss daher oft auf numerische Verfahren zurückgegriffen werden. Eines dieser Verfahren ist die Monte-Carlo-Simulation. Obwohl andere Methoden, wie das Binomial Model von Cox, Ross und Rubinstein¹, im Kontext einfacher Optionen genauere Ergebnisse in kürzerer Zeit liefern, erfreut sich die Monte-Carlo-Simulation aufgrund ihrer flexiblen Anwendbarkeit und der guten Handhabung hochdimensionaler Probleme, in der Praxis großer Beliebtheit. Im Jahr 2001 stellten Longstaff und Schwartz² ein Verfahren zur Bewertung von Optionen amerikanischen Typs vor, das auf Monte-Carlo-Simulation basiert. Die grundlegende Idee dieser Methode liegt darin, den bei der Ausübungsentscheidung auftretenden Continuation Value mittels einer Regression zu bestimmen, welche die Informationen aus allen simulierten Pfaden nutzt. Darauf basierend wird pfadweise die optimale Stoppzeit geschätzt, die für jeden Pfad eine entsprechende Auszahlung zur Folge hat. Wie bei Simulationsverfahren üblich, ergibt sich der Preis dann als gewichtetes Mittel dieser Auszahlungen.

¹ COX, J.C./ROSS, S./RUBINSTEIN, M.: Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7 1979 Nr. 3.

² LONGSTAFF, F.A./SCHWARTZ, E.S.: Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach. *Review of Financial Studies*, 14 2001 Nr. 1.

Bevor wir dieses Vorgehen jedoch näher betrachten, findet sich in Kapitel 1 eine Wiederholung der für diese Arbeit wichtigsten Strukturen und Sätze, die bei der Bewertung von amerikanischen Optionen eine Rolle spielen. Anhand eines Beispiels wird in Kapitel 2 die Funktionsweise des Algorithmus erläutert und eine formelle Beschreibung gegeben. Das Kapitel schließt mit dem Beweis der Konvergenz des Algorithmus. Kapitel 3 konzentriert sich auf die praktischen Aspekte. So finden sich dort Hinweise zur Implementierung in Matlab, zur Wahl der Basisfunktionen und Ansätze zur Verbesserung. Abschließend beschäftigen wir uns in Kapitel 4 mit Swingoptionen und deren Bewertung durch den Longstaff-Schwartz-Algorithmus.

1.2 Mathematische Konzepte - Stoppzeiten

Ein zentraler Bestandteil der vorliegenden Arbeit besteht in der Bewertung von Finanztiteln mit amerikanischem Ausübungsmerkmal. Um dies mathematisch handhaben zu können, wurden einige Konzepte entwickelt, die im Folgenden zusammengetragen werden sollen. Der Fokus liegt hier auf der Definition von Stoppzeiten, dem Snell-Envelope und der Formulierung der Doob-Zerlegung. Wir betrachten in der gesamten Arbeit einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, auf dem eine diskrete Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0, \dots, T}$ definiert ist. Die Konstante T bezeichnet dabei den betrachteten Zeithorizont. Die benötigten Konzepte werden wir in dem Kontext definieren, in dem sie später Anwendung finden.

Definition 1.2.1. *Eine Zufallsvariable τ , die Werte in $\{0, 1, 2, \dots, T\}$ annimmt, heißt eine Stoppzeit, falls*

$$\{\tau \leq t\} = \{\omega \in \Omega \mid \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

Bemerkung 1. *Alle Stoppzeiten, die hier betrachtet werden, sind beschränkt, d.h. es gibt eine Konstante K , für die $\mathbb{P}(\tau \leq K) = 1$ gilt.*

Wie Bingham und Kiesel³ anmerken, können Stoppzeiten als Zeitpunkt interpretiert

³ BINGHAM, N.H./KIESEL, R.: Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives (Springer Finance). 2. Auflage. Springer, Berlin, 2004, S. 83.

werden, zu dem wir uns entscheiden, aus einem Glücksspiel auszusteigen. Die Definition stellt sicher, dass diese Entscheidung nur von den Informationen abhängt, die zum jeweiligen Zeitpunkt verfügbar sind. In unserem Kontext wird das Glücksspiel das Halten einer Option sein, deren Ausübungszeitpunkt durch eine Stoppzeit gegeben ist.

Weiterhin benötigen wir einen Begriff, um die Ereignisse zu beschreiben, die bis zu einer Stoppzeit τ beobachtbar sind. Dies führt zur Definition der Stoppzeit σ -Algebra.

Definition 1.2.2. Sei τ eine Stoppzeit. Dann sei die Stoppzeit σ -Algebra durch

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} \mid A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, 0 \leq t \leq T\}$$

definiert.

Für einen stochastischen Prozess $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ bezeichne $X_\tau = X_{\tau(\omega)}(\omega)$ den Wert des Prozesses zur Stoppzeit τ . Für zwei Stoppzeiten σ und τ mit $\sigma \leq \tau$ können wir damit den erwarteten Wert des gestoppten Prozesses X_τ auf Grundlage der Informationen, die uns in σ zur Verfügung stehen, mit $\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma)$ bezeichnen. Das folgende Theorem gibt eine Identität für $\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma)$ an, falls X ein Martingal ist.

Theorem 1.2.3 (Doobs Optional-Sampling Theorem). Seien $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ ein Martingal und σ, τ beschränkte Stoppzeiten mit $\sigma \leq \tau$. Dann gilt

$$\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma.$$

Ein Beweis des Theorems findet sich z.B. in Bingham und Kiesel⁴. Dazu seien noch zwei Bemerkungen gemacht.

Bemerkung 2. Da der bedingte Erwartungswert einer Zufallsvariablen den gleichen Erwartungswert wie die Zufallsvariable selbst besitzt, gilt insbesondere

$$\mathbb{E}(X_\tau) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma)) = \mathbb{E}(X_\sigma).$$

⁴ BINGHAM/KIESEL: Risk-Neutral Valuation, S. 85.

Bemerkung 3. In unserem Kontext wird eine der beiden Stoppzeiten durch die konstante Funktion $\sigma \equiv t$ für ein $t \in [0, T]$ gegeben sein.

1.3 Der Snell-Envelope und optimales Stoppen

Bei der Bewertung von Optionen amerikanischen Typs steht der Inhaber zu jedem Zeitpunkt vor der Entscheidung die Option auszuüben oder weiterlaufen zu lassen. Optimalerweise trifft der Halter die Wahl vor dem Hintergrund seinen Payoff zu maximieren. Das Konzept des Snell-Envelopes greift die Eigenschaften dieser Entscheidung auf.

Definition 1.3.1. Sei $X = (X_t)_{t=0, \dots, T}$ eine an die Filtration \mathcal{F} adaptierte Folge mit $\mathbb{E}(|X_t|) < \infty$. Dann heißt die Folge $U = (U_t)_{t=0, \dots, T}$, die durch

$$U_t = \begin{cases} X_T, & t = T \\ \max\{X_t; \mathbb{E}(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)\}, & t < T \end{cases}$$

definiert ist, der Snell-Envelope von X .

Bemerkung 4. Interpretieren wir die adaptierte Folge X als Auszahlungsprozess, spiegelt die Definition die Wahlmöglichkeiten des Optionshalters wider.

Bemerkung 5. Eine weitere Charakterisierung des Snell-Envelopes kann als das kleinste Supermartingal, das den Prozess X dominiert, gegeben werden.

Für die Bewertung der Option ist es manchmal hilfreich die Sichtweise zu ändern: weg von einer Folge von Entscheidungen, wie oben beschrieben, und hin zu dem Problem den optimalen Ausübungszeitpunkt zu finden. Mathematisch gesehen suchen wir damit die optimale Stoppzeit für den Auszahlungsprozess. Mit der Bezeichnung $\mathcal{T}_{t,T}$ für die Menge aller Stoppzeiten mit Werten in $\{t, t+1, \dots, T\}$ wollen wir eine Stoppzeit $\sigma \in \mathcal{T}_{t,T}$ optimal für einen Prozess X nennen, wenn

$$\mathbb{E}(X_\sigma|\mathcal{F}_t) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}(X_\tau|\mathcal{F}_t)$$

erfüllt ist. Das folgende Theorem gibt eine Charakterisierung des Snell-Envelopes durch optimale Stoppzeiten an.

Theorem 1.3.2. *Sei U der Snell-Envelope von X und τ_t^* die durch $\tau_t^* = \inf\{j \geq t \mid U_j = X_j\}$ definierte Stoppzeit. Dann gilt*

$$U_t = \mathbb{E}(X_{\tau_t^*} | \mathcal{F}_t) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}(X_\tau | \mathcal{F}_t).$$

Ein Beweis findet sich z.B. in Bingham und Kiesel⁵. Dieses Theorem lässt zwei wichtige Schlussfolgerungen zu. Erstens löst der Snell-Envelope das Problem des optimalen Stoppens, da wir mit seiner Hilfe die optimale Stoppzeit τ_t^* definieren können, die den Zeitpunkt angibt, zu dem der Prozess X und sein Snell-Envelope das erste Mal den gleichen Wert haben. Zweitens können wir den Preis einer Option bestimmen, indem wir den Wert des Snell-Envelopes zum Zeitpunkt $t = 0$ berechnen. Dieses Resultat werden wir im nächsten Abschnitt benutzen.

Abschließend sei ein weiteres vorbereitendes Theorem erwähnt, welches es uns ermöglicht, einen adaptierten Prozess in eine Summe von Prozessen mit mehr Struktur zu zerlegen.

Theorem 1.3.3 (Doob-Zerlegung). *Sei $X = (X_t)_{t=0,\dots,T}$ ein adaptierter Prozess mit $X_t \in \mathcal{L}^1$ für alle $t = 0$ bis T . Dann besitzt X eine Doob-Zerlegung*

$$X_t = X_0 + M_t - A_t \quad \forall 0 \leq t \leq T,$$

wobei M ein Martingal mit $M_0 = 0$ und A ein previsible Prozess mit $A_0 = 0$ ist. Ist X darüber hinaus ein Supermartingal (Submartingal), so ist die Komponente A monoton wachsend (fallend).

Nachdem wir nun alle nötigen Konzepte und Sätze zusammengetragen haben, führen wir im nächsten Kapitel den Longstaff-Schwartz-Algorithmus ein.

⁵ BINGHAM/KIESEL: Risk-Neutral Valuation, S. 91.

Kapitel 2

Longstaff-Schwartz-Algorithmus

2.1 Simulation zur Preisbestimmung

Es gibt einige Ansätze zur Bewertung amerikanischer Optionen. Neben Baum- und Finite-Differenzen-Methoden wurde in der Mathematik auch die Anwendbarkeit von Simulationstechniken zur Preisbestimmung untersucht. Die Idee der Simulation besteht darin, eine große Anzahl Pfade des Basiswertes zu simulieren und jedem dieser Pfade - entsprechend einer vorher festgelegten Ausübungsstrategie - eine Auszahlung zuzuordnen. Das Mittel über die so ermittelten Auszahlungen liefert einen Schätzer für den fairen Preis des Derivats. Die Entwicklung des Basiswertes (und damit auch von Simulationsalgorithmen im Allgemeinen) läuft dabei in der Zeit vorwärts. Des Weiteren wird eine vorher festgelegte Ausübungsstrategie benötigt, um auf diese Weise einen Preis berechnen zu können. Im Kontext von Derivaten mit amerikanischer Ausübung beruhen Berechnungsalgorithmen jedoch meistens auf einer Rückwärtsinduktion nach der Idee der dynamischen Programmierung von Richard Bellmann, die in der Zeit rückwärts läuft. Weiterhin muss in diesem Fall auch die optimale Ausübungsstrategie im Sinne einer Stoppzeit erst noch durch Simulation ermittelt werden; sie steht demzufolge nicht vorher fest. Aufgrund dieser gegensätzlichen Charakteristika sah man lange Zeit keine Möglichkeit Preise für Derivate amerikanischen Typs mit Hilfe von Simulation zu berechnen.⁶

⁶ Vgl. CAMPBELL, J.Y./LO, A.W./MACKINLAY, A.C.: The Econometrics of Financial Markets. 2. Auflage. Princeton University Press, 1997, S. 390.

Sei mit $Z = (Z_t)_{t=0,\dots,T}$ der diskretisierte Auszahlungsprozess der Option bezeichnet, wobei Z_t die Auszahlung zum Zeitpunkt t angibt. Ziel ist es dann, durch Simulation den Wert

$$V = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}(e^{-r\tau} Z_\tau)$$

mit r als Zinssatz zu berechnen. Eine intuitive Idee besteht darin, pfadweise die optimale Stoppzeit zu berechnen und damit

$$V = \max_{t=0,\dots,T} e^{-rt} Z_t$$

als Preis für die jeweilige Realisierung des Basiswertes zu erhalten. Allerdings unterstellt diese Strategie die Kenntnis der zukünftigen Entwicklung des Basiswertes und damit beruht die Entscheidung nicht länger nur auf den Informationen, die dem Inhaber der Option tatsächlich zu Verfügung stehen. Der auf diese Weise erhaltene Preis würde den wahren Wert tendenziell überschätzen.⁷ Die Idee von Longstaff und Schwartz⁸ besteht nun darin, für jeden simulierten Pfad die optimale Stoppzeit mit Hilfe der Information aus den anderen simulierten Pfaden zu finden. Dazu wird der Wert der Option bei Fortführung⁹ durch eine Regression auf eine Menge von Basisfunktionen approximiert. Ein Beispiel soll diese Vorgehensweise verdeutlichen.

2.2 Einführendes Beispiel

Wir wollen mit dem Longstaff-Schwartz-Algorithmus (im Folgenden: LS-Algorithmus) eine amerikanische Put Option auf eine Aktie ohne Dividendenzahlungen bewerten. Die Option gebe dem Inhaber das Recht an den Zeitpunkten $t = 1, 2, 3$ die Aktie zu einem Basispreis von 1,00 zu veräußern. Der risikolose Zinssatz sei 5%. Aus Gründen der Übersichtlichkeit beschränken wir uns auf die folgenden acht Beispielpfade

⁷ Vgl. BROADIE, M./GLASSERMAN, P.: Pricing American-style securities using simulation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21 1997 Nr. 8-9, S. 1328.

⁸ LONGSTAFF/SCHWARTZ: Valuing American options by simulation.

⁹ Im Folgenden werden wir dafür den in der englischen Literatur gebräuchlichen Begriff des Continuation Value verwenden.

in Tabelle 2.1, die betrachtet werden sollen, als wären sie unter dem risikoneutralen Maß simuliert worden. Der Idee der dynamischen Programmierung folgend, berech-

Pfad Nr.	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	1,00	0,85	0,91	0,90
2	1,00	1,10	1,12	1,05
3	1,00	0,93	1,01	0,83
4	1,00	1,05	0,97	0,94
5	1,00	1,12	1,03	1,17
6	1,00	0,89	0,83	0,78
7	1,00	1,03	0,94	1,02
8	1,00	0,80	0,93	1,08

Tabelle 2.1: Kursentwicklung der acht simulierten Pfade.

nen wir eine Folge von optimalen Stoppzeiten, aus denen wir dann für jeden Pfad den entsprechenden Payoff bestimmen können. Wir nutzen, wie bei amerikanischen Optionen üblich, die Rückwärtsinduktion und betrachten daher den Fälligkeitstag der Option ($t = 3$) unter der Annahme, dass der Inhaber zu diesem Zeitpunkt von seinem Ausübungsrecht noch nicht Gebrauch gemacht hat. Da diese Entscheidung keiner Unsicherheit unterliegt, lautet die optimale Strategie: Übe die Option aus, wenn sie im Geld ist. Lasse das Ausübungsrecht in allen anderen Fällen verfallen. Daraus ergeben sich bei Fälligkeit die Auszahlungen in Tabelle 2.2. Im nächsten

Pfad Nr.	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	–	–	0,10
2	–	–	0,00
3	–	–	0,17
4	–	–	0,06
5	–	–	0,00
6	–	–	0,22
7	–	–	0,00
8	–	–	0,00

Tabelle 2.2: Auszahlungen zum Zeitpunkt $t = 3$.

Schritt betrachten wir den Zeitpunkt $t = 2$. Dabei nehmen wir erneut an, dass der

Inhaber sein Ausübungsrecht bis dahin noch nicht genutzt hat. Der Optionshalter muss entscheiden, ob er die Option ausübt oder sie weiterlaufen lässt, um eventuell später auszuüben. Dazu vergleicht er die Auszahlung bei sofortiger Ausübung mit dem Continuation Value. Letzteren gilt es zu berechnen. Die Informationen, die in $t = 2$ zur Berechnung zur Verfügung stehen, sind die Aktienkurse bis zu diesem Zeitpunkt. Bezeichne daher S_2 den Vektor der Aktienkurse, bei denen die Option in $t = 2$ im Geld ist, und Y den Vektor der abgezinsten Auszahlungen aus $t = 3$ für die entsprechenden Pfade. Die Werte für Y stellen wir also unter der Annahme zusammen, dass die Option in $t = 2$ nicht ausgeübt wird. Im Beispiel sind S_2 und Y durch Tabelle 2.3 gegeben. Eine Schätzung für den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}(Y|S_2)$,

Pfad Nr.	Y	S_2
1	$0,10 \cdot 0,9512$	0,91
2	–	–
3	–	–
4	$0,06 \cdot 0,9512$	0,97
5	–	–
6	$0,22 \cdot 0,9512$	0,83
7	$0,00 \cdot 0,9512$	0,94
8	$0,00 \cdot 0,9512$	0,93

Tabelle 2.3: Regression zum Zeitpunkt $t = 2$.

der den Continuation Value angibt, bestimmen wir durch Regression auf eine Konstante sowie die Vektoren S_2 und S_2^2 . Im LS-Algorithmus wird also angenommen, dass $\mathbb{E}(Y|S_2)$ durch $\mathbb{E}(Y|S_2) = a_1 + a_2 S_2 + a_3 S_2^2$ mit Parametern $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ approximiert werden kann. Durch eine Kleinste-Quadrate-Regression erhalten wir im Beispiel die Darstellung $\mathbb{E}(Y|S_2) = 12,3338 - 26,0178 S_2 + 13,7537 S_2^2$.

Wegen der Beschränkung auf Pfade, die im Geld liegen, erreicht der LS-Algorithmus einen besseren Schätzer für den bedingten Erwartungswert und erzielt eine bessere Performance, aufgrund des geringeren Rechenaufwands bei der Regression. Die Wahl der Basisfunktionen $e_1(S_2) = \text{konst.}$, $e_2(S_2) = S_2$ und $e_3(S_2) = S_2^2$ für die Regression ist vorerst willkürlich und wird später in Abschnitt 3.3 diskutiert.

Setzen wir pfadweise den Aktienkurs S_2 in die approximierende Funktion für den

Erwartungswert ein, erhalten wir Tabelle 2.4, welche die Entscheidung des Optionsinhabers in $t = 2$ widerspiegelt, da sie die Auszahlung bei sofortiger Ausübung und den geschätzten Wert bei Fortführung der Option gegenüberstellt. Die optimale Stra-

Pfad Nr.	Ausüben	Fortführen
1	0,09	0,047
2	–	–
3	–	–
4	0,03	0,038
5	–	–
6	0,17	0,214
7	0,06	0,030
8	0,07	0,033

Tabelle 2.4: Auszahlung bei sofortiger Ausübung und geschätzter Continuation Value, falls nicht sofort ausgeübt wird in $t = 2$.

tegie wählt pfadweise das Maximum dieser beiden Größen. Daraus ergeben sich vom Zeitpunkt $t = 2$ gesehen die Zahlungsströme in Tabelle 2.5, die implizit die optimale Stoppzeit beinhalten. Wenn die Entscheidung, wie bei Pfad 1, dahingehend ausfällt,

Pfad Nr.	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	–	0,09	0,00
2	–	0,00	0,00
3	–	0,00	0,17
4	–	0,00	0,06
5	–	0,00	0,00
6	–	0,00	0,22
7	–	0,06	0,00
8	–	0,07	0,00

Tabelle 2.5: Auszahlungen zum Zeitpunkt $t = 2$.

die Option sofort auszuüben, kann sie später kein zweites Mal ausgeübt werden. Aus diesem Grund werden bei sofortiger Ausübung alle zukünftigen Zahlungsströme auf den Wert 0 gesetzt.

Die gesamte bisherige Prozedur wiederholt sich für den Zeitpunkt $t = 1$. Wir erstellen für die Regression die Punktwolke, die aus dem aktuellen Aktienkurs S_1

und den abgezinsten zukünftigen Zahlungsströmen Y besteht. Dabei betrachten wir ausschließlich Pfade, bei denen die Option in $t = 1$ im Geld ist. Die Vektoren Y und S_1 sind in Tabelle 2.6 dargestellt. Man beachte, dass die Zahlungsströme ent-

Pfad Nr.	Y	S_1
1	$0,09 \cdot 0,9512$	0,85
2	–	–
3	$0,17 \cdot 0,9048$	0,93
4	–	–
5	–	–
6	$0,22 \cdot 0,9048$	0,89
7	–	–
8	$0,07 \cdot 0,9512$	0,80

Tabelle 2.6: Regression zum Zeitpunkt $t = 1$.

sprechend ihrer Zeitpunkte über eine oder über zwei Perioden abgezinst werden. Weiterhin nutzt der LS-Algorithmus für den Wert der zukünftigen Auszahlungen nicht die Werte, die durch die Approximation des bedingten Erwartungswertes geschätzt wurden, sondern die tatsächlich realisierten Zahlungsströme bei Befolgung der optimalen Ausübungsstrategie. Statt also den Continuation Value direkt zu

Pfad Nr.	Ausüben	Fortführen
1	0,15	0,124
2	–	–
3	0,07	0,169
4	–	–
5	–	–
6	0,11	0,156
7	–	–
8	0,20	0,056

Tabelle 2.7: Auszahlung bei sofortiger Ausübung und geschätzter Continuation Value, falls nicht sofort ausgeübt wird in $t = 1$.

schätzen, werden rekursiv optimale Stoppzeiten geschätzt, aus denen dieser Wert ableitbar ist. Diese Eigenschaft des LS-Algorithmus werden wir in Abschnitt 2.4

noch einmal beim Beweis der Konvergenz des Algorithmus aufgreifen. Zum Zeitpunkt $t = 1$ ergibt die Regression für den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}(Y|S_1)$ den Schätzer $\mathbb{E}(Y|S_1) = -5,2427 + 11,576S_1 - 6,1908S_1^2$. Erneut stellen wir darauf basierend Tabelle 2.7 auf, welche die Entscheidungsmöglichkeiten des Optionshalters aufzeigt.

Entsprechend der Entscheidungsregel pfadweise das Maximum beider Spalten zu bevorzugen, können wir vom Standpunkt des Laufzeitbeginns der Option folgende Schätzung für die optimale Ausübungsstrategie finden, die in Tabelle 2.8 angegeben ist. Eine 1 stehe dabei für einen Ausübungszeitpunkt und eine 0 für keine Aktion.

Pfad Nr.	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	1	0	0
2	0	0	0
3	0	0	1
4	0	0	1
5	0	0	0
6	0	0	1
7	0	1	0
8	1	0	0

Tabelle 2.8: Geschätzte optimale Ausübungsstrategie.

Nachdem die optimale Ausübungsstrategie so festgelegt ist, können wir für jeden Pfad den Zahlungsstrom ermitteln. Dies führt zu Tabelle 2.9. Der Preis der ameri-

Pfad Nr.	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	0,15	0,00	0,00
2	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	0,17
4	0,00	0,00	0,06
5	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	0,22
7	0,00	0,06	0,00
8	0,20	0,00	0,00

Tabelle 2.9: Zahlungsströme aus Sicht des Emissionszeitpunktes der Option.

kanischen Put Option ermittelt sich nun als Mittel über die auf den Zeitpunkt $t = 0$ abgezinsten Zahlungsströme. In diesem Fall ergibt sich dafür ein Wert von 0,0968.

Nachdem dieses Beispiel die Funktionsweise des LS-Algorithmus veranschaulicht hat, werden wir im nächsten Abschnitt eine formelle Beschreibung des Algorithmus geben. Es sei angemerkt, dass obige Ausführungen lediglich dem Verständnis dienen und so nicht eins zu eins implementiert werden sollten. Im Abschnitt 3.1 wird später noch näher auf die Implementierung eingegangen.

2.3 Formelle Beschreibung

Im Folgenden wollen wir eine formelle Beschreibung des LS-Algorithmus geben um dann, analog zu Clément et al.¹⁰, seine Konvergenz zu beweisen. Wie bereits in der Einführung erwähnt, betrachten wir einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit einem endlichen Zeithorizont $[0, T]$. Da der LS-Algorithmus auf Simulation basiert, ersetzen wir das Problem in stetiger Zeit durch ein Problem in diskreter Zeit und betrachten dazu die Zeitpunkte $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T$, auf die wir uns meistens mit $t = 0, t = 1, \dots, t = T$ beziehen werden. Durch Erhöhung der Anzahl der Zeitpunkte k kann das Originalproblem beliebig genau durch das diskrete Problem approximiert werden. Mit der diskreten Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t=0, \dots, T}$ sei $Z = (Z_t)_{t=0, \dots, T}$ der adaptierte Auszahlungsprozess der zu bewertenden Option. Die Zufallsvariablen Z_0, Z_1, \dots, Z_T seien dabei quadratisch integrierbar. Weiter nehmen wir an, dass das zugrunde liegende Modell eine Markovkette $S = (S_t)_{t=0, \dots, T}$ mit Zustandsraum (E, \mathcal{E}) ist. Dabei sei der Startzustand S_0 deterministisch. Dann existiert eine borelmeßbare Funktion $f(j, \cdot)$ mit

$$Z_j = f(j, S_j).$$

Theorem 1.3.2 zufolge können wir den Preis der Option mit Hilfe des Snell-Envelopes $U = (U_t)_{t=0, \dots, T}$ von Z bestimmen. Sei also der Preis der Option zum Zeitpunkt t

¹⁰ CLÉMENT, E./LAMBERTON, D./PROTTER, P.: An analysis of a least squares regression method for American option pricing. Finance and Stochastics, 6 2002.

mit V_t bezeichnet, dann gilt

$$V_0 = U_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}Z_\tau$$

mit $\mathcal{T}_{0,T}$, der Menge aller Stoppzeiten mit Werten in $\{0, 1, \dots, T\}$. Eine mögliche optimale Stoppzeit ist das Element τ_0 der Menge $\{\tau_0, \dots, \tau_T \mid \tau_j \in \mathcal{T}_{j,T}\}$, die durch

$$\tau_j = \begin{cases} T, & j = T \\ j \mathbb{1}_{\{Z_j \geq \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)\}} + \tau_{j+1} \mathbb{1}_{\{Z_j < \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)\}}, & 0 \leq j \leq T - 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

definiert ist. Allerdings lassen sich die auftretenden bedingten Erwartungen in den meisten Fällen nicht einfach berechnen. Ziel des LS-Algorithmus ist es daher, eine Approximation für diese Stoppzeiten zu bestimmen.

Dazu betrachten wir die bedingte Erwartung $\mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)$ als Projektion auf den Raum $L^2(\Omega, \mathcal{F}_j, \mathbb{P})$ der quadratisch integrierbaren, \mathcal{F}_j -messbaren Funktionen. Dies ist möglich, da die Zufallsvariablen Z_t quadratisch integrierbar sind.¹¹ Als Hilbertraum besitzt $L^2(\Omega, \mathcal{F}_j, \mathbb{P})$ eine Orthonormalbasis $(e_k)_{k=1}^\infty$, welche die Darstellung

$$\mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k(S_j)$$

mit $\alpha_k \in \mathbb{R}, k = 1, 2, \dots$ erlaubt.¹² Dabei entspricht die Markovkette $S = (S_t)_{t=0, \dots, T}$ dem diskretisierten Kursprozess des Basiswertes. Wir nehmen an, dass die Folge $(e_k)_{k=1}^\infty$ für $j = 1$ bis $T - 1$ eine Orthonormalbasis in $L^2(\sigma(S_j))$ bildet.¹³ Durch Beschränkung auf endlich viele dieser Basisfunktionen e_1, \dots, e_m erhält man die

¹¹ Vgl. KLENKE, A.: Wahrscheinlichkeitstheorie. 1. Auflage. Springer, Berlin, 2006, S. 172.

¹² Vgl. WERNER, D.: Funktionalanalysis (Springer-Lehrbuch). 6. Auflage. Springer, Berlin, 9 2007, S. 234.

¹³ Clément et al. formulieren stattdessen für $j = 1$ bis $T - 1$ die beiden Annahmen, dass die Folge $(e_k(S_j))_{k=1}^\infty$ total in $L^2(\sigma(S_j))$ ist und aus der fast sicheren Gleichheit $\sum_{k=1}^m \lambda_k e_k(S_j) = 0$ die Beziehung $\lambda_k = 0$ für $k = 1$ bis m folgt. Ist $(e_k)_{k=1}^\infty$ wie hier gefordert eine Orthonormalbasis, sind diese beiden Annahmen erfüllt.

Projektion P_j^m mit

$$P_j^m(Z_{\tau_{j+1}}) := \sum_{k=1}^m \alpha_k e_k(S_j).$$

Sei die vektorwertige Funktion e^m definiert als $e^m = (e_1, \dots, e_m)$. Dann können wir die Projektion durch das Skalarprodukt

$$P_j^m(Z_{\tau_{j+1}}) = \alpha_j^m \cdot e^m(S_j) \quad (2.2)$$

darstellen. Nach Clément et al.¹⁴ bestimmt sich dabei der m -dimensionale Parameter α_j^m durch

$$\alpha_j^m = (A_j^m)^{-1} \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}}^{[m]} e^m(S_j)),$$

für $j = 1$ bis $T - 1$, wobei die Matrix A_j^m die Einträge

$$A_{j,k,l}^m = \mathbb{E}(e_k(S_j) e_l(S_j))$$

besitzt. Mit Hilfe dieser Projektionen können wir Stoppzeiten $\tau_j^{[m]}$ durch

$$\tau_j^{[m]} = \begin{cases} T, & j = T \\ j \mathbb{1}_{\{Z_j \geq P_j^m(Z_{\tau_{j+1}}^{[m]})\}} + \tau_{j+1}^{[m]} \mathbb{1}_{\{Z_j < P_j^m(Z_{\tau_{j+1}}^{[m]})\}}, & 1 \leq j \leq T - 1 \end{cases}$$

definieren, welche die Näherung

$$V_0^m = U_0^m = \max \left\{ Z_0; \mathbb{E} Z_{\tau_1}^{[m]} \right\}$$

für den Wert V_0 der Option ergeben. Diese Näherung bezeichnen wir als die erste Approximation.

Um dies implementieren zu können, nehmen wir an, dass N unabhängige Pfade $S^{(1)}, \dots, S^{(n)}, \dots, S^{(N)}$ der Markovkette simuliert werden können. Die zugehörige Auszahlungsfunktion sei durch $Z^{(n)}$ mit $Z_j^{(n)} = f(j, S_j^{(n)})$ bezeichnet. Nun möchten

¹⁴ CLÉMENT/LAMBERTON/PROTTER: Finance and Stochastics, Bd. 6, 2002, S. 453.

wir pfadweise die Stoppzeiten $\tau_j^{n,m,N}$ definieren, die tatsächlich vom LS-Algorithmus berechnet werden. Da die Definition rekursiv erfolgt, setzen wir im Folgenden die Stoppzeit $\tau_{j+1}^{n,m,N}$ als bekannt voraus. Diese soll das optimale Verhalten ab dem Zeitpunkt $t = j + 1$ widerspiegeln. Bezeichne $y_j^{(n)}$ den Barwert der zukünftigen Zahlungsströme für den n -ten simulierten Pfad, welche vom Standpunkt $t = j$ durch Befolgung der optimalen Strategie $\tau_{j+1}^{n,m,N}$ erzielt werden und $x_j^{(n)}$ den Kurs des n -ten Pfades zum Zeitpunkt j . Mit Hilfe dieser Datenpunkte der N simulierten Pfade erhalten wir dann einen Schätzer $\alpha_j^{(m,N)} := (\hat{\alpha}_j^1, \dots, \hat{\alpha}_j^m)$ für die Koeffizienten der Projektion (2.2) durch die Regression

$$(\hat{\alpha}_j^1, \dots, \hat{\alpha}_j^m) = \arg \min_{(a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m} \sum_{n=1}^N \left(y_j^{(n)} - a_1 e_1(x_j^{(n)}) - \dots - a_m e_m(x_j^{(n)}) \right)^2.$$

Der LS-Algorithmus nutzt jedoch ausschließlich die Datenpunkte, bei denen die Option für den entsprechenden Pfad zum Zeitpunkt $t = j$ im Geld ist. Wie wir in Abschnitt 3.1 noch ausführlicher sehen werden, haben diese Parameter die Darstellung

$$\alpha_j^{(m,N)} = (A_j^{(m,N)})^{-1} \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Z_{\tau_{j+1}^{n,m,N}}^{(n)} e^m(S_j^{(n)})$$

mit der Matrix $A_j^{(m,N)}$, die durch

$$A_{j,k,l}^{(m,N)} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N e_k(S_j^{(n)}) e_l(S_j^{(n)})$$

gegeben ist.¹⁵ Auf diese Weise berechnet der LS-Algorithmus nach Festlegung der Basisfunktionen e_1, \dots, e_m die Parameter $\alpha_j^{(m,N)}$, um daraus rekursiv die Stoppzeiten $\tau_j^{n,m,N}$ durch

$$\tau_j^{n,m,N} = \begin{cases} T, & j = T \\ j \mathbb{1}_{\{Z_j^{(n)} \geq \alpha_j^{(m,N)} \cdot e^m(S_j^{(n)})\}} + \tau_{j+1}^{n,m,N} \mathbb{1}_{\{Z_j^{(n)} < \alpha_j^{(m,N)} \cdot e^m(S_j^{(n)})\}}, & j = 1, \dots, T - 1 \end{cases}$$

¹⁵Abweichend von den Ausführungen in Abschnitt 3.1 wurde hier noch der Faktor $\frac{1}{N}$ ergänzt, um die Parallelen zu den Parametern α_j^m zu verdeutlichen.

zu bestimmen. Man beachte, dass $\tau_j^{n,m,N}$ wiederum zur Berechnung von $\alpha_{j-1}^{(m,N)}$ benötigt wird. Die zweite Näherung für den Optionspreis wird mit Hilfe der Stoppzeiten $\tau_j^{n,m,N}$ durch

$$V_0^{m,N} = U_0^{m,N} = \max \left\{ Z_0; \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Z_{\tau_1^{n,m,N}}^{(n)} \right\}$$

gegeben. Damit haben wir zwei Approximationen V_0^m und $V_0^{m,N}$ für den Optionspreis, die sich aufgrund der Definition über die Stoppzeiten maßgeblich durch den Gebrauch der Koeffizienten α_j^m bzw. $\alpha_j^{(m,N)}$ unterscheiden. Während $Z_{\tau_j^{[m]}}$ (und damit auch V_0^m) über die Koeffizienten α_j^m der Projektion

$$P_j^m(Z_{\tau_{j+1}^{[m]}}) = \alpha_j^m \cdot e^m(S_j)$$

definiert wird, nutzen wir bei der Definition von $Z_{\tau_j^{n,m,N}}$ die Koeffizienten $\alpha_j^{(m,N)}$ aus der Regression

$$\alpha_j^{(m,N)} = \arg \min_{a \in \mathbb{R}^m} \sum_{n=1}^N \left(Z_{\tau_{j+1}^{n,m,N}}^{(n)} - a \cdot e^m(S_j^{(n)}) \right)^2.$$

Um die Abhängigkeit von den Koeffizienten ausdrücken zu können, führen wir eine weitere Bezeichnung ein. Seien der Parameter $\alpha^m = (\alpha_1^m, \dots, \alpha_{T-1}^m) \in \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m$ und die Vektoren $z = (z_1, \dots, z_T) \in \mathbb{R}^T$ und $s = (s_1, \dots, s_T) \in E^T$ gegeben, dann definieren wir $F = (F_1, \dots, F_L)$ durch

$$\begin{aligned} F_L(\alpha^m, z, s) &= z_T, \\ F_j(\alpha^m, z, s) &= z_j \mathbb{1}_{\{z_j \geq \alpha_j^m \cdot e^m(s_j)\}} + F_{j+1}(\alpha^m, z, s) \mathbb{1}_{\{z_j < \alpha_j^m \cdot e^m(s_j)\}}, \end{aligned}$$

für $j = 1$ bis $T - 1$. Mit dieser Definition gilt

$$\begin{aligned} F_j(\alpha^m, Z, S) &= Z_{\tau_j^{[m]}}, \\ F_j(\alpha^{(m,N)}, Z^{(n)}, S^{(n)}) &= Z_{\tau_j^{n,m,N}}^{(n)} \end{aligned}$$

und somit auch

$$\begin{aligned}\alpha_j^m &= (A_j^m)^{-1} \cdot \mathbb{E}(F_{j+1}(\alpha^m, Z, S)e^m(S_j)), \\ \alpha_j^{(m,N)} &= (A_j^{(m,N)})^{-1} \cdot \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F_{j+1}(\alpha^{(m,N)}, Z^{(n)}, S^{(n)})e^m(S_j^{(n)}).\end{aligned}$$

Mit den eingeführten Bezeichnungen können wir nun die Konvergenz des LS-Algorithmus beweisen.

2.4 Konvergenz des Algorithmus

Analog zu den Ausführungen in Clément et al.¹⁶ beziehen sich die kommenden Überlegungen nicht exakt auf den LS-Algorithmus, da die Beschränkung auf Pfade im Geld bei der Regression nicht berücksichtigt wird. Die Beweisidee ist allerdings die gleiche und leicht übertragbar. Würde man mit dem exakten Algorithmus arbeiten, ist die Verwendung weiterer Indikatorfunktionen notwendig, führt jedoch zu einer unübersichtlicheren Notation.

Vorangestellt sei der Beweis einer Ungleichung für Indikatorfunktionen, die wir im Folgenden nutzen werden.

Lemma 2.4.1. *Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt*

$$|\mathbb{1}_{\{a \geq b\}} - \mathbb{1}_{\{a \geq c\}}| \leq \mathbb{1}_{\{|a-c| \leq |b-c\}}.$$

Beweis. Wenn wir den linken Term durch

$$\begin{aligned}|\mathbb{1}_{\{a \geq b\}} - \mathbb{1}_{\{a \geq c\}}| &= |\mathbb{1}_{\{a \geq b\}} - \mathbb{1}_{\{a \geq b\}}\mathbb{1}_{\{a \geq c\}} - \mathbb{1}_{\{a \geq c\}} + \mathbb{1}_{\{a \geq b\}}\mathbb{1}_{\{a \geq c\}}| \\ &= |\mathbb{1}_{\{a \geq b\}}(1 - \mathbb{1}_{\{a \geq c\}}) - \mathbb{1}_{\{a \geq c\}}(1 - \mathbb{1}_{\{a \geq b\}})| \\ &= |\mathbb{1}_{\{a \geq b\}}\mathbb{1}_{\{c > a\}} - \mathbb{1}_{\{a \geq c\}}\mathbb{1}_{\{b > a\}}| \\ &= |\mathbb{1}_{\{c > a \geq b\}} - \mathbb{1}_{\{b > a \geq c\}}|\end{aligned}$$

¹⁶ CLÉMENT/LAMBERTON/PROTTER: Finance and Stochastics, Bd. 6, 2002, S. 455.

umformen, sehen wir, dass es reicht

$$|\mathbb{1}_{\{c > a \geq b\}} - \mathbb{1}_{\{b > a \geq c\}}| \leq \mathbb{1}_{\{|a-c| \leq |b-c|\}} \quad (2.3)$$

zu zeigen. Ist $\mathbb{1}_{\{|a-c| \leq |b-c|\}} = 1$, stimmt die Aussage. Daher betrachten wir den Fall $\mathbb{1}_{\{|a-c| \leq |b-c|\}} = 0$, was äquivalent ist zu

$$|b - c| < |a - c| \quad (2.4)$$

und zeigen, dass die linke Seite von (2.3) in diesem Fall ebenfalls immer den Wert Null hat. Dazu unterscheiden wir die vier Fälle, in denen der Ausdruck innerhalb der Beträge jeweils positiv oder negativ ist. Für $b \geq c$ und $a < c$ bzw. $b < c$ und $a \geq c$ hat die linke Seite von (2.3) den Wert Null, da jeweils eine Bedingung der Ungleichungskette verletzt ist. Sei also $b \geq c$ und $a \geq c$. Dann kann (2.4) geschrieben werden als

$$b - c < a - c,$$

woraus $b < a$ folgt. Zusammen mit $b \geq c$ ist die linke Seite in (2.3) gleich Null. Im letzten Fall mit $b < c$ und $a < c$ hat (2.4) die Gestalt

$$c - b < c - a.$$

Daraus erhalten wir $b > a$ und zusammen mit $a < c$ ist die linke Seite von (2.3) auch in diesem Fall gleich Null. Damit ist die Gültigkeit von (2.3) und schließlich die Behauptung gezeigt. \square

Mit Hilfe dieses Resultats können wir beweisen, dass die bedingte Erwartung des Auszahlungsprozesses $Z_{\tau_j^{[m]}}$ mit steigender Anzahl m an Basisfunktionen gegen die bedingte Erwartung des Auszahlungsprozesses Z_{τ_j} konvergiert. Dies entspricht der ersten Approximation.

Theorem 2.4.2. Sei $(S_j)_{j=0,\dots,T}$ eine Markovkette, so dass die Folge $(e_k(S_j))_{k \geq 1}$ für alle $j = 1, \dots, T-1$ in $L^2(\sigma(S_j))$ total ist, dann gilt für $j = 1$ bis T

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_{\tau_j^{[m]}} | \mathcal{F}_j) = \mathbb{E}(Z_{\tau_j} | \mathcal{F}_j)$$

in L^2 .

Beweis. Wir führen den Beweis per Induktion über j . Für $j = T$ folgt die Behauptung direkt aus $\tau_T^{[m]} = T = \tau_T$. Sei die Behauptung für $j+1$ bereits gezeigt. Dann gilt für j aufgrund der Definition der Stoppzeiten und der \mathcal{F}_j -Messbarkeit von Z_j

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(Z_{\tau_j^{[m]}} - Z_{\tau_j} | \mathcal{F}_j) \\ &= \mathbb{E}\left(Z_j \mathbf{1}_{\{Z_j \geq \alpha_j^m \cdot e^m(S_j)\}} + Z_{\tau_{j+1}^{[m]}} \mathbf{1}_{\{Z_j < \alpha_j^m \cdot e^m(S_j)\}} \right. \\ & \quad \left. - Z_j \mathbf{1}_{\{Z_j \geq \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)\}} - Z_{\tau_{j+1}} \mathbf{1}_{\{Z_j < \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)\}} | \mathcal{F}_j\right) \\ &= Z_j \left(\mathbf{1}_{\{Z_j \geq \alpha_j^m \cdot e^m(S_j)\}} - \mathbf{1}_{\{Z_j \geq \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)\}} \right) \\ & \quad + \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}^{[m]}} | \mathcal{F}_j) \mathbf{1}_{\{Z_j < \alpha_j^m \cdot e^m(S_j)\}} - \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j) \mathbf{1}_{\{Z_j < \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)\}}. \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir mit Hilfe der Identität

$$\mathbf{1}_{\{Z_j < \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)\}} = \mathbf{1}_{\{Z_j \geq \alpha_j^m \cdot e^m(S_j)\}} + \mathbf{1}_{\{Z_j < \alpha_j^m \cdot e^m(S_j)\}} - \mathbf{1}_{\{Z_j \geq \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)\}}$$

die Beziehung

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(Z_{\tau_j^{[m]}} - Z_{\tau_j} | \mathcal{F}_j) \\ &= (Z_j - \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)) \left(\mathbf{1}_{\{Z_j \geq \alpha_j^m \cdot e^m(S_j)\}} - \mathbf{1}_{\{Z_j \geq \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)\}} \right) \\ & \quad + \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}^{[m]}} - Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j) \mathbf{1}_{\{Z_j < \alpha_j^m \cdot e^m(S_j)\}}. \end{aligned}$$

Der zweite Term auf der rechten Seite der Gleichung konvergiert nach Induktionsvoraussetzung gegen Null. Um die Behauptung des Theorems zu beweisen, bleibt also zu zeigen, dass der erste Term auf der rechten Seite ebenfalls gegen Null konvergiert.

Für diesen gilt mit Lemma 2.4.1

$$\begin{aligned}
 & \left| (Z_j - \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)) \left(\mathbf{1}_{\{Z_j \geq \alpha_j^m \cdot e^m(S_j)\}} - \mathbf{1}_{\{Z_j \geq \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)\}} \right) \right| \\
 & \leq |Z_j - \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)| \mathbf{1}_{\{|Z_j - \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)| \leq |\alpha_j^m \cdot e^m(S_j) - \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)|\}} \\
 & \leq |\alpha_j^m \cdot e^m(S_j) - \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)|.
 \end{aligned}$$

Nun ist aber

$$\alpha_j^m \cdot e^m(S_j) = P_j^m(Z_{\tau_{j+1}}^{[m]}) = P_j^m(\mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}}^{[m]} | \mathcal{F}_j)),$$

wobei sich die zweite Gleichheit aus der Tatsache ergibt, dass $\mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}}^{[m]} | \mathcal{F}_j)$ im Sinne des $L^2(\mathbb{P})$ -Skalarprodukts die Projektion von $Z_{\tau_{j+1}}^{[m]}$ auf den Raum der \mathcal{F}_j -messbaren Zufallsvariablen ist und P_j^m auf einen Unterraum der \mathcal{F}_j -messbaren Zufallsvariablen projiziert. Setzen wir diese Beziehung in die obige Ungleichung ein und betrachten die L^2 -Norm, so folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
 & \left\| (Z_j - \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)) \left(\mathbf{1}_{\{Z_j \geq \alpha_j^m \cdot e^m(S_j)\}} - \mathbf{1}_{\{Z_j \geq \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)\}} \right) \right\|_2 \\
 & \leq \left\| P_j^m(\mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}}^{[m]} | \mathcal{F}_j)) - \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j) \right\|_2 \\
 & \leq \left\| P_j^m(\mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}}^{[m]} | \mathcal{F}_j)) - P_j^m(\mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)) \right\|_2 + \left\| P_j^m(\mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)) - \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j) \right\|_2 \\
 & \leq \left\| P_j^m \right\| \cdot \left\| \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}}^{[m]} | \mathcal{F}_j) - \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j) \right\|_2 + \left\| P_j^m(\mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)) - \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j) \right\|_2 \\
 & \leq \left\| \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}}^{[m]} | \mathcal{F}_j) - \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j) \right\|_2 + \left\| P_j^m(\mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j)) - \mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}} | \mathcal{F}_j) \right\|_2,
 \end{aligned}$$

wobei $\left\| P_j^m \right\| := \sup_{\|f\|_2 \leq 1} \|P_j^m(f)\|_2$ die Norm für lineare Operatoren bezeichne, für die $\left\| P_j^m \right\| \leq 1$ gilt, da P_j^m eine Projektion ist. Der erste Term auf der rechten Seite konvergiert nach der Induktionsvoraussetzung gegen Null. Der zweite Term konvergiert ebenfalls gegen Null, da die Folge $(e_k(S_j))_{k \geq 1}$ nach Voraussetzung in $L^2(\sigma(S_j))$ total ist. \square

Nun wollen wir die Approximation von $\mathbb{E}Z_{\tau_1}^{[m]}$ durch die Monte-Carlo-Simulation untersuchen. Im ersten Schritt soll dazu eine Abschätzung für den Fehler für Z_j gefunden werden, der sich aus dem Gebrauch unterschiedlicher Koeffizienten ergibt. Da wir für die Betrachtung der zweiten Approximation die Anzahl der Basisfunktionen

festhalten, lassen wir den Index m weg.

Lemma 2.4.3. *Für $j = 1$ bis $T - 1$ gilt*

$$|F_j(a, Z, S) - F_j(b, Z, S)| \leq \sum_{i=j}^T |Z_i| \sum_{i=j}^{T-1} \mathbf{1}_{\{|Z_i - b_i \cdot e(S_i)| \leq |a_i - b_i| |e(S_i)|\}}.$$

Beweis. Sei $B_j = \{Z_j < a_j \cdot e(S_j)\}$ und $\tilde{B}_j = \{Z_j < b_j \cdot e(S_j)\}$. Aufgrund der rekursiven Struktur von F_j können wir schreiben

$$F_j(a, Z, S) = Z_j \mathbf{1}_{B_j^c} + Z_T \mathbf{1}_{B_j \dots B_{T-1}} + \sum_{i=j+1}^{T-1} Z_i \mathbf{1}_{B_j \dots B_{i-1} B_i^c},$$

woraus mit der analogen Formel für $F_j(b, Z, S)$ die Beziehung

$$\begin{aligned} F_j(a, Z, S) - F_j(b, Z, S) &= Z_j (\mathbf{1}_{\tilde{B}_j} - \mathbf{1}_{B_j}) + Z_T (\mathbf{1}_{B_j \dots B_{T-1}} - \mathbf{1}_{\tilde{B}_j \dots \tilde{B}_{T-1}}) \\ &\quad + \sum_{i=j+1}^{T-1} Z_i (\mathbf{1}_{B_j \dots B_{i-1} B_i^c} - \mathbf{1}_{\tilde{B}_j \dots \tilde{B}_{i-1} \tilde{B}_i^c}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

folgt. Der Betrag $|\mathbf{1}_{B_j \dots B_{i-1} B_i^c} - \mathbf{1}_{\tilde{B}_j \dots \tilde{B}_{i-1} \tilde{B}_i^c}|$ ist nach oben durch den Wert 1 beschränkt und nimmt diesen genau dann an, wenn die Indikatorfunktionen unterschiedliche Werte haben. Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\mathbf{1}_{B_j \dots B_{i-1} B_i^c} = 1$ und $\mathbf{1}_{\tilde{B}_j \dots \tilde{B}_{i-1} \tilde{B}_i^c} = 0$. Dann existiert ein Index $k \in \{j, \dots, i-1, i\}$, für den $\mathbf{1}_{\tilde{B}_k} = 0$ gilt (bzw. $\mathbf{1}_{\tilde{B}_k^c} = 0$, für $k = i$). Weiterhin gilt $\mathbf{1}_{B_k} = 1$ (bzw. $\mathbf{1}_{B_k^c} = 1$), da $\mathbf{1}_{B_j \dots B_{i-1} B_i^c} = 1$ ist und somit gilt für diesen Index $|\mathbf{1}_{B_k} - \mathbf{1}_{\tilde{B}_k}| = 1$. Damit bekommen wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\mathbf{1}_{B_j \dots B_{i-1} B_i^c} - \mathbf{1}_{\tilde{B}_j \dots \tilde{B}_{i-1} \tilde{B}_i^c}| &\leq |\mathbf{1}_{B_i^c} - \mathbf{1}_{\tilde{B}_i^c}| + \sum_{k=j}^{i-1} |\mathbf{1}_{B_k} - \mathbf{1}_{\tilde{B}_k}| \\ &\leq \sum_{k=j}^{T-1} |\mathbf{1}_{B_k} - \mathbf{1}_{\tilde{B}_k}|, \end{aligned}$$

denn falls die linke Seite gleich 1 ist, hat auch mindestens ein Summand auf der rechten Seite den Wert 1. Wenden wir diese Ungleichung auf jeden Summanden in

(2.5) an, ergibt sich

$$|F_j(a, Z, S) - F_j(b, Z, S)| \leq \sum_{i=j}^T |Z_i| \sum_{i=j}^{T-1} |\mathbf{1}_{B_i} - \mathbf{1}_{\tilde{B}_i}|.$$

Nun können wir wegen

$$\begin{aligned} |\mathbf{1}_{B_i} - \mathbf{1}_{\tilde{B}_i}| &= |\mathbf{1}_{\{Z_i < a_i \cdot e(S_i)\}} - \mathbf{1}_{\{Z_i < b_i \cdot e(S_i)\}}| \\ &= |\mathbf{1}_{\{Z_i \geq a_i \cdot e(S_i)\}} - \mathbf{1}_{\{Z_i \geq b_i \cdot e(S_i)\}}| \end{aligned}$$

Lemma 2.4.1 für die Abschätzung

$$|\mathbf{1}_{B_i} - \mathbf{1}_{\tilde{B}_i}| \leq \mathbf{1}_{\{|Z_i - b_i \cdot e(S_i)| \leq |a_i \cdot e(S_i) - b_i \cdot e(S_i)|\}}$$

nutzen. Damit folgt die Behauptung. \square

Mit diesem Ergebnis können wir beweisen, dass der simulierte Preis der Option fast sicher gegen den Preis der Option konvergiert, der mit Hilfe der Projektion bestimmt wird, wenn die Anzahl N der simulierten Pfade gegen unendlich geht. Die genaue Formulierung gibt das nächste Theorem.

Theorem 2.4.4. *Sei $\mathbb{P}(\alpha_j \cdot e(S_j) = Z_j) = 0$ für $j = 1$ bis $T - 1$. Dann konvergiert $U_0^{m,N}$ fast sicher gegen U_0^m , wenn N gegen unendlich geht.*

Beweis. Da $U_0^{m,N} = \max \left\{ Z_0; \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Z_{\tau_1^{n,m,N}}^{(n)} \right\}$ und $U_0^m = \max \left\{ Z_0; \mathbb{E} Z_{\tau_1^{[m]}} \right\}$, reicht es

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Z_{\tau_j^{n,m,N}}^{(n)} \xrightarrow{\text{f.s.}} \mathbb{E} Z_{\tau_j^{[m]}}$$

für $j = 1$ zu zeigen. Mit unserer Notation ist dies äquivalent zu

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F_j(\alpha^{(N)}, Z^{(n)}, S^{(n)}) \xrightarrow{\text{f.s.}} \mathbb{E} F_j(\alpha, Z, S).$$

Wir führen den Beweis per Induktion über j . Für $j = T$ gilt aufgrund der Definition der Stoppzeiten und des Gesetzes der großen Zahlen

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F_T(\alpha^{(N)}, Z^{(n)}, S^{(n)}) &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Z_{\tau_T^{n,m,N}}^{(n)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Z_T^{(n)} \xrightarrow{\text{f.s.}} \mathbb{E}Z_T = \mathbb{E}Z_{\tau_T^{[m]}} = \mathbb{E}F_T(\alpha, Z, S). \end{aligned}$$

Sei die Behauptung für $j = k$ bis T bewiesen. Dann haben wir wegen

$$\begin{aligned} \alpha_{j-1}^{(N)} &= (A_{j-1}^{(N)})^{-1} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F_j(\alpha^{(N)}, Z^{(n)}, S^{(n)}) e^m(S_j^{(n)}) \\ &\xrightarrow{\text{f.s.}} (A_{j-1})^{-1} \mathbb{E}F_j(\alpha, Z, S) e^m(S_j) = \alpha_{j-1} \end{aligned}$$

auch die fast sichere Konvergenz von $\alpha_j^{(N)}$ gegen α_j für $j = k - 1$ bis $T - 1$. Für den Induktionsschritt auf $j = k - 1$ müssen wir

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F_{k-1}(\alpha^{(N)}, Z^{(n)}, S^{(n)}) \xrightarrow{\text{f.s.}} \mathbb{E}F_{k-1}(\alpha, Z, S)$$

zeigen, was äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(F_{k-1}(\alpha^{(N)}, Z^{(n)}, S^{(n)}) - F_{k-1}(\alpha, Z^{(n)}, S^{(n)}) \right) \\ &+ \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F_{k-1}(\alpha, Z^{(n)}, S^{(n)}) - \mathbb{E}F_{k-1}(\alpha, Z, S) \right) \xrightarrow{\text{f.s.}} 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Die fast sichere Konvergenz des zweiten Terms gegen Null folgt aus dem Gesetz der großen Zahlen. Für den ersten Term ergibt sich mit der Dreiecksungleichung und

Lemma 2.4.3

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(F_{k-1}(\alpha^{(N)}, Z^{(n)}, S^{(n)}) - F_{k-1}(\alpha, Z^{(n)}, S^{(n)}) \right) \right| \\
 & \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left| F_{k-1}(\alpha^{(N)}, Z^{(n)}, S^{(n)}) - F_{k-1}(\alpha, Z^{(n)}, S^{(n)}) \right| \\
 & \leq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{i=k-1}^T |Z_i^{(n)}| \sum_{i=k-1}^{T-1} \mathbb{1}_{\{|Z_i^{(n)} - \alpha_i \cdot e(S_i^{(n)})| \leq |\alpha_i^{(N)} - \alpha_i| |e(S_i^{(n)})|\}}.
 \end{aligned}$$

Da wir für $k-1 \leq i \leq T-1$ die fast sichere Konvergenz $\alpha_i^{(N)} \xrightarrow{\text{f.s.}} \alpha_i$ haben, existiert zu gegebenem $\epsilon > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $N \geq N_0$ die fast sichere Abschätzung $|\alpha_i^{(N)} - \alpha_i| \leq \epsilon$ gilt. Daher können wir zusammen mit dem Gesetz der großen Zahlen schließen

$$\begin{aligned}
 & \limsup \left| \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(F_{k-1}(\alpha^{(N)}, Z^{(n)}, S^{(n)}) - F_{k-1}(\alpha, Z^{(n)}, S^{(n)}) \right) \right| \\
 & \leq \limsup \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{i=k-1}^T |Z_i^{(n)}| \sum_{i=k-1}^{T-1} \mathbb{1}_{\{|Z_i^{(n)} - \alpha_i \cdot e(S_i^{(n)})| \leq \epsilon |e(S_i^{(n)})|\}} \\
 & = \mathbb{E} \sum_{i=k-1}^T |Z_i| \sum_{i=k-1}^{T-1} \mathbb{1}_{\{|Z_i - \alpha_i \cdot e(S_i)| \leq \epsilon |e(S_i)|\}}.
 \end{aligned}$$

Wenn wir ϵ gegen Null gehen lassen, folgt die Konvergenz des ersten Terms in (2.6) gegen Null aufgrund von $\mathbb{P}(\alpha_i \cdot e(S_i) = Z_i) = 0$ für $1 \leq i \leq T-1$. Damit haben wir den Induktionsschritt auf $j = k-1$ gezeigt und die Behauptung bewiesen. \square

Man beachte, dass die Aussage

$$V_0 = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} V_0^{m,N}$$

hier nicht komplett bewiesen wurde, da wir die beiden Grenzübergänge getrennt betrachtet haben. Weiterführende Ergebnisse zur Konvergenzgeschwindigkeit bei einer festen Anzahl verwendeter Basisfunktionen finden sich bei Clément et al.¹⁷

¹⁷ CLÉMENT/LAMBERTON/PROTTER: Finance and Stochastics, Bd. 6, 2002, S. 458ff.

Kapitel 3

Praktische Aspekte

3.1 Implementierung in Matlab

Wie schon in Abschnitt 2.2 bemerkt, ist es sinnvoll vor der Implementierung des Algorithmus einige Vorüberlegungen anzustellen. Da die Programme für diese Arbeit in Matlab geschrieben wurden, liegt ein Hauptaugenmerk auf der Vermeidung von for-Schleifen, denn die Verwendung eben solcher erhöht die Rechenzeit teilweise gravierend. Zuerst sei jedoch dargelegt, wie die Regression in Matlab lösbar ist. Im Folgenden zeigen wir, dass jede Regression als lineares Gleichungssystem aufgefasst werden kann. Mit den eingeführten Bezeichnungen gilt es die Minimalstelle der Funktion

$$f(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \sum_{n=1}^N \left(y^{(n)} - \sum_{k=1}^m \alpha_k e_k(x^{(n)}) \right)^2$$

zu finden. Wir beschränken uns zugunsten einer besseren Übersichtlichkeit auf den Fall, dass die Basisfunktionen nur von einem stochastischen Parameter abhängen. Im anderen Fall ist die folgende Argumentation ebenso gültig. Um die Minimalstelle zu bestimmen, leiten wir die Funktion nach allen Argumenten ab. Dabei besitzt f für $\alpha_i, 1 \leq i \leq m$ die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} f(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = -2 \sum_{n=1}^N e_i(x^{(n)}) \left(y^{(n)} - \sum_{k=1}^m \alpha_k e_k(x^{(n)}) \right).$$

Setzen wir diese partiellen Ableitungen gleich Null, erhalten wir die Bedingung

$$\sum_{n=1}^N \left[e_i(x^{(n)})y^{(n)} - \sum_{k=1}^m e_i(x^{(n)})e_k(x^{(n)})\alpha_k \right] = 0$$

für alle $i = 1$ bis m , die wir zu

$$\sum_{n=1}^N e_i(x^{(n)})y^{(n)} = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^m e_i(x^{(n)})e_k(x^{(n)})\alpha_k = \sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^N e_i(x^{(n)})e_k(x^{(n)})\alpha_k$$

umformen können. Diese Gleichungen bilden ein lineares Gleichungssystem

$$A^{(m,N)} \cdot \alpha^{(m,N)} = b,$$

wobei $A^{(m,N)} = (A_{ij}^{(m,N)})_{i,j=1,\dots,m}$ die symmetrische Matrix mit den Einträgen

$$A_{ij}^{(m,N)} = A_{ji}^{(m,N)} = \sum_{n=1}^N e_i(x^{(n)})e_j(x^{(n)})$$

ist und $b = (b_i)_{i=1,\dots,m}$ der Vektor mit Einträgen

$$b_i = \sum_{n=1}^N e_i(x^{(n)})y^{(n)}.$$

Die Lösung $\alpha^{(m,N)} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ dieses Gleichungssystems sind die gesuchten Koeffizienten für die Regression. Berechnet man also den Vektor Y , wie in Tabelle 2.6 aus Abschnitt 2.2, der den Barwert der zukünftigen Zahlungsströme zum Regressionszeitpunkt enthält und die Matrix X mit

$$X = \begin{pmatrix} e_1(x^{(1)}) & \dots & e_m(x^{(1)}) \\ \vdots & & \vdots \\ e_1(x^{(N)}) & \dots & e_m(x^{(N)}) \end{pmatrix},$$

deren Einträge die Auswertung der Basisfunktionen in den aktuellen Kursen der Pfade sind, kann man mit den Befehlen

```
A = X' * X;
b = X' * Y;
```

das entsprechende lineare Gleichungssystem aufstellen. Dieses kann in Matlab mit Hilfe des „\“-Operators durch die Zuweisung

```
a = A\b;
```

gelöst werden.

Gerade bei der Berechnung der für die Regression notwendigen Datenpunkte $(y_j^{(n)}, x_j^{(n)})$ tritt das zweite Problem auf: die Verwendung von for-Schleifen. Übernimmt man die Vorgehensweise aus dem Beispiel in Abschnitt 2.2 und berechnet zuerst die Payoff-Matrix (siehe z.B. Tabelle 2.5) um daraus den Vektor Y zu bestimmen, würde man für die Payoff-Matrix beispielsweise den Matlab-Code

```
for Pfade = 1:AnzahlPfade %Schleife über alle Pfade
    if (ExPO(Pfade) > ContPO(Pfade)) %ExPO: Wert bei sofortiger Ausübung
        %ContPO: Continuation Value
        Payoffmatrix(Pfade, :) = 0; %alle Auszahl. für den Pfade löschen
        Payoffmatrix(Pfade, t) = ExPO(Pfade); %Auszahlung zum Zeitpunkt t
    end
end
```

verwenden. Dabei stellen die Zeilen der Payoff-Matrix die Pfade dar und die Spalten die möglichen Ausübungszeitpunkte pro Pfade. Allerdings ist es für den LS-Algorithmus unerheblich, wann genau eine Ausübung stattfindet, da nur der Barwert der Zahlung zum Regressionszeitpunkt, zusammengefasst im Vektor Y , in die Regression einfließt. Daher ist es sinnvoll auch nur diesen Barwert zu speichern und nicht die gesamte Payoff-Matrix. Sei Y_t der Barwert der zukünftigen Auszahlungen zum Zeitpunkt t und Δt der Abstand zwischen zwei diskreten Zeitpunkten, dann kann die Entwicklung von Y durch

$$Y_t = \begin{cases} Z_T, & t = T \\ e^{-r\Delta t} Y_{t+1} \mathbf{1}_{\{Z_t \leq \mathbb{E}(Y_{t+1} | \mathcal{F}_j)\}} + Z_t \mathbf{1}_{\{Z_t > \mathbb{E}(Y_{t+1} | \mathcal{F}_j)\}}, & 0 \leq t \leq T - 1 \end{cases}$$

beschrieben werden, denn entweder ist t der neue optimale Ausübungszeitpunkt oder der bisherige optimale Ausübungszeitpunkt bleibt bestehen; dann muss der Barwert für die nächste Regression bei der Rückwärtsinduktion einmal mehr abgezinst werden. Dieses Vorgehen wird durch den Matlab-Code

```
for Pfade = 1:AnzahlPfade
    if (ExPO(Pfade)>ContPO(Pfade))
        Y(Pfade) = ExPO(Pfade);
    else
        Y(Pfade) = exp(-r*dt)*Y(Pfade);
    end
end
```

umgesetzt. Die Performancesteigerung durch diese Reduktion der Datenstruktur ist vernachlässigbar. Allerdings ist es weiterhin das Ziel, die for-Schleife zu vermeiden und durch vektorweise Operationen zu ersetzen. Dieser Schritt wird durch die Reduktion auf den Barwert der optimalen Ausübungsstrategie ermöglicht. Haben wir nämlich einen Vektor `IndFunc` zur Verfügung, der in jeder Zeile eine 1 enthält, falls für den entsprechenden Pfad eine sofortige Ausübung optimal ist, und sonst eine 0, können wir den Code durch die Vektorschreibweise

```
Y = exp(-r*dt)*Y + (ExPO - exp(-r*dt)*Y) .* IndFunc;
```

ersetzen. Solch ein Vektor, der die Funktion einer Indikatorfunktion übernimmt, kann in Matlab komfortabel mit dem Befehl

```
IndFunc = ExPO > ContPO;
```

definiert werden, welcher zeilenweise - also pfadweise - den Wahrheitswert der Aussage „Ausübungswert > Continuation Value“ in der Variablen `IndFunc` speichert. Berechnet man Y für die Regression mit diesen beiden Zeilen und nicht über den Umweg der Payoff-Matrix, erreicht man eine Verdoppelung der Performance des Algorithmus. Tabelle 3.1 stellt die benötigte Rechenzeit für beide Varianten in Abhängigkeit der simulierten Pfade dar. Während im bis jetzt betrachteten Fall mit

simulierte Pfade	Rechenzeit	Rechenzeit
	ohne for-Schleife in s	mit for-Schleife in s
10.000	0,522	1,200
20.000	1,172	2,211
30.000	1,749	3,311
40.000	2,437	4,517
50.000	3,080	5,565
60.000	3,789	6,704
70.000	4,542	7,969
80.000	5,248	9,346
90.000	5,952	10,871
100.000	6,467	11,641

Tabelle 3.1: Vergleich der Performance des LS-Algorithmus zur Preisbestimmung eines amerikanischen „At The Money“-Puts ohne und mit Verwendung von for-Schleifen bei variierender Anzahl simulierter Pfade; berechnet mit einem 2,8 GHz Doppelkernprozessor unter Windows 7.

einem Ausübungsrecht auch eine Implementierung mit for-Schleifen möglich ist, werden wir in Abschnitt 4.5 sehen, dass im Fall mehrerer möglicher Ausübungen eine abgewandelte Version dieses Schrittes notwendig ist, um eine akzeptable Rechenzeit zu erzielen. Zuvor wollen wir jedoch mit den angestellten Überlegungen den Preis einer exotischen Option bestimmen.

3.2 Rainbow-Option

In der Literatur werden Optionen, die sich auf mehrere Finanztitel beziehen als Rainbow-Optionen bezeichnet. Der Payoff dieser Optionen hängt dabei typischerweise von dem Maximum, Minimum oder dem Durchschnitt der einzelnen Kurse ab. In diesem Beispiel wollen wir einen amerikanischen Call auf fünf korrelierte Aktien betrachten. Die Auszahlung des Calls bestimme sich aus dem geometrischen Mittel der Aktien. Für Aktienkursprozesse S^1, \dots, S^5 und den Basispreis K ergibt sich

daraus zum Zeitpunkt t ein Payoff von

$$Z_t = \max \left\{ 0; (S_t^1 \cdot S_t^2 \cdot \dots \cdot S_t^5)^{\frac{1}{5}} - K \right\}.$$

Die Kursprozesse seien dabei durch das Black-Scholes-Modell

$$dS_t^i = rS_t^i dt + \sigma S_t^i dW_t^i$$

mit risikolosem Zinssatz r , konstanter Volatilität σ und Brown'schen Bewegungen $W^i = (W_t^i)_{t \in [0, T]}$ gegeben. Eine Möglichkeit, um mit Hilfe dieses Modells korrelierte Kurse zu simulieren, wird in Anhang A erklärt. Wir nehmen an, dass der risikolose Zinssatz $r = 3\%$ beträgt und jede Aktie eine stetige Dividendenrendite von $\delta = 5\%$ besitzt. Dies wirkt sich insofern auf die Simulation aus, als dass die Aktienkurse unter dem risikoneutralen Maß der stochastischen Differentialgleichung

$$dS_t^i = (r - \delta)S_t^i dt + \sigma S_t^i dW_t^i$$

genügen. Die Laufzeit der Option sei ein Jahr, in welchem es zehn äquidistante Ausübungsmöglichkeiten zu den Zeitpunkten $t = 0, 1, \dots, 1$ Jahr gibt. Für alle Ausgestaltungen der Option nehmen wir einen Basispreis von $K = 100$ an. Tabelle 3.2 gibt die Preise für diese Option bei verschiedenen Parametern wieder. Variablen seien dabei der gemeinsame Anfangskurs der Aktien S_0 , die gemeinsame Volatilität σ sowie die paarweise Korrelation ρ zwischen den Aktien. Die Preise in Spalte 4 sind das Mittel aus 100 berechneten Preisen, die wiederum auf 100.000 simulierten Pfaden (50.000 Pfade + 50.000 antithetische Pfade) für jeden der fünf Preisprozesse beruhen. Als Basisfunktionen für die Regression wurden eine Konstante sowie die aktuellen Kurse der fünf Aktien, die quadrierten Kurse und die Produkte paarweise verschiedener Aktien genutzt. Damit ergibt sich eine Anzahl von insgesamt 21 Basisfunktionen. Um die Daten vergleichen zu können, nutzen wir Konfidenzintervalle für den Preis der Option aus Broadie und Glasserman (2004), die in Spalte 5 angegeben sind.¹⁸ In ihrer Arbeit bestimmen Broadie und Glasserman diese Intervalle mit einer Konfidenz von 90% durch einen „stochastic mesh“-Ansatz. Sie betrachten dabei

¹⁸ BROADIE, M./GLASSERMAN, P.: A stochastic mesh method for pricing high-dimensional American options. *Journal of Computational Finance*, 7 2004, S. 60.

S_0	σ	ρ	Sim. Preis	Konf.intervall _{BG}
90	0,4	0,00	1,353	[1,351; 1,376]
100	0,4	0,00	4,270	[4,276; 4,311]
110	0,4	0,00	10,219	[10,205; 10,233]
90	0,2	0,00	0,216	–
100	0,2	0,00	2,312	–
110	0,2	0,00	9,673	–
90	0,4	0,33	4,249	–
100	0,4	0,33	8,201	–
110	0,4	0,33	13,802	–
90	0,2	0,33	1,087	–
100	0,2	0,33	4,173	–
110	0,2	0,33	10,489	–
90	0,4	0,66	6,978	–
100	0,4	0,66	11,499	–
110	0,4	0,66	17,234	–
90	0,2	0,66	2,049	–
100	0,2	0,66	5,645	–
110	0,2	0,66	11,702	–

Tabelle 3.2: Preis einer Rainbow-Call-Option auf das geometrische Mittel aus fünf Aktien bei einem Jahr Laufzeit und zehn äquidistanten Ausübungsmöglichkeiten mit Strike $K = 100$. Der risikolose Zinssatz beträgt $r = 3\%$ und die Aktien besitzen eine stetige Dividendenrendite von $\delta = 5\%$.

lediglich den Fall mit einer Korrelation von $\rho = 0$, weshalb keine Vergleichsdaten für die übrigen Ausgestaltungen zur Verfügung stehen. Wie aus der Tabelle hervorgeht, liegen die mit dem LS-Algorithmus berechneten Preise in den angegebenen Konfidenzintervallen. Um diese Genauigkeit bei den Konfidenzintervallen zu erreichen, benötigt der Algorithmus von Broadie und Glasserman eine Rechenzeit von 1.217 Minuten.¹⁹ Die einhundert Preise je Ausgestaltung mit dem LS-Algorithmus zu berechnen, dauert dagegen 120 bis 160 Sekunden, in Abhängigkeit von der Moneyness, da bei Optionen, die weit im Geld liegen, viele Pfade bei der Regression in die Berechnung einfließen; bei Optionen, die weit aus dem Geld liegen, dementsprechend weniger Pfade. Allerdings lassen diese Zahlen keinen direkten Vergleich

¹⁹ BROADIE/GLASSERMAN: Journal of Computational Finance, Bd. 7, 2004, S. 56.

zu, da die Berechnungen von Broadie und Glasserman auf einem 266MHz Pentium II Prozessor durchgeführt wurden und für die vorliegende Arbeit ein 2,8 GHz Doppelkernprozessor verwendet wurde.

Der Vollständigkeit halber sei angemerkt, dass der Fall $\rho = 1$ hier nicht aufgeführt ist, da sich die Option dann wie ein Bermuda Call auf eine einzige Aktie verhält. Weiterhin stellt eine Erweiterung der Problemstellung auf mehr als fünf korrelierte Aktien kein Problem dar. Durch Hinzunahme neuer Basisfunktionen und der Simulation zusätzlicher Aktienkursprozesse lässt sich das Programm dahingehend anpassen.

3.3 Wahl der Basisfunktionen

In ihrer originalen Arbeit²⁰ verwenden Longstaff und Schwartz Laguerre-Polynome als Basisfunktionen. Dabei stellt sich die Frage, ob diese Wahl optimal ist bzw. wie sich andere mögliche Basisfunktionen im Vergleich verhalten. Da die Wahl der Basisfunktionen in bereits existierenden Arbeiten zur Genüge diskutiert wurde, sei auf weitere numerische Ergebnisse an dieser Stelle verzichtet. Stattdessen beziehen wir uns auf die bestehenden Resultate und fassen die zu ziehenden Schlussfolgerungen zusammen. Stentoft²¹ untersucht die Performance des LS-Algorithmus bei Verwendung von Laguerre-, Chebyshev- und Legendre-Polynomen sowie von Potenzen. Moreno und Navas²² erweitern diese Auswahl auf die Polynome in Tabelle 3.3 und geben sowohl explizite als auch rekursive Formeln zu deren Berechnung an. Wie Areal et al.²³ anmerken, lassen sich alle diese polynomialen Familien als Linearkombination der anderen ausdrücken. Da die Regression als Projektion auf den von den Basisfunktionen aufgespannten Raum aufgefasst werden kann, sollten die Ergebnisse des LS-Algorithmus unabhängig von der Wahl der Basisfunktionen sein.

²⁰ LONGSTAFF/SCHWARTZ: Valuing American options by simulation.

²¹ STENTOFT, L.: Assessing the least squares Monte-Carlo approach to American option valuation. *Review of Derivatives research*, 7 2004 Nr. 2.

²² MORENO, M./NAVAS, J.F.: On the robustness of least-squares Monte Carlo (LSM) for pricing American derivatives. *Review of Derivatives Research*, 6 2003 Nr. 2, S. 111ff.

²³ AREAL, N./RODRIGUES, A./ARMADA, M.R.: On improving the least squares Monte Carlo option valuation method. *Review of Derivatives Research*, 11 2008 Nr. 1, S. 130.

Name	Bezeichnung	Name	Bezeichnung
Potenzen	$W_n(x)$	Chebyshev 1.Art A	$T_n(x)$
Legendre	$P_n(x)$	Chebyshev 1.Art B	$C_n(x)$
Laguerre	$L_n(x)$	Chebyshev 1.Art C	$T_n^*(x)$
Hermite A	$H_n(x)$	Chebyshev 2.Art A	$U_n(x)$
Hermite B	$H_{e_n}(x)$	Chebyshev 2.Art B	$S_n(x)$

Tabelle 3.3: In der Literatur auf ihre Eignung als Basisfunktionen getestete polynomiale Familien.

Unterschiede ergeben sich dennoch aus numerischen Problemen bei der Lösung der Regression, falls die entsprechenden Matrizen des linearen Gleichungssystems fast singulär sind. Diese Probleme treten tendenziell bei starker Korrelation zwischen den Basisfunktionen auf. Da die Optionen für den Algorithmus meist normiert werden²⁴, ist vor allem die Korrelation im Intervall $[0, 1]$ von Interesse. Grafiken der polynomialen Familien in Stentoft²⁵ sowie Moreno und Navas²⁶ zeigen, dass gerade die von Longstaff und Schwartz verwendeten Laguerre-Polynome und Potenzen eine hohe Korrelation auf dem Intervall $[0, 1]$ aufweisen.

Im Kontext einfacher amerikanischer Optionen schließen die obigen Autoren anhand numerischer Beispiele, dass der LS-Algorithmus, wie vermutet, sehr robust gegenüber der Wahl der Basisfunktionen ist. So werden bei der Verwendung der ersten vier oder mehr Vertreter der polynomialen Familien beinahe identische Ergebnisse erzielt. Da in den entsprechenden Arbeiten mindestens 10.000 Pfade zur Preisbestimmung genutzt werden, lässt sich daraus schließen, dass die linearen Gleichungssysteme bei hinreichend großer Anzahl von Simulationen numerisch gut handhabbar sind und die Korrelation der Basisfunktionen einen geringeren Einfluss hat. Die Berechnung der Basisfunktionen ist allerdings unterschiedlich komplex. Daher empfehlen sowohl Stentoft²⁷ als auch Areal et al.²⁸ Potenzen als Basisfunktionen zur Preisbestimmung einfacher amerikanischer Optionen, denn diese bieten das beste Verhältnis zwischen

²⁴ Um die Option zu normieren, teilt man die Preisentwicklung der Basiswerte durch den Strike.

²⁵ STENTOFT: Review of Derivatives research, Nr. 2, Bd. 7, 2004, S. 143.

²⁶ MORENO/NAVAS: Review of Derivatives Research, Nr. 2, Bd. 6, 2003, S. 114.

²⁷ STENTOFT: Review of Derivatives research, Nr. 2, Bd. 7, 2004, S. 153.

²⁸ AREAL/RODRIGUES/ARMADA: Review of Derivatives Research, Nr. 1, Bd. 11, 2008, S. 133.

Rechenzeit und Genauigkeit.²⁹ Alle Berechnungen in dieser Arbeit beruhen deshalb auf dem Gebrauch von Potenzen in der Regression. Jedoch ändern sich die zu bevorzugenden Basisfunktionen mit der Aufgabenstellung, da unterschiedliche polynomiale Familien vor allem bei nicht glatten Auszahlungsfunktionen auch unterschiedliche Ergebnisse erzeugen. Nicht glatte Auszahlungsfunktionen treten z.B. bei Rainbow-Optionen auf, die sich auf das Maximum oder Minimum der Basiswerte beziehen. Bei einem Test mit 32 Compound-Options (Optionen auf Optionen) und 48 „mutually exclusive“-Options (Optionen, die das Recht verbriefen, von vorgegebenen Optionen die geeignetste zu nutzen) stellen Areal et al. fest, dass gewichtete Laguerre-Polynome die besten Ergebnisse erzielen.³⁰ Nun enthalten gewichtete Laguerre-Polynome per Definition eine Potenz mehr als die restlichen polynomialen Familien, doch auch im Vergleich mit Polynomen mit einem um eins erhöhten Grad liefern sie die Ergebnisse mit dem geringsten Fehler.

Die empirischen Daten der drei hier genannten Arbeiten lassen also den Schluss zu, bei Optionen mit glatten Auszahlungsfunktionen Potenzen und bei anderen Optionen gewichtete Laguerre-Polynome als Basisfunktionen zu verwenden. Damit bestätigt sich die Wahl von Longstaff und Schwartz, die in ihrer Arbeit zwar auf ähnliche empirische Tests verweisen, sie aber nicht mit veröffentlichen.

Nach der Wahl der Basisfunktionen stellt sich die Frage nach der zu verwendenden Anzahl. Longstaff und Schwartz³¹ geben eine Entscheidungsregel auf Grundlage des folgenden Theorems an.

Theorem 3.3.1. *Seien $V_0^{m,N}$ der durch den LS-Algorithmus berechnete Preis einer Option mit N simulierten Pfaden und m Basisfunktionen sowie V_0 der wahre Preis dieser Option. Dann gilt fast sicher die Ungleichung*

$$V_0 \geq \lim_{N \rightarrow \infty} V_0^{m,N}.$$

Der Beweis des Theorems beruht im Wesentlichen auf der Tatsache, dass sich der

²⁹ Die Genauigkeit wird in den genannten Arbeiten über den Root Mean Square Error (RMSE) gemessen.

³⁰ AREAL/RODRIGUES/ARMADA: Review of Derivatives Research, Nr. 1, Bd. 11, 2008, S. 142.

³¹ LONGSTAFF/SCHWARTZ: Valuing American options by simulation, S. 124f.

wahre Preis der Option aus der optimalen Stoppzeit berechnet und jede andere Stoppzeit einen Preis ergibt, der kleiner oder gleich dem wahren Preis ist, insbesondere auch die durch den LS-Algorithmus geschätzte Stoppzeit. Auf diesem Resultat basierend empfehlen die Autoren die Anzahl verwendeter Basisfunktionen m so lange zu erhöhen, bis der berechnete Preis nicht weiter steigt. Wie in Abschnitt 2.4 gezeigt, konvergiert der berechnete Preis auch gegen den wahren Preis der Option. Doch diese Konvergenz ist nicht monoton. Sowohl in Moreno und Navas³² als auch in Stentoft³³ finden sich Beispiele, bei denen eine Steigerung der Anzahl an Basisfunktionen mit einem geringeren berechneten Preis einhergeht und eine weitere Steigerung wiederum höhere Preise ergibt. Somit ist der praktische Nutzen der Entscheidungsregel kritisch zu sehen.

Die existierenden Daten deuten darauf hin, dass sich im Fall einfacher amerikanischer Optionen gute Ergebnisse bereits mit drei Basisfunktionen erzielen lassen, während Modelle mit mehreren stochastischen Einflussgrößen auch deutlich mehr Basisfunktionen benötigen können. Analog zur Verwendung von Potenzen in einfachen Fällen schlägt Stentoft³⁴ vor, bei L stochastischen Faktoren die vollständige Menge der Polynome³⁵ bis zum Grad K zu verwenden, die durch

$$\mathcal{P}_K^L = \left\{ x_1^{i_1} \cdot \dots \cdot x_L^{i_L} \mid \sum_{l=1}^L i_l \leq K, i_1, \dots, i_L \geq 0 \right\}$$

definiert ist. Damit sind Anhaltspunkte sowohl für die Wahl der Basisfunktionen als auch deren Anzahl gegeben.

3.4 Ansätze zur Verbesserung

Seit seiner Veröffentlichung gab es einige Vorschläge, wie der LS-Algorithmus optimiert werden könne. Diese zielen vor allem auf die Varianzreduktion und den Um-

³² MORENO/NAVAS: Review of Derivatives Research, Nr. 2, Bd. 6, 2003, S. 115.

³³ STENTOFT: Review of Derivatives research, Nr. 2, Bd. 7, 2004, S. 139.

³⁴ Ebd., S. 154f.

³⁵ Complete set of polynomials; vgl. JUDD, K.L.: Numerical Methods in Economics. The MIT Press, 10 1998, S. 239.

gang mit fast singulären Matrizen bei der Regression ab. Einige dieser Vorschläge seien hier vorgestellt.

Wie bereits erwähnt, können bei ungünstiger Wahl der Basisfunktionen numerische Probleme bei der Regression auftreten. Diese häufen sich tendenziell bei der Verwendung einer großen Anzahl von Basisfunktionen und bei Regressionen nahe dem Zeitpunkt $t = 0$. Eine Möglichkeit dies zu umgehen ist die Nutzung einer stabilen Regressionsmethode, wie z.B. der Singulärwertzerlegung, die in gängigen Programmiersprachen bereits implementiert ist. Allerdings wird dadurch der Rechenaufwand erhöht und wegen des größeren Bedarfs an Speicherkapazität können im Vergleich zu einfacheren Algorithmen weniger Pfade für die Simulation genutzt werden. Areal et al. stellen eine Methode vor, die sie Continuation Value by Conditional Estimation, kurz CONT-CE, nennen.³⁶ Diese Methode erlaubt den Gebrauch schnellerer Algorithmen zur Lösung der Regression, da ungenaue Parameterschätzungen aufgrund schlecht konditionierter Matrizen ausgeglichen werden. Dahinter steckt die Idee, den Continuation Value zu jedem Zeitpunkt $t = j$ zweimal zu berechnen - sowohl für die aktuellen Parameter $\alpha_j^{(m,N)}$ als auch für die Parameter $\alpha_{j+1}^{(m,N)}$ aus der vergangenen Regression. Während die aktuellen Parameter, wie auch in Longstaff und Schwartz, die Schätzung

$$\mathbb{E}(\widehat{Z_{\tau_{j+1}}}| \mathcal{F}_j) = \alpha_j^{(m,N)} \cdot e^m(S_j)$$

für den Continuation Value liefern, beruht die Schätzung mit Hilfe der Parameter $\alpha_{j+1}^{(m,N)}$ auf

$$\mathbb{E}(\widehat{Z_{\tau_{j+1}}}| \mathcal{F}_j) = e^{-r\Delta t} \cdot \alpha_{j+1}^{(m,N)} \cdot e^m(\mathbb{E}(S_{j+1}| \mathcal{F}_j)), \quad (3.1)$$

wobei Δt den Abstand zwischen je zwei diskreten Zeitpunkten bezeichne. Um bei der Berechnung die Kenntnis zukünftiger Ereignisse auszuschließen und somit unverzerrte Schätzer zu erhalten, wird der Aktienkurs S_{j+1} auf Basis der Informationen, die zum Zeitpunkt der Regression zur Verfügung stehen, geschätzt. Mit Hilfe dieser Schätzung für S_{j+1} und den Parametern $\alpha_{j+1}^{(m,N)}$ kann daraufhin der Continuation Value zum Zeitpunkt $t = j + 1$ bestimmt werden. Der um eine Periode abgezinste

³⁶ AREAL/RODRIGUES/ARMADA: Review of Derivatives Research, Nr. 1, Bd. 11, 2008, S. 127.

Continuation Value liefert dann einen zweiten Schätzer für $\mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}}|\mathcal{F}_j)$. Nun ist die erwartete Rendite der Aktie unter dem risikoneutralen Maß durch $r - \delta$ gegeben, wobei δ die stetige Dividendenrendite bezeichne. Daher können wir (3.1) zu

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\widehat{Z_{\tau_{j+1}}|\mathcal{F}_j}) &= e^{-r\Delta t} \cdot \alpha_{j+1}^{(m,N)} \cdot e^m(S_j e^{(r-\delta)\Delta t}) \\ &= e^{-\delta\Delta t} \cdot \alpha_{j+1}^{(m,N)} \cdot e^m(S_j)\end{aligned}\quad (3.2)$$

umformen. Die CONT-CE Methode versucht fehlerhafte Parameterschätzungen auszugleichen, indem der Continuation Value für den n -ten Pfad durch

$$\mathbb{E}(Z_{\tau_{j+1}}^{(n),m,N}|\mathcal{F}_j) = \max\{\alpha_j^{(m,N)} \cdot e^m(S_j^{(n)}); e^{-\delta\Delta t} \alpha_{j+1}^{(m,N)} \cdot e^m(S_j^{(n)})\}$$

als das Maximum der beiden Schätzungen definiert wird. Die Vorteile der CONT-CE Methode zeigen Areal et al. durch numerische Ergebnisse auf.³⁷ Dazu implementieren sie den LS-Algorithmus mit einer Singulärwertzerlegung zur Lösung der Regression und vergleichen diesen mit ihrer Methode bei Verwendung von LFIT³⁸ für die Regression. Dabei kommen sie zu dem Schluss, dass beide Varianten sehr ähnliche Ergebnisse erzeugen; die zweite Variante aufgrund des schnelleren LFIT Algorithmus jedoch eine um ein Drittel bessere Performance besitzt. Somit scheint eine Implementierung der CONT-CE Methode zumindest bei der Bewertung einfacher amerikanischer Optionen sinnvoll. Möchte man die Methode darüber hinaus in einem anderen Zusammenhang verwenden, ist zu überprüfen, ob die Argumente, die zu (3.2) geführt haben, ihre Gültigkeit behalten.

Weitere Verbesserungsmöglichkeiten des LS-Algorithmus bieten unterschiedliche Techniken zur Varianzreduktion. Eine davon sind antithetische Zufallsvariablen, die bereits Longstaff und Schwartz nutzen. Bei der Ziehung normalverteilter Zufallszahlen, die für die Simulation der Pfade benötigt werden, wird dazu nur die halbe Anzahl wirklich gezogen. Die andere Hälfte wird aus den vorhandenen Zufallszahlen durch Multiplikation mit dem Faktor -1 ermittelt, um der Symmetrie der Normalverteilung gerecht zu werden. Somit erhält man für jeden simulierten Pfad einen weiteren

³⁷ AREAL/RODRIGUES/ARMADA: Review of Derivatives Research, Nr. 1, Bd. 11, 2008, S. 131f.

³⁸ LFIT ist ein in C geschriebener Regressionsalgorithmus; vgl. PRESS, W.H. et al.: Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. 2. Auflage. Cambridge University Press, 10 1992, S. 674.

mit genau entgegengesetzter Entwicklung. Ein zweiter Ansatz ergibt sich aus der Beobachtung, dass bei der ersten Regression zum Zeitpunkt $t = T - 1$ das amerikanische Merkmal der Option gar nicht zum Tragen kommt. Stattdessen verhält sich die Option wie ihr europäisches Pendant mit Startwert S_{T-1} und Laufzeit Δt . Somit kann der Continuation Value der Option zum Zeitpunkt $t = T - 1$ zumindest im Fall von Plain-Vanilla-Optionen durch die Black-Scholes-Formel bestimmt werden. Zuletzt sei die Verwendung von Quasi-Zufallszahlen genannt. Dies sind deterministische Folgen von Zufallszahlen, die eine möglichst gute Gleichverteilung aufweisen.

Areal et al. testen unter anderem die oben genannten Techniken zur Varianzreduktion und kommen zu dem Schluss, dass nicht alle Methoden geeignet sind. So tragen antithetische Zufallsvariablen im Fall einfacher amerikanischer Optionen zur Reduktion der Varianz bei, jedoch geht diese Wirkung bei komplexeren Optionen verloren. Im Gegensatz dazu hat der Einsatz der Black-Scholes-Formel keinen spürbaren Effekt und wird daher von Areal et al. nicht empfohlen, da er sich zusätzlich negativ auf die Rechenzeit auswirkt.³⁹ Die besten Ergebnisse schreiben sie dagegen Quasi-Zufallszahlen zu, unter denen wiederum Halton-Folgen hervorstechen.⁴⁰ Aufgrund des deterministischen Charakters der Quasi-Zufallszahlen muss jedoch beachtet werden, dass diese nicht mit allen anderen Methoden zur Varianzreduktion kompatibel sind. So können sie nicht zusammen mit der Technik der antithetischen Zufallsvariablen verwendet werden, da diese Technik die Gleichverteilung der Quasi-Zufallszahlen stört.⁴¹

Diese Ausführungen stellen nur einen groben Einblick in die Anwendung von Methoden zur Varianzreduktion im Zusammenhang mit dem LS-Algorithmus dar. Weitere Ergebnisse liefern Areal et al.⁴² zu Kontroll-Zufallsvariablen und Anpassung der Momente der Zufallszahlen sowie Bolia et al.⁴³ zu Importance-Sampling.

³⁹ AREAL/RODRIGUES/ARMADA: Review of Derivatives Research, Nr. 1, Bd. 11, 2008, S. 136.

⁴⁰ Die Konstruktion von Halton-Folgen findet sich z.B. in NIEDERREITER, H.: Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods (CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics). Society for Industrial and Applied Mathematics, 1 1992, S. 29.

⁴¹ AREAL/RODRIGUES/ARMADA: Review of Derivatives Research, Nr. 1, Bd. 11, 2008, S. 128f.

⁴² Ebd.

⁴³ BOLIA, N./JUNEJA, S./GLASSERMAN, P.: Function-approximation-based importance sampling for pricing American options. In WSC '04: Proceedings of the 36th conference on Winter simulation. Winter Simulation Conference, 2004.

Kapitel 4

Swingoptionen

4.1 Begriffsklärung und Strommärkte

Swingoptionen sind Derivate, die in Strommärkten gehandelt werden. Dabei ergeben sich durch die Ware Strom einige Besonderheiten gegenüber Finanzmärkten oder anderen handelbaren Commodities. Im Folgenden sollen daher zuerst die Unterschiede zwischen den Märkten verdeutlicht werden. Diese ergeben sich überwiegend aus der Tatsache, dass Strom nicht lagerbar ist. Anders als z.B. bei Getreide erfolgt die Lieferung aus einem Termingeschäft mit Strom nicht zu einem fixen Zeitpunkt, sondern über einen gewissen Zeitraum. So können an der European Energy Exchange (EEX) Kontrakte mit wöchentlicher, monatlicher, quartalsweiser und jährlicher Lieferung abgeschlossen werden.

Doch auch Marktteilnehmer, die Strom über den Spotmarkt handeln, müssen einige Besonderheiten beachten. Seit der schrittweisen Öffnung der Strommärkte und der Etablierung von Energiebörsen bestimmt sich der Strompreis hauptsächlich durch Angebot und Nachfrage. Da Strom aber nicht auf Vorrat produziert werden kann, sind Angebotsengpässe möglich, die den Strompreis drastisch erhöhen können. Solche sprunghaften Preisanstiege werden als Spikes bezeichnet und waren beispielsweise im Juli 2006 ersichtlich, als ein Lieferengpass den Spotpreis für Strom auf 134,59 Euro je Megawattstunde klettern ließ. Im Vergleich dazu lag der durchschnittli-

che Preis im Vorjahreszeitraum bei 45,34 Euro je Megawattstunde.⁴⁴ Mit Hilfe von Swingoptionen kann sich der Käufer gegen solche Spikes absichern. Dazu verbrieften sie in ihrer einfachsten Ausgestaltung das Recht innerhalb der Laufzeit p -mal eine bestimmte Menge Strom zu einem fixen Preis zu erwerben, wobei p eine vorher festgelegte Anzahl an Ausübungsrechten ist. Damit gleicht eine Swingoption einem Portfolio aus p amerikanischen Calls, jedoch kann je Zeitpunkt nur ein Recht ausgeübt werden.

Darüber hinaus werden Optionen mit Restriktionen in Form von minimalen und maximalen Abnahmemengen gehandelt. Diese Restriktionen können sowohl lokal, je Ausübungszeitpunkt, als auch global, über die Gesamtlaufzeit, gelten. Jaillet et al.⁴⁵ zufolge besteht ein Swingkontrakt typischerweise aus zwei Teilen: einem Forwardkontrakt, der die Lieferung von Grundlaststrom über einen gewissen Zeitraum beinhaltet sowie dem Swinganteil. Dabei kann ein Ausübungsrecht nicht nur den Kauf zusätzlichen Stroms ermöglichen (up-swing), sondern auch die Reduktion der vereinbarten Abnahmemenge aus dem Forwardkontrakt (down-swing). Daraus ergibt sich die Bezeichnung Swingoption. Bevor wir uns der Bewertung dieser Option widmen, benötigen wir ein Modell für die Kursentwicklung des Strompreises.

4.2 Ein Modell für Strompreise

Neben den bereits erwähnten Spikes gibt es zwei Charakteristika, die ein Strompreismodell widerspiegeln sollte. Einerseits deuten empirische Daten darauf hin, dass der Strompreis um ein langfristiges Mittel schwankt und sich diesem nach extremen Kursentwicklungen immer wieder annähert - ein Effekt, der als Mean-Reversion bezeichnet wird. Andererseits gibt es verschiedene saisonale Schwankungen. So ist Strom als Folge des höheren Bedarfs im Winter tendenziell teurer als im Sommer. Ein ähnliches Verhalten ist auf Wochenbasis beobachtbar, da Preise am Wochenende im Vergleich zu Werktagen eher niedrig sind. Die Grundlage für diese Modelle ist

⁴⁴ STROM-MAGAZIN: http://www.strom-magazin.de/strommarkt/strompreise-an-der-boerse-eex-explodieren_17648.html – Zugriff am 11.06.2010.

⁴⁵ JAILLET, P./RONN, E.I./TOMPAIDIS, S.: Valuation of commodity-based swing options. *Management science*, 7 2004, S. 910f.

häufig ein Ornstein-Uhlenbeck Prozess $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$. Dieser ist allgemein durch die stochastische Differentialgleichung

$$dX_t = \alpha(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t$$

gegeben. Dabei stellt μ das Gleichgewichtsniveau, α die Rate der Mean-Reversion und σ die Volatilität dar. Wie üblich bezeichnet $W = (W_t)_{t \in [0, T]}$ die Brown'sche Bewegung. Ist X_t unterhalb des Gleichgewichtsniveaus, wird der Ausdruck $\mu - X_t$ positiv und infolgedessen steigt der Prozess tendenziell. Analog fällt der Prozess (abgesehen von der zufälligen Komponente), falls er sich oberhalb von μ befindet, da $\mu - X_t$ in diesem Fall negativ ist. Folglich hat der Ornstein-Uhlenbeck Prozess die Eigenschaft der Mean-Reversion. Lucia und Schwartz⁴⁶ beschreiben ein einfaches darauf basierendes Modell für den Spotpreis $S = (S_t)_{t \in [0, T]}$, welches durch

$$\begin{aligned} dX_t &= -\alpha X_t dt + \sigma dW_t, \\ S_t &= \exp(f(t) + X_t) \end{aligned}$$

definiert ist. Die Funktion f ist hierbei deterministisch und spiegelt die Saisonalität wider. Weiterhin hat das Gleichgewichtsniveau gerade den Wert Null. Allerdings wird das Auftreten von Preissprüngen in Form von Spikes in diesem Modell nicht berücksichtigt. Kluge⁴⁷ führt zu diesem Zweck eine dritte Komponente $Y = (Y_t)_{t \in [0, T]}$ durch

$$dY_t = -\beta Y_{t-} dt + J_t dN_t$$

ein. Dieser Prozess besitzt eine andere Mean-Reversion Rate β , die ihn zum Gleichgewichtsniveau Null zieht und unterliegt dabei zufälligen Sprüngen, deren Höhe J_t durch einen unabhängigen, identisch verteilten Prozess J gegeben ist. Das Auftreten der Sprünge wird durch den Poisson-Prozess $N = (N_t)_{t \in [0, T]}$ mit Intensivität λ

⁴⁶ LUCIA, J.J./SCHWARTZ, E.S.: Electricity prices and power derivatives: Evidence from the nordic power exchange. Review of Derivatives Research, 5 2002 Nr. 1, S. 19.

⁴⁷ KLUGE, T.: Pricing Swing Options and other Electricity Derivatives. PhD thesis University of Oxford, 2006, S. 27.

beschrieben. Zusammen wird das Modell daher durch

$$\begin{aligned} S_t &= \exp(f(t) + X_t + Y_t), \\ dX_t &= -\alpha X_t dt + \sigma dW_t, \\ dY_t &= -\beta Y_t dt + J_t dN_t \end{aligned}$$

definiert und soll in dieser Form auch in der vorliegenden Arbeit verwendet werden. Zur Veranschaulichung zeigt die Abbildung 4.1 eine Simulation der Prozesse X und Y sowie den daraus resultierenden Preis S . Die verwendeten Parameter befinden sich in Tabelle 4.1 und sind der Arbeit von Kluge entnommen.⁴⁸

$f(t)$	=	$\ln(100) + 0,5 \cos(2\pi t)$	σ	=	1,4	β	=	200
α	=	7	μ_J	=	0,4	λ	=	4
J_t	\sim	$\exp(1/\mu_J)$						

Tabelle 4.1: Parameter für den Beispielpfad aus Abbildung 4.1.

Zusätzlich sei angemerkt, dass weitere beobachtbare Charakteristika des Strommarktes nicht durch das Modell repräsentiert werden. So weist Kluge⁴⁹ darauf hin, dass die Annahme sowohl einer konstanten Volatilität als auch einer konstanten Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Spikes kritisch zu sehen ist. Darüber hinaus sei ein weiterer Prozess sinnvoll, welcher der Saisonalität eine stochastische Komponente hinzufügt. Laut Kluge wäre ein Modell mit den entsprechenden Verbesserungen jedoch mathematisch schwer handhabbar.

Nachdem das Preismodell nun festgelegt ist, stellt sich die Frage, wie Swingoptionen bewertet werden können. Dies führt zu einem Stopp-Problem mit mehreren möglichen Ausübungszeiten, welches als Multiple Stopping Problem bezeichnet wird.

⁴⁸ KLUGE: Pricing Swing Options and other Electricity Derivatives, S. 29.

⁴⁹ Ebd., S. 27.

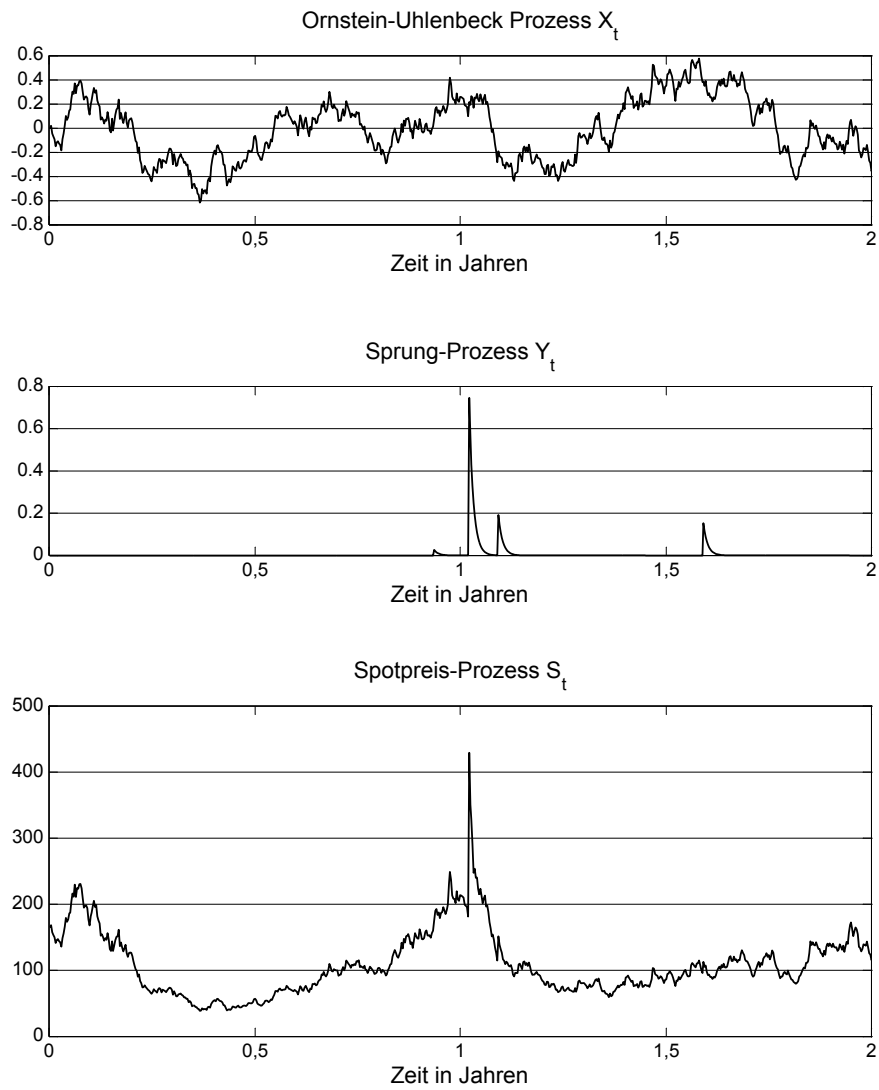


Abbildung 4.1: Beispielpfad für die Prozesse X, Y und S .

4.3 Das Multiple Stopping Problem

Im Fall amerikanischer Optionen mit nur einem Ausübungsrecht haben wir das Stopp-Problem durch

$$V_0 = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{0,T}} \mathbb{E}(e^{-r\tau} Z_\tau)$$

formuliert.⁵⁰ Dieses Problem wollen wir nun auf den Fall erweitern, dass die Option eine gewisse Anzahl p an Ausübungsrechten verbrieft. Da der Ausübungszeitpunkt jedes Rechtes durch eine Stoppzeit beschrieben wird, führen wir für eine Menge $\{\tau_p, \dots, \tau_1\}$ von Stoppzeiten mit $\tau_p < \dots < \tau_1$ die Bezeichnung π ein und nennen π eine Strategie. Damit lässt sich das Multiple Stopping Problem als

$$V_0 = \sup_{\pi \in \mathcal{T}_{0,T}^p} \mathbb{E} \sum_{k=1}^p Z_{\tau_k}$$

schreiben. Allgemeiner definieren wir die Wertfunktion der Option zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \in \{0, \dots, T\}$.

Definition 4.3.1 (Wertfunktion). *Die Wertfunktion $V_t^{*,p}$ bei p verbleibenden Ausübungsrechten zum Zeitpunkt t ist durch*

$$V_t^{*,p} = \sup_{\pi \in \mathcal{T}_{t,T}^p} \mathbb{E} \left(\sum_{k=1}^p Z_{\tau_k} \mid \mathcal{F}_t \right)$$

definiert. Die optimale Strategie sei mit $\pi^ = \{\tau_p^*, \dots, \tau_1^*\}$ bezeichnet.*

Um analog zum Fall mit nur einem Ausübungsrecht eine optimale Strategie durch Rückwärtsinduktion finden zu können, benötigen wir eine Möglichkeit, den Mehrwert eines zusätzlichen Rechtes zu beschreiben.

⁵⁰ Da der explizite Hinweis auf den Barwert - in Form des Terms $e^{-r\tau}$ - keinen Mehrwert für das Verständnis liefert, nehmen wir im Folgenden zugunsten einer besseren Übersicht an, dass dieser bereits implizit in der Variablen Z_τ enthalten ist und schreiben daher statt $e^{-r\tau} Z_\tau$ nur noch Z_τ .

Definition 4.3.2 (Marginalwert). Für eine beliebige Strategie π und $p \geq 1$ sei

$$\Delta V_t^{\pi,p} = V_t^{\pi,p} - V_t^{\pi,p-1}.$$

Dann heißt $\Delta V_t^{\pi,p}$ der Marginalwert des p -ten Ausübungsrechts. Für die optimale Strategie π^* sei der entsprechende Marginalwert mit $\Delta V_t^{\pi^*,p}$ bezeichnet.

Bemerkung 6. Mit der Beziehung $V_t^{\pi,0} = 0$ für alle Strategien π , sieht man durch die Teleskopsumme

$$V_t^{\pi,p} = V_t^{\pi,p} - V_t^{\pi,p-1} + V_t^{\pi,p-1} - V_t^{\pi,p-2} + \dots - V_t^{\pi,0} + V_t^{\pi,0},$$

dass wir die Wertfunktion als Summe der Marginalwerte gemäß

$$V_t^{\pi,p} = \sum_{k=1}^p \Delta V_t^{\pi,k}$$

auffassen können.

Mit dieser Definition können wir das Multiple Stopping Problem lösen, indem wir folgende optimale Strategie definieren.

Definition 4.3.3. Die optimale Strategie $\pi^* = \{\tau_p^*, \dots, \tau_1^*\}$ ist definiert durch

$$\tau_k^* = \begin{cases} \min\{t : Z_t > \mathbb{E}(\Delta V_{t+1}^{\pi^*,p} | \mathcal{F}_t)\}, & k = p \\ \min\{t > \tau_{k+1}^* : Z_t > \mathbb{E}(\Delta V_{t+1}^{\pi^*,k} | \mathcal{F}_t)\}, & k \leq p-1. \end{cases}$$

Sind also zum Zeitpunkt t noch p Ausübungsrechte vorhanden, soll das p -te Recht dann ausgeübt werden, wenn der daraus erzielte Gewinn Z_t größer ist als der erwartete Wert des p -ten Rechts zum nächst späteren Zeitpunkt. Nach Meinshausen und Hambly⁵¹ lässt sich der LS-Algorithmus darauf basierend so anpassen, dass damit das Multiple Stopping Problem lösbar ist. Dazu bestimmen sie durch Regression

⁵¹ MEINSHAUSEN, N./HAMBLY, B.M.: Monte Carlo methods for the valuation of multiple exercise options. Mathematical Finance, 14 2004 Nr. 4, S. 8.

aber keine Approximation für die Marginalwerte, mit deren Hilfe die optimale Strategie definiert wird, sondern für den Continuation Value, welchen wir bereits im Fall mit einem Ausübungsrecht eingeführt haben.

Definition 4.3.4 (Continuation Value). *Sei p die Anzahl der Ausübungsrechte. Dann heißt die durch*

$$Q_t^{*,p} = \begin{cases} \mathbb{E}(V_{t+1}^{*,p} | \mathcal{F}_t), & t < T \\ 0, & t = T \end{cases}$$

definierte Größe $Q_t^{*,p}$ der Continuation Value.

Meinshausen und Hambly begründen dieses Vorgehen damit, dass der Continuation Value glatter ist als die Wertfunktion.⁵² Analog zur Rückwärtsinduktion gilt aber

$$V_t^{*,p} = \max\{Z_t + Q_t^{*,p-1}, Q_t^{*,p}\} \quad (4.1)$$

und somit können wir aus dem Continuation Value mit

$$\Delta V_t^{*,p} = V_t^{*,p} - V_t^{*,p-1}$$

die benötigten Marginalwerte ableiten. Gleichung (4.1) begründet sich aus der Tatsache, dass $Z_t + Q_t^{*,p-1}$ die Auszahlung bei Ausübung des p -ten Ausübungsrechtes ist, zu der der erwartete zukünftige Payoff bei verbleibenden $p-1$ Ausübungsrechten addiert wird. Die optimale Strategie wählt nun das Maximum aus dieser Größe und $Q_t^{*,p}$, dem zukünftigen Payoff ohne Ausübung in t .

Der Algorithmus selbst beginnt zum Zeitpunkt $t = T$, zu dem alle Continuation Values den Wert Null haben. Zum Zeitpunkt $t < T$ stehen dann Approximationen der Continuation Values für alle späteren Zeitpunkte $t+1$ bis T zur Verfügung. Mit diesen können wir durch (4.1) und Definition 4.3.3 die optimale Strategie schätzen. Um anschließend die Approximationen für die Continuation Values zum Zeitpunkt t zu erhalten, wird für jede Anzahl $k = 1$ bis p an Ausübungsrechten zuerst die Auszahlung aller Pfade unter der entsprechenden Strategie berechnet. Die Approximationen

⁵² MEINSHAUSEN/HAMBLY: Mathematical Finance, Nr. 4, Bd. 14, 2004, S. 8.

ergeben sich dann durch Regression dieser Werte auf den aktuellen Zustand der stochastischen Parameter bzw. auf den aktuellen Spotpreis. Insbesondere müssen also zu jedem Zeitpunkt p Regressionen durchgeführt werden.

Anzahl Ausübungs- rechte p	Preis der Option V_0^p	Marginalwert ΔV_0^p	Preis _{KL}
1	1,5861	1,5861	1,1765
2	2,6121	1,0260	2,0359
3	3,5024	0,8903	2,7917
4	4,2021	0,6997	3,4983
5	4,8918	0,6897	4,1778
10	8,1228	0,6307	7,3897
20	13,9549	0,4701	13,3178
30	19,3800	0,5510	18,7247
40	24,2481	0,4846	23,6740
50	28,6872	0,3450	28,2192
100	46,3076	0,1601	46,0920

Tabelle 4.2: Preise und Marginalwerte einer einjährigen Swingoption bei variierender Anzahl an Ausübungsrechten berechnet bei 20.000 simulierten Pfaden mit $\alpha = 7, \beta = 200, \sigma = 1,4, \lambda = 4, J \sim \text{Exp}(1/\mu_J), \mu_J = 0,4$, ohne saisonale Komponente, d.h. $f(t) = 0$ sowie $r = 0, X_0 = 0, Y_0 = 0$. Eine Ausübung ist täglich bei einem Strike von $K = 1$ möglich, jedoch nicht mehrfach. Als Basisfunktionen dienen eine Konstante, der Ornstein-Uhlenbeck Prozess X, X^2 , der Sprungprozess Y, Y^2 und XY . Die letzte Spalte enthält berechnete Preise aus Kluge (2006).

Zunächst klingt dies so, als müssten zu jedem Zeitpunkt auch p verschiedene Strategien $\pi = \{\tau_k, \dots, \tau_1\}, k = 1, \dots, p$ berechnet werden - wozu nach Definition 4.3.3 wiederum alle zukünftigen Continuation Values $Q_j^{*,k}, j = t+1, \dots, T, k = 1, \dots, p$ nötig sind - um die Auszahlung bei k Ausübungsrechten für die Pfade bestimmen zu können. In Abschnitt 4.5 werden wir jedoch sehen, dass dieser Schritt nicht notwendig ist.

Tabelle 4.2 zeigt auf Basis dieses Algorithmus berechnete Preise für eine Swingoption mit den Parametern aus Tabelle 4.1 bei variierender Anzahl an Ausübungsrechten

sowie die sich daraus ergebenden Marginalwerte und vergleicht diese mit den Preisen von Kluge⁵³, der zur Berechnung einen Gitter-Ansatz nutzt.⁵⁴ Dabei fallen zwei Sachverhalte auf. Erstens gibt es große Abweichungen zwischen den Preisen aus den unterschiedlichen Algorithmen, wenn die Swingoption nur wenige Ausübungsrechte besitzt. Diese betragen bis zu 34,8 %. Bei vielen Rechten dagegen nähern sich die Preise an, wobei der LS-Algorithmus tendenziell die größeren Werte liefert. Andererseits werden mit steigender Anzahl an Ausübungsrechten relativ betrachtet immer weniger Rechte zur Absicherung gegen Spikes genutzt, da diese nur in begrenztem Umfang auftreten, was einen sinkenden Einfluss der Spikes auf den Preis zur Folge hat. Zusammen lässt dies den Schluss zu, dass der LS-Algorithmus die Spikes höher bewertet als der Gitter-Ansatz von Kluge. Zweitens ist zu sehen, dass die Marginalwerte annähernd monoton fallend sind. Im folgenden Abschnitt beweisen wir, dass dies tatsächlich so ist.

4.4 Eigenschaften des Marginalwertes

In Abschnitt 4.1 wurde erwähnt, dass eine Swingoption Ähnlichkeit mit einem Portfolio aus amerikanischen Optionen besitzt. Man betrachte eine Swingoption, die das Recht gewährt, einmalig während der Laufzeit eine bestimmte Menge Strom zu erwerben. Diese Option unterscheidet sich in ihrer Funktionsweise nicht von einem amerikanischen Call und daher sollten beide Finanztitel auch den gleichen Preis haben. Bezeichnen wir den Preis des amerikanischen Calls mit C , gilt somit

$$C = V_0^{*,1} = \Delta V_0^{*,1}. \quad (4.2)$$

Erweitern wir die Swingoption derart, dass sie zwei Ausübungsrechte gewährt, dürfen diese üblicherweise nicht zum selben Zeitpunkt ausgeübt werden. Im Vergleich dazu bietet ein Portfolio aus zwei Calls die Möglichkeit einer gleichzeitigen Ausübung und

⁵³ KLUGE: Pricing Swing Options and other Electricity Derivatives, S. 82.

⁵⁴ Die Preise liegen in der Arbeit nur in grafischer Form vor und wurden freundlicherweise von Herrn Kluge zur Verfügung gestellt.

ist daher flexibler. Aus diesem Grund sollte

$$2C \geq V_0^{*,2} = \Delta V_0^{*,1} + \Delta V_0^{*,2}$$

gelten, woraus wir mit (4.2) die Beziehung

$$\Delta V_0^{*,1} \geq \Delta V_0^{*,2}$$

folgern können. Um diese Intuition allgemein beweisen zu können, benötigen wir ein paar vorbereitende Resultate.⁵⁵ Mit Hilfe des Continuation Values kann Definition 4.3.1 zu

$$V_t^{*,p} = \sup_{\tau_p \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}_t(Z_{\tau_p} + Q_{\tau_p}^{*,p-1}) \quad (4.3)$$

umformuliert werden, wobei wir die abkürzende Schreibweise $\mathbb{E}_t(\cdot) = \mathbb{E}(\cdot | \mathcal{F}_t)$ nutzen. Nach Theorem 1.3.2 ist $V^{*,p}$ folglich der Snell-Envelope von $Z + Q^{*,p-1}$ und somit ein Supermartingal. Da ein Supermartingal ein adaptierter Prozess ist, besagt Theorem 1.3.3, dass wir für $V^{*,p}$ eine Doob-Zerlegung in Form von

$$V_t^{*,p} = V_0^{*,p} + M_t^{*,p} - A_t^{*,p}, \quad t \in \{0, 1, \dots, T\}$$

finden können, wobei $M^{*,p}$ ein Martingal und $A^{*,p}$ ein previsible Prozess ist. Über $A^{*,p}$ wissen wir zusätzlich, dass es ein monoton wachsender Prozess ist, da $V^{*,p}$ ein Supermartingal ist. Mit diesen Bezeichnungen können wir die Marginalwerte als optimales Stopp-Problem beschreiben.

Satz 4.4.1. *Sei $A^{*,p-1}$ der monoton wachsende, previsible Prozess aus der Doob-Zerlegung von $V^{*,p-1}$. Dann gilt*

$$\Delta V_t^{*,p} = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}_t(Z_\tau - A_{\tau+1}^{*,p-1}) + A_t^{*,p-1}.$$

⁵⁵ Die Resultate basieren auf den Ergebnissen in MEINSHAUSEN/HAMBLY: *Mathematical Finance*, Nr. 4, Bd. 14, 2004, S. 14ff.

Beweis. Setzen wir in (4.3) die Definition des Continuation Values ein, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Delta V_t^{*,p} &= V_t^{*,p} - V_t^{*,p-1} \\
&= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}_t \left(Z_\tau + \mathbb{E}_\tau(V_{\tau+1}^{*,p-1}) \right) - V_t^{*,p-1} \\
&= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}_t \left(Z_\tau + V_\tau^{*,p-1} + (\mathbb{E}_\tau(V_{\tau+1}^{*,p-1}) - V_\tau^{*,p-1}) \right) - V_t^{*,p-1}.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\tau(V_{\tau+1}^{*,p-1}) - V_\tau^{*,p-1} &= \mathbb{E}_\tau(V_0^{*,p-1} + M_{\tau+1}^{*,p-1} - A_{\tau+1}^{*,p-1}) - \\
&\quad V_0^{*,p-1} - M_\tau^{*,p-1} + A_\tau^{*,p-1} \\
&= -(A_{\tau+1}^{*,p-1} - A_\tau^{*,p-1})
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
V_\tau^{*,p-1} &= V_0^{*,p-1} + M_\tau^{*,p-1} - A_\tau^{*,p-1} + M_t^{*,p-1} - M_t^{*,p-1} + \\
&\quad A_t^{*,p-1} - A_t^{*,p-1} \\
&= V_t^{*,p-1} + (M_\tau^{*,p-1} - M_t^{*,p-1}) - (A_\tau^{*,p-1} - A_t^{*,p-1}),
\end{aligned}$$

können wir daher schließen

$$\begin{aligned}
\Delta V_\tau^{*,p} &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}_t \left(Z_\tau + V_\tau^{*,p-1} - (A_{\tau+1}^{*,p-1} - A_\tau^{*,p-1}) \right) - V_t^{*,p-1} \\
&= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}_t \left(Z_\tau + V_t^{*,p-1} + (M_\tau^{*,p-1} - M_t^{*,p-1}) - \right. \\
&\quad \left. (A_\tau^{*,p-1} - A_t^{*,p-1}) - (A_{\tau+1}^{*,p-1} - A_\tau^{*,p-1}) \right) - V_t^{*,p-1} \\
&= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}_t \left(Z_\tau + (M_\tau^{*,p-1} - M_t^{*,p-1}) - (A_{\tau+1}^{*,p-1} - A_t^{*,p-1}) \right).
\end{aligned}$$

Aus dem Optional-Sampling Theorem (Theorem 1.2.3) und der Martingaleigenschaft von $M^{*,p-1}$ folgt weiter $\mathbb{E}_t(M_\tau^{*,p-1} - M_t^{*,p-1}) = 0$ und damit die Behauptung. \square

Ziehen wir in Theorem 4.4.1 den Term $A_t^{*,p-1}$ mit in das Supremum, erhalten wir

$$\Delta V_t^{*,p} = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}_t \left(Z_\tau - (A_{\tau+1}^{*,p-1} - A_t^{*,p-1}) \right).$$

Da Z_τ unabhängig von der Anzahl verfügbarer Ausübungsrechte ist, müssen wir die Differenzen des Prozesses $A^{*,p-1}$ näher betrachten, um Aussagen über die Marginalwerte machen zu können. Dabei hilft folgendes Lemma.

Lemma 4.4.2. *Für die Inkremente des Prozesses $A^{*,p}$ gilt*

$$A_{t+1}^{*,p} - A_t^{*,p} = \max\{Z_t - Q_t^{*,p} + Q_t^{*,p-1}; 0\}.$$

Beweis. Füllen wir mit Hilfe einer Nullsumme die Terme so auf, dass wir die jeweilige Doob-Zerlegung erhalten und nutzen anschließend (4.1), folgt die Behauptung mit

$$\begin{aligned} A_{t+1}^{*,p} - A_t^{*,p} &= -\mathbb{E}_t(V_0^{*,p} + M_{t+1}^{*,p} - A_{t+1}^{*,p}) + \\ &\quad V_0^{*,p} + M_t^{*,p} - A_t^{*,p} \\ &= V_t^{*,p} - \mathbb{E}_t(V_{t+1}^{*,p}) \\ &= \max\{Z_t + Q_t^{*,p-1}, Q_t^{*,p}\} - Q_t^{*,p} \\ &= \max\{Z_t - Q_t^{*,p} + Q_t^{*,p-1}, 0\}. \end{aligned}$$

□

Nun können wir das gewünschte Resultat formulieren und beweisen.

Theorem 4.4.3. *Der Marginalwert ist monoton fallend in der Anzahl der verbleibenden Ausübungsrechte, so dass für $p \geq 2$*

$$\Delta V_t^{*,p} \leq \Delta V_t^{*,p-1}, \quad \forall t \in \{0, 1, \dots, T\}$$

gilt.

Beweis. Wir führen den Beweis per Induktion über p . Da $A_t^{*,1}$ ein monoton wachsender Prozess ist, gilt $A_{\tau+1}^{*,1} \geq A_t^{*,1}$ für alle Stoppzeiten $\tau \geq t$. Zusammen mit Satz

4.4.1 folgt aufgrund von

$$\begin{aligned}
 \Delta V_t^{*,2} &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}_t(Z_\tau - A_{\tau+1}^{*,1}) + A_t^{*,1} \\
 &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}_t(Z_\tau - A_t^{*,1}) + A_t^{*,1} \\
 &= \sup_{\tau \in \mathcal{T}_{t,T}} \mathbb{E}_t(Z_\tau) = V_t^{*,1} = \Delta V_t^{*,1}
 \end{aligned}$$

der Induktionsanfang für $p = 2$. Die Induktionsvoraussetzung $\Delta V_{t+1}^{*,p-1} \leq \Delta V_{t+1}^{*,p-2}$ liefert

$$Q_t^{*,p-1} - Q_t^{*,p-2} = \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{*,p-1}) \leq \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{*,p-2}) = Q_t^{*,p-2} - Q_t^{*,p-3}.$$

Lemma 4.4.2 erlaubt uns damit die Abschätzung

$$\begin{aligned}
 A_{t+1}^{*,p-1} - A_t^{*,p-1} &= \max\{Z_t - (Q_t^{*,p-1} - Q_t^{*,p-2}); 0\} \\
 &\geq \max\{Z_t - (Q_t^{*,p-2} - Q_t^{*,p-3}); 0\} \\
 &= A_{t+1}^{*,p-2} - A_t^{*,p-2}.
 \end{aligned}$$

Schreiben wir dies zu

$$A_{t+1}^{*,p-1} - A_{t+1}^{*,p-2} \geq A_t^{*,p-1} - A_t^{*,p-2}$$

um, sehen wir, dass allgemein

$$A_{\tau+1}^{*,p-1} - A_{\tau+1}^{*,p-2} \geq A_t^{*,p-1} - A_t^{*,p-2}, \quad \forall \tau \geq t$$

folgt, was wiederum

$$A_{\tau+1}^{*,p-1} - A_t^{*,p-1} \geq A_{\tau+1}^{*,p-2} - A_t^{*,p-2}, \quad \forall \tau \geq t$$

bedeutet. Mit Satz 4.4.1 gilt nun der Induktionsschritt

$$\begin{aligned}\Delta V_t^{*,p} &= \sup_{\tau \in \mathcal{F}_{t,T}} \mathbb{E}_t \left(Z_\tau - (A_{\tau+1}^{*,p-1} - A_t^{*,p-1}) \right) \\ &\leq \sup_{\tau \in \mathcal{F}_{t,T}} \mathbb{E}_t \left(Z_\tau - (A_{\tau+1}^{*,p-2} - A_t^{*,p-2}) \right) \\ &= \Delta V_t^{*,p-1}.\end{aligned}$$

□

4.5 Rekursive Entwicklung der optimalen Strategie

In Abschnitt 4.3 haben wir beschrieben, wie sich der LS-Algorithmus zur Lösung des Multiple Stopping Problems anpassen lässt. Nun wollen wir uns Gedanken über eine entsprechende Implementierung machen. Ziel ist es, den Preis einer Swingoption mit p verfügbaren Ausübungsrechten zu bestimmen. Für eine direkte Übertragung der Formulierung von Abschnitt 4.3 benötigt man ein dreidimensionales Feld `MargWert`, das für jeden Pfad, jede Anzahl an verbleibenden Ausübungsrechten und jeden Zeitpunkt den entsprechenden Marginalwert

$$\text{MargWert}(n, p, t) = \Delta V_t^{*,p,(n)}$$

enthält. Folgender Matlab-Code berechnet darauf basierend den pfadweisen Continuation Value `ContVal` zum Regressionszeitpunkt $t - 1$.

```
AR = p; %AR = Anzahl Ausübungsrechte
ContVal = zeros(Anzahlpfade,1);
for Pfad = 1:Anzahlpfade
    for Time = t:T
        if (Payoff(Pfad,Time) > MargWert(Pfad,AR,Time)) & (AR > 0)
            ContVal(Pfad) = ContVal(Pfad) + exp(Time-t)*Payoff(Pfad,Time);
            AR = AR-1;
        end
    end
end
end
```

Dieser Code liefert die Werte $Q_t^{*,p,(n)}$ für alle Pfade. Um aus den Continuation Values die Marginalwerte berechnen zu können, benötigen wir allerdings die Werte $Q_t^{*,k,(n)}$ für jede mögliche Anzahl an Ausübungsrechten $k = 1$ bis p . Der Rechenaufwand, um all diese Größen zu bestimmen, ist sehr groß. Dies ist einerseits durch die hohe Anzahl an Schleifendurchläufen bedingt, aber auch der Zugriff auf den Wert $\text{MargWert}(n, p, t)$ ist aufgrund der Größe der Datenstruktur zeitintensiv. Nun kann, wie in Abschnitt 3.1, die Schleife über die Pfade durch vektorweise Operationen ersetzt werden. Dazu wird nur eine weitere Variable `zaehler` benötigt, die pfadweise die Anzahl der verbleibenden Ausübungsrechte speichert. Doch dadurch wird die Rechenzeit noch nicht auf ein akzeptables Maß verringert. So dauert die Preisbestimmung einer Swingoption mit 50 Ausübungsrechten bei dieser Implementierung rund 46 Minuten, wenn wir 2.000 Pfade simulieren.

Eine weitere Verbesserungsmöglichkeit sollen daher folgende Überlegungen verdeutlichen: Haben wir allgemein für einen bestimmten Pfad noch p verbleibende Ausübungsrechte und der Zeitpunkt t ist eine optimale Stoppzeit, dann gilt nach Definition der optimalen Strategie

$$Z_t > \Delta V_{t+1}^{LS,p}.$$

Dabei bezeichne $\Delta V_{t+1}^{LS,p}$ die Schätzung für $\mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{*,p})$ aus dem LS-Algorithmus. Da folglich zum Zeitpunkt t ausgeübt werden sollte, vergleichen wir für den nächsten Schritt Z_{t+1} mit dem Marginalwert des $(p-1)$ -ten Ausübungsrechts $\Delta V_{t+2}^{LS,p-1}$. Liegt dagegen keine optimale Stoppzeit vor, gilt

$$Z_t \leq \Delta V_{t+1}^{LS,p}$$

und im nächsten Schritt vergleichen wir Z_{t+1} mit dem Marginalwert $\Delta V_{t+2}^{LS,p}$, da wir das p -te Ausübungsrecht im Zeitpunkt t nicht nutzen werden.

Nehmen wir also beispielsweise an, wir haben für einen Pfad zum Zeitpunkt $T - 5$ berechnet, dass die optimalen Stoppzeiten bei drei verbleibenden Ausübungsrechten

bei $T - 5, T - 3$ und $T - 2$ liegen. Somit gelten die Ungleichungen

$$\begin{aligned}
 Z_{T-5} &> \Delta V_{T-4}^{LS,3}, \\
 Z_{T-4} &\leq \Delta V_{T-3}^{LS,2}, \\
 Z_{T-3} &> \Delta V_{T-2}^{LS,2}, \\
 Z_{T-2} &> \Delta V_{T-1}^{LS,1}.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Laut dem angepassten LS-Algorithmus müssen die optimalen Strategien für jede Anzahl an Ausübungsrechten zwischen 1 und p berechnet werden. Für zwei verbleibende Ausübungsrechte seien in diesem Beispiel $T - 3$ und $T - 2$ als optimale Stoppzeiten bestimmt worden. Dann wissen wir, dass auch

$$\begin{aligned}
 Z_{T-5} &\leq \Delta V_{T-4}^{LS,2}, \\
 Z_{T-4} &\leq \Delta V_{T-3}^{LS,2}, \\
 Z_{T-3} &> \Delta V_{T-2}^{LS,2}, \\
 Z_{T-2} &> \Delta V_{T-1}^{LS,1}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

gilt. Im nächsten Regressionsschritt, zum Zeitpunkt $T - 6$, gibt es bei drei verbleibenden Ausübungsrechten nur zwei Möglichkeiten. Entweder ist $Z_{T-6} > \Delta V_{T-5}^{LS,3}$ oder $Z_{T-6} \leq \Delta V_{T-5}^{LS,3}$. Im ersten Fall ist eine sofortige Ausübung optimal. Daraufhin würde also Z_{T-5} mit $\Delta V_{T-4}^{LS,2}$ verglichen. Dieser Vergleich wurde allerdings schon in (4.5) angestellt. Damit können wir im ersten Fall die bereits berechneten Vergleiche nutzen, um zu schließen, dass die optimalen Stoppzeiten bei $T - 6, T - 3$ und $T - 2$ liegen. Im zweiten Fall ist eine sofortige Ausübung nicht optimal und im nächsten Schritt würde Z_{T-5} mit $\Delta V_{T-4}^{LS,3}$ verglichen werden. Da dieser Vergleich schon in (4.4) angestellt wurde, können wir folgern, dass die optimalen Stoppzeiten bei $T - 5, T - 3$ und $T - 2$ erhalten bleiben.

Dieses Beispiel liefert folgende wichtige Intuition. Weil einmal berechnete Schätzungen der Marginalwerte durch den LS-Algorithmus nachträglich nicht mehr geändert werden, führen die Vergleiche mit den aktuellen Auszahlungen Z_t immer zu den gleichen Ergebnissen. Daher können diese Ergebnisse rekursiv genutzt werden. Ist zum Zeitpunkt t eine sofortige Ausübung optimal, besitzt man in $t + 1$ ein Aus-

übungsrecht weniger und sollte der bereits berechneten optimalen Strategie für diese Anzahl an Ausübungsrechten folgen. Wird dagegen nicht sofort ausgeübt, bleibt die Anzahl noch verfügbarer Ausübungsrechte konstant und wie diese ab dem Zeitpunkt $t + 1$ optimal eingesetzt werden können, wurde ebenfalls bereits berechnet. Damit erhalten wir folgende rekursive Darstellung für die optimale Strategie.

Satz 4.5.1. *Sei $\pi_t^{LS,p}$ die durch den LS-Algorithmus berechnete optimale Strategie zum Zeitpunkt t bei p verbleibenden Ausübungsrechten. Dann gilt für $t = 1$ bis T*

$$\pi_{t-1}^{LS,p} = \begin{cases} \pi_t^{LS,p}, & Z_t \leq \Delta V_{t+1}^{LS,p} \\ \pi_t^{LS,p-1} \cup \{t-1\}, & Z_t > \Delta V_{t+1}^{LS,p}. \end{cases}$$

Auf einen Beweis dieser Aussage sei an dieser Stelle verzichtet, da alle notwendigen Argumente bereits im vorangegangenen Beispiel enthalten sind. Nun benötigen wir für die Regression im LS-Algorithmus nicht explizit die optimale Strategie, sondern nur den sich daraus ergebenden Payoff. Eine entsprechende rekursive Formulierung folgt jedoch sofort aus Satz 4.5.1.

Korollar 4.5.2. *Sei $Q_t^{LS,p}$ der zum Zeitpunkt t mit dem LS-Algorithmus berechnete Schätzer für den Continuation Value $Q_t^{*,p} = \mathbb{E}_t(V_{t+1}^{*,p})$ und Δt der Abstand zwischen zwei diskreten Zeitpunkten. Dann gilt für $t = 1$ bis T*

$$Q_{t-1}^{LS,p} = \begin{cases} e^{-r\Delta t} Q_t^{LS,p}, & Z_t \leq \Delta V_{t+1}^{LS,p} \\ Z_t + e^{-r\Delta t} Q_t^{LS,p-1}, & Z_t > \Delta V_{t+1}^{LS,p}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Dieses Resultat können wir nutzen, um den LS-Algorithmus effizient zu implementieren. Dazu benötigen wir, wie am Anfang des Abschnittes beschrieben, eine Matrix `MargWert`. Wie aus Gleichung (4.6) ersichtlich ist, reicht jedoch ein Vergleich mit den aktuellen Marginalwerten aus, um rekursiv die Continuation Values zu bestimmen. Daher entfällt die Zeitkomponente in `MargWert`. Die Continuation Values speichern wir ebenfalls in einer Matrix `ContVal`, deren Dimensionen sich über die Pfade und die Anzahl möglicher Ausübungsrechte erstrecken. Mit dem folgenden Matlab-Code, der wie in Abschnitt 3.1 eine Art Indikatorfunktion nutzt, können

wir dann alle für einen Regressionszeitpunkt benötigten Continuation Values bestimmen.

```
DiscContVal = discount*ContVal; %discount = exp(-r*dt)
for AR = p:-1:1 %Schleife über mögliche Anzahl Ausübungsrechte
    IndFunc = PayoffNow > MargWert(:,AR);
    ContVal(:,AR) = DiscContVal(:,AR) + (PayoffNow +
        DiscContVal(:,AR-1) - DiscContVal(:,AR)).*IndFunc;
end
```

Der vollständige Matlab-Code findet sich in Anhang B. Tabelle 4.3 vergleicht die Preise und Berechnungszeiten einer Swingoption bei Verwendung der direkten Implementierung vom Anfang dieses Abschnittes und der hier hergeleiteten Implementierung. Wie man sieht, unterscheiden sich die Rechenzeiten erheblich. Während

Anzahl Ausübungs- rechte	direkte Implementierung		hergeleitete Implementierung	
	Preis	Rechenzeit in s	Preis	Rechenzeit in s
1	1,6227	12,005	1,5526	0,975
2	2,6606	24,385	2,5581	1,013
3	3,4948	36,919	3,4417	1,063
4	4,2645	50,248	4,0226	1,088
5	5,1071	63,839	5,0625	1,100
10	8,1371	141,566	8,4019	1,261
20	14,1501	348,613	14,1557	1,567
30	19,5937	610,583	19,3644	2,050
40	23,9719	1935,684	24,0865	2,881
50	28,7414	2735,461	28,3184	3,519
100	46,2110	10458,138	45,8500	6,435

Tabelle 4.3: Vergleich der Preise und Rechenzeiten für die direkte Implementierung und die hergeleitete Implementierung bei Verwendung der Parameter aus Tabelle 4.1 - d.h. Strike $K = 1$, $r = 0$, $\alpha = 7$, $\beta = 200$, $\sigma = 1,4$, $\lambda = 4$ und $\mu = 0,4$, jedoch ohne saisonale Komponente $f(t) = 0$. Es wurden jeweils 2.000 Pfade simuliert und als Basisfunktionen eine Konstante, der Ornstein-Uhlenbeck Prozess X , X^2 , der Sprung-Prozess Y , Y^2 und XY genutzt. Die Berechnung wurde auf einem 2,80 GHz Doppelkernprozessor unter Windows 7 durchgeführt.

die Rechenzeit bei der direkten Implementierung stärker als linear wächst, ist die Performance bei der hergeleiteten Implementierung besser als $\mathcal{O}(n)$. Anhand der Preisdifferenzen lässt sich weiterhin erkennen, dass 2.000 Pfade nicht ausreichen, um einen genauen Wert zu erhalten. Die Varianz der Ergebnisse ist bei dieser geringen Anzahl an Simulationen zu groß. Die Verwendung der rekursiven Strukturen für die optimale Strategie und den Continuation Value ist daher erforderlich, um die Rechenzeit - gerade im Hinblick auf die Notwendigkeit einer größeren Anzahl an simulierten Pfaden - auf ein akzeptables Maß zu begrenzen.

Mit dem Ergebnis aus Abschnitt 4.4 kann die Performance sogar noch weiter verbessert werden. So wird schrittweise `PayoffNow` mit `MargWert(:, AR)` für $AR = p$ bis 1 verglichen. Da die Marginalwerte monoton fallend sind, können wir für jeden Pfad aus

$$\text{PayoffNow}(\text{Pfad}) \leq \text{MargWert}(\text{Pfad}, AR)$$

auch

$$\text{PayoffNow}(\text{Pfad}) \leq \text{MargWert}(\text{Pfad}, AR-1)$$

$$\vdots$$

$$\text{PayoffNow}(\text{Pfad}) \leq \text{MargWert}(\text{Pfad}, 1)$$

schließen. Es ist zwar fraglich, ob die vektorweise Implementierung einer entsprechenden Kontrollstruktur - die dafür sorgt, dass bei Feststellung von $\text{PayoffNow}(\text{Pfad}) \leq \text{MargWert}(\text{Pfad}, AR)$ die nachfolgenden Ungleichungen für diesen Pfad nicht mehr ausgewertet werden - in Matlab ohne großen zusätzlichen Rechenbedarf realisierbar ist. Bei Programmiersprachen, in denen for-Schleifen effizienter ausgewertet werden und auf vektorweise Operationen verzichtet werden kann, ist solch eine Kontrollstruktur jedoch einfach implementierbar und verbessert im Vergleich zu der hier angegebenen Implementierung die Performance noch einmal.

4.6 Der Fall mehrerer gleichzeitiger Ausübungsrechte

In diesem Abschnitt wollen wir die Betrachtung auf Swingoptionen erweitern, die dem Inhaber die Möglichkeit geben, an den Ausübungszeitpunkten mehrfach auszuüben. Wir nehmen an, dass es eine über die Zeit konstante Obergrenze k gibt, die die maximale Anzahl gleichzeitiger Ausübungen pro Zeitpunkt darstellt. Um dies zu verdeutlichen, führen wir einen zusätzlichen Index ein. Der Wert einer Swingoption, die zum Zeitpunkt t noch p Ausübungsrechte besitzt, von denen k gleichzeitig ausgeübt werden können, sei daher mit $V_t^{p,k}$ bezeichnet. Analog sei der Marginalwert $\Delta V_t^{p,k}$ definiert. Wir nehmen an, dass eine Ausübung zum Zeitpunkt t keinen Einfluss auf den Payoff Z_t für mögliche weitere Ausübungen hat. Ziel dieses Abschnitts ist es, eine Beziehung herzuleiten, mit der sich der Fall mehrerer Ausübungen auf den Fall einer Ausübung pro Zeitpunkt zurückführen lässt, wobei wir letzteren als den Standardfall bezeichnen. Dazu zeigen wir im folgenden Satz, dass die Ausübungsrechte Gruppen bilden, die den gleichen Marginalwert besitzen. Diese Aussage findet sich auch bei Aleksandrov und Hambly⁵⁶, auf deren Ausführungen der Beweis beruht. Die zweite Gleichung, die angibt, welchen Wert im Standardfall die Gruppe der Marginalwerte annimmt, ist ein eigenständiges Resultat dieser Arbeit.

Satz 4.6.1. *Für jedes $p \geq 0$ gilt*

$$\Delta V_t^{kp+1,k} = \Delta V_t^{kp+2,k} = \dots = \Delta V_t^{kp+k,k}, \quad \forall 0 \leq t \leq T. \quad (4.7)$$

Der Wert dieser Marginalwerte ist gegeben durch

$$\Delta V_t^{kp+1,k} = \Delta V_t^{p+1,1}. \quad (4.8)$$

Beweis. Wir führen den Beweis induktiv über p . Für ein fixes p nutzen wir die Rückwärtsinduktion bezüglich der Zeit t . Sei $p = 0$. In $t = T$ werden alle verbliebenen

⁵⁶ ALEKSANDROV, N./HAMBLY, B.M.: A dual approach to multiple exercise option problems under constraints. Preprint 2008, S. 13f.

Rechte ausgeübt, da sie danach wertlos verfallen und daher ist

$$V_T^{j,k} = jZ_T, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Somit gilt für die Marginalwerte

$$\Delta V_T^{1,k} = \Delta V_T^{2,k} = \dots = \Delta V_T^{k,k} = Z_T$$

und

$$\Delta V_T^{1,1} = Z_T.$$

Wenn wir für $t + 1$ gezeigt haben, dass

$$\Delta V_{t+1}^{1,k} = \Delta V_{t+1}^{2,k} = \dots = \Delta V_{t+1}^{k,k} = \Delta V_{t+1}^{1,1}$$

gilt, können wir für alle $1 \leq j \leq k$ die Beziehung

$$V_t^{j,k} = \begin{cases} jZ_t, & Z_t \geq \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{1,k}) \\ (j-1)Z_t, & \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{1,k}) > Z_t \geq \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{2,k}) \\ \vdots & \\ Z_t, & \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{j-1,k}) > Z_t \geq \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{j,k}) \\ \mathbb{E}_t(V_{t+1}^{j,k}), & Z_t < \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{j,k}) \end{cases}$$

zu

$$V_t^{j,k} = \begin{cases} jZ_t, & Z_t \geq \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{1,k}) \\ \mathbb{E}_t(V_{t+1}^{j,k}), & Z_t < \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{j,k}) \end{cases}$$

vereinfachen, da die mittleren Fälle nicht auftreten können. Somit können wir wegen

$$\Delta V_t^{j,k} = \begin{cases} Z_t, & Z_t \geq \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{1,k}) \\ \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{j,k}), & Z_t < \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{j,k}) \end{cases} \quad (4.9)$$

und der Induktionsvoraussetzung die Gleichheit

$$\Delta V_t^{1,k} = \Delta V_t^{2,k} = \dots = \Delta V_t^{k,k}$$

schließen. Setzen wir in (4.9) $j = k = 1$, erhalten wir

$$\Delta V_t^{1,1} = \begin{cases} Z_t, & Z_t \geq \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{1,1}) \\ \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{1,1}), & Z_t < \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{1,1}). \end{cases} \quad (4.10)$$

Dies zeigt wegen der Induktionsvoraussetzung $\Delta V_{t+1}^{1,k} = \Delta V_{t+1}^{1,1}$ die Beziehung

$$\Delta V_t^{1,k} = \Delta V_t^{1,1}$$

und damit den Induktionsanfang für $p = 0$. Sei nun

$$\Delta V_t^{kp+1,k} = \Delta V_t^{kp+2,k} = \dots = \Delta V_t^{k(p+1),k} = \Delta V_t^{p+1,1}, \quad \forall 0 \leq t \leq T \quad (4.11)$$

gezeigt. Im Folgenden beweisen wir damit die Gültigkeit von

$$\Delta V_t^{k(p+1)+1,k} = \Delta V_t^{k(p+1)+2,k} = \dots = \Delta V_t^{k(p+1)+k,k} = \Delta V_t^{p+2,1}, \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

Sei zuerst wieder $t = T$. Da wir nur k Rechte in T ausüben können, sind alle verbleibenden Rechte wertlos

$$\Delta V_T^{k(p+1)+1,k} = \Delta V_T^{k(p+1)+2,k} = \dots = \Delta V_T^{k(p+1)+k,k} = 0$$

sowie

$$\Delta V_T^{p+2,1} = 0.$$

Angenommen für $t + 1$ ist

$$\Delta V_{t+1}^{k(p+1)+1,k} = \Delta V_{t+1}^{k(p+1)+2,k} = \dots = \Delta V_{t+1}^{k(p+1)+k,k} = \Delta V_{t+1}^{p+2,1} \quad (4.12)$$

bereits gezeigt. Dann vereinfacht sich für alle $1 \leq j < k$ die Beziehung

$$V_t^{k(p+1)+j,k} = \begin{cases} kZ_t + \mathbb{E}_t(V_{t+1}^{kp+j,k}), & Z_t \geq \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{kp+j+1,k}) \\ (k-1)Z_t + \mathbb{E}_t(V_{t+1}^{kp+j+1,k}), & \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{kp+j+1,k}) > Z_t \geq \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{kp+j+2,k}) \\ \vdots & \\ Z_t + \mathbb{E}_t(V_{t+1}^{k(p+1)+j-1,k}), & \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{k(p+1)+j-1,k}) > Z_t \geq \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{k(p+1)+j,k}) \\ \mathbb{E}_t(V_{t+1}^{k(p+1)+j,k}), & Z_t < \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{k(p+1)+j,k}) \end{cases}$$

zu

$$V_t^{k(p+1)+j,k} = \begin{cases} kZ_t + \mathbb{E}_t(V_{t+1}^{kp+j,k}), & Z_t \geq \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{kp+1,k}) \\ jZ_t + \mathbb{E}_t(V_{t+1}^{kp+k,k}), & \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{kp+1,k}) > Z_t \geq \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{k(p+1)+1,k}) \\ \mathbb{E}_t(V_{t+1}^{k(p+1)+j,k}), & Z_t < \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{k(p+1)+j,k}) \end{cases}$$

und für $j = k$ zu

$$V_t^{k(p+1)+k,k} = \begin{cases} kZ_t + \mathbb{E}_t(V_{t+1}^{kp+k,k}), & Z_t \geq \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{k(p+1)+1,k}) \\ \mathbb{E}_t(V_{t+1}^{k(p+1)+k,k}), & Z_t < \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{k(p+1)+1,k}) \end{cases}$$

weil die mittleren Fälle wegen

$$\Delta V_{t+1}^{k(p+1)+1,k} = \Delta V_{t+1}^{k(p+1)+2,k} = \dots = \Delta V_{t+1}^{k(p+1)+j,k}$$

oder

$$\Delta V_{t+1}^{kp+j+1,k} = \Delta V_{t+1}^{kp+j+2,k} = \dots = \Delta V_{t+1}^{kp+k,k}$$

entfallen. Damit berechnen wir für $1 \leq j \leq k$ die Marginalwerte

$$\Delta V_t^{k(p+1)+j,k} = \begin{cases} \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{kp+j,k}), & Z_t \geq \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{kp+1,k}) \\ Z_t, & \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{kp+1,k}) > Z_t \geq \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{k(p+1)+1,k}) \\ \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{k(p+1)+j,k}), & Z_t < \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{k(p+1)+1,k}), \end{cases}$$

die für $k = j = 1$

$$\Delta V_t^{p+2,1} = \begin{cases} \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{p+1,1}), & Z_t \geq \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{p+1,1}) \\ Z_t, & \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{p+1,1}) > Z_t \geq \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{p+2,1}) \\ \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{p+2,k}), & Z_t < \mathbb{E}_t(\Delta V_{t+1}^{p+2,1}) \end{cases}$$

ergeben. Mit den Voraussetzungen (4.11) und (4.12) folgt daraus der Induktionsschluss

$$\Delta V_t^{k(p+1)+1,k} = \Delta V_t^{k(p+1)+2,k} = \dots = \Delta V_t^{k(p+1)+k,k} = \Delta V_t^{p+2,1}.$$

Dies beendet die äußere Induktion über p . □

Die erste Beziehung dieses Satzes $\Delta V_t^{kp+1,k} = \dots = \Delta V_t^{kp+k,k}$ liefert uns folgende Intuition: Ist zu einem beliebigen Zeitpunkt der Payoff bei sofortiger Ausübung größer als der Wert des $kp+k$ -ten Ausübungsrechts (ausgedrückt durch den Marginalwert), so ist er auch größer als der Wert des $kp+1$ -ten Ausübungsrechts. Folgt der Optionshalter der optimalen Strategie, übt er daher zu diesem Zeitpunkt die maximal erlaubte Anzahl an Rechten aus. Die zweite Gleichheit $\Delta V_t^{kp+1,k} = \Delta V_t^{p+1,1}$ ordnet jeder Gruppe von Marginalwerten einen Marginalwert des Standardfalls zu. Dies ermöglicht es uns, diejenigen Zeitpunkte zu identifizieren, an denen der Optionshalter die maximale Anzahl an Rechten ausübt, und den daraus entstehenden Wert auf den Standardfall zurückzuführen. Der folgende Satz konkretisiert diese Idee und stellt gleichzeitig den zentralen Beitrag dieser Arbeit dar.

Theorem 4.6.2. *Seien $m, l \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $l < k$ gegeben. Dann gilt*

$$V_t^{mk+l,k} = (k-l)V_t^{m,1} + lV_t^{m+1,1} \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
 V_t^{mk+l,k} &= V_t^{mk,k} + \Delta V_t^{mk+1,k} + \Delta V_t^{mk+2,k} + \dots + \Delta V_t^{mk+l,k} \\
 &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^k \Delta V_t^{ik+j,k} + \sum_{j=1}^l \Delta V_t^{mk+j,k} \\
 &= \sum_{i=0}^{m-1} k \Delta V_t^{ik+1,k} + l \Delta V_t^{mk+1,k},
 \end{aligned}$$

wobei sich die letzte Gleichheit durch (4.7) ergibt. Mit (4.8) folgt die Behauptung aus

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{m-1} k \Delta V_t^{ik+1,k} + l \Delta V_t^{mk+1,k} &= k \sum_{i=0}^{m-1} \Delta V_t^{i+1,1} + l \Delta V_t^{m+1,1} \\
 &= k \sum_{i=1}^m \Delta V_t^{i,1} + l \Delta V_t^{m+1,1} \\
 &= k V_t^{m,1} + l (V_t^{m+1,1} - V_t^{m,1}) \\
 &= (k - l) V_t^{m,1} + l V_t^{m+1,1}.
 \end{aligned}$$

□

Der Spezialfall $l = 0$ dieser Aussage findet sich auch bei Aleksandrov und Hambly.⁵⁷ Um den Wert einer Swingoption mit n Ausübungsrechten zu berechnen, von denen k gleichzeitig ausgeübt werden dürfen, müssen wir den Longstaff-Schwartz-Algorithmus also nur etwas modifizieren. Im ersten Schritt spalten wir n in $n = mk + l$ auf. Anschließend berechnen wir den Wert einer Swingoption im Standardfall mit $m+1$ Ausübungsrechten. Da wir für diese Berechnung die optimale Strategie einer Swingoption mit m Ausübungsrechten mitführen müssen, steht uns der entsprechende Preis automatisch auch zur Verfügung. Hiermit sind alle Größen gegeben, um mit Hilfe der Formel aus Theorem 4.6.2 den gesuchten Preis zu bestimmen. In Abbildung 4.2 ist der Preis für eine Swingoption mit 100 Ausübungsrechten gegeben, von denen schrittweise 1 bis 100 gleichzeitig ausgeübt werden dürfen. Die steigende Kurve bestätigt die Intuition, dass das Recht, mehrfach ausüben zu dürfen, eine höhere Flexibilität bietet, für die eine entsprechende Prämie gezahlt werden muss.

⁵⁷ ALEKSANDROV/HAMBLY: Preprint 2008, S. 14.

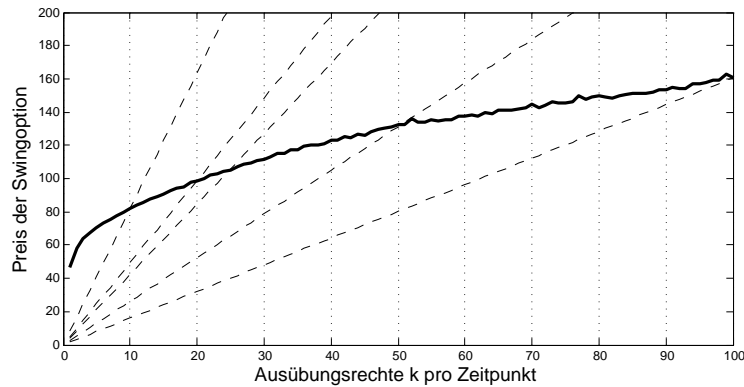


Abbildung 4.2: Diese Grafik zeigt den Preis $V^{100,k}$ für $k = 1$ bis 100 als durchgezogene Linie an. Die gestrichelten Linien stellen die Vielfachen der Preise $V^{*,p}$ für $p = 1, 2, 4, 5, 10$ dar. Als Parameter wurden die in Tabelle 4.1 gegebenen verwendet.

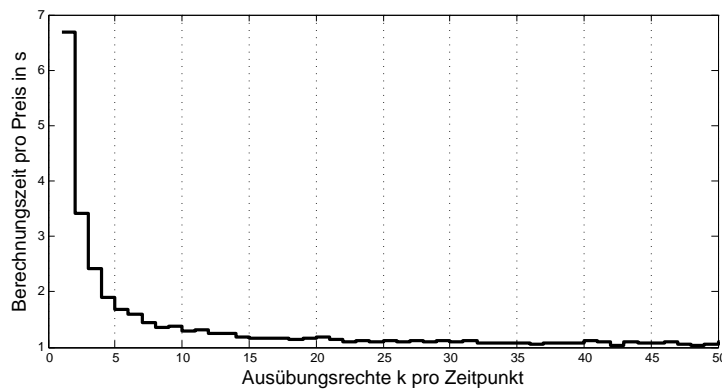


Abbildung 4.3: Diese Grafik zeigt die benötigte Berechnungszeit je Preis aus Abbildung 4.2 für $k = 1$ bis 50 bei 1.000 simulierten Pfaden auf einem 2,80 GHz Doppelkern-System unter Windows 7.

Weiterhin zeigt Abbildung 4.3 die benötigte Berechnungszeit je Preis an. Wie zu sehen ist, halbiert sich die Rechenzeit schon beim Schritt von $k = 1$ auf $k = 2$, da nur noch die Hälfte der Ausübungsrechte berücksichtigt werden muss.

Kapitel 5

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde der Longstaff-Schwartz-Algorithmus vorgestellt und diskutiert. Wir haben gezeigt, auf welche Weise der Algorithmus zu einer Schätzung für den Continuation Value gelangt und mit dieser amerikanische Optionen bewerten kann. Anschließend wurde die Verfahrensweise der Methode durch Hilbertraum-Argumente begründet. Anhand numerischer Beispiele haben wir verdeutlicht, wie verschiedene Ausgestaltungen der Optionen im Algorithmus implementierbar sind und dass die berechneten Ergebnisse bei geeigneter Wahl der Basisfunktionen mit denen anderen Bewertungsverfahren übereinstimmen. Der Algorithmus beinhaltet zwei Approximationen: eine für den Continuation Value als orthogonale Projektion und eine für die Koeffizienten dieser Projektion. Unter schwachen Voraussetzungen wurde die Konvergenz dieser Approximationen bewiesen. Weiterhin haben wir gesehen, dass das Verfahren gegenüber der Wahl der Basisfunktionen stabil ist und einfache Potenzen wegen ihrer schnellen Berechenbarkeit zu bevorzugen sind, bei komplexeren Optionen allerdings Laguerre-Polynome die besseren Ergebnisse liefern. Zusätzlich wurden einige Techniken zur Varianzreduktion aus der existierenden Literatur zusammengetragen, von denen die Verwendung von Quasi-Zufallszahlen, besonders von Halton-Folgen, die größte Wirkung erzielt. In Kapitel 4 haben wir Swingoptionen als Anwendungsbeispiel für den Longstaff-Schwartz-Algorithmus betrachtet. Es wurde verdeutlicht, dass Strom nicht lagerbar ist und daher Spikes auftreten können. Ein entsprechendes Spotpreis-Modell aus der Literatur, welches Sprünge zulässt sowie Saisonalität und Mean-Reversion berücksichtigt, wurde daraufhin vorgestellt.

Anschließend haben wir gezeigt, wie der Longstaff-Schwartz-Algorithmus angepasst werden muss, um das bei Swingoptionen auftretende Multiple Stopping Problem zu lösen. Dabei spielte neben dem Continuation Value der Begriff des Marginalwertes eine große Rolle. Es wurde bewiesen, dass diese Marginalwerte in der Anzahl verfügbarer Ausübungsrechte monoton fallend sind. Weiterhin haben wir gezeigt, wie sich die durch den Longstaff-Schwartz-Algorithmus berechnete optimale Strategie rekursiv entwickelt. Mit Hilfe dieser beiden Fakten wurde eine effiziente Möglichkeit zur Implementierung vorgestellt. Abschließend haben wir uns Swingoptionen gewidmet, bei denen mehrere Ausübungsrechte zu einem Zeitpunkt genutzt werden können. Als eigenständiges Resultat dieser Arbeit wurde eine bestehende Aussage, wie dieser Fall auf den Standardfall zurückgeführt werden kann, wenn die maximale Anzahl an Ausübungsrechten ein Vielfaches der gleichzeitig nutzbaren Rechte ist, in einer verallgemeinerten Form bewiesen, die diese Restriktion nicht mehr enthält.

Literaturverzeichnis

- Aleksandrov, N./Hambly, B.M.:** A dual approach to multiple exercise option problems under constraints. Preprint 2008.
- Areal, N./Rodrigues, A./Armada, M.R.:** On improving the least squares Monte Carlo option valuation method. *Review of Derivatives Research*, 11 2008 Nr. 1, 119–151.
- Bingham, N.H./Kiesel, R.:** *Risk-Neutral Valuation: Pricing and Hedging of Financial Derivatives* (Springer Finance). 2. Auflage. Springer, Berlin, 2004.
- Bolia, N./Juneja, S./Glasserman, P.:** Function-approximation-based importance sampling for pricing American options. In *WSC '04: Proceedings of the 36th conference on Winter simulation*. Winter Simulation Conference, 2004, 604–611.
- Broadie, M./Glasserman, P.:** Pricing American-style securities using simulation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21 1997 Nr. 8-9, 1323–1352.
- Broadie, M./Glasserman, P.:** A stochastic mesh method for pricing high-dimensional American options. *Journal of Computational Finance*, 7 2004, 35–72.
- Campbell, J.Y./Lo, A.W./MacKinlay, A.C.:** *The Econometrics of Financial Markets*. 2. Auflage. Princeton University Press, 1997.
- Clément, E./Lamberton, D./Protter, P.:** An analysis of a least squares regression method for American option pricing. *Finance and Stochastics*, 6 2002, 449–471.

- Cox, J.C./Ross, S./Rubinstein, M.:** Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7 1979 Nr. 3, 229–263.
- Hull, J.C.:** Optionen, Futures und andere Derivate. 6. Auflage. Pearson Studium, 4 2006.
- Jaillet, P./Ronn, E.I./Tompson, S.:** Valuation of commodity-based swing options. *Management science*, 7 2004, 909–921.
- Judd, K.L.:** Numerical Methods in Economics. The MIT Press, 10 1998.
- Klenke, A.:** Wahrscheinlichkeitstheorie. 1. Auflage. Springer, Berlin, 2006.
- Kluge, T.:** Pricing Swing Options and other Electricity Derivatives. PhD thesis University of Oxford, 2006.
- Longstaff, F.A./Schwartz, E.S.:** Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach. *Review of Financial Studies*, 14 2001 Nr. 1, 113–147.
- Lucia, J.J./Schwartz, E.S.:** Electricity prices and power derivatives: Evidence from the nordic power exchange. *Review of Derivatives Research*, 5 2002 Nr. 1, 5–50.
- Meinshausen, N./Hambly, B.M.:** Monte Carlo methods for the valuation of multiple exercise options. *Mathematical Finance*, 14 2004 Nr. 4, 557–583.
- Moreno, M./Navas, J.F.:** On the robustness of least-squares Monte Carlo (LSM) for pricing American derivatives. *Review of Derivatives Research*, 6 2003 Nr. 2, 107–128.
- Niederreiter, H.:** Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods (CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics). Society for Industrial and Applied Mathematics, 1 1992.
- Press, W.H. et al.:** Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing. 2. Auflage. Cambridge University Press, 10 1992.
- Stentoft, L.:** Assessing the least squares Monte-Carlo approach to American option valuation. *Review of Derivatives research*, 7 2004 Nr. 2, 129–168.

Strom-Magazin: `<URL: http://www.strom-magazin.de/strommarkt/strompreise-an-der-boerse-eex-explodieren_17648.html>` – Zugriff am 11.06.2010.

Werner, D.: Funktionalanalysis (Springer-Lehrbuch). 6. Auflage. Springer, Berlin, 9 2007.

Anhang A

Simulation korrelierter Assets

Im Black-Scholes-Modell können Kurse durch

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\sqrt{t}B_t\right\} \quad (\text{A.1})$$

simuliert werden, wobei B_t standardnormalverteilt ist. Um korrelierte Kurse zu simulieren, müssen wir auch mit korrelierten Zufallszahlen \tilde{B}_t arbeiten. Hull⁵⁸ zufolge, können dazu unkorrelierte, standardnormalverteilte Zufallszahlen X_1, \dots, X_n genutzt werden. Mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung wird die Korrelationsmatrix $\text{Corr} = (\rho_{ij})$, welche die Korrelationen ρ_{ij} zwischen dem i -ten Prozess und dem j -ten Prozess enthält, in das Produkt $\text{Corr} = C \cdot C^T$ zerlegt. Die Matrix C ist dann eine untere Dreiecksmatrix, die uns durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\tilde{X}_1 &= C_{11}X_1 \\ \tilde{X}_2 &= C_{21}X_1 + C_{22}X_2 \\ &\vdots \\ \tilde{X}_n &= C_{n1}X_1 + C_{n2}X_2 + \dots + C_{nn}X_n\end{aligned}$$

korrelierte Zufallszahlen \tilde{X}_1 bis \tilde{X}_n liefert. Nutzen wir statt B_t diese Zufallszahlen in der Gleichung A.1, erhalten wir Kurse mit der gewünschten Korrelation.

⁵⁸ HULL, J.C.: Optionen, Futures und andere Derivate. 6. Auflage. Pearson Studium, 4 2006, S. 499.

Anhang B

Quellcode für den Longstaff-Schwartz-Algorithmus

```
%Wert einer Swingoption mit Longstaff-Schwartz-Algorithmus
% N      - Anzahl der simulierten Pfade
% T      - Laufzeit der Option
% K      - Anzahl der Ausübungszeitpunkte
% n      - Anzahl der Ausübungsrechte
% r      - risikoloser Zinssatz

%*****

%Berechne Hilfsvariablen

dt = T/K;  %Abstand zweier Zeitpunkte
discount = exp(-r*dt);

%*****

%Simuliere N Pfade des Ornstein-Uhlenbeck Prozesses X
%und Sprung-Prozesses Y

[Xt,Yt] = SwingPreiseErweitert(N,T,K,alpha,beta,sigma,lambda,mu);
S = exp(Xt+Yt);

%*****
```

Anhang B Quellcode für den Longstaff-Schwartz-Algorithmus

```
%Initialisiere Variablen für Zeitpunkt t=T

SubtractMatrix = discount.*[diag(-1*ones(1,n));zeros(1,n)]
                +[zeros(1,n);diag(ones(1,n))];

%PO enthält Continuation Value in Spalte 1 für 0 Ausübungsrechte,
%Spalte 2 für 1 Ausübungsrecht, usw.

PO = [zeros(N,1) max(0,S(:,K+1)-Strike)*ones(1,n)];

%*****

%Schleife rückwärts über Zeitpunkt

for t=K:-1:2
    X = Xt(:,t);    Y = Yt(:,t); %Zustand der Prozesse für Regression

    %Regressions-Matrix mit Basisfunktionen

    HX = [ones(N,1) X X.^2 Y Y.^2 Y.*X];    A = HX'*HX;
    ContValue = zeros(N,n+1);

    %Schleife durchlaufen für jede Anzahl j an Ausübungsrechten

    for j=n:-1:1
        Y = discount*PO(:,j+1);    b = HX'*Y;
        a = A\b;    %a enthält Regressionskoeffizienten
        ContValue(:,j+1) = max(0,HX*a);
    end
    MargWert=ContValue*SubtractMatrix;
    PO = PayOff(N,n,K,discount,MargWert,S(:,t+1),PO,Strike);
end

%*****

%Preis bestimmen als arithmetisches Mittel über alle Pfade

Price = mean(PO(:,n+1)*discount);
```

end

%+++++

*%PayOff liefert Wert der zukünftigen Auszahlungen,
%also Continuation Value rekursiv berechnet aus alten
%Continuation Values*

function POvektor = PayOff(N,n,K,discount,MargWert,SLater,PO,Strike)

DiscPO = discount*PO;
PayoffNow = max(0,SLater-Strike);

%Schleife über mögliche Anzahl j von Ausübungsrechten

for j=n:-1:1
 IndFunc = PayoffNow2>MargWert(:,j);
 PO(:,j+1) = DiscPO(:,j+1) + IndFunc.*(PayoffNow2 +
 DiscPO(:,j)-DiscPO(:,j+1));

end

POvektor = PO;

end

Ehrenerklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe, insbesondere sind wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet. Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandlung auch nachträglich zur Aberkennung des Abschlusses führen kann.

Ort, Datum

Unterschrift