Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

Eine Implementierung des χ-Wertes

Diplomarbeit

Leipzig, August 2010

vorgelegt von
Kohl, Martin
Diplom Wirtschaftsmathematik

Betreuender Hochschullehrer:
Professor Dr. Stephan Luckhaus
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort **3**

2 Grundlagen **3**

2.1 Kooperative Spieltheorie . . . 3
2.2 Spiele mit Koalitionsstruktur . . . 5
2.3 Interpretation der Axiome . . . 7
2.4 Charakterisierungen spezieller Lösungswerte . . . 10
2.5 Die Shapley-Lösung . . . 13
2.6 Der Gewichtete χ-Wert . . . 17
2.7 Grundlagen der Nichtkooperativen Spieltheorie . . . 19

3 Die Konstruktion **24**

3.1 Modell von Kongo/Funaki/Tijs . . . 24
3.2 Die Konstruktion . . . 25
3.3 Existenz eines teilspielperfekten Gleichgewichtes . . . 30
3.4 Eindeutigkeit des teilspielperfekten Gleichgewichtes . . . 36

4 Weitere Nashgleichgewichte **41**

5 Auswertung **49**

6 Anhang **49**

7 Literatur **54**

8 Erklärung **54**

1 Vorwort

Ein grundlegendes Problem der Kooperativen Spieltheorie ist das Folgende. Es seien drei Spieler gegeben. Spieler 1 besitze einen linken Handschuh, Spieler 2 und 3 besitzen jeweils einen rechten Handschuh. Auf dem Markt kann man ein Paar Handschuhe für den Preis von 1 verkaufen.
Wie teilt man diesen Wert 1 unter den drei Spielern auf?
Ist es außerdem notwendig, dass alle drei Spieler kooperieren oder wären nicht bereits zwei Spieler ausreichend? Inwieweit verändert dies die Aufteilung des gemeinsam erzielten Wertes?
Für die Frage der Verteilung des Wertes wird stellvertetend die Shapley-Lösung beschrieben, welche aber nur den Wert verteilt, den alle Spieler gemeinsam erwirtschaften.
Für die zweite Frage gibt es vielerlei Ansätze, wobei sich diese Arbeit hauptsächlich mit dem (gewichteten) χ-Wert beschäftigt.
Das hauptsächliche Untersuchungsobjekt der Arbeit ist die Möglichkeit der Konstruktion eines nichtkooperativen Spieles zu einem beliebigen kooperativen Spiel, dessen gleichgewichtige Auszahlung mit dem (gewichteten) χ-Wert übereinstimmt. Dabei wird als Gleichgewichtsbegriff das teilspielperfekte Gleichgewicht gewählt. Diese Konstruktion wird als Implementierung des (gewichteten) χ-Wertes bezeichnet.
Die Arbeit ist dabei in fünf Kapitel untergliedert. In Kapitel zwei werden einige grundlegende Begriffe der Kooperativen Spieltheorie, wie TU-Spiel, Shapley-Lösung, Axiomatisierungen und der einfache χ-Wert eingeführt. Anschließend betrachtet man Kooperative Spiele auf Partitionen der Spielermenge. In diesen wird nicht mehr nur der Wert der gesamten Kooperation verteilt. Auch andere Zusammenschlüsse sind nun möglich. Um Rückschlüsse für den χ-Wert ziehen zu können, betrachtet man die eng verbundene Shapley-Lösung in Kap 2.5 genauer. In Kapitel 2.6 wird der gewichtete χ-Wert eingeführt, bei dem die Umverteilung der produzierten Werte nicht mehr gleichmäßig erfolgt. Daraufhin werden die Grundbegriffe der extensiven Spiele, in der die Implementierung stattfindet, beschrieben, um sich dann anschließend in Kapitel 3 mit der eigentlichen Implementierung zu beschäftigen. Zunächst wird ein teilspielperfektes Gleichgewicht angeführt, um anschließend dessen Eindeutigkeit zu beweisen. Kapitel 4 beschreibt alle weiteren Nashgleichgewichte bezüglich des konstruierten Spieles, während schließlich Kapitel 6 den Satz von Motzkin herleitet, welcher ein wichtiges Instrument für die Existenz der teilspielperfekten Gleichgewichte darstellt.

2 Grundlagen

2.1 Kooperative Spieltheorie

Im Gegensatz zur bekannteren Nichtkooperativen Spieltheorie beschäftigt sich die Kooperative Spieltheorie nicht damit, wie eine Auszahlung durch Wahl von Strategien erreicht wird und ob diese Auszahlung optimal ist. In der Kooperativen Spieltheorie und hier vor allem bei der Betrachtung von TU-Spielen wird vielmehr jeder Menge von Spielern ein Wert zugeordnet, anhanddessen anschließend untersucht wird, wie der von allen Spieler produzierte Wert verteilt wird.

Definition 2.1 (TU-Spiel)
Ein Spiel mit transferierbaren Nutzen (kurz TU-Spiel) ist ein Paar (N, v)*, welches aus einer nicht-leeren und endlichen Menge von Spielern* N *und aus einer Koalitionsfunktion*

$$v : \mathbb{P}(N) \to \mathbb{R}, v(\emptyset) = 0 \tag{2.1}$$

besteht.
Teilmengen $K \subseteq N$ *werden Koalitionen genannt. Dabei wird* N *als große Koalition ausgezeichnet.* $v(K)$ *wird als Wert der Koalition* $K \subseteq N$ *bezeichnet.*
Die Menge aller solcher TU-Spiele mit der Spielermenge N *werde mit* $\mathbb{V}(N)$ *bezeichnet.*

Bemerkung
Jede Koalition erwirtschaftet demnach gemeinsam einen Wert. Der Wert der leeren Koalition wird auf Null normiert.
Mit den Operationen $(+, \cdot)$*, definiert durch*

$$(u + v)(K) := u(K) + v(K) \textit{ für alle } u, v \in \mathbb{V}(N),\ K \subseteq N \tag{2.2}$$

$$(\lambda \cdot v)(K) := \lambda \cdot v(K) \textit{ für alle } v \in \mathbb{V}(N),\ K \subseteq N,\ \lambda \in \mathbb{R}, \tag{2.3}$$

wird $\mathbb{V}(N)$ *zu einem* $2^{|N|} - 1$ *dimensionalen Untervektorraum des* $\mathbb{R}^{\mathbb{P}(N)}$*.*

Zu diesem Untervektorraum existiert eine sehr nützliche Basis.

Definition 2.2 (Einstimmigkeitsspiele)
Es sei $\emptyset \neq T \subseteq N$ *eine Koalition.*
Das Spiel $u_T \in \mathbb{V}(N)$ *mit*

$$u_T(K) = \begin{cases} 1 & \textit{falls } T \subseteq K, \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \tag{2.4}$$

wird als Einstimmigkeitsspiel der Koalition T *bezeichnet.*

Theorem 2.3 (Basis des $\mathbb{V}(N)$)
Es sei N *gegeben. Dann bildet die Menge* $(u_T)_{T \subseteq N}$ *eine Basis für den Vektorraum* $(\mathbb{V}(N), +, \cdot)$*.*

Beweis. Die Menge $(u_T)_{T \subseteq N}$ enthält $2^{|N|} - 1$ Elemente. Es reicht zu zeigen, dass die Koalitionsfunktionen linear unabhängig sind.
Es sei $u_T = \sum\limits_i c_i u_{T_i}$ eine Linearkombination für u_T, bei der $T_i \neq T$ gelte.
O.B.d.A sei $|T| \leq |T_i|$ für alle i. Dann gilt mit dieser Wahl $T_i \nsubseteq T$, sodass $u_{T_i}(T) = 0$ nach Definition der Einstimmigkeitsspiele und daher

$$1 = u_T(T) = \sum_i c_i \underbrace{u_{T_i}(T)}_{=0} = 0. \tag{2.5}$$

Damit existiert keine solche Linearkombination und die Koalitionsfunktionen sind
linear unabhängig. □

Definition 2.4 (Lösungswert)
Ein Lösungswert ist eine Abbildung $\mathbb{V}(N) \to \mathbb{R}^N$.

2.2 Spiele mit Koalitionsstruktur

Nun ist es nicht immer nötig, dass alle Spieler zusammen einen Wert produzieren. Oft genügt es bereits, wenn nur eine Teilmenge der Spieler einen Wert erschafft. Somit benötigt man ein Modell, welches Werte kleinerer Koalitionen aufteilt. Dies ermöglicht die folgend definierte Koalitionsstruktur.

Definition 2.5 (Koalitionsstruktur)
Eine Koalitionsstruktur (CS) für (N, v) *ist eine Partition*[1] *von* N. $\mathcal{P}(i)$ *bezeichnet dabei die Komponente, die Spieler* i *enthält.*

Definition 2.6 (CS-Spiel)
Ein Spiel mit einer Koalitionsstruktur (CS-Spiel) ist ein Tupel $(N, v, \mathcal{P})$ *aus einem TU -Spiel* (N, v) *und einer Koalitionsstruktur* $\mathcal{P}$.

Die Partition gibt an, welche Spieler zusammen Werte erschaffen. Im Einführungsbeispiel der linken und rechten Handschuhe würde sich für die triviale Partition $\mathcal{P} = \{N\}$ das Problem ergeben, dass ein rechter Handschuh überflüssig wäre. Demzufolge würde man die Partitionen $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$ oder $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$ erwarten, in denen ein überflüssiger Spieler aus der Kooperation ausgeschlossen wird. Die Entscheidung über die Verteilung des Wertes wird dann von folgender Struktur erklärt.

Definition 2.7 (CS-Wert)
Ein Lösungswert für Koalitionsstrukturen ist eine Abbildung φ, *die jedem CS-Spiel den Auszahlungsvektor* $\varphi(N, v, \mathcal{P}) \in \mathbb{R}^N$ *zuordnet.*
Für $K \subseteq N$ *setze man* $\varphi_K(N, v, \mathcal{P}) := \sum_{i \in K} \varphi_i(N, v, \mathcal{P})$.

Nun kann dieser Lösungswert bisher beliebig auf diesem Kreuzprodukt gewählt werden. Außer der Praxis der Verteilungsfrage ergeben sich jedoch gewisse Eigenschaften, die erfüllt sein sollten.

Axiom 1 (Additivität A)
Ein Lösungswert φ *erfüllt das Additivitätsxiom, falls für zwei beliebige Koalitionsfunktionen* $v, v' \in \mathbb{V}(N)$ *gilt:*

$$\varphi(N, v + v', \mathcal{P}) = \varphi(N, v, \mathcal{P}) + \varphi(N, v', \mathcal{P}). \tag{2.6}$$

[1] Eine Partition $\mathcal{P}$ ist ein Mengensystem aus nichtleeren Mengen $(\mathcal{P}_i)_{i \in I}$. Für jedes $j \in N$ existiert genau ein $\mathcal{P}_i$ mit $j \in \mathcal{P}_i$.

Bemerkung
Es wird sich zeigen, dass bei einer geeigneten Auswahl an weiteren Axiomen bereits Homogenität in der Komponente der Koalitionsfunktion folgt. Linearität bezüglich der Koalitionsfunktion muss demnach nicht explizit gefordert werden.

Definition 2.8 (Symmetrische Spieler)
Zwei Spieler i und j heißen symmetrisch, falls gilt:

$$v(K \cup \{i\}) = v(K \cup \{j\}) \text{ für alle } K \subseteq N \setminus \{i, j\}. \tag{2.7}$$

Entsprechend sollte auch ein akzeptabler bzw. "fairer" Lösungswert gleiche Auszahlungen für symmetrische Spieler in einer Komponente garantieren. Dies liefert die folgende Eigenschaft.

Axiom 2 (Komponentenbeschränkte Symmetrie - CS)
Für einen Lösungswert φ gilt das Axiom der Komponentenbeschränkten Symmetrie, falls für symmetrische Spieler i und j, $j \in \mathcal{P}(i)$ gilt:

$$\varphi_i(N, v, \mathcal{P}) = \varphi_j(N, v, \mathcal{P}). \tag{2.8}$$

Bisher wurde auch nicht festgelegt, welche Werte verteilt werden. Ohne Transaktionskosten, die hier nicht modelliert werden, kann stets der gesamte Wert einer Komponente vorgegeben werden. Dies führt zu folgender Definition.

Axiom 3 (Komponenteneffizienz - CE)
Ein Lösungswert φ erfüllt die Komponenteneffizienz, falls für alle $i \in N$ gilt:

$$\varphi_{\mathcal{P}(i)}(N, v, \mathcal{P}) = v(\mathcal{P}(i)). \tag{2.9}$$

Weiterhin ergeben sich wie im Einführungsbeispiel in manchen Situationen unproduktive Spieler. Diese werden Nullspieler genannt und sind durch folgende Eigenschaft gekennzeichnet.

Definition 2.9 (Nullspieler)
Ein Spieler i heißt Nullspieler, falls für alle $K \subseteq N$

$$v(K \cup \{i\}) = v(K). \tag{2.10}$$

Axiom 4 (Nullspieler - N)
Ein Lösungswert φ erfüllt das Nullspieleraxiom, falls für alle Nullspieler $i \in N$

$$\varphi_i(N, v, \mathcal{P}) = 0 \tag{2.11}$$

gilt.

Nullspieler erhalten nach diesem Axiom in jeder Partition den Wert 0 zugeteilt.
Dies ist sogleich die angreifbarste Eigenschaft, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel
Man betrachte das Einstimmigkeitsspiel für $T = \{1,2\}$ mit der Partition $\{\{1\}\{2,3\}\}$. Hier widersprechen sich die Eigenschaften CE, N mit dem Verständnis von Verhandlungsmacht. Es muss gelten $x_2+x_3 = 0$ und weiterhin ist x_3 Nullspieler. Damit muss auch $x_2 = 0$ gelten und dies obwohl Spieler 2 die Möglichkeit besitzt, den Wert 1 mit Spieler 1 zu generieren.
Entsprechend sollten für gewisse Partitionen auch negative Auszahlungen möglich sein und man führt man die folgende schwächere Eigenschaft ein.

Axiom 5 (Nullspieleraxiom der Großen Koalition - GN)
Ein Lösungswert φ erfüllt das Nullspieleraxiom der Großen Koalition, falls für alle Nullspieler $i \in N$ gilt: $\varphi_i(N, v, \{N\}) = 0$.

Zuletzt wird noch eine Eigenschaft angeführt, die den Fall beschreibt, dass Komponenten auseinanderbrechen.

Definition 2.10 (Feinere Partition)
Eine Partition $\mathcal{P}'$ heißt feiner als die Partition $\mathcal{P}$, falls

$$\mathcal{P}'(i) \subseteq \mathcal{P}(i) \text{ für alle } i \in N. \tag{2.12}$$

Axiom 6 (Aufspaltung - SP)
Ein Lösungswert φ erfüllt das Aufspaltungs-Axiom, falls für Spieler $i \in N$ und $j \in \mathcal{P}'(i)$ und alle Partitionen $\mathcal{P}'$, die feiner als $\mathcal{P}$ sind, gilt

$$\varphi_i(N, v, \mathcal{P}) - \varphi_i(N, v, \mathcal{P}') = \varphi_j(N, v, \mathcal{P}) - \varphi_j(N, v, \mathcal{P}'). \tag{2.13}$$

Verlassen demnach Spieler gemeinsam eine Komponente, so wird der Verlust bzw. Gewinn dieser Spieler gleichmäßig unter diesen aufgeteilt.

Bemerkung
Da jede Partition feiner als die große Koalition ist, ist eine äquivalente Formulierung des Aufspaltungsaxioms:

$$\varphi_i(N, v, \mathcal{P}) - \varphi_i(N, v, \{N\}) = \varphi_j(N, v, \mathcal{P}) - \varphi_j(N, v, \{N\}) \text{ für alle Partitionen } \mathcal{P}. \tag{2.14}$$

Durch Wahl von zwei verschiedenen Partitionen und Einsetzen der Gleichungen gelangt man wieder zur ursprünglichen Formulierung.

2.3 Interpretation der Axiome

Man nehme nun ein Lösungswert erfülle zumindest die Linearität in der Komponente der Koalitionsfunktion. Es gelte demnach

$$\varphi(N, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, \mathcal{P}) = \lambda_1 \varphi(N, v_1, \mathcal{P}) + \lambda_2 \varphi(N, v_2, \mathcal{P}) \text{ für alle } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}; v_1, v_2 \in \mathbb{V}(N). \tag{2.15}$$

Dann kann man die Axiome wie folgt im Kontext der Linearen Algebra interpretieren.

Komponentenbeschränkte Symmetrie

Es sei $V_{i,j} \subseteq \mathbb{V}(N)$ der lineare Unterraum der Koalitionsfunktionen, in denen Spieler i und j symmetrisch sind.

Theorem 2.11
Es gilt[2]:

$$V_{i,j} = \operatorname{lin}\left((e_T)_{T\subseteq N\setminus\{i,j\},T\neq\emptyset}, (v_T)_{T\subseteq N\setminus\{i,j\}}, (w_T)_{T\subseteq N\setminus\{i,j\}}\right) := S_{i,j}. \tag{2.16}$$

Dabei bezeichne

$$\begin{aligned} e_T(K) &:= \begin{cases} 1 & K = T, \\ 0 & \textit{sonst}\ , \end{cases} \\ v_T(K) &:= \begin{cases} 1 & K = T\cup\{i\} \ \textit{oder}\ K = T\cup\{j\}, \\ 0 & \textit{sonst}\ , \end{cases} \\ w_T(K) &:= \begin{cases} 1 & K = T\cup\{i,j\}, \\ 0 & \textit{sonst}\ . \end{cases} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Beweis. Lineare Unabhängigkeit der Koalitionsfunktionen:
Dann gilt für jede Linarkombination mit Koeffizienten a_S, b_S, c_S innerhalb der Koalitionsfunktionen:

$$1 = e_T(T) = \sum_{S\in N\setminus\{i,j\},S\neq T} a_S \underbrace{e_S(T)}_{=0} + \sum_{S\in N\setminus\{i,j\}} b_S \underbrace{v_S(T)}_{=0} + \sum_{S\in N\setminus\{i,j\}} c_S \underbrace{w_S(T)}_{=0} = 0. \tag{2.18}$$

Ebenso folgt:

$$\begin{aligned} 1 &= v_T(T\cup\{i\}) \\ &= \sum_{S\in N\setminus\{i,j\}} a_S \underbrace{e_S(T\cup\{i\})}_{=0} + \sum_{S\in N\setminus\{i,j\},S\neq T} b_S \underbrace{v_S(T\cup\{i\})}_{=0} + \sum_{S\in N\setminus\{i,j\}} c_S \underbrace{w_S(T\cup\{i\})}_{=0} = 0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

und

$$\begin{aligned} 1 &= w_T(T\cup\{i,j\}) \\ &= \sum_{S\in N\setminus\{i,j\}} a_S \underbrace{e_S(T\cup\{i,j\})}_{=0} + \sum_{S\in N\setminus\{i,j\}} b_S \underbrace{v_S(T\cup\{i,j\})}_{=0} + \sum_{S\in N\setminus\{i,j\},S\neq T} c_S \underbrace{w_S(T\cup\{i,j\})}_{=0} \end{aligned} \tag{2.20}$$

$$= 0.$$

Erzeugendensystem:

[2] $\operatorname{lin}(a_1,\ldots,a_n)$ bezeichne hier die Lineare Hülle der Vektoren $a_1,\ldots,a_n, n\in\mathbb{N}$.

Sei $z \in S_{i,j}$ dann gilt für alle $K \in\subseteq N \setminus \{i,j\}$:

$$z(K \cup \{i\}) = \sum_{S \in N\setminus\{i,j\},S} a_S e_S(K \cup \{i\}) + \sum_{S \in N\setminus\{i,j\}} b_S v_S(K \cup \{i\}) + \sum_{S \in N\setminus\{i,j\}} c_S w_S(K \cup \{i\}) \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} &= b_K v_K(K \cup \{i\}) \\ &= b_K v_K(K \cup \{j\}) \\ &= z(K \cup \{i\}). \end{aligned}$$

Die Koalitionsfunktion ist daher symmetrisch in den Spielern i und j.
Sei andererseits $\widehat{z}$ eine symmetrische Koalitionsfunktion mit $\widehat{z}(K \cup \{i\}) = \widehat{z}(K \cup \{j\})$, dann gilt:

$$\widehat{z} = \sum_{S \in N\setminus\{i,j\},S} \widehat{z}(S)e_S + \sum_{S \in N\setminus\{i,j\}} \widehat{z}(S \cup \{i\})v_S + \sum_{S \in N\setminus\{i,j\}} \widehat{z}(S \cup \{i,j\})w_S \tag{2.22}$$

und daher folgt: $\widehat{z} \in V_{i,j}$ und $S_{i,j} = V_{i,j}$. $\square$

Eine Lösungswert φ, der der Komponentenbeschränkten Symmetrie genügt, erfordert dann auf dieser Basis die folgende Eigenschaft:

$$\varphi_i(N, v_T, \mathcal{P}) = \varphi_j(N, v_T, \mathcal{P}) \text{ für alle } T \subseteq N \setminus \{i,j\} \text{ und für alle } j \in \mathcal{P}(i). \tag{2.23}$$

Komponenteneffizienz

Komponenteneffizienz erfordert, dass für einen Lösungswert φ und jedes $S \in \mathcal{P}$ das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{V}(N) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\Pi_{\{S\}}"'] & & \mathbb{R}^N \arrow[dl, "g"] \\ & \mathbb{R}, & \end{tikzcd} \tag{2.24}$$

wobei g wie folgt definiert ist

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^N &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sum_{i \in N} x_i. \end{aligned} \tag{2.25}$$

und Π_S die Projektion der Koalitionsfunktion auf die Komponente S darstellt.
Ein Lösungswert, der der Komponenteneffizienz genügt, muss demnach einem Gleichungssystem mit $|\mathcal{P}|$ Bedingungen genügen. Die Menge aller solcher Lösungswerte bilden einen konvexen Polyeder.

Nullspieleraxiom

Es sei $O_j(N)$ der Unterraum der Koalitionsfunktionen, in denen Spieler j ein Nullspieler ist.

Theorem 2.12
Eine zugehörige Basis ist dann die folgende:

$$(o_T)_{T \subseteq N \setminus \{j\}} \tag{2.26}$$

wobei gelte:

$$o_T(K) = \begin{cases} 1 & K = T \text{ oder } K = T \cup \{j\}, \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases} \tag{2.27}$$

Beweis. Offensichtlich sind die Koalitionsfunktionen linear unabhängig und es gilt $v(K) = v(K \cup \{i\})$ für jede Koalitionsfunktion v aus der linearen Hülle von $(o_T)_{T \subseteq N \setminus \{j\}}$.
Andererseits lässt sich jede Koalitionsfunktion z, in der Spieler i Nullspieler ist, wie folgt darstellen:

$$z = \sum_{S \in N \setminus \{i\}, S \neq \emptyset} z(S) o_S. \tag{2.28}$$

Damit gilt bereits die Behauptung. □

Ein Lösungswert φ erfüllt dann das Nullspieleraxiom, falls gilt:

$$(o_T)_{T \subseteq N \setminus \{j\}} \subseteq \ker(\varphi_j). \tag{2.29}$$

2.4 Charakterisierungen spezieller Lösungswerte

Durch eine gewisse Auswahl an Axiomen für Lösungswerte, definiert man diese bereits eindeutig. Im Weiteren werden zwei Lösungswerte genauer betrachtet. Die Shapley-Lösung, die für die Partition $\mathcal{P} = \{N\}$ definiert ist und eine mögliche Übertragung auf CS-Spiele, den ungewichteten χ-Wert.

Definition 2.13
Sei $\Sigma(N)$ die Menge der Reihenfolgen von N und sei $\sigma(i)$ die Position von i.
Dann sei $K_i(\sigma) = \{j : \sigma(j) \leq \sigma(i)\}$ die Menge der Spieler, die vor Spieler i in σ positioniert sind.

Definition 2.14 (Marginaler Beitrag)
Der marginale Beitrag eines Spielers i in der Reihenfolge σ ist gegeben durch:

$$MC_i(\sigma)(v) := v(K_i(\sigma)) - v(K_i(\sigma) \setminus \{i\}). \tag{2.30}$$

Theorem 2.15 (Charakterisierung der Shapley-Lösung)
Es seien (N, v) ein TU-Spiel und $\mathcal{P} = \{N\}$. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten CS-Wert, der den folgenden Eigenschaften genügt:

- *Nullspieleraxiom*
- *Komponenteneffizienz*

- *Komponentenbeschränkte Symmetrie*
- *Additivität*

Dieser Wert wird als Shapley-Lösung bezeichnet[3]*. Er ist definiert durch:*

$$Sh_i(N,v) = \sum_{S \subseteq N} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!} \left(v(S) - v(S \setminus \{i\})\right). \tag{2.31}$$

Beweis. Offensichtlich erfüllt die Formel der Shapley-Lösung das Nullspieleraxiom, die Komponentenbeschränkte Symmetrie und die Additivität. Es bleibt demnach noch die Komponenteneffizienz zu zeigen:

$$\sum_{i \in N} Sh_i(N,v) = \sum_{i \in N} \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})] \tag{2.32}$$

$$= \sum_{i \in N} \left[\sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!} v(S) - \sum_{S \subseteq N, i \notin S} \frac{(|S|)!(|N|-|S|-1)!}{|N|!} v(S) \right] \tag{2.33}$$

$$= v(N) + \sum_{S \subset N} \underbrace{\left[\sum_{i \in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!} - \sum_{i \notin S} \frac{(|S|)!(|N|-|S|-1)!}{|N|!} \right]}_{=0} v(S) \tag{2.34}$$

$$= v(N).$$

Demnach genügt die Formel auch der Komponenteneffizienz.
Für die Eindeutigkeit zeigt man, dass jeder Lösungswert φ, der den drei Eigenschaften CS, N und CE genügt, auf der Basis der skalierten Einstimmigkeitsspiele bereits eindeutig bestimmt ist.
Sei $T \subseteq N$. Nach dem Nullspieleraxiom gilt für $i \notin T$ und $\lambda \in \mathbb{R}$: $\varphi_i(N, \lambda u_T) = 0$. Dies ist gerade der Wert der Shapley-Lösung $Sh_i(N, \lambda u_T)$.
Für $i \in T$ gilt nach Komponenteneffizienz und Komponentenbeschränkter Symmetrie:

$$\varphi_i(N, \lambda u_T) = \frac{\lambda}{|T|}. \tag{2.35}$$

Mit der Additivität und damit verbundenen Linearität ist $\varphi(N, u_T)$ eindeutig bestimmt als die Shapley-Lösung. □

Bemerkung
Die Shapley-Lösung kann als durchschnittlicher oder erwarteter Beitrag des Spielers i interpretiert werden. Es wird durch die Einschränkung auf die Partition der Großen Koalition nur deren Wert verteilt.

Demgegenüber nutzt die Shapley-Lösung das bereits vorher diskutierte Nullspieleraxiom, bei dem Nullspieler stets eine Auszahlung von Null zugeordnet wird. Schwächt man dieses Axiom zum

[3] nach Lloyd Shapley, 1953

Nullspieleraxiom der Großen Koalition ab, so ist ein Lösungswert bereit für $\mathcal{P} = \{N\}$ festgelegt. Lediglich für die anderen Partitionen gibt es Freiheitsgrade. Eine Möglichkeit diese aufzulösen, besteht darin, zusätzlich das Aufspaltungsaxiom zu erfüllen. Der damit entstehende CS-Lösungswert wird als χ-Wert bezeichnet.

Theorem 2.16 (Charakterisierung des χ-Wertes)
Es sei (N, v) ein TU-Spiel gegeben. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten CS-Wert, der den folgenden Eigenschaften genügt

- *Nullspieleraxiom der Großen Koalition,*
- *Komponenteneffizienz,*
- *Komponentenbeschränkte Symmetrie,*
- *Additivität,*
- *Aufspaltungsaxiom.*

Diese Lösung wird als χ-Wert[4] *bezeichnet und ist gegeben durch*

$$\chi_i(N, v, \mathcal{P}) = Sh_i(N, v) + \frac{v(\mathcal{P}(i)) - Sh_{\mathcal{P}(i)}(N, v)}{|\mathcal{P}(i)|}. \tag{2.36}$$

Beweis. Die Additivität des Lösungswertes folgt nach Konstruktion. Für $\mathcal{P} = N$ stimmt der χ-Wert mit der Shapley-Lösung überein. Daher wird das Nullspieleraxiom der Großen Koalition ebenfalls erfüllt. Weiterhin gilt für alle $i \in N$:

$$\sum_{j \in \mathcal{P}(i)} \chi_j(N, v, \mathcal{P}) = \sum_{j \in \mathcal{P}(i)} Sh_i(N, v) + v(\mathcal{P}(i)) - \sum_{j \in \mathcal{P}(i)} Sh_i(N, v) = v(\mathcal{P}(i)). \tag{2.37}$$

Es gilt daher die Komponenteneffizenz.
Für symmetrische Spieler i und j, $j \in \mathcal{P}(i)$, gilt nach Eigenschaft der Shapley-Lösung

$$Sh_i(N, v) = Sh_j(N, v) \tag{2.38}$$

und damit gilt mit

$$\chi_i(N, v, \mathcal{P}) = \chi_j(N, v, \mathcal{P}) \tag{2.39}$$

auch die Komponentenbeschränkte Symmetrie. Sei $\mathcal{P}$ eine Partition, dann gilt:

$$\underbrace{\chi_i(N, v, \{N\})}_{=Sh_i(N,v)} - \chi_i(N, v, \mathcal{P}) = \frac{Sh_{\mathcal{P}(i)}(N, v) - v(\mathcal{P}(i))}{|\mathcal{P}(i)|} \tag{2.40}$$

$$= \chi_j(N, v, \{N\}) - \chi_j(N, v, \mathcal{P}) \text{ für alle } j \in \mathcal{P}(i). \tag{2.41}$$

Der χ-Wert genügt daher auch dem Aufspaltungsaxiom.
Bleibt zu zeigen, dass der χ-Wert der eindeutig bestimmte Lösungswert ist, der diesen Axiomen

[4]nach Casajus, 2008 [1]

genügt. Für $\mathcal{P} = \{N\}$ muss der Lösungswert nach dem vorherigen Theorem mit dem Wert der Shapley-Lösung übereinstimmen. Nach dem Aufspaltungsaxiom gilt dann:

$$\varphi_i(N, v, \mathcal{P}) - Sh_i(N, v) = \varphi_j(N, v, \mathcal{P}) - Sh_j(N, v) \text{ für alle } j \in \mathcal{P}(i). \tag{2.42}$$

Durch Aufsummieren über alle $j \in \mathcal{P}(i)$ und Ausnutzen der Komponenteneffizienz ergibt sich:

$$|\mathcal{P}(i)|(\varphi_i(N, v, \mathcal{P}) - Sh_i(N, v)) = \underbrace{\varphi_{\mathcal{P}(i)}(N, v, \mathcal{P})}_{\overset{CE}{=} v(\mathcal{P}(i))} - Sh_{\mathcal{P}(i)}(N, v) \tag{2.43}$$

und damit der gewünschte eindeutige χ-Wert. □

Bemerkung
Insbesonders ist der χ-Wert unabhängig von der Organisation des Spieles außerhalb der eigenen Komponente. Jede Komponente erhält insgesamt auch den Wert, den sie für sich allein produzieren würde.

2.5 Die Shapley-Lösung

Durch die Definition des χ-Wertes ist dieser eng mit den Eigenschaften der Shapley-Lösung verbunden. Daher ist es nötig, diesen Wert genauer zu untersuchen, insbesondere um eine Implementierung des χ-Wertes zu ermöglichen. Dazu werden einige weitere Eigenschaften der Shapley-Lösung angeführt, welche zumeist aus Kongo/Funaki/Tijs, 2008: [2] stammen.

Proposition 2.17 (Bedingung der ausgeglichenen Beiträge - BCP)
Für alle $i, j \in N$ mit $i \neq j$ gilt:

$$Sh_i(N, v) - Sh_i(N \setminus \{j\}, v|_{N\setminus\{j\}}) = Sh_j(N, v) - Sh_j(N \setminus \{i\}, v|_{N\setminus\{i\}}). \tag{2.44}$$

Beweis.

$$Sh_i(N, v) - Sh_j(N, v) \overset{2.15}{=} \sum_{S\subseteq N} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!} (v(S \setminus \{j\}) - v(S \setminus \{i\})) \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{S\subseteq N, i\in S, j\notin S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!} (v(S) - v(S \setminus \{i\})) \\ &+ \sum_{S\subseteq N, j\in S, i\notin S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!} (v(S \setminus \{j\}) - v(S)) \\ &+ \sum_{S\subseteq N, i\in S, j\in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!} (v(S \setminus \{j\}) - v(S \setminus \{i\}))\,. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Es ist nun

$$\sum_{S\subseteq N, i\in S, j\in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!} (v(S \setminus \{j\}) - v(S \setminus \{i\})) \tag{2.47}$$

$$= \sum_{S\subseteq N, i\in S, j\notin S} \frac{(|S|)!(|N|-|S|-1)!}{|N|!} v(S) - \sum_{S\subseteq N, i\notin S, j\in S} \frac{(|S|)!(|N|-|S|-1)!}{|N|!} v(S). \tag{2.48}$$

Für jede Koalition $S \subseteq N, i \in S, j \notin S$ gibt es eine Koalition $S' \subseteq N, i \notin S, j \in S$, sodass $S \setminus \{i\} = S' \setminus \{j\}$. Daher verschwinden die beiden Terme. Eingesetzt erhält man:

$$
\begin{aligned}
&Sh_i(N,v) - Sh_j(N,v) \\
&= \sum_{S \subseteq N, i \in S, j \notin S} \left[\frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!} + \frac{(|S|)!(|N|-|S|-1)!}{|N|!} \right] v(S) && (2.49) \\
&+ \sum_{S \subseteq N, i \notin S, j \in S} \left[\frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{|N|!} + \frac{(|S|)!(|N|-|S|-1)!}{|N|!} \right] v(S) && (2.50) \\
&= \sum_{S \subseteq N, i \in S, j \notin S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|-1)!}{(|N|-1)!} v(S) - \sum_{S \subseteq N, i \notin S, j \in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|-1)!}{(|N|-1)!} v(S) && (2.51) \\
&= \sum_{S \subseteq N \setminus \{j\}, i \in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|-1)!}{(|N|-1)!} v(S) - \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}, j \in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|-1)!}{(|N|-1)!} v(S) && (2.52) \\
&\overset{2.15}{=} Sh_i(N \setminus \{j\}, v|_{N \setminus \{j\}}) - Sh_j(N \setminus \{i\}, v|_{N \setminus \{i\}}), && (2.53)
\end{aligned}
$$

indem erneut verschwindende Terme $v(S \setminus \{i\}) - v(S' \setminus \{j\})$ hinzugefügt werden. □

Der Verlust oder Gewinnes eines Spielers i in der Shapley-Lösung bei Austreten eines andereren Spielers j aus dem Spiel (N, v) ist daher gleich dem Verlust des Spielers j, falls Spieler i aus dem Spiel austritt.

Definition 2.18 (Duales Spiel)
Das duale Spiel (N, v^*) von (N, v) ist definiert durch

$$
v^*(S) = v(N) - v(N \setminus S) \text{ für alle } S \subseteq N. \quad (2.54)
$$

Bemerkung
Das duale Spiel ordnet jeder Koalition S den Verlust der Großen Koalition zu, falls S diese verlässt. Die Shapley-Lösung ist selbst-dual, d.h. der Wert der Shapley-Lösung im Spiel (N, v) stimmt mit dem Wert der Shapley-Lösung im Spiel (N, v^*) überein, wie der folgende Satz zeigt.

Proposition 2.19
Es sei (N, v) ein TU-Spiel. Für die Shapley-Lösung gilt

$$
Sh_i(N, v) = Sh_i(N, v^*). \quad (2.55)
$$

Beweis.

$$
\begin{aligned}
Sh_i(N, v^*) &\overset{2.15}{=} \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{N!} (v^*(S) - v^*(S \setminus \{i\})) && (2.56) \\
&\overset{2.54}{=} \sum_{S \subseteq N, i \in S} \frac{(|S|-1)!(|N|-|S|)!}{N!} (v(N \setminus (S \setminus \{i\})) - v(N \setminus S)). && (2.57)
\end{aligned}
$$

Man wähle die Bijektion

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{P}(N \setminus \{i\}) \cup \{i\} &\to \mathbb{P}(N \setminus \{i\}) \cup \{i\},\\ S &\mapsto N \setminus S \cup \{i\}.\end{aligned} \tag{2.58}$$

Es gilt dann $|\phi(S)| - 1 = |N| - |S|$:

$$Sh_i(N, v^*) = \sum_{\phi(S) \subseteq N} \frac{(|\phi(S)| - 1)!(|N| - |\phi(S)|)!}{N!} \left(v(\phi(S)) - v(\phi(S) \setminus \{i\})\right) \tag{2.59}$$

$$\overset{2.15}{=} Sh_i(N, v). \tag{2.60}$$

□

Für die Implementierung ist es notwendig zu untersuchen, welche Auszahlungen erreicht werden können, falls Spieler aus den Verhandlungen austreten, deren Kooperation aber erhalten bleibt. Dies führt zur folgenden Art von Spielen.

Definition 2.20 (S-marginales Spiel)
Sei $S \subseteq N$. Das Spiel $(N \setminus S, v^S)$ wird als S- marginales Spiel von (N, v) bezeichnet, wenn die Koalitionsfunktion folgender Bedingung genügt:

$$v^S(T) = v(S \cup T) - v(S) \textit{ für alle } T \subseteq N \setminus S. \tag{2.61}$$

Bemerkung
Für einelelementigen Koalitionen $\{i\} \in \mathbb{P}(N)$ wird zur Vereinfachung v^i statt $v^{\{i\}}$ benutzt. Die Koalitionsfunktion beschreibt eine Verallgemeinerung der marginalen Beiträge für den Fall, dass sich die Koalition S an den ersten Positionen der Reihenfolge befindet.

Es besteht dabei ein starker Zusammenhang zwischen den dualen und den S-marginalen Spielen.

Proposition 2.21
Für jedes $S \subseteq N$ gilt:

$$v^S = (v^*|_{N \setminus S})^*. \tag{2.62}$$

.

Beweis. Für $S \subseteq N$ und $T \subseteq N \setminus S$ gilt:

$$(v^*|_{N\setminus S})^*(T) \overset{2.54}{=} v^*(N \setminus S) - v^*((N \setminus S) \setminus T) \tag{2.63}$$

$$\overset{2.54}{=} v(N) - v(S) - v(N) + v(S \cup T) \tag{2.64}$$

$$= v(S \cup T) - v(S) \tag{2.65}$$

$$\overset{2.20}{=} v^S(T). \tag{2.66}$$

□

Als Folgerung aus diesem Satz kann beschrieben werden, wie sich die Shapley-Auszahlungen verhalten, falls ein Spieler aus dem Spiel austritt, aber seine Kooperation erhalten bleibt. Wenn Spieler j austritt, so gewinnt/verliert Spieler $i \neq j$ den gleichen Betrag wie Spieler j, wenn Spieler i das Spiel verlässt.

Proposition 2.22 (Variante der Bedingung der ausgeglichenen marginalen Beiträge, BMC)
Für jedes TU-Spiel (N, v) und jedes $i, j \in N$ mit $i \neq j$ gilt

$$Sh_i(N, v) - Sh_i(N \setminus \{j\}, v^j) = Sh_j(N, v) - Sh_j(N \setminus \{i\}, v^i). \tag{2.67}$$

Beweis. Es gelte $|N| \geq 2$, $i, j \in N$ und $i \neq j$, dann folgt:

$$\begin{aligned} Sh_i(N, v) - Sh_j(N, v) &\overset{2.19}{=} Sh_i(N, v^*) - Sh_j(N, v^*) && (2.68)\\ &\overset{2.44}{=} Sh_i\left(N \setminus \{j\}, v^*|_{N\setminus\{j\}}\right) - Sh_j\left(N \setminus \{i\}, v^*|_{N\setminus\{i\}}\right) && (2.69)\\ &\overset{2.19}{=} Sh_i\left(N \setminus \{j\}, (v^*|_{N\setminus\{j\}})^*\right) - Sh_j(N \setminus \{i\}, (v^*|_{N\setminus\{i\}})^*\big) && (2.70)\\ &\overset{2.21}{=} Sh_i\left(N \setminus \{j\}, v^j\right) - Sh_j(N \setminus \{j\}, v^i\big). && (2.71) \end{aligned}$$

□

Als Folgerung ergeben sich die später sehr nützlichen Rekursionsformeln.

Proposition 2.23
Sei (N, v) ein TU-Spiel. Dann gilt für die Shapley-Lösung des Spiels die folgende Rekursionsformel:

$$Sh_i(N, v) = \frac{1}{|N|}\left[v(N) - v(N \setminus \{i\})\right] + \frac{1}{|N|}\sum_{j\in N\setminus\{i\}} Sh_i\left(N \setminus \{j\}, v|_{N\setminus\{j\}}\right). \tag{2.72}$$

Beweis. Für alle $i, j \in N, i \neq j$, gilt nach Proposition 2.44:

$$Sh_i(N, v) - Sh_i\left(N \setminus \{j\}, v|_{N\setminus\{j\}}\right) = Sh_j(N, v) - Sh_j\left(N \setminus \{i\}, v|_{N\setminus\{i\}}\right). \tag{2.73}$$

Durch Aufsummieren über alle $j \in N \setminus \{i\}$ erhält man schließlich:

$$\begin{aligned} &(|N| - 1)Sh_i(N, v) - \sum_{j\in N\setminus\{i\}} Sh_i\left(N \setminus \{j\}, v|_{N\setminus\{j\}}\right) && (2.74)\\ &= \underbrace{\sum_{j\in N\setminus\{i\}} Sh_j(N, v)}_{v(N)-Sh_i(N,v)} - \underbrace{\sum_{j\in N\setminus\{i\}} Sh_j\left(N \setminus \{i\}, v|_{N\setminus\{i\}}\right)}_{v(N\setminus\{i\})}. && (2.75) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Behauptung. □

Bemerkung
Die Formel lässt sich wie folgt interpretieren. Der erste Term beschreibt den marginalen Beitrag von Spieler i in allen Reihenfolgen, in denen er als letztes zun den weiteren Mitspielern hinzustößt. Die aufsummierten Terme entsprechen gerade den Werten der Shapley-Lösung, falls sich ein anderer Spieler am Ende der Reihenfolge befindet.

Proposition 2.24
Sei (N, v) ein TU-Spiel. Dann gilt für jedes $i \in N$:

$$Sh_i(N, v) = \frac{1}{|N|} v(i) + \frac{1}{|N|} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} Sh_i(N \setminus \{j\}, v^j). \tag{2.76}$$

Beweis. Man schließt:

$$\begin{aligned} Sh_i(N, v) &\overset{2.19}{=} Sh_i(N, v^*) && (2.77) \\ &\overset{2.72}{=} \frac{1}{|N|}(v^*(N) - v^*(N \setminus \{i\})) + \frac{1}{|N|} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} Sh_i \left(N \setminus \{j\}, v^*|_{N \setminus \{j\}}\right) && (2.78) \\ &\overset{2.54, 2.19}{=} \frac{1}{|N|} v(i) + \frac{1}{|N|} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} Sh_i \left(N \setminus \{j\}, (v^*|_{N \setminus \{j\}})^*\right) && (2.79) \\ &\overset{2.21}{=} \frac{1}{|N|} v(i) + \frac{1}{|N|} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} Sh_i(N \setminus \{j\}, v^j). && (2.80) \end{aligned}$$

□

In dieser Rekursionsformel wird die Position des Spielers i genau umgekehrt. Der erste Term steht für die marginalen Beiträge, falls sich Spieler i an erster Position befindet. Die Summe stellt die Beiträge dar, falls sich ein anderer Spieler an erster Position befindet.

2.6 Der Gewichtete χ-Wert

Auf diesen Eigenschaften der Shapley-Lösung aufbauend, wurde der χ-Wert konstruiert. Die Shapley-Lösung betrachtet lediglich die Verteilung des Wertes der großes Koalition. Da dies nicht immer plausibel erscheinen muss, kann es auch notwendig sein, andere Werte von Koalitionen zu verteilen. Der bisher genannte χ-Wert verteilt die Differenz zwischen dem Wert der Koalition und der Summe der Werte der Shapley-Lösung gleichmäßig auf alle Spieler der Koalition. Dies kann nun noch weiter zum gewichteten χ-Wert verallgemeinert werden, bei dem die Verteilung des Wertes einer Komponente mittels vorher exogen festgelegter Gewichte erfolgt. Die Idee dieser Verallgemeinerung wurde Casajus/Tutic, 2008: [3] entnommen.

Definition 2.25 (Gewichtetes CS-Spiel)
Ein gewichtetes CS-Spiel $(N, v, \mathcal{P}, w)$ ist ein CS-Spiel $(N, v, \mathcal{P})$ und ein Gewichtsvektor $w \in \mathbb{R}^N_{++}$.

Ein Lösungswert für ein gewichtetes CS-Spiel ist dementsprechend eine Abbildung φ, die jedem gewichteten CS-Spiel $(N, v, \mathcal{P}, w)$ einen Auszahlungsvektor $\varphi(N, v, \mathcal{P}, w) \in \mathbb{R}^N$ zuordnet.
Für die neue Struktur wird nun erneut eine Axiomatisierung angeführt. Die Axiome der Additivität, Komponenteneffizenz und Nullspieler in der Großen Koalition werden wie vorher definiert. Nur werden die Argumente der Lösungswerte φ um den zusätzlichen Gewichtsvektor erweitert.

Axiom 7 (Symmetrie in der Großen Koalition, GS)
Es sei das Gewicht w gegeben. Falls $i, j \in N$ symmetrisch in (N, v) sind, dann gilt:

$$\varphi_i(N, v, \{N\}, w) = \varphi_j(N, v, \{N\}, w). \tag{2.81}$$

Axiom 8 (Gewichtetes Aufspalten, WS)
Falls $j \in \mathcal{P}'(i),\ i \in N$ und $\mathcal{P}'$ feiner ist als $\mathcal{P}$, dann gilt:

$$\frac{\varphi_i(N, v, \mathcal{P}, w) - \varphi_i(N, v, \mathcal{P}', w)}{w_i} = \frac{\varphi_j(N, v, \mathcal{P}, w) - \varphi_j(N, v, \mathcal{P}', w)}{w_j}. \tag{2.82}$$

Nun verlieren bzw. gewinnen Spieler entsprechend ihrem Gewicht, falls sich die alte Partition auflöst.

Theorem 2.26 (Charakterisierung des gewichteten χ-Wertes)
Es gibt einen eindeutig bestimmten gewichteten CS-Wert, der den folgenden Eigenschaften genügt

- *Additivität, A*
- *Komponenteneffizienz, CE*
- *Symmetrie in der Großen Koalition, GS*
- *Nullspieler in Großer Koalition, GN*
- *Gewichtetes Aufspalten, WS.*

Dieser Wert wird als gewichteter χ-Wert bezeichnet und ist definiert durch

$$\chi_i^w(N, v, \mathcal{P}, w) = Sh_i(N, v) + \frac{w_i}{w_{\mathcal{P}(i)}} \left(v(\mathcal{P}(i)) - Sh_{\mathcal{P}(i)}(N, v)\right). \tag{2.83}$$

Beweis. χ^w erbt die Additivität von der Shapley-Lösung und nach Konstruktion ist die Komponenteneffizienz erfüllt. Für $\mathcal{P} = \{N\}$ ist $\chi^w(N, v, \mathcal{P}, w) = Sh(N, v)$ und damit erfüllt χ^w auch GS und GN.
Nach Definition von χ^w gilt dann für alle $j \in \mathcal{P}'(i),\ i \in N$ und $\mathcal{P}'$ feiner als $\mathcal{P}$:

$$\chi_j^w(N, v, \mathcal{P}, w) - \chi_j^w(N, v, \mathcal{P}', w) = \frac{w_j}{w_{\mathcal{P}(j)}} \left(v(\mathcal{P}(j)) - Sh_{\mathcal{P}(j)}\right) - \frac{w_j}{w_{\mathcal{P}'(j)}} \left(v(\mathcal{P}'(j)) - Sh_{\mathcal{P}'(j)}\right). \tag{2.84}$$

Und damit ist der Term

$$\frac{\chi_j^w(N, v, \mathcal{P}, w) - \chi_j^w(N, v, \mathcal{P}', w)}{w_j} \tag{2.85}$$

für alle $j \in \mathcal{P}(i)$ unabhängig von j. Damit gilt WS.

Um Eindeutigkeit zu zeigen, wähle man einen gewichteten CS-Wert φ, der die obigen Axiome erfüllt. Nach Theorem 2.15 folgt aus GS, GN, A und CE:

$$\varphi(N, v, \{N\}, w) = Sh(N, v). \tag{2.86}$$

Da jede Partition feiner als die große Koalition ist, gilt nach WS

$$w_j\left[\varphi_i(N,v,\mathcal{P},w) - Sh_i(N,v\{N\})\right] = w_i\left[\varphi_j(N,v,\mathcal{P},w) - Sh_j(N,v\{N\})\right] \tag{2.87}$$

für alle $i \in N$ und $j \in \mathcal{P}(i)$.
Durch Aufaddieren über all diese $j \in \mathcal{P}(i)$ und Ausnutzen der Komponenteneffizienz gelangt man schließlich zu:

$$\varphi_i(N,v,\mathcal{P},w) = Sh_i(N,v) + \frac{w_i}{w_{\mathcal{P}(i)}}(v(\mathcal{P}(i)) - Sh_{\mathcal{P}(i)}). \tag{2.88}$$

Damit ist der χ^w-Wert der einzige Lösungswert für gewichtete CS-Spiele, der den Axiomen genügt.

□

2.7 Grundlagen der Nichtkooperativen Spieltheorie

Mit dieser Konstruktion des χ-Wertes stellt sich nun die Frage, inwieweit dieser auch praktikabel ist. Eine Frage dabei ist auch, ob der Wert bei bestimmten Verhandlungsstrategien als Auszahlung eines Gleichgewichtes in einem nichtkooperativen Spiel auftreten kann. Dieser Prozess der Konstruktion eines zu einem kooperativen Spiel $(N,v,\mathcal{P},w)$ gehörenden nichtkooperativen Spiels wird als Implementierung bezeichnet. Dabei kann das konstruierte Spiel als ein vorher von den Spielern festgelegtes Verhandlungsprotokoll betrachtet werden, welches spezifische gleichgewichtige Auszahlungen generiert. Werden die Abstimmungs- bzw. Verhandlungsregeln anschließend verändert, führt dies zu anderen gleichgewichtigen Auszahlungen.
Zunächst werden einige grundlegende Definitionen der nichtkooperativen Spieltheorie angeführt, die zur Konstruktion der Implementierung notwendig sind.

Bemerkung
Der Gleichwichtsbegriff ist von vornherein nicht explizit festgelegt.
Mögliche Gleichgewichte sind Gleichgewichte in dominanten Strategien, Nashgleichgewichte und teilspielperfekte Gleichgewichte.

Die folgenden Definitionen sind an Osbourne/Rubinstein, 2001: [4], S. 89 ff orientiert.

Definition 2.27 (Nichtkooperative Spiele in extensiver Form)
Ein nichtkooperatives Spiel in extensiver Form mit simultanen Zügen, perfekter Information, Zügen der Natur und endlicher Länge ist ein Tupel

$$\Gamma = (N, H, \iota, (\succeq_i)_{i\in N}, (f_j)_{j\in\iota^{-1}(\emptyset)}). \tag{2.89}$$

- *N ist die Menge der Spieler.*
- *H ist eine Menge von endlichen Folgen von Vektoren aus Aktionen. Elemente der Menge H werden auch Pfade genannt und erfüllen:*
  - *$\emptyset \in H$.*
  - *Falls $(a_1,\dots,a_n) \in H, n \in \mathbb{N}$, dann ist auch $(a_1,\dots,a_m) \in H$ für alle $m \in \mathbb{N}$, $m < n$.*

Ein Pfad $h = (a_1, \dots, a_K) \in H$ heißt terminal, falls

$$\{a|(h,a) \in H\} = \emptyset. \tag{2.90}$$

Die Menge all dieser terminalen Pfade sei H_{term}.

- $$\iota : H \setminus H_{term} \to \mathbb{P}(N) \tag{2.91}$$

  ist eine Funktion, die jedem Pfad eine Menge von Spieler zuordnet, die am Ende dessen, an der Reihe zu entscheiden sind.
  Mit
  $$A(h) = \{a|(h,a) \in H\} \tag{2.92}$$
  bezeichne man die möglichen Aktionen der Spieler aus $\iota(h)$.
  Es gilt:

  $$A(h) = \times_{i \in \iota(h)} A_i(h) \tag{2.93}$$
  $$A_i(h) = \{a_i | \text{ für alle } j \in \iota(h) \setminus \{i\} \ \exists a_j : (h, (a_k)_{k \in \iota(h)}) \in H\}. \tag{2.94}$$

  Letzeres beschreibt die möglichen Aktionen der einzelnen Spieler.

- $$(\succeq_i)_{i \in N} \tag{2.95}$$

  stellt für jeden Spieler $i \in N$ eine Präferenzrelation von Lotterien auf Pfaden dar.
  Dabei beschreibt eine Lotterie gerade ein Tupel

  $$\begin{aligned} (p_1, \dots, p_k; h_1, \dots, h_k), \\ k \in N, h_i \in H_{term}, \\ \sum_{i=1}^{k} p_i = 1, \end{aligned} \tag{2.96}$$

  bei dem p_i die Wahrscheinlichkeit beschreibt, dass der Pfad h_i erreicht wird.

- $(f_i)_{i \in \iota^{-1}(\emptyset)}$ *ist eine Familie von unabhängigen Wahrscheinlichkeitsmaßen, die jedem Pfad $h \in H \setminus H_{term}$ mit $\iota(h) = \emptyset$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $A(h)$ zuordnet. Die Wahrscheinlichkeit wird mit $f(a|h), a \in A(h)$ beschrieben. Dies kann damit interpretiert werden, dass nach diesen Pfaden der Zufall die nächste Aktion auswählt.*

Definition 2.28 (Strategie eines Spielers)
Eine Strategie für einen Spieler $i \in N$ ist eine Funktion, die jedem Pfad h für den $i \in \iota(h)$ eine Aktion aus $A_i(h)$ zuordnet.
Die Menge aller solcher Strategien werde mit $\mathcal{S}_i$ bezeichnet.

Um teilspielperfekte Gleichgewichte untersuchen zu können, bedarf es zunächst einiger Vorbereitungen.

Definition 2.29 (Teilspiel)
Es sei $\Gamma = (N, H, \iota, (\succeq_i)_{i\in N}, (f_i)_{i\in\iota^{-1}(\emptyset)}$ *ein extensives Spiel und durch* $w \in H$ *ein zulässiger Pfad gegeben.*
Das nach dem Pfad w *beginnende Teilspiel* $\Gamma(w)$ *ist gegeben durch*

$$\Gamma = (N, H|_w, \iota|_w, (\succeq_i |_w)_{i\in N}, (f|_i^w)_{i\in\iota|_w^{-1}(\emptyset)}, \text{ bei dem} \tag{2.97}$$

- $H|_w := \{h' \in H | (w, h') \in H\}$,
- $\iota|_w(h') = \iota((w, h'))$,
- $h' \succeq_i |_w h \Leftrightarrow (w, h') \succeq_i (w, h)$ *und*
- $(f|_i^w)_{i\in\iota|_w^{-1}(\emptyset)}$ *ist eine Familie von unabhängigen Wahrscheinlichkeitsmaßen für alle Pfade aus* $\iota|_w^{-1}(\emptyset)$.

Definition 2.30 (Teilstrategie)
Eine Teilstrategie s^w *einer Strategie* s *für Spieler* i *ist gegeben durch:*

$$s_i^w(h) = s_i(w, h) \text{ für alle } h \in H|_w,\ i \in \iota|_w(h). \tag{2.98}$$

Definition 2.31 (Induzierte Lotterie)
Ein durch die Strategien $s = (s_1, \ldots, s_n)$ *induzierte Lotterie* $O(s)$ *wird folgendermaßen induktiv bestimmt:*

$$O(s) = ((p_k)_{k\in I}; (h_k)_{k\in I}). \tag{2.99}$$

Man starte mit

$$I = \{1\}, \tag{2.100}$$
$$p_1 = 1, \tag{2.101}$$
$$h_1 = \emptyset. \tag{2.102}$$

Es sei $I = \{1, \ldots, k\}$.
Solange ein $h_i, i \in I$ *existiert mit* $h_i \notin H_{term}$ *setze wiederholt:*

1 *Bestimme* $i := \arg\min_{j\in I}\{h_j | h_j \notin H_{term}\}$.

a) $\iota(h_i) = \emptyset$.
Es ist $A(h_i) = \{a_1, \ldots, a_l\}$. *Dann definiere man eine neue Lotterie folgendermaßen:*

$$I = \{1, \ldots, k + l - 1\}, \tag{2.103}$$
$$h_j := h_j \text{für alle } j < i,$$
$$p_j := p_j \text{ für alle } j < i,$$
$$h_j := h_{j-l+1} \text{ für alle } j \geq i + l, \tag{2.104}$$
$$p_j := P_{j-l+1} \text{ für alle } j \geq i + l,$$
$$h_j := (h_i, a_{j-i+1}) \text{ für alle } i \leq j < i + l,$$
$$p_j := p_i \cdot f(a_{j-i+1}|h_i) \text{ für alle } i \leq j < i + l. \tag{2.105}$$

b) $\iota(h_i) \neq \emptyset$

Mit den gewählten Aktionen $a_j := s_j(h_i)$ *für alle* $j \in \iota(h_i)$ *setz man*

$$h_i := (h_i, (a_j)_{j\in\iota(h_i)}) \tag{2.106}$$

und übernehme die sonstigen Einträge der vorherigen Lotterie.

Der Algorithmus berechnet bei Zügen der Natur die Lotterie der möglichen Nachfolger und bei „normalen Zügen“ die jeweiligen Pfade, die sich durch die Strategien der einzelnen Spieler ergeben. Mit dieser Zuordnung von Strategien und Lotterien kann man nun Gleichgewichtsbegriffe einführen, die die optimalen Strategienkombinationen herausfiltern. Der bekannteste Gleichgewichtsbegriff ist der des Nashgleichgewichtes.

Definition 2.32 (Nashgleichgewicht)
Es sei Γ *ein nichtkooperatives Spiel. Es bezeichne* $\mathcal{S}_i$ *die Menge aller möglichen Strategien für Spieler* i*. Eine Strategienkombination* $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ *heißt Nashgleichgewicht, falls gilt*

$$O(s_i^*, (s_j^*)_{j\in N\setminus\{i\}}) \succeq_i O(s_i, (s_j^*)_{j\in N\setminus\{i\}}) \text{ für alle } i \in N, s_i \in \mathcal{S}_i. \tag{2.107}$$

Eine Strategienkombination ist demzufolge ein Nashgleichgewicht, falls es sich für keinen Spieler lohnt, einseitig abzuweichen.
Hierbei treten häufig ungewollte Gleichgewichte auf, bei denen Spieler dominierte Strategien auswählen. Zunächst definiere man eine dominante Strategie.

Definition 2.33 (Schwach dominante Strategien)
Es sei Γ *ein nichtkooperatives Spiel.* $O(s^*)$ *bezeichne die durch die Strategien* $(s_i^*)_{i\in N}$ *induzierte Lotterie.*
Eine Strategie s_i^* *heißt schwach dominant, falls*

$$O(s_i^*, (s_j)_{j\in N\setminus\{i\}}) \succeq_i O(s_i, (s_j)_{j\in N\setminus\{i\}}) \text{ für alle } s_i \in \mathcal{S}_i \setminus \{s_i^*\}, \tag{2.108}$$

$$O(s_i^*, (s_j)_{j\in N\setminus\{i\}}) \succ_i O(s_i, (s_j)_{j\in N\setminus\{i\}}) \text{ für alle } s_i \in \mathcal{S}_i \setminus \{s_i^*\} \text{ für mindestens ein } s_i \in \mathcal{S}_i \setminus \{s_i^*\}. \tag{2.109}$$

Ein weiteres Gleichgewichtskonzept ist dann ein Gleichgewicht in dominanten Strategien, welches wie folgt gegeben ist.

Definition 2.34 (Gleichgewicht in schwach dominanten Strategien)
Eine Strategienkombination $(s_i^*)_{i\in N}$ *heißt Gleichgewicht in schwach dominanten Strategien, falls jede Strategie* s_i^* *eine schwach dominante Strategie für Spieler* $i \in N$ *ist.*

Eine durch eine dominante Strategienkombination induzierte Lotterie wird demzufolge jeder anderen durch eine Strategie induzierten Lotterie vorgezogen und es gibt zumindest eine Lotterie, für die die schwach dominante Lotterie echt vorgezogen wird.
Wie bereits erwähnt, können bei Nashgleichgewichten ungewollte Strategiekombinationen auftreten. Diese können unter anderem wie folgt gekennzeichnet werden.

Definition 2.35 (Schwach dominierte Strategie)
Es sei Γ ein nichtkooperatives Spiel.
Eine Strategie s_i^* heißt schwach dominiert, falls eine andere Strategie $\widehat{s}_i$ für Spieler i existiert, sodass

$$O(s_i^*, (s_j)_{j \in N \setminus \{i\}}) \succeq_i O(s_i, (s_j)_{j \in N \setminus \{i\}}) \text{ für alle } (s_j)_{\in j \in N \setminus \{i\}} \in (\mathcal{S}_j)_{j \in N \setminus \{i\}}, \quad (2.110)$$

$$O(s_i^*, (s_j)_{j \in N \setminus \{i\}}) \succ_i O(s_i, (s_j)_{j \in N \setminus \{i\}}) \text{ für mindestens ein } (s_j)_{\in j \in N \setminus \{i\}} \in (\mathcal{S}_j)_{j \in N \setminus \{i\}}. \quad (2.111)$$

Definition 2.36 (Teilspielperfektes Gleichgewicht)
Eine Strategienkombination s heißt teilspielperfekt oder teilspielperfektes Gleichgewicht, wenn s^w ein Nashgleichgewicht in jedem Teilspiel Γ^w ist.

Da jedes Spiel Γ ein Teilspiel von sich selbst ist, ist jedes teilspielperfekte Gleichgewicht auch ein Nashgleichgewicht. In teilspielperfekten Gleichgewicht wird nun das oben beschriebene Phänomen verhindert.
Um teilspielperfekte Gleichgewichte erkennen zu können, erweist sich der folgende Satz als nützlich.

Theorem 2.37
Sei $\Gamma = (N, H, \iota, (\succeq_i)_{i \in N}, (f))$ ein extensives Spiel mit endlicher Länge.
Eine Strategienkombination s^* ist teilspielperfekt in Γ, genau dann wenn für alle $i \in N$ und jeden Pfad $h \in H$ mit $i \in \iota(h)$ gilt:

$$O_h(s_i^*, (s_j^*)_{j \in N \setminus \{i\}}) \geq O_h(s_i, (s_j^*)_{j \in N \setminus \{i\}}), \quad (2.112)$$

für jede Strategie s_i von Spieler i, die sich im Teilspiel Γ^h von $s_i^*|_h$ nur in der ersten Aktion unterscheidet.

Beweis. Falls s^* ein teilspielperfektes Gleichgewicht ist, dann kann ein Spieler durch jegliches Abweichen in einem Teilspiel keine Verbesserung seiner Endauszahlung erreichen. Folglich erfüllt die Strategienkombination insbesondere die Bedingung aus dem Theorem.
Man nehme an s^* wäre kein teilspielperfektes Gleichgewicht und es erfülle die Bedingung.
Es sei s_i in $\Gamma(h')$ eine profitabel abweichende Strategie für Spieler i bei der

$$s_i(h) \neq s_i^*|_{h'}(h) \quad (2.113)$$

für eine Menge von Pfaden.
Da Γ eine endliche Länge besitzt, gilt dies auch für das Teilspiel $\Gamma(h')$.
Unter all diesen profitabel abweichenden Strategien von Spieler i in $\Gamma(h')$ wähle man eine Strategie s_i, für welche die Anzahl der Pfade h, sodass

$$s_i(h) \neq (s_i^*|_{h'})(h) \quad (2.114)$$

minimal ist.
Es sei h^* der längste Pfad, sodass $s_i(h) \neq (s_i^*|_{h'})(h)$ gilt. Da s^* die Bedingung aus den Theorem erfüllt, ist

$$O(s_i^*|_{h',h^*}, (s_j)_{j \in N \setminus \{i\}}) \succeq_i O(s_i|_{h',h^*}, (s_j)_{j \in N \setminus \{i\}}). \quad (2.115)$$

Allerdings widerspricht dies der Wahl von h^*, nach der

$$s_i(h) = s_i^*|_{h'}(h) \text{ für alle } h \in \Gamma(h', h^*) \tag{2.116}$$

□

Darüber hinaus entwickelt das Theorem die Idee für die Bestimmung eines teilspielperfekten Gleichgewichtes. Man betrachte dabei die minimalen Teilspiele in Γ und bestimme die Entscheidungen für die zu entscheidenden Spieler, falls diese existieren. Danach betrachtet man die minimalen Teilspiele ohne die bereits betrachteten und wählt wiederum die besten Aktionen für die zu ziehenden Spieler, vorausgesetzt die Spieler nutzen im weiteren Verlauf eine vorher bestimmte beste Aktion in den minimalen Teilspielen. Dies Vorgehen wird nun solange wiederholt, bis kein minimales Teilspiel existiert, in dem nur Spieler aus N ziehen. Damit können teilspielperfekte Gleichgewichte bestimmt werden, wobei aufgrund der Maximierungsbedingung die Existenz nicht gesichert sein muss. Das Vorgehen an sich wird als Rückwärtsinduktion bezeichnet.

3 Die Konstruktion

Eine bekannte Implementierung der Shapley-Lösung für einfach monotone Koalitionsfunktionen[5] wird in der Arbeit von Pérez-Castrillo und Wettstein, 2001: [5] untersucht. Verallgemeinert auf alle kooperativen Spiele wurde dann das folgende Mehrstufenspiel von Kongo, Funaki und Tijs: 2007 konstruiert.

3.1 Modell von Kongo/Funaki/Tijs

Es sei ein kooperatives Spiel (N, v) gegeben. Ein dazu äquivalentes nichtkooperatives Spiel $\Gamma(N, v)$ ist wie folgt rekursiv definiert.
Falls $|N| = 1$, dann erhält Spieler $i \in N$ den Betrag $v(i)$ und das Spiel endet.
Man nehme an, dass nichtkooperative Spiel wäre für weniger als n Spieler bekannt. Für n Spieler definiert man:

- **t=1**
  Jeder Spieler $i \in N$ entscheidet über ein Tupel $(b_j^i)_{j \in N, i \neq j}$

  $$b_j^i \in \mathbb{R} \text{ für jedes } j \neq i. \tag{3.1}$$

  Dabei bezeichnet b_j^i ein mögliches Gebot von Spieler i an Spieler j.
  Für jedes $i \in N$ wird das Nettogebot B^i als Summe der eigenen Gebote abzüglich der Summe der erhaltenen Gebote berechnet, sodass

  $$B^i = \sum_{j \neq i} b_j^i - \sum_{j \neq i} b_i^j. \tag{3.2}$$

[5]Eine Koalitionsfunktion heißt einfach monoton, wenn für alle Koalitionen S und alle Spieler $i \notin S$ gilt: $v(S) + v(\{i\}) \leq v(S \cup \{i\})$.

Es sei dann

$$\alpha \in \arg\max_{i \in N} B^i, \tag{3.3}$$

wobei bei mehreren Maximierern ein Spieler per Zufall bestimmt wird. Dieser Verteiler α zahlt anschließend seine Gebote b_j^α an jeden Spieler $j \neq \alpha$.

- **t=2** Der Verteiler α bietet jedem Spieler $j \in N \setminus \{\alpha\}$ einen gewissen Betrag $x_j^\alpha \in \mathbb{R}$ an.
- **t=3** Spieler in $N \setminus \{\alpha\}$ entscheiden über das Angebot gleichzeitig[6]. Antworten sind entweder das jeweilige Angebot des Verteilers zu akzeptieren oder es abzulehnen.
  Es sei $(j_1, \dots, j_{|N|})$ eine beliebige Reihenfolge. Falls Spieler j_i das Angebot akzeptiert, entscheidet danach Spieler j_{i+1} über den ihm angebotenen Betrag.
  Falls alle Spieler akzeptieren, dann endet das Spiel in einer Einigung der Spieler. Falls ein Spieler ablehnt, wird keine Einigung erzielt.
  Wenn eine Einigung erreicht wird, zahlt der Verteiler α die angekündigten Gebote x_j^α für jeden Spieler $j \in N \setminus \{\alpha\}$ und er erhält im Gegenzug den Wert der Großen Koalition $v(N)$. Somit ergeben sich Auszahlungen für die antwortenden Spieler j von

$$b_j^\alpha + x_j^\alpha \tag{3.4}$$

  und für den Verteiler α ergibt sich eine Auszahlung von

$$v(N) - \sum_{j \neq \alpha} b_j^\alpha - \sum_{j \neq \alpha} x_j^\alpha. \tag{3.5}$$

  Damit endet dann das Spiel.
  Falls andererseits keine Einigung erzielt werden kann, so wird der Verteiler α aus dem Spiel entfernt. Er erhält eine Auszahlung von $v(\alpha)$ und die verbleibenden Spieler führen die Verhandlungen in $\Gamma(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha)$ weiter.

3.2 Die Konstruktion

Eine Idee zur Implementierung des (gewichteten) χ-Wert ist es nun, dieses mehrstufige Spiel so zu erweitern, dass sich mittels einiger weiterer Stufen Komponenteneffizienz für alle Partitionen ergibt und die Überschüsse/Abgaben nach den Gewichten aufgeteilt werden.
Zunächst betrachte man die beiden Fälle, welchen Ausgleich man von der Shapley-Lösung zum (gewichteten) χ-Wert berücksichtigen muss. **Fall 1:**

$$v(\mathcal{P}(i)) > \sum_{j \in \mathcal{P}(i)} Sh_j(N, v). \tag{3.6}$$

Die Verhandlungen auf den ersten drei Stufen führen zu einer geringeren Auszahlung für die gesamte Komponente $\mathcal{P}(i)$. Bei Auflösen der Kooperation mit allen weiteren Komponenten und stattdessen der Produktion innerhalb der eigenen Komponente $\mathcal{P}(i)$ wäre es für sie möglich einen

[6] Eine gleichzeitige Entscheidung kann äquivalent als aufeinanderfolgende Entscheidung unter unvollständiger Information modelliert werden

höheren Wert zu generieren.
Entsprechend muss im zu konstruierenden Spiel ein Ausgleich für die Spieler aus $\mathcal{P}(i)$ stattfinden.
Dieser kann entweder intern von den anderen Komponenten oder extern begründet sein.
Der erste Fall ist aber nicht möglich wie folgendes Spiel zeigt:

$$N = \{1, 2, 3\} \tag{3.7}$$

$$v(K) = \begin{cases} -1/2 & K = \{3\} \\ 1 & K \in \{\{1\}, \{2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} \\ 2 & K = \{1,2\} \end{cases} \tag{3.8}$$

Die Werte der Shapley-Lösung betragen

$$\begin{aligned} &Sh_1(N,v) = Sh_2(N,v) = 3/4, \\ &Sh_3(N,v) = -1/2. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Somit gilt

$$v(\mathcal{P}(1)) > Sh_1(N,v) + Sh_2(N,v). \tag{3.10}$$

Allerdings kann der Ausgleich für diese Komponente nicht von Spieler 3 ausgehen, denn es gilt

$$Sh_3(N,v) = -1/2 = v(\mathcal{P}(3)). \tag{3.11}$$

Damit ist diese Komponente bereits ausgeglichen.
Somit muss der Ausgleich für die Komponenten extern organisiert werden.
Fall 2:

$$v(\mathcal{P}(i)) \leq \sum_{j \in \mathcal{P}(i)} Sh_j(N,v). \tag{3.12}$$

Dieser Fall bedeutet, dass die Spieler aus $\mathcal{P}(i)$ produktiver in der Großen Koalition sind. Dementsprechend muss im zu konstruierenden Spiel eine Gebühr abverlangt werden, sodass die Summe der Auszahlungswerte insgesamt nur dem Wert der Komponente entspricht. Die Idee ist es nun diesen Ausgleich von einem Makler ausführen zu lassen. Dieser fordert entsprechend der Differenz zwischen der Summe der Auszahlungen aus den ersten drei Stufen und dem Wert der Komponente eine Gebühr oder bietet eine Subvention, die jeweils anhand der Gewichte auf die einzelnen Spieler aufgeteilt wird. Der Makler ist bestrebt die Kooperation aller Komponenten durchzuführen.
Für den Fall, dass der Makler eine zu hohe Gebühr/zu geringe Subvention zahlt, muss es den Spielern möglich sein, diese Gebote abzulehnen. Falls dies eintritt, so wird die Kooperation gemäß der großen Koalition ausgelöst, d.h. die Auszahlungen aus den ersten drei Stufen verschwinden. Stattdessen werden die Auszahlungen der jeweiligen Komponenten aufgeteilt, wobei mittels den ersten drei Stufen produktivere Spieler höhere Auszahlungen erhalten.
Für den Abstimmungsmechanimus innerhalb der Komponenten bestehen nun zwei Möglichkeiten. Einerseits kann ein Repräsentant für die Komponente bestimmt werden, der für die gesamte Komponente entscheidet. Andererseits kann jeder Spieler für sich selbst entscheiden, ob er den Anteil an der Gebühr/Subvention tragen will.

In dieser Implementierung wurde die zweite Möglichkeit ausgewählt, da der erste Fall eine weitere Stufe im Spiel zur Folge haben würden.
Falls keine Kooperation in der Großen Koalition vereinbart werden kann, müssen alternative Auszahlungen generiert werden. Durch den Abstimmungsprozess ist jedem Spieler ein Veto gegeben. Entsprechend dürfen die Auszahlungen bei Ablehnen der Kooperation mit Gebühren von $v(\mathcal{P}(i)) - Sh_{\mathcal{P}(i)}(N,v)$ nicht höher sein, als würden die Spieler die Gebühr akzeptieren.
Orientiert man sich am gewichteten χ-Wert, so gelangt man mittels einiger Umformungen zu folgender Beschreibung:

$$
\begin{aligned}
\chi_i^w(N,v,\mathcal{P},w) &= Sh_i(N,v) + \frac{w_i}{w_{\mathcal{P}(i)}}(v(\mathcal{P}(i)) - Sh_{\mathcal{P}(i)}(N,v)) && (3.13)\\
&= \sum_{j\in\mathcal{P}(i)} \frac{w_j}{w_{\mathcal{P}(i)}} Sh_i(N,v) + \frac{w_i}{w_{\mathcal{P}(i)}}(v(\mathcal{P}(i)) - Sh_{\mathcal{P}(i)}(N,v)) && (3.14)\\
&= \sum_{j\in\mathcal{P}(i)} \frac{w_j}{w_{\mathcal{P}(i)}} Sh_i(N,v) - \sum_{j\in\mathcal{P}(i)} \frac{w_i}{w_{\mathcal{P}(i)}} Sh_j(N,v) + \frac{w_i}{w_{\mathcal{P}(i)}} v(S) && (3.15)\\
&= \frac{w_i}{w_{\mathcal{P}(i)}} v(S) + \sum_{j\in\mathcal{P}(i)} \big[\frac{w_j}{w_{\mathcal{P}(i)}} Sh_i(N,v) - \frac{w_i}{w_{\mathcal{P}(i)}} Sh_j(N,v)\big]. && (3.16)
\end{aligned}
$$

Folglich lässt sich die Aufteilung gemäß der χ-Lösung wie folgt interpretieren. Jeder Spieler erhält zunächst den Anteil gemäß seinem Gewicht am Wert der eigenen Komponente und anschließend zahlt jeder Spieler i einen Ausgleich an Spieler j, der gerade

$$\frac{w_i}{w_{\mathcal{P}(i)}} Sh_j(N,v) \tag{3.17}$$

entspricht.
Folglich zahlen die Spieler mit höherer Macht entsprechend auch höhere Ausgleiche. Zusammengefasst wird bei Ablehnen der Gebühr und damit Ablehnen der Kooperation der Komponenten, zunächst jedem Spieler $i \in N$ seinen Anteil am Wert der Komponente zugeordnet, bevor die Ausgleiche

$$\frac{w_i}{w_{\mathcal{P}(i)}} p_j \tag{3.18}$$

für jeden Spieler $j \in \mathcal{P}(i)$ zu zahlen sind. Dabei sind p_j gerade die Auszahlungen, die sich aus den ersten drei Stufen ergeben.
Nun muss noch festgelegt werden, welche Auszahlungen für den Makler generiert werden. Die gewünschte Gebühr an Komponente S soll $Sh_S(N,v) - v(S)$ für alle $S \in \mathcal{P}$ betragen. Entsprechend ergibt sich zunächst als Auszahlung für den Makler bei Kooperation der Komponenten

$$
\begin{aligned}
x_M &= \sum_{S\in\mathcal{P}} \big(Sh_S(N,v) - v(S)\big) && (3.19)\\
&= v(N) - \sum_{S\in\mathcal{P}} v(S). && (3.20)
\end{aligned}
$$

Da nun aber keine Subadditivität[7] vorausgesetzt wird, kann diese Auszahlung auch echt negativ sein. Entsprechend fordert der Makler insgesamt keine Gebühr, sondern muss insgesamt eine Sub-

[7]Eine Koalitionsfunktion heißt superadditiv, falls für alle Koalitionen S und T mit $S \cap T = \emptyset$ gilt: $v(S) + v(T) \leq V(S \cup T)$.

vention zahlen, damit die Spieler die Große Koalition bilden. Allerdings wurde der Makler mit dem Bestreben eingeführt, die Kooperation zu preferieren. Es muss demnach noch der Einfluss auf die Entscheidungsfindung als "Auszahlung" für den Makler modelliert werden. Dies wird durch Addition einer Konstanten C

$$x'_M = v(N) - \sum_{S \in \mathcal{P}} v(S) + C \tag{3.21}$$

erreicht.
Für die Wahl von C betrachtet man nun die gegenteilige Entscheidung der Spieler über die Kooperation. Falls die Gebühren abgelehnt werden, so findet die Kooperation der Komponenten nicht statt. Entsprechend erhält der Makler auch keinerlei Gebühren, sodass sich für ihn eine Auszahlung von Null ergibt. Für die Wahl des "Einflusses" C vergleicht man nun die beiden Auszahlungen. Da die Restriktion $v(N) \geq 0$ für die Kooperation gelten sollte, anderenfalls wäre die Große Koalition unproduktiver als die leere Koalition, würde man mit

$$C = \sum_{S \in \mathcal{P}} v(S) \tag{3.22}$$

stets für eine nichtnegative Auszahlung für den Makler bei Akzeptanz der Gebühren sorgen können. Folglich würde er diese Situation stets bevorzugen.
Nun reduziert sich das Problem des Spiels darauf, ob die Anreize für die Spieler auf der ersten Stufe so verbleiben, dass sich die Shapley-Auszahlungen ergeben. Im Drei-Stufen-Modell von Kongo/Funaki/Tijs gab es nur den Anreiz, die eigene Auszahlung zu maximieren. Folglich wurden die Gebote auf Stufe 1 so klein wie möglich gehalten. Jede positive Zahlung an einen beliebigen Spieler verringert die eigene Auszahlung.
Im jetzt konstruierten Fünf-Stufen-Modell besitzt ein Spieler nun zwei verschiedene Anreize. Zum einen verringert sich erneut die eigene Auszahlung, je größer die Angebote an die anderen Spieler sind. Allerdings vergrößert sich die Auszahlung auch, falls ein Spieler besonders geringe Gebote an die Mitspieler aus der eigenen Komponente tätigt. Die Aufgabe wird es sein, diese beiden Anreize im Ausgleich zu halten und es wird sich zeigen, dass dies nur im ungewichteten χ-Wert in diesem Setting möglich ist. Für überdurchschnittlich hohe Gewichte wird es möglich sein, eine unendlich hohe Auszahlung zu erzielen.
Zusammengefasst nun das konstruierte Spiel aus den bisherigen Überlegungen:

Theorem 3.1 (Implementierung)
Gegeben ein Kooperatives Spiel $(N, v, \mathcal{P})$.
Dann ist ein zugehöriges nichtkooperatives Spiel wie folgt gegeben.
Stufe 1:
Falls $|N| = 1$ erhält der Spieler den Wert $v(i)$.

Falls $|N| > 1$:
Jeder Spieler $i \in N$ bietet $b^i_j \in \mathbb{R}$ für jeden Spieler $j \neq i$. Für jedes $i \in N$ wird das Nettogebot B^i als Summe der getätigten Angebote abzüglich der erhaltenen Gebote bestimmt, d.h.

$$B^i = \sum_{j \neq i} (b^i_j - b^j_i). \tag{3.23}$$

Nun sei $\alpha \in \arg\max B^i$ per Zufall aus dieser Menge B^i bestimmt. Dieser Verteiler α zahlt b_j^α an jeden Spieler $j \neq \alpha$.

Stufe 2:
Der Verteiler α bietet jedem anderen Spieler $j \in N \setminus \{\alpha\}$ den Betrag x_j^α.

Stufe 3:
Spieler in $N \setminus \{\alpha\}$ antworten gleichzeitig auf das Angebot des Verteilers α.
Es bezeichne $(j_1, \ldots, j_{|N|})$ eine beliebige Reihenhfolge der Spieler aus N. Spieler können entweder das jeweilige Angebot des Verteilers α akzeptieren oder es ablehnen. Falls Spieler j_k das Angebot akzeptiert, so entscheidet der nachfolgende Spieler j_{k+1}.

Falls alle Spieler akzeptieren, dann zahlt der Verteiler α den Spielern aus $N \setminus \{\alpha\}$ das jeweilige Gebot x_j^α und der Verteiler erhält den Wert $v(N)$.
Falls ein Spieler ablehnt, erhält der Verteiler den Wert $v(\alpha)$ und die Spieler aus $N \setminus \{\alpha\}$ führen die Verhandlungen in $\Gamma(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha)$ weiter.

Stufe 4:
Seien M ein Makler[8] und p_j, $j \in N$ die Auszahlungen der Spieler aus den ersten drei Stufen. M fordert eine Abgabe y_S^M von jeder Komponente $S \in \mathcal{P}$. Die Kosten werden entsprechend den Gewichten der einzelnen Spieler verteilt. Die Komponenten antworten gleichzeitig auf diese Forderung.

Stufe 5:
Die Komponenten S, $S \in \mathcal{P}$ antworten gleichzeitig auf die Forderung der Gebühren. Es sei $(k_1, \ldots, k_{|N|})$ eine beliebige Reihenfolge der Spieler aus N. Falls Spieler k_j den Anteil der Gebühr seiner Komponente trägt, so entscheidet der nachfolgende Spieler k_{j+1}. Falls ein Spieler seinen Beitrag zu der Abgabe ablehnt, führt dies nicht zur Kooperation der Komponenten. Jeder Spieler i aus N verliert seinen Nutzen aus den vorherigen Kooperationsverhandlungen. Er erhält

$$\frac{w_i}{w_{\mathcal{P}(i)}} v(\mathcal{P}(i)) \tag{3.24}$$

als Anteil am alleinigen Ergebnis seiner Komponente und zahlt eine Umverteilung von

$$\frac{w_j}{w_{\mathcal{P}(i)}} p_i \tag{3.25}$$

an die entsprechenden Mitspieler j aus seiner Komponente $\mathcal{P}(i)$.
Falls alle Spieler und alle Komponenten die Gebühren akzeptieren, so zahlt jeder Spieler i seinen Anteil an der Gebühr von

$$\frac{w_i}{w_{\mathcal{P}(i)}} y^M_{\mathcal{P}(i)} \tag{3.26}$$

[8]Der Makler ermöglicht es, dass die Komponenten die große Koalition bilden können.

seiner Komponente.
Für den Fall, dass jede Komponente die Gebühr zahlt, erhält der Makler M die Gebühr der Spieler und einen Bonus, der der Summe der Kooperationswerte der Komponenten aus $\mathcal{P}$ entspricht[9]*. Für den Fall, dass ein Spieler einer Komponente die Gebühr nicht zahlt, beträgt die Auszahlung für den Makler Null.*

Bemerkung
Das konstruierte Spiel erfüllt die Bedingungen an ein extensives Spiel, wie es im vorherigen Kapitel eingeführt wurde.
Es wird eine Lotterie mit maximal $|N|$ Auszahlungsvektoren für die Spieler aus N und den Makler M generiert, wobei ein Vektor für den möglichen Spieler α existiert. Für jeden Spieler $i \in N$ und den Makler M muss die Preferenzrelation lediglich monoton sein und lediglich von den eigenen Auszahlungen abhängen. Sie erfüllt demnach

$$(p_1, \dots, p_n; a^1, \dots, a^n) \succeq_i (p_1, \dots, p_n; b^1, \dots, \dots, b^n) \text{ gdw. } a_i^k \geq b_i^k, \ k = 1, \dots, n. \tag{3.27}$$

Strategien für Spieler $i \in N$ entsprechen einem Tupel:

$$((b_j^i)_{j \in N \setminus \{i\}}, (x_j^i)_{j \in N \setminus \{i\}}, (A_i^j)_{j \in N \setminus \{i\}}, C_i). \tag{3.28}$$

- *$b_j^i \in \mathbb{R}$ beschreibt das Gebot an den Spieler j in Stufe 1.*
- *$x_j^i \in \mathbb{R}$ beschreibt das Angebot für Spieler j auf Stufe 2, falls Spieler i zum Verteiler bestimmt wurde.*
- *$A_i^j \subseteq \mathbb{R}$ beschreibt die Menge der Angebote von Spieler j, die auf Stufe 3 akzeptiert werden, falls Spieler j zum Verteiler ausgezeichnet wurde.*
- *$C_i \subseteq \mathbb{R}$ beschreibt die Menge der Gebühren für die Komponente $\mathcal{P}(i)$, die von Spieler i gezahlt werden.*

Eine Strategie für den Makler M ist die Wahl eines Tupels

$$(y_S^M)_{S \in \mathcal{P}}, \tag{3.29}$$

bei der y_S^M die Gebühr/Subvention für die Komponte S darstellt.

3.3 Existenz eines teilspielperfekten Gleichgewichtes

Proposition 3.2
Die folgende Strategie generiert den gewichteten χ-Wert als Auszahlung für die Spieler aus N.

- ***Stufe 1:*** *Jeder Spieler $i \in N$ kündigt jedem anderen Spieler $j \neq i$ an, ihm den Betrag*

  $$b_j^i = Sh_j(N, v) - Sh_j(N \setminus \{i\}, v^i) \tag{3.30}$$

  zu zahlen.

[9]Dies kann als Einfluss interpretiert werden.

- ***Stufe 2:*** *Der ausgewählte Verteiler bietet nun*

$$x_j^\alpha = Sh_j(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha) \tag{3.31}$$

an jeden Spieler $j \in N \setminus \{\alpha\}$.

- ***Stufe 3:*** *Die Spieler akzeptieren das Angebot, wenn*

$$x_j^\alpha \geq Sh_j(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha). \tag{3.32}$$

- ***Stufe 4:*** *Der Makler fordert von jeder Komponente $S \in \mathcal{P}$ die Gebühr*

$$y_S^M = \sum_{i \in S} Sh_i(N, v) - v(S) \tag{3.33}$$

- ***Stufe 5:*** *Spieler in den Komponenten akzeptieren die Gebühr, falls*

$$\frac{w_i}{w_S} y_S^M \leq \chi_i(N, v, \mathcal{P}) - Sh_i(N, v). \tag{3.34}$$

Beweis. Man erkennt, dass die Angebote/Forderungen in allen Stufen akzeptiert werden. Damit beträgt die Auszahlung nach Stufe 3

$$b_j^\alpha + x_j^\alpha = Sh_j(N, v) \tag{3.35}$$

für alle Spieler außer dem ausgezeichneten α. Durch die Komponenteneffizienz ergibt sich für diesen dann eine Auszahlung von

$$\begin{aligned} v(N) - \sum_{j \neq \alpha} b_j^\alpha - \sum_{j \neq \alpha} x_j^\alpha &= v(N) - \sum_{j \neq \alpha} Sh_j(N, v) \\ &= Sh_\alpha(N, v). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Man erkennt demnach, dass bei dieser Strategie stets die gleiche Auszahlung generiert wird, unabhängig davon, welcher Spieler als Verteiler ausgewählt wird. Dass dies in jedem teilspielperfekten Gleichgewicht der Fall sein muss, wird später gezeigt. In Stufe 5 führt dies ebenso zu einem Einverständnis der Komponenten. Die Auszahlung für Spieler i aus Komponente $S \in \mathcal{P}$ beträgt

$$Sh_i(N, v) + \frac{w_i}{w_S}(v(\mathcal{S}) - \sum_{i \in S} Sh_i(N, v)) = \chi_i^w(N, v, \mathcal{P}). \tag{3.37}$$

Der Makler M erhält eine Endauszahlung von

$$\sum_{S \in \mathcal{P}} (\sum_{i \in S} Sh_i(N, v) - v(S)) + \sum_{S \in \mathcal{P}} v(S) = \sum_{i \in N} Sh_i(N, v) = v(N). \tag{3.38}$$

□

Proposition 3.3

Die oben angegebene Strategienkombination ist ein Nashgleichgewicht im Teilspiel beginnend bei Stufe 4 und 5, falls die Kooperation einen echten Wert erzeugt, d.h. falls $v(N) \geq 0$.

Beweis. Falls $|N| = 1$ ist, so erhält der einzige Spieler i den Wert $v(i)$, welches in diesem Fall seinem gewichteten χ-Wert entspricht.
Induktiv nehme man nun an, für $|N| - 1$ Spieler sei die Behauptung gezeigt. Man beginnt die Untersuchung nach dem Theorem 2.112 bei dem Teilspiel, welches in Stufe 5 beginnt. Sei j ein Spieler aus S. Falls alle anderen Spieler aus S die Gebühr zahlen, so erhält Spieler j bei Akzeptanz eine Gesamtauszahlung von

$$p_j - \frac{w_i}{w_S} y_S^M. \tag{3.39}$$

Bei Ablehnen der Gebühr würde er im Gegenzug

$$\frac{w_i}{w_S} v(S) + \sum_{j \in S} \frac{w_j p_i - w_i p_j}{w_S} \tag{3.40}$$

erhalten. Mit der von M gewählten Gebühr würde er sich daher nicht verbessern können.
Für die anderen Spieler ergibt sich die gleiche Überlegung im Wissen, dass nachfolgende Spieler ebenso akzeptieren werden. Daher ist auch deren beste Antwort, die Gebühr zu akzeptieren. Eine beste Antwort[10] ist daher auf der fünften Stufe des Spiels die Akzeptanz der Gebühr.
Im Teilspiel beginnend bei Stufe 4 lohnt es sich nicht, wenn der Makler M eine höhere Gebühr für eine der Komponenten wählt. In diesem Fall würde diese Komponente die Kooperation ablehnen. Somit würde die Endauszahlung des Spielers M gerade Null betragen, welche nicht besser als $v(N)$ ist.
Falls der Makler M eine geringere Gebühr für eine der Komponenten wählt, so würde diese angenommen werden und die Endauszahlung des Maklers wäre entsprechend geringer. Damit stellt die Strategienkombination ein Nashgleichgewicht im bei Stufe 4 beginnenden Spiel dar. □

Der folgende Beweis, dass die Strategie auf Stufe 1 ein Nashgleichgewicht darstellt beruht auf dem Aufsatz aus Kongo/Funaki/Tijs, 2007: [2].

Proposition 3.4
Die oben angebene Strategienkombination bildet genau dann ein Nachgleichgewicht im Teilspiel beginnend bei den Stufen 1,2 und 3 falls alle Spieler in einer Komponente gleiche Gewichte besitzen.[11]

Beweis. Für Stufe 3 sei wiederum j_k der letzte Spieler, der entscheiden muss, ob er das Angebot des Verteilers α ablehnt oder akzeptiert. Für den Fall, dass alle Spieler das Angebot akzeptiert haben, so ist seine bestmögliche Reaktion, das Angebot $Sh_j(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha)$ zu akzeptieren, da er auch bei Ablehnen des Angebotes nach Induktionsannahme keine höhere Auszahlung erhalten würde. Wiederholtes Anwenden dieses Arguments zeigt, dass die Strategienkombination ein Nash-

[10]Andere besten Antworten sind gerade diejenigen, bei denen die geforderte Gebühr akzeptiert wird und andere Gebühren beliebig beantwortet werden.
[11]Dies stellt gerade die Situation im ungewichteten χ-Wert dar

gleichgewicht im Teilspiel, welches auf der dritte Stufe beginnt, darstellt.
Für das Teilspiel bei Stufe 2 beginnend, erhält der Verteiler α die Auszahlung

$$v(N) - \sum_{j \neq \alpha} Sh_j(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha) \overset{CE}{=} v(N) - v^\alpha(N \setminus \{\alpha\}) \overset{2.61}{=} v(\alpha). \tag{3.41}$$

Falls der Verteiler α ein Angebot an einen Spieler erhöht, ohne dies bei den anderen auszugleichen, so wird das Angebot immer noch angenommen, aber die Endauszahlung des Verteilers α verringert sich. Falls der Verteiler jedoch eines seiner Angebote senkt, so führt dies nicht mehr zu einer Einigung. Er erhält die Auszahlung $v(\alpha)$ am Ende der dritten Stufe. Insgesamt stellt dies in der Endauszahlung keine Verbesserung dar. Damit ist die Strategienkombination ab Stufe 2 ebenfalls teilspielperfekt.
Es bleibt noch zu zeigen, dass die Strategienkombination ab der ersten Stufe ein Nashgleichgewicht ist. Zunächst wird gezeigt, dass jeder Spieler mit der gleichen Wahrscheinlichkeit zum Verteiler α bestimmt wird.
Die Nettogebote sind für $i \in N$:

$$B^i = \sum_{j \neq i}(b^i_j - b^j_i) = \sum_{j \neq i} \left(\underbrace{Sh_j(N, v) - Sh_i(N, v) - Sh_j(N \setminus \{i\}, v^i) + Sh_i(N \setminus \{j\}, v^j)}_{\overset{2.22}{=} 0} \right) \tag{3.42}$$

Alle Spieler werden demnach mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/|N|$ als Verteiler ausgewählt.
Es wird nun gezeigt, dass es sich für keinen Spieler lohnt, seine Gebote zu ändern. Dabei bezeichne man mit $\widehat{b}^i_j = b^i_j + a_j$ die neuen Gebote. Die neuen Nettogebote sind dann

$$\widehat{B}^j = \sum_{k \in N \setminus \{j\}} \widehat{b}^j_k - \widehat{b}^k_j \text{ für } j \in N \setminus \{i\} \tag{3.43}$$

Entsprechend betragen die Nettogebote für Spieler aus $j \in N \setminus \{i\}$ gerade $\widehat{B}^j = -a_j$.
Es seien nun drei Fälle für $\sum_{j \neq i} a_j$ zu unterscheiden.

Fall 1:

$$\widehat{B}^i = \sum_{j \neq i} a_j < 0. \tag{3.44}$$

Damit existiert zumindest ein $a_j < 0$. Entsprechend ist das Nettogebot von Spieler j $\widehat{B}_j > 0$, sodass Spieler i nicht als Verteiler ausgezeichnet wird. Damit verändert sich seine Endauszahlung nicht.

Fall 2:

$$\widehat{B}^i = \sum_{j \neq i} a_j = 0. \tag{3.45}$$

Da nicht alle für alle $j \in N$ $a_j = 0$ gelten kann, ist zumindest ein Nettogebot eines anderen Spielers echt positiv, sodass dieser zum Verteiler ausgewählt wird. Damit ändert sich die Endauszahlung von Spieler i nicht.

Fall 3:

$$\widehat{B}^i = \sum_{j \neq i} a_j > 0. \tag{3.46}$$

Damit wird Spieler i nur dann mit einer positiven Wahrscheinlichkeit zum Verteiler α bestimmt, falls nicht alle anderen Nettogebote größer als sein eigenes Nettogebot sind. Entsprechend muss also gelten:

$$\sum_{j \in N \setminus \mathcal{P}(i)} a_j + \sum_{j \in \mathcal{P}(i) \setminus \{i\}} a_j \geq -a_l \text{ für alle } l \in N \setminus \{i\}. \tag{3.47}$$

Die Auszahlungen nach Stufe 3 des Spieles sind dann:

$$\begin{aligned} x_j &= Sh_j(N,v) + a_j \text{ für alle } j \in N \setminus \{i\}, \\ x_i &= Sh_i(N,v) - \sum_{j \neq i} a_j. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Mit dem Ausgleich auf den Stufen 4 und 5 ergibt sich dann als Endauszahlung für Spieler i:

$$\begin{aligned} y_i &= Sh_i(N,v) - \sum_{j \neq i} a_j + \frac{w_i}{w_S}(v(\mathcal{P}(i)) - \sum_{j \in \mathcal{P}(i)} x_j) \\ &= Sh_i(N,v) - \sum_{j \neq i} a_j + \frac{w_i}{w_S}\left[v(\mathcal{P}(i)) - \sum_{j \in \mathcal{P}(i) \setminus \{i\}} (Sh_j(N,v) + a_j) - Sh_i(N,v) + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} a_j\right] \\ &= \chi_i(N,v,\mathcal{P},w) - \sum_{j \neq i} a_j + \frac{w_i}{w_S} \sum_{j \in N \setminus \mathcal{P}(i)} a_j. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Für eine Verbesserung der Endauszahlung des Spielers i muss demnach Folgendes gelten:

$$-\sum_{j \neq i} a_j + \frac{w_i}{w_S} \sum_{j \in N \setminus \mathcal{P}(i)} a_j > 0. \tag{3.50}$$

Man untersuche zunächst die symmetrische Situation, d.h.

$$\begin{aligned} w_S &= 1, \\ w_i &= \frac{1}{|\mathcal{P}(i)|}. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Für $\{N\} = \mathcal{P}$ oder $|\mathcal{P}(i)| = 1$ stimmt der χ-Wert mit dem Wert der Shapley-Lösung überein. Folglich besteht hier gerade kein Anreiz die Spieler aus anderen Komponenten gegenüber Spielern aus der eigenen Komponente zu übervorteilen. Folglich ist eine Verbesserung wie in (3.46), (3.47) und (3.50) nicht möglich, denn für $\mathcal{P}(i) = \{i\}$ ist die Auszahlung des Spielers i durch die Komponenteneffizenz bereits vorgegeben.

Für $\mathcal{P} = \{N\}$ stellt jede Erhöhung des Gebotes eine niedrigere Endauszahlung für Spieler i dar. Somit ist Spieler i nicht bestrebt, zu erzwingen, dass er zum Spieler α ausgewählt wird und es gibt keine Verbesserungsmöglichkeit für Spieler i durch einseitige Abweichungen in diesem Teilspiel.

Es sei nun $1 < |\mathcal{P}(i)| < |N|$. Die zum System zugehörige Matrix ist symmetrisch in den a_j, die zu den Spielern gehören, die nicht in $\mathcal{P}(i)$ sind, und in den a_j, die zu den Spielern gehören, die sich

in der gleichen Komponente wie Spieler i befinden.
Falls der zulässige Bereich nichtleer wäre, müsste es eine symmetrische Lösung wie folgt geben:

$$\begin{aligned} a_j &= a_C \text{ für alle } j \in N \setminus \mathcal{P}(i), \\ a_j &= a_P \text{ für alle } j \in \mathcal{P}(i) \setminus \{i\}. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Damit vereinfachen sich die Nebenbedingungen von K zu folgenden Bedingungen:

$$\begin{pmatrix} (1 - \frac{1}{\mathcal{P}(i)})(|N| - |\mathcal{P}(i)|) & |\mathcal{P}(i)| - 1 \\ -|N| + |\mathcal{P}(i)|) & -|\mathcal{P}(i)| + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_C \\ a_P \end{pmatrix} < 0 \tag{3.53}$$

$$\begin{pmatrix} -|N| + |\mathcal{P}(i)| & -|\mathcal{P}(i)| \\ -|N| + |\mathcal{P}(i)| - 1 & -|\mathcal{P}(i)| + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_C \\ a_P \end{pmatrix} \leq 0 \tag{3.54}$$

Der Satz von Motzkin[12] besagt, es gibt keine Verbesserungsmöglichkeit für Spieler i, falls das folgende Gleichungssystem eine Lösung besitzt:

$$\begin{pmatrix} (1 - \frac{1}{\mathcal{P}(i)})(|N| - |\mathcal{P}(i)|) & -|N| + |\mathcal{P}(i)| & -|N| + |\mathcal{P}(i)| & -|N| + |\mathcal{P}(i)| - 1 \\ \mathcal{P}(i)| - 1 & -|\mathcal{P}(i)| + 1 & -|\mathcal{P}(i)| & -|\mathcal{P}(i)| + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned} y := (y_1, y_2) &\neq 0, \\ y_1, y_2 &\geq 0, \\ z_1, z_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Nun ist gerade $(|\mathcal{P}(i)|, 0, |\mathcal{P}(i)| - 1, 0)^T$ eine Lösung, sodass es für Spieler i keine Möglichkeit gibt, seine Endauszahlung zu verbessern und somit stellt die Strategienkombination ein Nashgleichgewicht im gesamten Spiel dar.
Für den unsymmetrischen Fall gibt es für nichttriviale Partitionen dagegen immer einen Spieler mit überdurchschnittlichen Gewicht:

$$\frac{w_i}{w_S} > \frac{1}{|S|}. \tag{3.56}$$

Damit stellt die folgende Änderung der Strategie des Spielers i eine Verbesserung dar:

$$\begin{aligned} a_j &= |\mathcal{P}(i)| - |N| \text{ für alle } j \in \mathcal{P}(i) \setminus \{i\}, \\ a_k &= |\mathcal{P}(i)| \text{ für alle } k \in N \setminus \mathcal{P}(i). \end{aligned} \tag{3.57}$$

Damit sind die Bedingungen (3.47) und (3.50) erfüllt, denn es gilt:

$$\sum_{j \in N \setminus \mathcal{P}(i)} a_j + \sum_{k \in \mathcal{P}(i) \setminus \{i\}} a_k = |N| - |\mathcal{P}(i)| > 0, \tag{3.58}$$

$$\sum_{j \in N \setminus \mathcal{P}(i)} a_j + \sum_{k \in \mathcal{P}(i) \setminus \{i\}} a_k = |N| - |\mathcal{P}(i)| > -|\mathcal{P}(i)| = -a_k, j \in N \setminus \mathcal{P}(i), \tag{3.59}$$

$$\sum_{j \in N \setminus \mathcal{P}(i)} a_j + \sum_{k \in \mathcal{P}(i) \setminus \{i\}} a_k = |N| - |\mathcal{P}(i)| = -a_j, j \in \mathcal{P}(i) \setminus \{i\}. \tag{3.60}$$

[12] Für den Satz und den Beweis vergleiche man den Anhang 6.5.

Weiterhin gilt:

$$y_i - \chi_i(N, v, \mathcal{P}, w) = -\sum_{k \in \mathcal{P}(i) \setminus \{i\}} a_k + (\frac{w_i}{w_{\mathcal{P}(i)}} - 1) \sum_{j \in N \setminus \mathcal{P}(i)} a_j \tag{3.61}$$

$$\overset{3.56}{>} \sum_{k \in \mathcal{P}(i) \setminus \{i\}} a_k + (\frac{1}{|\mathcal{P}|} - 1) \sum_{j \in N \setminus \mathcal{P}(i)} a_j = 0 \tag{3.62}$$

Die Abweichung von der oben definierten Strategienkombination stellt demnach eine Verbesserung dar. Durch Skalierung der Strategie kann weiterhin eine beliebig große Auszahlung für diesen Spieler erreicht werden. Es kann daher kein teilspielperfektes Gleichgewicht in diesem Falle geben. Für den symmetrischen Fall stellt die Strategienkombinatione dagegen im gesamten nichtkooperativen Spiel ein Nashgleichgewicht aller möglichen Strategien dar, sodass sie mit der letzten Proposition ein teilspielperfektes Gleichgewicht bilden. □

3.4 Eindeutigkeit des teilspielperfekten Gleichgewichtes

Nachdem nun ein teilspielperfektes Gleichgewicht gefunden ist, versucht man nun zu zeigen, dass die Auszahlung in jedem teilspielperfekten Gleichgewicht dem χ-Wert entspricht. Damit spricht man von einer vollständigen Implementierung.

Proposition 3.5
In jedem teilspielperfekten Gleichgewicht lehnen die Spieler die Gebühren $y_S^M, S \in \mathcal{P}$, ab, falls

$$y_S^M > \sum_{j \in S} p_j - v(S) \text{ für eine Komponente } S \in \mathcal{P}. \tag{3.63}$$

In jedem teilspielperfekten Gleichgewicht akzeptieren die Spieler die Gebühren $y_S^M, S \in \mathcal{P}$, falls

$$y_S^M < \sum_{j \in S} p_j - v(S) \text{ für alle Komponenten } S \in \mathcal{P}. \tag{3.64}$$

Beweis. Man nehme an alle Spieler würden die Gebühren von

$$y_S^M > \sum_{j \in S} p_j - v(S) \tag{3.65}$$

akzeptieren. Dann beträgt die Auszahlung für Spieler i aus der Komponente S

$$p_i - \frac{w_i}{w_s} y_S^M. \tag{3.66}$$

Falls Spieler i von seiner Strategie abweicht und die Gebühr ablehnt, so beträgt seine Auszahlung

$$\frac{w_i}{w_S} v(S) - \sum_{j \in S} \frac{w_i p_j - w_j p_i}{w_S} = p_i - \frac{w_i}{w_s} \sum_{j \in S} p_j - v(S) > p_i - \frac{w_i}{w_s} y_S^M. \tag{3.67}$$

Die ursprüngliche Strategie von Spieler i kann demnach nicht zu einem teilspielperfekten Gleichgewicht gehören.
Falls

$$y_S^M < \sum_{j \in S} p_j - v(S) \text{ für alle } S \in \mathcal{P}, \tag{3.68}$$

dann kann für den letzten Spieler j in einer beliebigen Reihenfolge das Ablehnen dieser Gebühr nicht die beste Antwort sein. Falls er entscheiden muss, d.h. alle Spieler vor ihm haben ebenso akzeptiert, so beträgt seine Auszahlung, im Falle der Akzeptanz:

$$p_j - \frac{w_j}{w_{\mathcal{P}(j)}} y^M_{\mathcal{P}(i)}. \tag{3.69}$$

Bei Ablehnen des Angebotes beträgt seine Endauszahlung allerdings,

$$\frac{w_j}{w_{\mathcal{P}(j)}} p_j - \sum_{i \in \mathcal{P}(j)} \frac{w_i}{w_{\mathcal{P}(j)}} p_j + \sum_{i \in \mathcal{P}(j)} \frac{w_j}{w_{\mathcal{P}(j)}} p_i, \tag{3.70}$$

welches mit der obigen Wahl von y^M_S die schlechtere Alternative darstellt. Somit wird der letzte Spieler diese Gebühren akzeptieren und mit den gleichen Überlegungen wird dies in einem teilspielperfekten Gleichgewicht jeder andere Spieler ebenfalls tun. $\square$

Proposition 3.6
Sei $v(N) > 0$, dann zahlen die Komponenten in jedem teilspielperfekten Gleichgewicht die vom Makler M geforderte Gebühr.

Beweis. Man nehme an, in einem teilspielperfekten Gleichgewicht würde die Gebühr nicht akzeptiert werden. Es gibt demnach einen Spieler i aus der Komponente S mit:

$$p_i - \frac{w_i}{w_s} y^M_S \leq \frac{w_i}{w_S} v(S) - \sum_{j \in S} \frac{w_i p_j - w_j p_i}{w_S} \tag{3.71}$$

und demnach

$$y^M_S \geq \sum_{j \in S} p_j - v(S). \tag{3.72}$$

In diesem Fall würde der Makler den Nutzen von Null (bei Ablehnen der Gebühr) vermeiden können, falls er die geforderte Gebühr auf den Wert

$$\sum_{j \in S} p_j - v(S) - \varepsilon, \frac{v(N)}{|\mathcal{P}|} > \varepsilon > 0 \tag{3.73}$$

senkt. Nach der vorherigen Proposition wird dann die Gebühr angenommen und die Auszahlung für M beträgt dann

$$\sum_{S \in \mathcal{P}} (\sum_{j \in S} p_j - v(S)) + \sum_{S \in \mathcal{P}} v(S) - |\mathcal{P}|\varepsilon = \sum_{S \in \mathcal{P}} \sum_{j \in S} p_j - |\mathcal{P}|\varepsilon \stackrel{CE}{=} v(N) - |\mathcal{P}|\varepsilon > 0. \tag{3.74}$$

Damit können Strategien, bei denen die Gebühr abgelehnt wird, nicht zu einem teilspielperfekten Gleichgewicht gehören. $\square$

Proposition 3.7
Sei $v(N) > 0$. In jedem teilspielperfekten Gleichgewicht fordert der Makler M eine Gebühr von $\sum_{j \in S} p_j - v(S)$ von jeder Komponente $S \in \mathcal{P}$.

Beweis. Nach der vorherigen Propositionen kann der Makler in einem teilspielperfekten Gleichgewicht nur Gebühren $y_S^M \leq \sum_{j \in S} p_j - v(S)$ fordern.
Seien demnach die Gebühren

$$y_S^M = \sum_{j \in S} p_j - v(S) - \varepsilon(S), \varepsilon(S) \geq 0 \text{ für alle } S \in \mathcal{P}. \tag{3.75}$$

Falls

$$\sum_{S \in \mathcal{P}} \varepsilon(S) > \frac{v(N)}{|\mathcal{P}|}, \tag{3.76}$$

so entspricht dies einer Auszahlung des Maklers von

$$\sum_{j \in N} p_j - \sum_{S \in \mathcal{P}} \varepsilon(S) = v(N) - \sum_{S \in \mathcal{P}} \varepsilon(S) < 0. \tag{3.77}$$

Indem der Makler die Gebühren demnach auf

$$y_S^M > \sum_{j \in S} p_j - v(S) \text{ für alle } S \in \mathcal{P} \tag{3.78}$$

senkt, werden die Gebühren abgelehnt und folglich erhält der Makler M eine Auszahlung von Null, welche echt besser ist.
Falls

$$\varepsilon \leq \frac{v(N)}{|\mathcal{P}|}, \tag{3.79}$$

so kann sich der Makler M echt verbessern, indem er die Gebühren auf

$$y_S^M = \sum_{j \in S} p_j - v(S) - \frac{\varepsilon(S)}{2} \tag{3.80}$$

senkt. Daher müssen die Gebühren in jedem teilspielperfekten Gleichgewicht gerade

$$y_S^M \leq \sum_{j \in S} p_j - v(S) \tag{3.81}$$

betragen. □

Die nun folgende Untersuchung beweist nun, dass jedes teilspielperfekte Gleichgewicht auf den ersten drei Stufen gerade den Auszahlungsvektor der Shapley-Lösung generiert. Die Formulierung folgt den Ausarbeitungen von Kongo/Funaki/Tijs sowie Pérez-Castrillo/Wettstein.

Theorem 3.8
Spieler, die als Verteiler α ausgewählt werden, erhalten in der dritten Stufe des Spieles den Wert $v(\alpha)$. Jeder andere Spieler erhält den Wert der Shapley-Lösung des Spiels $(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha)$.

Beweis. Die Aussage wird durch Induktion nach der Anzahl der Spieler gezeigt.
Sei $|N| = 1$. Dann erhält der Spieler den Wert $v(\alpha)$, welches dem entsprechenden Wert der Shapley-Lösung entspricht.

Man nehme an in jedem Spiel mit k Spielern erhalte jeder Spieler die Auszahlung der Shapley-Lösung des Spiels. Es sei nun $|N| = k + 1$ und α ist ein beliebiger Spieler aus N.
Man nehme an, die Spieler aus N würden sich nicht einigen. Dann erhält der Verteiler α eine Auszahlung von $v(\alpha)$ und die Spieler aus $N \setminus \{\alpha\}$ erhalten die Auszahlung aus dem Spiel $(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha)$. Damit erhält Spieler $i \in N \setminus \{\alpha\}$ nach Induktionsbehauptung aber gerade

$$Sh_i(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha). \tag{3.82}$$

Falls dagegen keine Einigung in $t = 3$ erzielt werden kann, müssen die Spieler aus $N\setminus\{\alpha\}$ mindestens $Sh_i(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha)$ als Auszahlung erhalten. Die Auszahlung des Verteilers α beträgt damit maximal

$$v(N) - \sum_{j \neq \alpha} Sh_j(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha) \overset{CE}{=} v(N) - v^\alpha(N \setminus \{\alpha\}) \overset{2.61}{=} v(\alpha). \tag{3.83}$$

Aber bei Ablehnung des Angebotes erhält der Verteiler α einen Wert von $v(\alpha)$. Demnach muss er diesen auch hier erhalten.
Damit gilt die Behauptung in beiden Fällen. □

Theorem 3.9
In jedem teilspielperfekten Gleichgewicht betragen die Nettogebote $B^k = 0$ für alle $k \in N$.

Beweis. Es gilt nach Definition $\sum\limits_{k \in N} B^k = 0$.
Man betrachtet daher

$$\Omega = \{k \in N | B^k = \max_{j \in N}(B^j)\} \tag{3.84}$$

, die Menge der Spieler, die die größten Nettogebote getätigt haben.
Falls $\Omega = N$, so gilt bereits die Behauptung.
Falls $\Omega \neq N$, wähle Spieler $l \in N \setminus \Omega$.
Ausgehend von einer Strategie aus einem teilspielperfekten Gleichgewicht $b^i_j, i, j \in N$ modifiziert man die Gebote des Spielers k wie folgt:

$$\begin{aligned} \widehat{b}^k_i &= b^k_i + \delta \text{ für alle } i \in \Omega \setminus k \text{ und mit } 0 < \delta < \frac{B^k - B^l}{|\Omega| + 1}, \\ \widehat{b}^k_l &= b^k_l - |\Omega|\delta, \\ \widehat{b}^k_m &= b^k_m \text{ für alle } m \notin \Omega \text{ und } m \neq j. \end{aligned} \tag{3.85}$$

Damit ergeben sich neue Nettogebote mittels

$$\begin{aligned} \widehat{B}^k &= B^k - \delta, \\ \widehat{B}^j &= B^j - \delta \text{ für alle } j \in \Omega \setminus \{i\}, \\ \widehat{B}^l &= B^l + |\Omega|\delta \text{ und} \\ \widehat{B}^m &= B^m \text{ für alle } m \notin \Omega, m \neq l. \end{aligned} \tag{3.86}$$

Nach Wahl von δ ist dann $\widehat{B}^l < \widehat{B}^k$ und damit ist die Menge der Spieler mit maximalem Nettogebot erneut Ω.

Allerdings verbessert sich Spieler k, da er nun in Schritt 2 Zahlungen in Höhe von

$$\sum_{j \neq k} b_j^k - \delta \tag{3.87}$$

leisten muss. Die ursprünglichen Strategie kann demnach nicht zu einem teilspielperfekten Gleichgewicht gehören. □

Theorem 3.10
In jedem teilspielperfekten Gleichgewicht ist die Auszahlung jedes Spielers unabhängig davon, welcher Spieler als Verteiler α ausgewählt wird.

Beweis. Nach dem letzten Satz verschwinden die Nettogebote in jedem teilspielperfekten Gleichgewicht.
Man nehme an, Spieler i würde eine höhere Auszahlung erhalten, falls Spieler j als Verteiler ausgewählt würde. Dann könnte er seine Gebote wie folgt verändern:
$\widehat{b}_k^i = b_k^i - \varepsilon\ \delta_{k,j}$ für alle $k \in N \setminus \{i\}$ mit $\varepsilon > 0$. Falls ε hinreichend klein, so besitzt Spieler j das größte Nettogebot und Spieler i hätte sein Auszahlung vergrößern können. Allerdings gilt nun:

$$\begin{aligned} B^i &= -\varepsilon < 0, \\ B^j &= \varepsilon > 0 \end{aligned} \tag{3.88}$$

und es würde eine profitable einseitige Verbesserung für Spieler i existieren. Damit kann die Annahme nicht wahr sein und es gibt keinen anderen Spieler, den Spieler i als Verteiler bevorzugt.
Falls Spieler i eine höhere Auszahlung erhalten würde, wenn er selbst zum Verteiler bestimmt wird, so kann er seine Gebote wie folgt ändern:
$\widehat{b}_j^i = b_j^i + \varepsilon$ für alle $j \in N \setminus \{i\}$ und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein. Demnach besitzt Spieler i das größte Nettogebot und er wird zum Verteiler α bestimmt. Dies stellt wiederum eine profitable einseitige Abweichung dar, die in einem teilspielperfekten Gleichgewicht nicht existieren kann. □

Theorem 3.11
Bei gleichen Gewichten innerhalb einer Komponente und mit $v(N) > 0$ stimmt in jedem teilspielperfekten Gleichgewicht die Auszahlung für die Spieler aus N mit dem χ-Wert überein.

Beweis. Man zeige zunächst, dass die Auszahlungen in jedem teilspielperfekten Gleichgewicht nach der dritten Stufe mit der Shapley-Lösung übereinstimmen.
Falls i zum Verteiler α bestimmt wird, so bezeichne man dann den Auszahlungsvektor mit u_j^i.
Nach Theorem 3.8 ist

$$u_i^i = -\sum_{k \neq i} b_k^i + v(i) \tag{3.89}$$

und für $j \neq i$ gilt:

$$u_i^j = b_i^j + Sh_i(N \setminus \{j\}, v^j), \tag{3.90}$$

sodass

$$\sum_{k \in N} u_i^k = -\sum_{k \neq i} b_k^i + v(i) + \sum_{k \neq i} b_i^k + \sum_{k \neq i} Sh_i(N \setminus \{k\}, v^k). \tag{3.91}$$

Nach Theorem 3.9 ist:

$$\sum_{j \in N} B^i = \sum_{i \in N} (b_k^i - b_i^k) = 0. \tag{3.92}$$

Damit erhält man:

$$\sum_{k \in N} u_i^k = v(i) + \sum_{k \neq i} Sh_i(N \setminus k, v^k). \tag{3.93}$$

Die Auszahlung ist nach Theorem 3.10 aber gerade unabhängig davon, welcher Spieler zum Verteiler α ausgezeichnet wird. Folglich ist

$$\sum_{k \in N} u_i^k = |N| u_i^j. \tag{3.94}$$

Damit erhält man:

$$u_i^j = \frac{1}{|N|} v(i) + \frac{1}{|N|} \sum_{k \neq i} Sh_i(N \setminus \{k\}, v^k) \overset{2.76}{=} Sh_i(N, v). \tag{3.95}$$

Mit den ersten drei Stufen des Spiels wird daher die Shapley-Lösung implementiert.
Da weiterhin die Forderung des Maklers M von der Komponente S gerade

$$\sum_{i \in S} Sh_i(N, v) - v(S) \tag{3.96}$$

beträgt, ergibt sich als Endauszahlung:

$$p_i = Sh_i(N, v) - \frac{1}{|S|} (\sum_{i \in S} Sh_i(N, v) - v(S)) = \chi_i(N, v, \mathcal{P}). \tag{3.97}$$

□

Bemerkung

Insbesondere ergibt sich mit (3.90) und (3.95), dass die Gebote der ersten Stufe

$$b_i^j = Sh_i(N, v) - Sh_i(N \setminus \{j\}, v^j) \text{ für alle } i \in N, i \neq j \tag{3.98}$$

betragen.

4 Weitere Nashgleichgewichte

Die teilspielperfekte Strategie ist ein Nashgleichgewicht, es werden nun noch alle weiteren Nashgleichgewichte bestimmt.
Die in Kapitel 3 gezeigten Theoreme 3.8, 3.9 und 3.10 gelten ebenso für Nashgleichgewichte, da lediglich mit profitablen Abweichungen argumentiert wurde.

Entsprechend gilt ebenfalls, dass auf der ersten Stufe jeder Spieler $i \in N$ das folgende Angebot x_j^i an Spieler $j \in N \setminus \{i\}$ tätigt:

$$b_j^i = Sh_j(N, v) - Sh_j(N \setminus \{i\}, v^i). \tag{4.1}$$

Außerdem ergibt sich am Ende der dritten Stufe für jeden Spieler $j \in N$ eine Zwischenauszahlung in Höhe von $Sh_j(N, v)$, unabhängig vom weiteren Verlauf des Spieles. Dabei können aber verschiedene Angebots- und Akzeptanzstrategien der Spieler genutzt werden.

I Es gibt genau einen Spieler, der jedes Angebot des Verteilers α ablehnt.

II Es gibt mind. zwei Spieler, die jedes Angebot des Verteilers α ablehnen.

III Alle Spieler akzeptieren das Gebot des Verteilers α.

IV Es gibt genau einen Spieler, der das Angebot des Verteilers α nicht akzeptiert, der aber nicht alle Angebote strikt ablehnt.

V Mindestens zwei Spieler akzeptieren das Gebot nicht, kein Spieler lehnt alle Angebote des Verteilers α strikt ab.

Es werden nun folgend diese fünf Fälle genauer untersucht. Dabei verwende man die folgenden Bezeichnungen.
Es bezeichne A_j^α die Menge der Gebote, die Spieler $j \in N \setminus \{\alpha\}$ akzeptiert, sog. Akzeptanzmenge, falls α der Verteilungsspieler ist. $V^\alpha \subseteq N \setminus \{\alpha\}$ bezeichne die Menge der Spieler, die das Gebot von α nicht akzeptieren.
Fall I:
$A_k^\alpha = \emptyset$ für genau ein $k \in N \setminus \{k\}$
Spieler k droht entsprechend damit kein Angebot vom Verteiler α zu akzeptieren. Entsprechend ist es für diesen nicht möglich die Zwischenauszahlung von $v(\alpha)$ zu erhöhen, da keine Einigung der Spieler erzielt werden kann.
Spieler k dagegen kann genau dann erfolgreich abweichen, falls das von dem Verteiler α getätigte Angebot groß genug ist:

$$x_k^\alpha > Sh_k(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha). \tag{4.2}$$

Entsprechend erfüllt eine Teilstrategie eines Nashgleichgewichtes in diesem Szenario die folgenden Bedingungen

$$x_k^\alpha \leq Sh_k(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha), A_k^\alpha \qquad\qquad = \emptyset.$$

Fall II:
Es bezeichne $W^\alpha = \{j \in N \setminus \{\alpha\} | A_j^\alpha = \emptyset\}$ die Menge der Spieler, die alle Gebote ablehnen.
Dann können sich weder der Verteiler α noch die Spieler aus $N \setminus \{\alpha\}$ durch Abweichen in ihrer Strategie verbessern, da stets keine Einigung erzielt werden kann.
Entsprechend erfordert ein Nashgleichgewicht in diesem Falle

$$A_j^\alpha = \emptyset \text{ für alle } j \in W, |W| \geq 2. \tag{4.3}$$

Fall III:

Falls alle Spieler das Angebot akzeptieren, so muss dies genau dem Fall des teilspielperfekten Gleichgewichtes entsprechen.

Falls ein Angebot verringert wird, $x_\alpha^j < Sh_j(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha)$, so lehnt Spieler j das Angebot ab und der Verteiler erhält ebenso wie vorher den Wert $v(\alpha)$. Die Spieler erhalten induktiv weiterhin den Wert $Sh_j(N \setminus \{\alpha\})$ im Spieler $\Gamma(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha)$. Dies ist daher keine profitable Abweichung für einen der Spieler aus N. Falls ein Angebot vergrößert wird, $x_\alpha^j > Sh_j(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha)$, so würde sich die Auszahlung des Verteilers verringern, falls alle anderen Spieler das Angebot akzeptieren. Dieser Fall muss hier demnach nicht betrachtet werden und die Angebote müssen $x_\alpha^j < Sh_j(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha)$ betragen.

Für die Akzeptanzmengen muss lediglich gelten, dass $Sh_j(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha) \in A_j^\alpha$ und damit keine Verbesserung für den Verteiler möglich ist, muss auch gelten:

$$Sh_j(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha) = \min A_j^\alpha \text{ für alle } j \in N \setminus \{\alpha\}. \tag{4.4}$$

Fall IV:

Es gibt genau einen Spieler, der das Angebot nicht akzeptiert. Dieser Spieler wird mit k bezeichnet. Da der Spieler unabhängig von seinen Mitspielern ablehnt, ist es für keinen Spieler aus $N \setminus \{\alpha, k\}$ möglich, seine Zwischenauszahlung zu erhöhen.

Dann kann sich der Verteiler verbessern, falls das folgende System lösbar ist.

$$\sum_{j \in N \setminus \{\alpha\}} x_j^\alpha < v^\alpha(N \setminus \{\alpha\}), x_j \in A_j^\alpha. \tag{4.5}$$

Ebenso wie in Fall I ist eine Verbesserung für Spieler k möglich, falls

$$x_k^\alpha > Sh_k(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha). \tag{4.6}$$

Entsprechend muss das folgende System erfüllt sein:

$$\begin{aligned} A_j^\alpha \neq \emptyset \text{ für alle } j \in N \setminus \{\alpha\}, \\ x_k^\alpha \notin A_k^\alpha \text{ für genau ein } k \in N \setminus \{\alpha\}, \\ \sum_{j \in N \setminus \{\alpha\}} x_j^\alpha \geq v^\alpha(N \setminus \{\alpha\}) \text{ für alle } x_j \in A_j^\alpha, \\ x_k^\alpha \leq Sh_k(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Fall V:

Es gilt in diesem Fall $x_j^\alpha \notin A_j^\alpha$ für alle Spieler aus V^α und $|V^\alpha| \geq 2$, aber $A_j^\alpha \neq \emptyset$ für alle $j \in N \setminus \{\alpha\}$.

Dann kann erneut keiner der Spieler aus $N \setminus \{\alpha\}$ verbessern, da durch Abweichen in einer Akzeptanzmenge keine Einigung erzielt werden kann.

Lediglich für den Verteiler besteht die Möglichkeit eine Verbesserung zu erzielen, falls wiederum Angebote $x_j^\alpha \in A_j^\alpha$ existieren, sodass

$$\sum_{j \in N \setminus \{\alpha\}} x_j^\alpha < v^\alpha(N \setminus \{\alpha\}). \tag{4.8}$$

Für ein Nashgleichgewicht in diesem Fall müssen demnach folgende Bedingungen erfüllt sein

$$\begin{aligned} A_j^\alpha &\neq \emptyset \text{ für alle } j \in N \setminus \{\alpha\}, \\ x_j^\alpha &\notin A_j^\alpha \text{ für mind. zwei Spieler }, \\ \sum_{j \in N \setminus \{\alpha\}} x_j^\alpha &\geq v^\alpha(N \setminus \{\alpha\}) \text{ für alle } x_j^\alpha \in A_j^\alpha. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Zusammenfassend erhält man daher die folgende Aussage:

Theorem 4.1
Auf der zweiten und dritten Stufe des in Kapitel 3 konstruierten nichtkooperativen Spieles Γ *muss ein Nashgleichgewicht eine der folgenden Bedingungen erfüllen:*

- *Ein unkooperativer Spieler:*

$$\begin{aligned} A_k^\alpha &= \emptyset \textit{ für ein } k \in N \setminus \{\alpha\}, \\ x_\alpha^k &\leq Sh_k(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha) \end{aligned} \tag{4.10}$$

- *Mehrere unkooperative Spieler:*

$$A_j^\alpha = \emptyset \textit{ für alle } j \in W \subseteq N \setminus \{\alpha\}, |W| \geq 2. \tag{4.11}$$

- *Einigung*

$$Sh_j(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha) = \min A_j^\alpha \textit{ für alle } j \in N \setminus \{\alpha\}. \tag{4.12}$$

- *Ein blockierender Spieler*

$$\begin{aligned} A_j^\alpha &\neq \emptyset \textit{ für alle } j \in N \setminus \{\alpha\}, \\ x_k^\alpha &\notin A_k^\alpha \textit{ für genau ein } k \in N \setminus \{\alpha\}, \\ \sum_{j \in N \setminus \{\alpha\}} x_j^\alpha &\geq v^\alpha(N \setminus \{\alpha\}) \textit{ für alle } x_j \in A_j^\alpha, \\ x_k^\alpha &\leq Sh_k(N \setminus \{\alpha\}, v^\alpha). \end{aligned} \tag{4.13}$$

- *Mehrere blockierende Spieler*

$$\begin{aligned} A_j^\alpha &\neq \emptyset \textit{ für alle } j \in N \setminus \{\alpha\}, \\ x_j^\alpha &\notin A_j^\alpha \textit{ für mind. zwei Spieler }, \\ \sum_{j \in N \setminus \{\alpha\}} x_j^\alpha &\geq v^\alpha(N \setminus \{\alpha\}) \textit{ für alle } x_j^\alpha \in A_j^\alpha. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Bemerkung
In allen Fällen erhält jeder Spieler $i \in N$ *nach der dritten Stufe den Wert der Shapley-Lösung* $Sh_i(N, v)$.

Mit den festen Zwischenauszahlungen von $p_j = Sh_j(N, v)$ für alle $j \in N$ untersuche man nun abschließend die mögliche Strategien der vierten und fünften Stufe. Analog zum Vorgehen bezüglich der zweiten und dritten Stufe unterscheide man erneut fünf Fälle:

1 Alle Spieler akzeptieren die Gebühr des Maklers M . Dies wird im Weiteren als „Akzeptanz“ bezeichnet.

2 Es gibt genau einen Spieler, der jede Gebühr des Maklers M ablehnt. Der Spieler wird als unkooperativer Spieler bezeichnet.

3 Es gibt mind. zwei Spieler, die jede Gebühr des Maklers M ablehnen.

4 Es gibt genau einen Spieler, der die Gebühr des Maklers M nicht akzeptiert, der aber nicht alle Angebote strikt ablehnt. Der Spieler wird als „blockierender“ Spieler bezeichnet.

5 Mindestens zwei Spieler akzeptieren die Gebühr nicht, kein Spieler lehnt alle Angebote des Maklers M strikt ab.

Man bezeichne im Folgenden mit C_i die Menge der Gebühren an die Komponente $\mathcal{P}(i)$, die der Spieler i akzeptiert. W sei die Menge der Spieler die abhängig von den Gebühren $(y_S^M)_{S\in\mathcal{P}}$.
Fall 1:
Alle Spieler akzeptieren das Gebot des Maklers M (Akzeptanz).
Wie in Kapitel 3 gezeigt, muss für die Akzeptanz der von Makler M geforderten Gebühren $(y_M^S)_{S\in\mathcal{P}}$ gelten:

$$y_S^M \leq \sum_{j\in S} p_j - v(S) \text{ für alle } S \in \mathcal{P}. \tag{4.15}$$

Damit ergibt sich eine Endauszahlung x_M für den Makler M von

$$\begin{aligned} x_M &= \sum_{S\in\mathcal{P}} y_S^M + \sum_{S\in\mathcal{P}} v(S) \\ &\leq \sum_{S\in\mathcal{P}} \left(\sum_{j\in S} p_j - v(S) \right) \\ &\leq \sum_{j\in N} Sh_j(N, v) = v(N) \end{aligned} \tag{4.16}$$

Falls die Gebühren soweit erhöht werden, dass keine Einigung erzielt werden kann, so erhält der Makler eine Auszahlung von 0. Ohne dass der Makler M profitabel abweichen kann, muss daher $v(N) = x_M \geq 0$ gelten.
Weiterhin dürfen nicht alle Spieler $j \in S$ für eine Komponente $S \in \mathcal{P}$ ein höhere Gebühr als y_S^M akzeptieren, da sonst der Makler entsprechend profitabel abweichen könnte. Es muss daher gelten:

$$y_S^M = \max \bigcap_{j\in S} C_j \text{ für alle } S \in \mathcal{P}. \tag{4.17}$$

Zusammengefasst ergeben sich daher folgende Einschränkungen:

$$
\begin{aligned}
v(N) &\geq 0, \\
y^M_{\mathcal{P}(j)} \in C_j \text{ für alle } S &\in \mathcal{P}, j \in S, \\
y^M_S \geq y, \text{ für alle } y \in \bigcap_{j \in S} C_j, S &\in \mathcal{P}, \\
\sum_{S \in \mathcal{P}} y^M_S &\geq -\sum_{S \in \mathcal{P}} v(S), \\
y^M_S \leq \sum_{j \in S} Sh_j(N,v) - v(S) \text{ für alle } S &\in \mathcal{P}.
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Fall 2:
Es gibt genau einen Spieler, der jede Gebühr von Makler M ablehnt (unkooperativer Spieler).
Es sei Spieler k mit $C_k = \emptyset$, der jede Gebühr des Maklers M ablehnt.
Da keine Einigung getroffen wird, erhält mittels der Umverteilung jeder Spieler $j \in N$ eine Endauszahlung von $\chi_j(N, v, \mathcal{P})$ und der Makler M erhält den Betrag 0.
Da der Makler nur dann profitabel abweichen könnte, falls die Einigung der Spieler eintritt und Spieler k jede Gebühr ablehnt, ist ein profitables Abweichen des Maklers nicht möglich. Ebenso gilt dies für alle Spieler aus $N \setminus \{k\}$.
Spieler k dagegen kann profitabel abweichen, indem er vom kategorischen Ablehnen aller Gebühren absieht und geringere Gebühren akzeptiert, sofern die Mitspieler aus der gleichen Komponente diese ebenfalls akzeptieren. Entsprechend muss gelten:

$$
y_{\mathcal{P}(k)} \geq \sum_{j \in \mathcal{P}(k)} Sh_j(N,v) - v(\mathcal{P}(k)) \text{ für alle } y_{\mathcal{P}(k)} \in \bigcap_{j \in \mathcal{P}(k)} C_j. \tag{4.19}
$$

Zusammengefasst muss in einem Nashgleichgewicht mit einem Vetospieler gelten:

$$
\begin{aligned}
C_k = \emptyset, \text{ für ein } k &\in N, \\
C_j \neq \emptyset \text{ für alle } j &\neq k, \\
y_{\mathcal{P}(k)} \geq \sum_{j \in \mathcal{P}(k)} Sh_j(N,v) - v(\mathcal{P}(k)) \text{ für alle } y_{\mathcal{P}(k)} &\in \bigcap_{j \in \mathcal{P}(k)} C_j.
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Fall 3:
Es gibt mind. zwei Spieler, die jede Gebühr des Maklers M ablehnen (Mehrere unkooperative Spieler).
Es sei $V := \{j \in N | C_j = \emptyset\}$ die Menge der Vetospieler und $|V| \geq 2$.
Dann ist es analog zu Fall 2 für die Spieler aus $N \setminus V$ und den Makler M nicht möglich, von ihrer Strategie profitabel abzuweichen.
Allerdings gilt dies nun auch für die Spieler aus V, da selbst bei Akzeptanz von einem der Vetospieler keine Einigung erzielt werden kann.
Für diesen Fall muss demnach nur gelten:

$$
\text{es existiert } V \subseteq N, |V| \geq 2 : C_j = \emptyset \text{ für alle } j \in V. \tag{4.21}
$$

Fall 4:
Es gibt genau einen Spieler, der die Gebühr des Maklers M nicht akzeptiert, der aber nicht alle Angebote strikt ablehnt (Blockierender Spieler).
Die Strategien führen nicht zur Akzeptanz der Kooperation und daher erhält jeder Spieler $j \in N$ eine Endauszahlung von $\chi_j(N, v, \mathcal{P})$ und der Makler M erhält den Betrag 0.
Es sei wiederum der Spieler $k \in N$ derjenige Spieler, der die Gebühr des Maklers M ablehnt.
Dann kann kein Spieler $j \in N \setminus \{k\}$ profitabel abweichen, da dies nicht zu einer Einigung führen kann.
Für den Makler M dagegen besteht die Möglichkeit zur profitablen Abweichung, falls er Gebühren $(y_S)_{S\in\mathcal{P}}$ fordern kann, sodass seine Endauszahlung echt positiv ist. Es muss demnach gelten:

$$\sum_{S\in\mathcal{P}} y_S \leq -\sum_{S\in\mathcal{P}} v(S) \text{ für alle } y_S \in \bigcap_{j\in S} C_j. \tag{4.22}$$

Spieler k dagegen kann profitabel abweichen, falls er hinreichend geringe Gebühren akzeptiert und seine Mitspieler, die sich in der gleichen Komponente befinden, diese Gebühr ebenfalls akzeptieren. Entsprechend muss gelten:

$$y_{\mathcal{P}(k)} \geq \sum_{j\in\mathcal{P}(k)} Sh_j(N, v) - v(\mathcal{P}(k)) \text{ für alle } y_{\mathcal{P}(k)} \in \bigcap_{j\in\mathcal{P}(k)} C_j. \tag{4.23}$$

Zusammengefasst muss demnach gelten:

$$\begin{aligned} C_j \neq \emptyset \text{ für alle } j \in N, \\ y^M_{\mathcal{P}(k)} \notin C_k \text{ für genau ein } k \in N, \\ \sum_{S\in\mathcal{P}} y_S \leq -\sum_{S\in\mathcal{P}} v(S) \text{ für alle } y_S \in \bigcap_{j\in S} C_j, \\ y_{\mathcal{P}(k)} \geq \sum_{j\in\mathcal{P}(k)} Sh_j(N, v) - v(\mathcal{P}(k)) \text{ für alle } y_{\mathcal{P}(k)} \in \bigcap_{j\in\mathcal{P}(k)} C_j. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Fall 5:
Mindestens zwei Spieler akzeptieren das Gebot nicht, kein Spieler lehnt alle Gebühren des Maklers M strikt ab (Mehrere Blockierende Spieler).
Nun sei $W := \{j \in N | y^M_{\mathcal{P}(j)} \notin C_j\}$ die Menge der Spieler, die die Gebühr nicht akzeptieren, wobei $|W| \geq 2$.
Dann kann analog zu Fall 3 keiner der Spieler aus N profitabel abweichen, da weiterhin nicht alle Spieler die Gebühren akzeptieren.
Der Makler M andererseits kann profitabel abweichen, falls es Gebote $(y_S)_{S\in\mathcal{P}}$ gibt, sodass

$$\begin{aligned} y_S \in \bigcap_{j\in S} C_j \text{ für alle } S \in \mathcal{P}, \\ \sum_{S\in\mathcal{P}} y_S > -\sum_{S\in\mathcal{P}} v(S). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Entsprechend wird daher für eine Teilstrategie eines Nashgleichgewichtes gefordert:

$$\begin{aligned} &\text{es existiert } W \subseteq N, |W| \geq 2 : y^M_{\mathcal{P}(j)} \notin C_j \text{ für alle } j \in W, \\ &\sum_{S \in \mathcal{P}} y_S \leq - \sum_{S \in \mathcal{P}} v(S) \text{ für alle } y_S \in \bigcap_{j \in S} C_j \text{ für alle } S \in \mathcal{P}. \end{aligned} \tag{4.26}$$

Theorem 4.2

Dann muss ein Nashgleichgewicht des in Kapitel 3 konstruierten Spieles eine der folgenden Bedingungen auf der vierten und fünften Stufe erfüllen:

- *Akzeptanz der Gebühren*

$$\begin{aligned} v(N) &\geq 0, \\ y^M_{\mathcal{P}(j)} &\in C_j \textit{ für alle } S \in \mathcal{P}, j \in S, \\ y^M_S &\geq y, \textit{ für alle } y \in \bigcap_{j \in S} C_j, S \in \mathcal{P}, \\ \sum_{S \in \mathcal{P}} y^M_S &\geq - \sum_{S \in \mathcal{P}} v(S), \\ y^M_S &\leq \sum_{j \in S} Sh_j(N, v) - v(S) \textit{ für alle } S \in \mathcal{P}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

- *Ein unkooperativer Spieler*

$$\begin{aligned} C_k &= \emptyset, \textit{ für ein } k \in N, \\ C_j &\neq \emptyset \textit{ für alle } j \neq k, \\ y_{\mathcal{P}(k)} &\geq \sum_{j \in \mathcal{P}(k)} Sh_j(N, v) - v(\mathcal{P}(k)) \textit{ für alle } y_{\mathcal{P}(k)} \in \bigcap_{j \in \mathcal{P}(k)} C_j. \end{aligned} \tag{4.28}$$

- *Mehrere unkooperative Vetospieler*

$$\textit{es existiert } V \subseteq N, |V| \geq 2 : C_j = \emptyset \textit{ für alle } j \in V. \tag{4.29}$$

- *Ein Blockierender Spieler*

$$\begin{aligned} C_j &\neq \emptyset \textit{ für alle } j \in N, \\ y^M_{\mathcal{P}(k)} &\notin C_k \textit{ für genau ein } k \in N, \\ \textit{für alle } S \in \mathcal{P} : \sum_{S \in \mathcal{P}} y_S &\leq - \sum_{S \in \mathcal{P}} v(S) \textit{ für alle } y_S \in \bigcap_{j \in S} C_j, \\ y_{\mathcal{P}(k)} &\geq \sum_{j \in \mathcal{P}(k)} Sh_j(N, v) - v(\mathcal{P}(k)) \textit{ für alle } y_{\mathcal{P}(k)} \in \bigcap_{j \in \mathcal{P}(k)} C_j. \end{aligned} \tag{4.30}$$

- *Mehrere Blockierende Spieler*

$$\begin{aligned} &\textit{es existiert } W \subseteq N, |W| \geq 2 : y^M_{\mathcal{P}(j)} \notin C_j \textit{ für alle } j \in W, \\ &\textit{für alle } S \in \mathcal{P} : \sum_{S \in \mathcal{P}} y_S \leq - \sum_{S \in \mathcal{P}} v(S) \textit{ für alle } y_S \in \bigcap_{j \in S} C_j. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Bemerkung
Man beachte, dass nur im ersten Fall die Endauszahlungen von denen des χ-Wertes abweichen können. Der Makler M sichert sich durch gewisse Abzüge von den teilspielperfekten Strategien die Zustimmung aller Komponenten. Trotzdessen kann die Auszahlung von M weiterhin Null betragen. In allen anderen Fällen stimmt die Endauszahlung der Spieler aus N mit dem χ-Wert überein. Da keine Kooperation der Komponenten stattfindet, beträgt die Auszahlung für den Makler M Null.

5 Auswertung

Diese Arbeit ermittelt nur unter der Annahme, dass die große Koalition des Kooperativen Spieles (N, v) einen echt positiven Wert erreicht, eine vollständige Implementierung des χ-Wertes in teilspielperfekten Gleichgewichten. Für den unsymmetrischen Fall, indem nicht alle Spieler einer Komponente das gleiche Gewicht besitzen, existiert kein teilspielperfektes Gleichgewicht. Ausgehend vom einzig möglichen teilspielperfekten Gleichgewicht wurde eine Strategie angegeben, bei der ein Spieler mit überdurchschnittlichem Gewicht eine unendlich hohe Auszahlung erreichen kann.
Die Wahl der Einschränkung, dass der Großen Koalition ausschließlich nichtnegative Werte zugeordnet werden sollen, erscheint im Kontext der Stabilitätsanalyse sinnvoll. Dieses Gebiet untersucht, welche Partitionen überhaupt gebildet werden und welche wiederum nicht, da es für einen Spieler rational erscheint, aus der entsprechenden Komponente auszutreten und sich stattdessen einer anderen Komponente anzuschließen.
Für eine weitere Untersuchung aller Nashgleichgewichte und teilspielperfekten Gleichgewichte würde sich insbesondere für den gewichteten χ-Wert eine Vereinfachung des Spieles anbieten. Statt die Umverteilung auf der vierten und fünften Stufen von einem Makler koordinieren zu lassen, kann auch stattdessen festgelegt werden, dass die Gebühr für eine Komponente $S \in \mathcal{P}$ immer der Differenz des Wertes der Komponente aus den ersten drei Stufen $\sum\limits_{j \in S} p_j$ und dem eigentlich Wert der Komponente $v(S)$ entspricht. Entsprechend würden die Nashgleichgewichte entfallen, in der Spieler jegliche Kooperation verweigern, unabhängig davon wie niedrig die entsprechenden Gebühren gewählt wurden. Dies würde letztendlich zur Eindeutigkeit des Auszahlungsvektors in jedem Nashgleichgewicht führen.

6 Anhang

Es werde nun schließlich der Satz von Motzkin bewiesen mittels des bekannteren Farkas-Lemmas bewiesen. Dabei wird sich eng an den Beweis des Satzes aus Borgwardt, 2001: [6] S.17 ff, orientiert.

Definition 6.1 (Orthogonales Komplement)
Es sei M eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ versehen mit dem Standardskalarprodukt.
Das orthogonale Komplement $M^\perp$ ist gegeben durch

$$M^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n | < x, y >= 0 \textit{ für alle } y \in M\}. \tag{6.1}$$

Proposition 6.2
Für Untervektorräume U und V des $\mathbb{R}^n$ gilt:

$$U \subseteq V \Rightarrow V^\perp \subseteq U^\perp, \tag{6.2}$$
$$(U^\perp)^\perp = U^\perp. \tag{6.3}$$

Theorem 6.3
Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) $Ax = b$ ist lösbar.

(ii) Für alle $y \in \mathbb{R}^m$ mit $A^T y = 0$, folgt $b^T y = 0$.

Beweis. $(i) \Rightarrow (ii)$
Sei $Ax = b$ und $A^T y = 0$, dann folgt $b^T y = (Ax)^T y = x^T A^T y = 0$.
$(ii) \Rightarrow (i)$
Es gelte $A^T y = 0 \Rightarrow b^T y = 0$, aber $b \notin Im(A)$.
Seien $a_1, \ldots, a_n$ die Spalten von A. Dann ist die Implikation äquivalent zu:

$$\operatorname{lin}(\{a_1, \ldots, a_n\})^\perp \subseteq \operatorname{lin}(\{b\})^\perp. \tag{6.4}$$

Mit den Regeln aus der vorhergehenden Proposition folgt

$$\operatorname{lin}(\{a_1, \ldots, a_n\}) = \left(\operatorname{lin}(\{a_1, \ldots, a_n\})^\perp\right)^\perp \supseteq \left(\operatorname{lin}(\{b\})^\perp\right)^\perp = \operatorname{lin}(\{b\}) \tag{6.5}$$

und damit die Lösbarkeit des Systems $Ax = b$. □

Bemerkung
Eine äquivalente Formulierung dieses Satzes ist die folgende: Es gilt genau eine der beiden folgenden Aussagen:

(i) Es existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$ mit $Ax = b$.

(ii) Es exisitiert ein $y \in \mathbb{R}^m$ mit $b^T y = 1$ und $A^T y = 0$.

Theorem 6.4 (Farkas-Lemma)
Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ gegeben.
Dann gilt genau eine der beiden folgenden Aussagen

(I) Das System

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ x &\geq 0, \\ x &\in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{6.6}$$

ist lösbar.

(II) Das System

$$\begin{aligned} A^T y &\le 0, \\ b^T y &> 0, \\ y &\in \mathbb{R}^m \end{aligned} \tag{6.7}$$

ist lösbar.

Beweis. Man zeige zunächst, dass nicht beide Aussagen zugleich gelten können.

$$0 < b^T y \overset{(i)}{=} (Ax)^T y = \underbrace{x^T}_{\overset{(i)}{\ge} 0} \underbrace{A^T y}_{\overset{(ii)}{\le} 0} \le 0 \tag{6.8}$$

und dies ist offensichtlich ein Widerspruch.
Nun zeige man noch, dass eine der beiden Aussagen auf jeden Fall gilt. Es wird $\neg(I) \Rightarrow (II)$ gezeigt.
Man unterscheide dabei zwei Fälle, falls das System $Ax = b, x \ge 0$ unlösbar ist.

1. Das System $Ax = b$ ist bereits nicht lösbar. Dann gibt es nach dem vorherigen Theorem 6.3 ein $y \in \mathbb{R}^n$, sodass

$$A^T y = 0, \tag{6.9}$$

$$b^T y = 1. \tag{6.10}$$

2. Es sei daher $Ax = b$ lösbar, aber eine der Komponenten von x ist negativ. Man beweise die Aussage:
   $Ax = b$ ist lösbar, aber es gibt keine Lösung mit $x \ge 0 \Rightarrow A^T y = 0, b^T y < 0$. Der Beweis erfolgt mittels Induktion über die Spaltenzahl n der Matrix A.
   Laut der Annahme kann man o.B.d.A fordern, dass $A \ne 0$ gilt, $A_{\cdot i}$ beschreibt die $i$te Spalte von A.
   Induktionsanfang: $n = 1$.
   $x = x_1$, $A = A_{\cdot 1}$
   $A_{\cdot 1} x = b$, dann muss laut Annahme $x < 0$ gelten. Weiterhin wird $b \ne 0$ erforderlich sein, da sonst ein $x \in A_{\cdot 1}^{\perp}$ eine entsprechende Lösung wäre.
   Dann liefert $y := b$ die Aussage (II), denn

$$y^T b = b^T b > 0, \tag{6.11}$$

$$A^T y = A^T A x < 0. \tag{6.12}$$

   Induktionsannahme:
   Die Aussage gelte für $l \le n - 1$ Spalten.
   Induktionsschritt:
   Es gibt kein $x \ge 0$, sodass $Ax = b$, also insbesondere gibt es kein $x = (x'|0) \ge 0$, sodass

$(A_{\cdot}| \dots |A_{\cdot n-1})x' = b$.
Nach Induktionsannahme gibt es dann ein $w \in \mathbb{R}^m$, sodass

$$(A_{\cdot 1}| \dots |A_{\cdot n-1})w \leq 0,\ b^T w \geq 0. \tag{6.13}$$

Hier gibt es nun zwei Fälle zu unterscheiden

a) $A_{\cdot n}^T w \leq 0$, dann liefert $y := w$ die Behauptung (II).

b) $A_{\cdot n}^T w > 0$, dann definiere:

$$\overline{A}_{\cdot i} = (A_{\cdot i}^T w)A_{\cdot n} - (A_{\cdot n}^T w)A_{\cdot i},\ i = 1, \dots, n, \tag{6.14}$$

$$\overline{b} = (b^T w)A_{\cdot n} - (A_{\cdot n}^T w)b. \tag{6.15}$$

Es gilt dann:

$$\begin{aligned}\overline{A}_{\cdot i}^T w &= ((A_{\cdot i}^T w)A_{\cdot n} - (A_{\cdot n}^T w)A_{\cdot i})^T w \\ &= (A_{\cdot i}^T w)A_{\cdot n}^T w - (A_{\cdot n}^T w)A_{\cdot i}^T w \\ &= 0. \\ \overline{b}^T w &= ((b^T w)A_{\cdot n} - (b^T w)A_{\cdot n})^T w \\ &= (b^T w)A_{\cdot n}^T w - (A_{\cdot n}^T w)b^T w \\ &= 0.\end{aligned} \tag{6.16}$$

Hier sei nun wieder die beiden folgenden Fälle zu unterscheiden[13]:

(i) $b \in cone(\overline{A}_{\cdot 1}, \dots, \overline{A}_{\cdot n-1})$,
dann existiert ein $p \in \mathbb{R}^m, p \geq 0$, sodass

$$\overline{b} = \sum_{i=1}^{n-1} p_i \overline{A}_{\cdot i}. \tag{6.17}$$

Man erhält

$$b = \frac{-1}{A_{\cdot n}^T w}\overline{b} + \frac{b^T w}{A_{\cdot n}^T w}A_{\cdot n} \tag{6.18}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{-p_i}{A_{\cdot n}^T w}\overline{A}_{\cdot i} + \frac{b^T w}{A_{\cdot n}^T w}A_{\cdot n} \tag{6.19}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{-p_i}{A_{\cdot n}^T w}\left[(A_{\cdot i}^T w)A_{\cdot n} - (A_{\cdot n}^T w)A_{\cdot i} w\right]\overline{A}_{\cdot i} + \frac{b^T w}{A_{\cdot n}^T w}A_{\cdot n} \tag{6.20}$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} p_i A_{\cdot i} + \left[\frac{b^T w}{A_{\cdot n}^T w} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{-p_i(A_{\cdot i}^T w)}{A_{\cdot n}^T w}\right]A_{\cdot n}. \tag{6.21}$$

Hier sind nun nach den Annahmen

$$\begin{aligned}p_i &\geq 0, i = 1, \dots, n-1, \\ A_{\cdot i}^T w &\leq 0, i = 1, \dots, n-1, \\ A_{\cdot n}^T w &>\end{aligned} \tag{6.22}$$

[13]cone(A) bezeichne die konvexe Kegelhülle von einer Menge von Vektoren.

alle Koeffizienten nichtnegativ, sodass dies der Annahme aus (II) widerspricht.

(ii) $b \notin cone(\overline{A}_{\cdot 1}, \ldots, \overline{A}_{\cdot n-1})$. Dann existiert laut Induktionsannahme ein $y \in \mathbb{R}^m$, sodass

$$\overline{A}_{\cdot i} v \geq 0, i = 1, \ldots, n-1, \tag{6.23}$$

$$\bar{b}^T v < 0. \tag{6.24}$$

Man setze $y = (-A_{\cdot n}^T v)w + (A_{\cdot n}^T w)v$ und dies ist dann das gesuchte $y \in \mathbb{R}^m$ für (II), denn

$$A_{\cdot n}^T y = (-A_{\cdot n}^T v) A_{\cdot n}^T w + (A_{\cdot n}^T w) A_{\cdot n}^T v = 0 \tag{6.25}$$

$$\overline{A}_{\cdot i}^T y = (-A_{\cdot n}^T v) \underbrace{\overline{A}_{\cdot i}^T w}_{=0} + \underbrace{(A_{\cdot n}^T w)}_{>0} \underbrace{\overline{A}_{\cdot i}^T v}_{\geq 0} \geq 0 \tag{6.26}$$

$$A_{\cdot i} = \frac{A_{\cdot i}^T w}{A_{\cdot n}^T w} A_{\cdot n} - \frac{\overline{A}_{\cdot i}}{A_{\cdot n}^T w}, \text{ für alle } i = 1, \ldots, n-1 \tag{6.27}$$

$$A_{\cdot i}^T y = \frac{A_{\cdot i}^T w}{A_{\cdot n}^T w} \underbrace{A_{\cdot n}^T y}_{=0} - \frac{1}{\underbrace{A_{\cdot n}^T w}_{>0}} \overline{A}_{\cdot i}^T y \geq 0, \text{ für alle } i = 1, \ldots, n-1 \tag{6.28}$$

$$\bar{b}^T y = (-A_{\cdot n}^T v) \underbrace{\bar{b}^T w}_{=0} + \underbrace{(A_{\cdot n}^T w)}_{>0} \underbrace{\bar{b}^T v}_{<0} < 0 \tag{6.29}$$

$$b = \frac{b^T w}{A_{\cdot n}^T w} A_{\cdot n} - \frac{1}{A_{\cdot n} w} \bar{b} \tag{6.30}$$

$$b^T y = \frac{b^T w}{A_{\cdot n}^T w} \underbrace{A_{\cdot n}^T y}_{=0} - \frac{1}{\underbrace{A_{\cdot n} w}_{>0}} \bar{b}^T y > 0 \tag{6.31}$$

und damit (II).

□

Theorem 6.5 (Satz von Motzkin)
Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^k$.
Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen:

(i) Das System

$$\begin{aligned} Ax &> 0, \\ Bx &\geq 0, \\ x &\in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{6.32}$$

ist lösbar.

(ii) Das System

$$\begin{aligned} &y^T A + z^T B = 0, \\ &y \in \mathbb{R}^m, y \geq 0, y \neq 0, \\ &z \in \mathbb{R}^k, z \geq 0 \end{aligned} \tag{6.33}$$

ist lösbar.

Beweis. Es sei $Ax > 0, Bx \geq 0, x \in \mathbb{R}^n$ lösbar. Dann ist die Lösbarkeit von $Ax > 0$ äquivalent zur Existenz eines $\delta > 0$ mit

$$(Ax)_i \geq \delta \text{ für alle } i = 1, \dots, m. \tag{6.34}$$

Äquivalent zur Lösbarkeit des Systems (i) ist daher die Lösbarkeit des folgenden Systems

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -A & \mathbb{1} \\ -B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \delta \end{pmatrix} &\leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ e_{n+1}^T \begin{pmatrix} x \\ \delta \end{pmatrix} &> 0. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Nach dem Farkaslemma 6.4 ist dies äquivalent zur Unlösbarkeit des Systems:

$$\begin{pmatrix} -A^T & -B^T \\ \mathbb{1}^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6.36}$$

$$y \in \mathbb{R}^m$$

$$z \in \mathbb{R}^k. \tag{6.37}$$

Nun ist $\mathbb{1}y = 1$ äquivalent zur Aussage $y \neq 0$, sodass entweder (i) oder (ii) gilt. □

7 Literatur

Literatur

[1] *Casajus,A. 2008,* Outside options, component efficiency, and stability, Games and Economic Behaviour(forthcoming)

[2] *Kongo, T., Funaki, Y., Tijs, S., 2007* New Axiomatizations and an Implementation of the Shapley Value

[3] *Casajus, A., Tutic, A., 2008* Nash bargaining, Shapley threats, and outside options

[4] *Osborne, M.J.,Rubinstein, A. 2001* A course in game theory

[5] *Pérez-Castrillo, D., Wettstein, D., 2000* Bidding for the surplus. A non-cooperative approach to the Shaple value

[6] *Borgwardt, K.H. 2001* Optimierung, Operations Research, Spieltheorie: mathematische Grundlagen

8 Erklärung

„Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur
unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe,

insbesondere sind wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet.
Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandlung auch nachträglich zur Aberkennung des Abschluss führen kann“.