

Kartenfärbung auf Flächen höheren Geschlechts

Benjamin Moll

27. August 2011

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Grundlagen	6
2.1	Graphentheorie	6
2.2	Topologie	13
2.3	Einbettung von Graphen in Flächen	14
3	Geschlecht von Graphen	22
3.1	Einführung	22
3.2	Unterteilung von Theorem 3.1.3	23
3.3	Gewichtete Graphen	26
3.4	Konstruktion von Triangulierungen aus gewichteten Graphen	27
4	Beweis von Theorem 3.1.3	31
4.1	$n \equiv 7 \pmod{12}$	31
4.2	$n \equiv 10 \pmod{12}$	32
4.3	$n \equiv 4 \pmod{12}$	35
4.4	$n \equiv 1 \pmod{12}$	37
4.5	$n \equiv 9 \pmod{12}$	40
4.6	$n \equiv 11 \pmod{12}$	42
4.7	$n \equiv 2 \pmod{12}$	50
4.8	$n \equiv 8 \pmod{12}$	54
	4.8.1 s gerade	55
	4.8.2 s ungerade	56
	4.8.3 Bestimmung des Geschlechts	57
4.9	Lösungen höheren Index'	59
4.10	$n \equiv 3 \pmod{12}$	63
4.11	$n \equiv 5 \pmod{12}$	64
4.12	$n \equiv 6 \pmod{12}$	65
4.13	$n \equiv 0 \pmod{12}$	71
5	Zusammenfassung	77

A	Spezialfälle	78
A.1	K_{13}	78
A.2	K_{11}	79
A.3	K_{14}	79
A.4	K_{20}	80
A.5	K_{18}	81

1 Einleitung

Auf politischen Landkarten werden für gewöhnlich aneinandergrenzende Länder mit unterschiedlichen Farben gefärbt. Allerdings haben durchaus verschiedene Länder die gleiche Farbe, wenn sie keine gemeinsame Grenze haben. Doch wie viele verschiedene Farben benötigt man mindestens, um eine Karte nach diesen Regeln zu färben? Mit dieser Frage beschäftigten sich Mathematiker auf der ganzen Welt, seitdem Augustus DeMorgan am 23. Oktober 1852 einen Brief an Sir William Rowan Hamilton verfasste, in dem er schrieb, dass sein Student Frederick Guthrie ihm das Problem gestellt habe und DeMorgan nicht in der Lage gewesen sei, es zu lösen. Auf den ersten Blick scheint es so, als wenn die Antwort auf diese Frage sehr stark von der Lage der Länder zueinander abhängt. Es wurde aber von den beiden Mathematikern Appel und Haken in [1] gezeigt, dass für jede Landkarte in der Ebene *immer* vier Farben ausreichen. Dieser Beweis kommt allerdings nicht ohne intensiven Computereinsatz aus, da Appel und Haken das Problem nur auf die Untersuchung von 633 Konfigurationen beschränken konnten, welche beinahe unmöglich von Hand nachzurechnen sind.

In dieser Arbeit geht es um die Verallgemeinerung dieses Vierfarbensatzes auf Flächen höheren Geschlechts. Ziel ist es also, zu einer gegebenen topologischen Fläche die kleinste Zahl an Farben zu finden, so dass man jede auf dieser Fläche mögliche Landkarte mit diesen Farben einfärben kann, ohne dass zwei aneinandergrenzende Länder die gleiche Farbe erhalten. Als Beispiel betrachten wir dazu den Torus, vorstellbar als Oberfläche eines Donuts oder eines Fahrradschlauchs. Diese Fläche können wir in zusammenhängende Gebiete unterteilen und uns wiederum fragen, wie viele Farben zum Färben nötig sind, damit keine zwei aneinander grenzenden Gebiete dieselbe Farbe erhalten (vgl. Abb. 1.1). Interessanterweise stellt sich heraus, dass diese Frage für alle Flächen außer der Kugel ohne Computereinsatz beantwortbar ist. Dies wurde von Ringel in [8] vollständig für jede Fläche außer der Kugel bewiesen und zwar bevor der Beweis des Vierfarbensatzes erbracht worden war.

Im ersten Kapitel werden zunächst einige Grundlagen aus der Graphentheorie und der Topologie zusammengestellt. Diese werden dann benutzt, um jeder Karte einen Graphen zuzuordnen und die Eigenschaft der Färbbarkeit auf diesen Graphen zu untersuchen. Ferner werden die nötigen Hilfsmittel zur Darstellung einer Fläche und zur Lösung der Frage, wie viele Farben zum Färben eines Graphen (bzw. einer Karte) auf dieser Fläche maximal nötig sind, bereitgestellt.

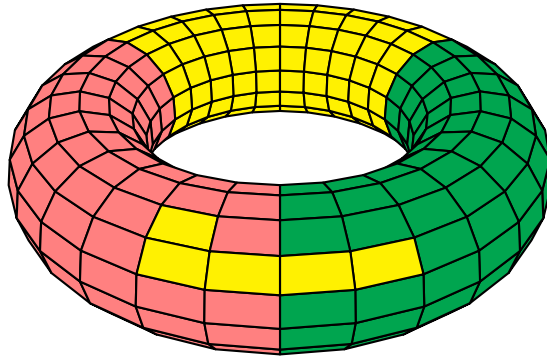


Abbildung 1.1: Eine Karte mit vier Ländern auf einem Torus

Die zusammengestellten Methoden und Aussagen werden schließlich im dritten Kapitel zusammengetragen. Dort wird eine obere Schranke für die Zahl der Farben zur Färbung *jeder* Karte auf einer Fläche angegeben, welche in [5] ermittelt wurde. Insbesondere hängt diese Schranke nicht von der Karte sondern nur von der Fläche ab. Desweiteren werden wir das zentrale Theorem dieser Arbeit formulieren, und zwar dass diese obere Schranke für jede Fläche auch angenommen wird, d.h. es gibt für jede Fläche einen Graphen (bzw. eine Karte), die nicht mit weniger Farben färbbar ist. Dazu verwenden wir Karten, in denen jedes Land an jedes andere grenzt. Offensichtlich muss in so einer Karte jedes Land eine andere Farbe erhalten. Es stellt sich dann heraus, dass die maximale Anzahl an paarweise aneinander grenzenden Ländern auf einer Fläche gerade gleich der vorher ermittelten oberen Schranke ist.

Im vierten Kapitel wird schließlich der Beweis des Theorems über die Unterteilung in 12 verschiedene Fälle geführt. Dabei ist die Reihenfolge der Fälle so gewählt, dass in späteren Fällen auf frühere Ergebnisse zurückgegriffen wird, weswegen die Reihenfolge auf den ersten Blick recht willkürlich erscheint. Die unterschiedlichen Fälle sind außerdem teilweise von verschiedenen Autoren auf verschiedenen Wegen gelöst worden. Es ist hier versucht worden, diese Methoden so weit wie möglich zu vereinheitlichen.

Die allgemeinen Methoden schlagen für einige Graphen mit einer kleinen Anzahl an Knoten fehl, weswegen der Vollständigkeit halber für diese Graphen im Anhang individuelle Lösungen angegeben sind.

2 Grundlagen

2.1 Graphentheorie

Definition 2.1.1: Ein *Graph* G ist ein Paar (V, E) bestehend aus einer endlichen *Knotenmenge* $V \neq \emptyset$ und einer *Kantenmenge* E , welche je nach Art des Graphen eine unterschiedliche Gestalt haben kann:

- Ist $E \subseteq \{\{P_1, P_2\} \mid P_1, P_2 \in V, P_1 \neq P_2\}$, so heißt G *ungerichteter Graph*.
- Ist $E \subseteq V \times V \setminus \{(P, P) \mid P \in V\}$, so heißt G *gerichteter Graph*.

Im Folgenden gehen wir stets von einem ungerichteten Graphen aus, sofern nicht explizit von gerichteten Graphen gesprochen wird.

Definition 2.1.2: Mit der *Valenz* $\text{val}(P)$ eines Knotens P bezeichnen wir die Zahl der Kanten, welche an P grenzen. Ferner setzen wir für einen Graphen $G = (V, E)$ die Werte

$$\alpha_0(G) := |V| \quad \text{und} \quad \alpha_1(G) := |E|$$

für die Anzahl der Knoten bzw. Kanten in G . Sofern klar ist, um welchen Graphen es sich gerade handelt, schreiben wir auch kurz α_0 bzw. α_1 .

Definition 2.1.3: Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{N}_0$ heißt *Knotenfärbung* oder kurz *Färbung*. Man nennt f *gültig*, falls für alle $\{P_1, P_2\} \in E$ gilt: $f(P_1) \neq f(P_2)$.

Definition 2.1.4: Seien $G = (V, E)$ ein Graph und $k \in \mathbb{N}$. G heißt *k-färbbar*, falls es eine gültige Färbung $f : V \rightarrow \mathbb{N}_0$ gibt mit $f(P) < k$ für alle $P \in V$.

Anschaulich stellen wir uns unter einer gültigen Knotenfärbung das Folgende vor: Wenn wir jeden Knoten in einem Graphen mit einer Farbe färben, dann dürfen Knoten, welche durch eine Kante verbunden sind, dabei nicht die gleiche Farbe erhalten. Ein Graph ist dann *k-färbbar*, wenn dies unter Verwendung von k verschiedenen Farben möglich ist.

Wir können jetzt jede beliebige Karte auf die folgende Art und Weise als Graph $G = (V, E)$ darstellen:

$$V = \{L \mid L \text{ ist Land auf der Karte}\},$$

$$E = \{\{A, B\} \mid \text{Land } A \text{ grenzt an Land } B\}.$$

Eine Färbung von G entspricht dann gerade einer Färbung der Landkarte. Ist die Färbung von G gültig, dann erfüllt die entsprechende Kartenfärbung gerade unsere anfangs gestellte Bedingung, dass aneinandergrenzende Länder unterschiedliche Farben erhalten sollen.

Die wichtigste Klasse von Graphen, die uns in dieser Arbeit interessieren sind dabei die Folgenden:

Definition 2.1.5: Sei $I := \{1, \dots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dann nennen wir den Graphen

$$G = (I, \{\{P_1, P_2\} \mid P_1, P_2 \in I, P_1 \neq P_2\})$$

den *vollständigen Graph der Ordnung n* und bezeichnen ihn mit K_n .

vollständigen
Graph

Bemerkung 2.1.6: Der K_n ist also gerade der Graph mit n Knoten, in dem jeder Knoten mit jedem anderen benachbart ist.

Definition 2.1.7: Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Die kleinste Zahl $k \in \mathbb{N}$, so dass G k -färbbar ist, heißt die *chromatische Zahl* von G und wird mit $\chi(G)$ bezeichnet.

chromatische
Zahl

Die chromatische Zahl eines Graphen sagt uns also gerade, wie viele verschiedene Farben für eine gültige Knotenfärbung mindestens benötigt werden.

Definition 2.1.8: Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph. Eine *Rotation* eines Knoten $P_i \in V$ ist eine Permutation σ_{P_i} der Menge

Rotation

$$\{Q \in V \mid \{P_i, Q\} \in E\},$$

d. h. der mit P_i benachbarten Knoten.

Ein *Rotationssystem* σ des Graphen G ist ein Tupel von Rotationen

Rotationssystem

$$\sigma := (\sigma_{P_1}, \dots, \sigma_{P_{\alpha_0}}),$$

d. h. ein Rotationssystem besteht aus einer Rotation für jeden Knoten von G . Wir schreiben dann auch (G, σ) um einen Graph mit Rotationssystem zu beschreiben.

Bemerkung 2.1.9: Um ein Rotationssystem anzugeben beschriftet man in der Regel die Knoten des Graphen mit Elementen einer endlichen Gruppe und notiert anschließend zeilenweise die jeweiligen Rotationen der Knoten. In Abbildung 2.1(a) ist solch ein Schema für ein Rotationssystem des K_4 dargestellt.

In einer graphischen Repräsentation eines Graphen kann man ein Rotationssystem darstellen indem man für jeden Knoten markiert, ob die Permutation die benachbarten Knoten im Uhrzeigersinn (\bullet) oder entgegen dem Uhrzeigersinn (\circ) durchläuft. Solche Darstellungen des gleichen Rotationssystems für K_4 sind in Abbildung 2.1(b) und (c) zu sehen.

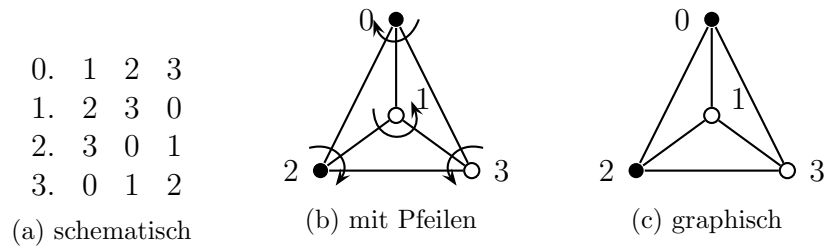


Abbildung 2.1: Drei Darstellungsformen für Rotationssysteme von Graphen

Definition 2.1.10: Ein *Weg* in einem Graphen $G = (V, E)$ ist eine Folge

Weg

$$P_0 a_1 P_1 a_2 \cdots a_t P_t$$

derart, dass folgende Bedingungen gelten:

- $P_i \in V$ für alle $i = 0, \dots, t$ und
- $a_i = (P_{i-1}, P_i) \in E$ in gerichteten bzw. $a_i = \{P_{i-1}, P_i\} \in E$ in ungerichteten Graphen für alle $i = 1, \dots, t$.

Die *Länge eines Weges* wird definiert als die Anzahl der Kanten, welche im Weg auftauchen, im obigen Fall also gerade t . Ein Weg, in dem alle auftretenden Knoten verschieden sind, heißt *Pfad*. Ein Weg, in dem Anfangs- und Endknoten übereinstimmen, also $P_0 = P_t$ gilt, heißt *Zyklus*. Stimmen in diesem Weg *nur* Anfangs- und Endknoten überein und alle anderen sind verschieden, so sprechen wir von einem *Kreis*, welchen wir auch als

Länge eines Weges
Pfad
Zyklus
Kreis

$$P_0 a_1 P_1 \cdots P_t a_t$$

schreiben, da der Weg nach a_t wieder von vorne bei P_0 beginnt. Ein Graph, in dem es für jedes Paar von Knoten (P, Q) einen Weg gibt, der P und Q verbindet, nennen wir *zusammenhängend*. Da es in den von uns betrachteten Graphen von Knoten P zu Knoten Q immer nur höchstens eine Kante (jedoch durchaus mehrere Wege) geben kann, können wir in der Beschreibung eines Weges die Kanten (oder die Knoten) weglassen und er bleibt trotzdem eindeutig bestimmt:

zusammenhängend

$$P_0 P_1 \cdots P_t \quad (\text{bzw.} \quad a_1 a_2 \cdots a_t).$$

Dies wird im Folgenden nützlich sein, um Wege einfacher darzustellen.

Definition 2.1.11: Sei (G, σ) mit $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit Rotationssystem und $P_0 \in V$ ein Knoten von G . Sei ferner $P_1 \in V$ ein mit P_0 benachbarter Knoten. Dann *induziert* das Rotationssystem σ durch das Paar (P_0, P_1) einen *Zyklus*

induzierter Zyklus

$$P_0 P_1 \cdots P_t$$

in G mit der induktiven Definition

$$P_{i+1} := \sigma_{P_i}(P_{i-1}),$$

wobei t die kleinste Zahl ist, so dass $P_{t+1} = P_0$ und $P_{t+2} = P_1$ ist.

Bemerkung 2.1.12: Die Forderung, dass sowohl $P_{t+1} = P_0$ als auch $P_{t+2} = P_1$ sein muss ist wichtig, da ein Knoten in einem induzierten Zyklus durchaus mehrfach auftreten kann, die Rotation des Knotens dabei aber unterschiedliche Nachfolgerknoten ergeben kann. Da die Knotenmenge V stets endlich ist, hat jeder induzierte Zyklus eine endliche Länge.

Beispiel 2.1.13: In einer graphischen Darstellung eines Graphen mit Rotationssystem stelle man sich die Kanten als Straßen und die Knoten als Kreisverkehre vor. Dabei gibt das Rotationssystem an, ob die Kreisverkehre im oder gegen den Uhrzeigersinn zu befahren sind. Der von σ durch (P_0, P_1) induzierte Zyklus entspricht dann gerade der Route, die ein Autofahrer nehmen würde, wenn er auf der Straße von P_0 in Richtung P_1 startet und in jedem Kreisverkehr jeweils die erste Ausfahrt nimmt. Im Fall, dass ein Knoten P_i dabei nur Valenz 1 besitzt, bedeutet das, dass der Fahrer den Kreisverkehr auf der gleichen Straße wieder verlässt, auf der er gekommen ist, allerdings nun in der anderen Richtung. Ein Zyklus ist in dieser Anschauung dann abgeschlossen, wenn der Autofahrer wieder auf die anfängliche Straße in die ursprüngliche Richtung einbiegt.

Lemma 2.1.14: Sei (G, σ) mit $G = (V, E)$ ein Graph mit Rotationssystem. Dann taucht jede Kante $e \in E$ entweder zweimal in einem Zyklus oder je einmal in 2 Zyklen auf.

Beweis: Seien $P, Q \in e$ die beiden Endpunkte von e . Dann kommt e nur in dem von (P, Q) und in dem von (Q, P) induzierten Zyklus vor. Stimmen diese Zyklen überein, so erhalten wir e doppelt in einem Zyklus, sonst jeweils einmal in den 2 Zyklen. \square

Definition 2.1.15: Seien $G = (V, E)$ ein Graph und $P \in V$ ein Knoten von G . Mit $G - P$ bezeichnen wir den Teilgraphen (V', E') von G mit

$$V' = V \setminus \{P\} \quad \text{und} \quad E' = \{e \in E \mid P \notin e\}.$$

Analog bezeichnet $G - e$ für ein $e \in E$ den Teilgraphen (V'', E'') mit

$$E'' = E \setminus \{e\} \quad \text{und} \quad V'' = \{P \in V \mid \exists f \in E'' : P \in f\}.$$

Induktiv definieren wir damit dann auch $G - \{P_1, \dots, P_n\}$ bzw. $G - \{e_1, \dots, e_n\}$.

Definition 2.1.16: Sei (G, σ) mit $G = (V, E)$ ein Graph mit Rotationssystem und $P \in V$ ein Knoten von G . Dann induziert σ ein Rotationssystem auf $G - P$, indem P in jeder der Rotationen von σ weggelassen wird. Es ist üblich, dieses Rotationssystem ebenfalls mit σ zu bezeichnen, d.h. $(G - P, \sigma)$ ist wieder ein Graph mit Rotationssystem. Analog induziert σ auch ein Rotationssystem auf $G - e$ für $e = \{P, Q\} \in E$ indem in der Rotation von P der Knoten Q weggelassen wird und umgekehrt.

Bemerkung 2.1.17: In den Worten von Beispiel 2.1.13 ergibt sich das Rotationssystem von $G - P$ aus σ dadurch, dass alle Straßen die von P ausgehen gesperrt werden und damit von den angrenzenden Kreisverkehren nicht mehr befahren werden dürfen. Die „erste Ausfahrt“ ist dann als die erste befahrbare Ausfahrt zu verstehen. Das Rotationssystem von $G - e$ ergibt sich einfach dadurch, dass die Straße e gesperrt wird.

Definition 2.1.18: Sei (G, σ) ein Graph mit Rotationssystem. Dann bezeichnen wir mit $\alpha_2(G, \sigma)$ die Anzahl der unterschiedlichen von σ induzierten Zyklen. Ferner definieren wir

$$\begin{aligned}\mu(G) &:= \max_{\sigma} \alpha_2(G, \sigma), \\ \nu(G) &:= \min_{\sigma} \alpha_2(G, \sigma)\end{aligned}$$

und wir nennen σ eine maximale (bzw. minimale) Rotation von G , wenn $\alpha_2(G, \sigma) = \mu(G)$ (bzw. $\alpha_2(G, \sigma) = \nu(G)$) gilt.

Satz 2.1.19: Sei (G, σ) mit $G = (V, E)$ ein Graph mit Rotationssystem und $e \in E$ eine Kante von G . Dann unterscheiden sich $\alpha_2(G, \sigma)$ und $\alpha_2(G - e, \sigma)$ um maximal 1.

Beweis: Sei $e = \{P, Q\}$. Dann stimmen alle Zyklen, die e nicht durchlaufen, in (G, σ) und $(G - e, \sigma)$ überein.

1. Fall: $\text{val}(P) = 1$ oder $\text{val}(Q) = 1$. Dann taucht e nur in einem einzigen Zyklus von (G, σ) auf und dieser Zyklus wird in $G - e$ zu einem Zyklus, in dem PQ weggelassen wurde. Damit gilt $\alpha_2(G, \sigma) = \alpha_2(G - e, \sigma)$.
2. Fall: $\text{val}(P) > 1$, $\text{val}(Q) > 1$ und e taucht in (G, σ) in genau einem Zyklus auf. Dann wird dieser Zyklus durch das Entfernen von e in zwei Zyklen aufgeteilt (vgl. Abbildung 2.2 (a) & (b)), d.h. $\alpha_2(G, \sigma) = \alpha_2(G - e, \sigma) - 1$.
3. Fall: $\text{val}(P) > 1$, $\text{val}(Q) > 1$ und e taucht in (G, σ) in zwei Zyklen auf. Dann werden diese Zyklen durch das Entfernen von e zu einem Zyklus vereinigt (vgl. Abbildung 2.2 (c) & (d)), d.h. $\alpha_2(G, \sigma) = \alpha_2(G - e, \sigma) + 1$.

□

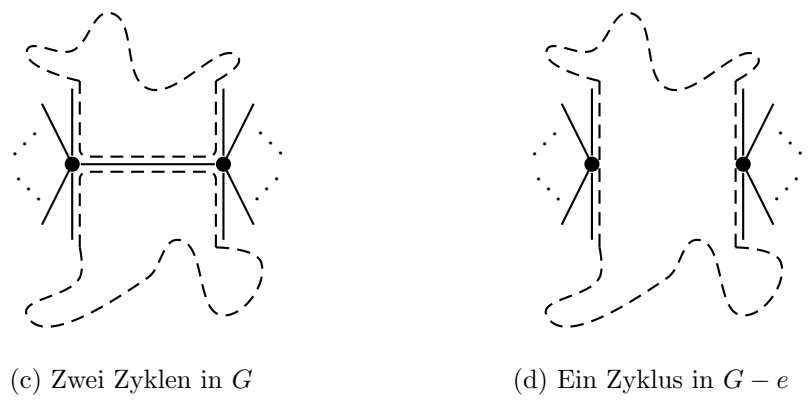
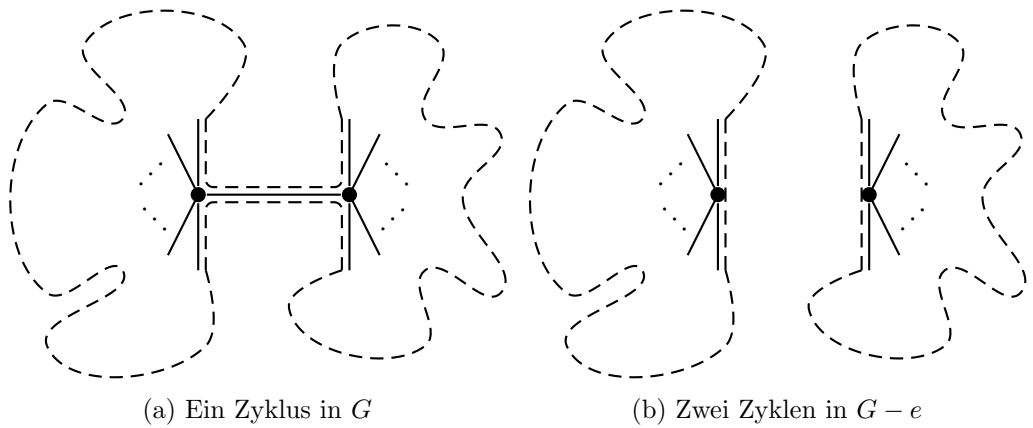


Abbildung 2.2: Aufteilung und Vereinigung von Zyklen in $G - e$

Folgerung 2.1.20: Für alle zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ gilt stets $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2(G, \sigma) \equiv 0 \pmod{2}$.

Beweis: Es gibt nur eine Rotation des $K_1 = (\{0\}, \emptyset)$ und diese erfüllt

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2(G, \sigma) = 1 - 0 + 1 = 2 \equiv 0 \pmod{2}.$$

Ist $G = (V, E) \neq K_1$ ein zusammenhängender Graph, so gibt es ein $e \in E$, so dass $G - e = (V', E')$ ein echter zusammenhängender Teilgraph von G ist. Dann gilt, dass $|E'| = |E| - 1$ und im 1. Fall des Beweis von Satz 2.1.19 gilt $\alpha_2(G, \sigma) = \alpha_2(G - e, \sigma)$ und $|V'| = |V| - 1$. Im 2. und 3. Fall gilt $\alpha_2(G, \sigma) = \alpha_2(G - e, \sigma) \pm 1$ und $|V'| = |V|$. In jedem Fall gilt also

$$|V| - |E| + \alpha_2(G, \sigma) \equiv |V'| - |E'| + \alpha_2(G - e, \sigma) \pmod{2}$$

und induktiv zeigt dies die Behauptung. □

Definition 2.1.21: Ein Rotationssystem σ eines Graphen G heißt *Triangulierung*, wenn alle von σ induzierten Zyklen die Länge 3 besitzen.

Triangulierung

Bemerkung 2.1.22: Wegen Lemma 2.1.14 ist offensichtlich, dass für einen zusammenhängenden Graphen eine Triangulierung immer eine maximale Rotation von G ist.

Satz 2.1.23: *Der K_n kann nur dann eine Triangulierung besitzen, wenn*

$$n \equiv 0, 3, 4, 7 \pmod{12}.$$

Beweis: Angenommen σ sei eine Triangulierung des K_n . Dann folgt damit, dass $3\alpha_2(K_n, \sigma) = 2\alpha_1$. Ferner gilt $\alpha_0 = n$ und $\alpha_1 = \frac{n(n-1)}{2}$. Damit ergibt sich nach Folgerung 2.1.20

$$\begin{aligned} 6\alpha_0 - 6\alpha_1 + 6\alpha_2(K_n, \sigma) &\equiv 0 \pmod{12} \\ \Leftrightarrow 6\alpha_0 - 2\alpha_1 &\equiv 0 \pmod{12} \\ \Leftrightarrow 6n - n(n-1) &\equiv 0 \pmod{12} \\ \Leftrightarrow n(7-n) &\equiv 0 \pmod{12}. \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist nur korrekt für $n \equiv 0, 3, 4, 7 \pmod{12}$. □

Definition 2.1.24: Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ zwei Graphen. G und G' heißen *isomorph*, wenn es eine Bijektion $f : V \rightarrow V'$ gibt, sodass

isomorph

$$\{\{f(v), f(w)\} \mid \{v, w\} \in E\} = E'$$

für ungerichtete bzw.

$$\{(f(v), f(w)) \mid (v, w) \in E\} = E'$$

für gerichtete Graphen gilt.

2.2 Topologie

Da es in dieser Arbeit um die Kartenfärbung auf geschlossenen Flächen geht, muss erst einmal definiert werden, was unter einer geschlossenen Fläche verstanden wird. Vergleiche hierzu auch [5].

Definition 2.2.1: Sei X eine Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ heißt *Topologie*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Topologie

1. $\emptyset, X \in \mathcal{O}$.
2. Für alle $X, Y \in \mathcal{O}$ gilt auch immer: $X \cap Y \in \mathcal{O}$.
3. Für jede Familie $(A_i)_{i \in I}$ mit $A_i \in \mathcal{O}$ gilt auch immer: $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{O}$.

In diesem Fall nennen wir das Paar (X, \mathcal{O}) einen *topologischen Raum*.

topologischer
Raum

Definition 2.2.2: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann definieren wir $\overset{\circ}{A}$ als die größte offene Menge $O \in \mathcal{O}$ mit $O \subseteq A$ und nennen $\overset{\circ}{A}$ das *Innere von A*. Analog definieren wir \overline{A} als die kleinste abgeschlossene Menge $K \supseteq A$ und nennen \overline{A} den *Abschluß von A*. Ferner setzen wir $\partial A := \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ und nennen ∂A den *Rand von A*.

Innere
Abschluß
Rand

Definition 2.2.3: Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) zwei topologische Räume. Ferner sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung. Wir sagen f ist *stetig*, wenn für alle $A \in \mathcal{O}_Y$ gilt, dass $f^{-1}(A) \in \mathcal{O}_X$.¹ stetig

Definition 2.2.4: Seien (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) zwei topologische Räume. Eine bijektive Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt *Homöomorphismus*, wenn sowohl f als auch f^{-1} stetig sind. Wir nennen (X, \mathcal{O}_X) und (Y, \mathcal{O}_Y) *homöomorph*, wenn es einen Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$ gibt. Homöomor-
phismus
homöomorph

Definition 2.2.5: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Wenn jede offene Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i, \quad \text{mit } U_i \in \mathcal{O}, \quad I \text{ beliebige Indexmenge,}$$

eine endliche Teilüberdeckung $X = U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ mit $i_1, \dots, i_n \in I$ besitzt, so heißt (X, \mathcal{O}) *kompakt*.

kompakt

Definition 2.2.6: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Wenn für alle $x, y \in X$ eine stetige Abbildung $f : [0, 1] \rightarrow X$ mit $f(0) = x, f(1) = y$ existiert, so heißt X *(weg-)zusammenhängend*.

zusammen-
hängend

Definition 2.2.7: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum. Dann nennen wir jede maximale zusammenhängende Teilmenge $A \subseteq X$ eine *Zusammenhangskomponente von X*.

Zusammen-
hangskompo-
nente

¹Dabei ist $f^{-1}(A) := \{x \in X \mid f(x) \in A\}$ die Urbildmenge von A .

Definition 2.2.8: Sei (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum, der zu einer Teilmenge des \mathbb{R}^n für ein $n \in \mathbb{N}$ homöomorph ist.² Wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung besitzt, die zur offenen Kreisscheibe

$$\mathring{D}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

homöomorph ist, dann heißt X eine *topologische Fläche*. Ist (X, \mathcal{O}) zusätzlich kompakt und zusammenhängend, so heißt X *geschlossene Fläche*.

topologische
Fläche
geschlossene
Fläche

Definition 2.2.9: Seien (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum, \sim eine Äquivalenzrelation auf X und $\pi : X \rightarrow X/\sim$, $\pi(x) = [x]_\sim$ die natürliche Projektionsabbildung. Dann definieren wir auf X/\sim eine Topologie \mathcal{O}' durch

$$A \in \mathcal{O}' :\Leftrightarrow \pi^{-1}(A) \in \mathcal{O}$$

und nennen diese Topologie die *Quotiententopologie* auf X/\sim .

Quotienten-
topologie

Definition 2.2.10: Sei $([0, 1], \mathcal{O})$ das Einheitsintervall mit der vom metrischen Raum \mathbb{R} induzierten Topologie. Dann heißt jede zu $([0, 1], \mathcal{O})$ homöomorphe Teilmenge $C \in \mathbb{R}^2$ ein *Jordanbogen*. Eine zu $([0, 1]_{/0 \sim 1}, \mathcal{O}')$ mit der Quotiententopologie \mathcal{O}' homöomorphe Teilmenge $C \in \mathbb{R}^2$ heißt *Jordankurve*.

Jordanbogen
Jordankurve

Bemerkung 2.2.11: Sei C ein Jordanbogen. Dann gibt es per Definition einen Homöomorphismus $f : [0, 1] \rightarrow C$. Wir können also jedem Punkt $P \in C$ eindeutig einen Parameterwert $t \in [0, 1]$ zuordnen, so dass $f(t) = P$ gilt. In Begriffen der Differentialgeometrie ist ein Jordanbogen also eine parametrisierte Kurve. Wir sagen dann, dass der Jordanbogen die Punkte $f(0)$ und $f(1)$ miteinander verbindet.

Einen Homöomorphismus $f : [0, 1]_{/0 \sim 1} \rightarrow C$ können wir auch als eine Funktion $f : [0, 1] \rightarrow C$ mit $f(0) = f(1)$ auffassen. Damit ist eine Jordankurve dann eine geschlossene parametrisierte Kurve.

2.3 Einbettung von Graphen in Flächen

Definition 2.3.1: Sei D^2 die abgeschlossene Kreisscheibe. Wir unterteilen ihren Umfang durch $r \geq 2$ Punkte, genannt *Ecken*, in r Segmente, genannt *Seiten*. Das so entstehende Objekt und jeden dazu homöomorphen topologischen Raum bezeichnen wir als *topologisches r -Eck* bzw. allgemein als *topologisches Polygon*.

Ecken
Seiten
Polygon

Bemerkung 2.3.2: Für $r \geq 3$ kommt diese Definition der geometrischen Vorstellung eines Polygons nahe, denn jedes geometrische r -Eck ist homöomorph zu D^2 und Ecken und Seiten können durch den entsprechenden Homöomorphismus aufeinander

²Die Topologie des \mathbb{R}^n ist dabei die Familie der offenen Mengen des normierten Raums $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.

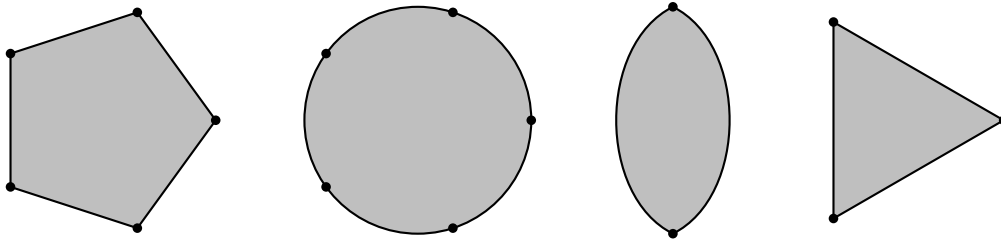


Abbildung 2.3: Beispiele für topologische Polygone

abgebildet werden. Lediglich $r = 2$ liefert uns ein Objekt, welches wir uns eher schwer als Polygon vorstellen können, denn schließlich gibt es geometrisch kein 2-Eck. In der Tat kann man ein solches 2-Eck nur mit runden Kanten zeichnen (s. Abb. 2.3).

Wir werden nun auch den Begriff der Triangulierung für Flächen definieren. Dieser ist von der Triangulierung eines Graphen unbedingt zu unterscheiden.

Definition 2.3.3: Seien (X, \mathcal{O}) eine topologische Fläche und $(\Delta_i)_{i \in I}$ eine abzählbare Familie topologischer Dreiecke. Eine *Triangulierung* von X ist eine abzählbare Familie $(U_i, \sigma_i)_{i \in I}, U_i \subseteq X$, mit den folgenden Eigenschaften:

Triangulierung

1. $\sigma_i : U_i \rightarrow \Delta_i$ sind Homöomorphismen für alle $i \in I$,
2. für $i \neq j$ ist $U_i \cap U_j$ entweder leer, eine komplette Seite oder eine Ecke der jeweiligen Dreiecke, und
3. $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Dabei sind Ecken bzw. Seiten von U_i gerade als Urbilder der Ecken bzw. Seiten von Δ_i unter σ_i zu verstehen. Wir sagen $(U_i, \sigma_i)_{i \in I}$ ist eine *endliche Triangulierung*, wenn I eine endliche Menge ist.

endliche Triangulierung

Um die Existenz einer Triangulierung für jede Fläche zu zeigen benötigen wir die folgenden grundlegenden Sätze über Jordankurven.

Satz 2.3.4 (Jordan'scher Kurvensatz): Sei $C \subset \mathbb{R}^2$ eine Jordankurve. Dann besteht $\mathbb{R}^2 \setminus C$ aus zwei Zusammenhangskomponenten, von denen genau eine beschränkt (das Innere von C , $\mathcal{I}(C)$) und die andere unbeschränkt (das Äußere von C , $\mathcal{A}(C)$) ist.

Beweis: vgl. [11, Thm. 2.12]. □

Satz 2.3.5 (Schoenflies): Sei C eine Jordankurve, I ihr Inneres und A ihr Äußeres. Dann gibt es für jeden Punkt $P \in I$ ($P \in A$) und jeden Punkt $Q \in C$ einen Jordanbogen J , der P mit Q verbindet, so dass $J \setminus \{Q\} \subset I$ ($J \setminus \{Q\} \subset A$).

Beweis: vgl. [9, §12]. □

Bemerkung 2.3.6: Der Satz von Schoenflies liefert uns damit gerade die Aussage, dass wir einen beliebigen Punkt P im Inneren einer Jordankurve mit einem beliebigen Punkt Q auf der Jordankurve durch einen Jordanbogen verbinden können, der vollständig im Inneren der Kurve verläuft und mit der Jordankurve nur den Punkt Q gemein hat.

Theorem 2.3.7 (Radó [6]): *Jede topologische Fläche besitzt eine Triangulierung. Insbesondere besitzt damit jede geschlossene Fläche sogar eine endliche Triangulierung.*

Beweis: Sei \mathcal{F} eine topologische Fläche. Da die Eigenschaft eine Triangulierung zu besitzen unter Homöomorphismen erhalten bleibt, gehen wir o.B.d.A. zu der zu \mathcal{F} homöomorphen Teilmenge des \mathbb{R}^m über und bezeichnen diese ebenfalls mit \mathcal{F} . Per Definition besitzt dann jeder Punkt $x \in \mathcal{F} \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Umgebung $U(x)$ die homöomorph zu \mathring{D}^2 ist. Im \mathbb{R}^m gibt es dann eine offene Menge $O(x)$, so dass $x \in O(x) \cap \mathcal{F} \subset U(x)$, da die Topologie auf \mathcal{F} durch die Topologie im \mathbb{R}^m induziert wird. Dabei können wir o.B.d.A. annehmen, dass $O(x)$ eine Kugel mit rationalem Radius und rationalem Mittelpunkt ist und

$$\overline{O(x) \cap \mathcal{F}} \subset U(x). \quad (2.1)$$

Dann besteht die Familie $(O(x))_{x \in \mathcal{F}}$ nur aus abzählbar vielen solcher Mengen $(O_i)_{i \in I}$, $I \subseteq \mathbb{N}$ und wir erhalten damit eine abzählbare offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ mit $U_i := O_i \cap \mathcal{F}$ von \mathcal{F} (im kompakten Fall erhalten wir sogar eine endliche). Wir werden nun per Induktion aus dieser Überdeckung eine Folge topologischer Polygone $(B_i)_{i \in I}$ konstruieren, deren Seiten sich paarweise nur in endlich vielen Punkten schneiden.

IA: Setze $B_1 := \overline{U_1}$.

IV: Seien topologische Polygone B_1, \dots, B_{n-1} so konstruiert, dass $U_i \subset B_i$ und $\partial B_i \cap \partial B_j$ endlich ist für $i, j = 1, \dots, n-1, i \neq j$.

IS: Zu U_n gibt es wegen (2.1) eine offene Menge $U \supset \overline{U_n}$ in \mathcal{F} , sodass ein Homöomorphismus $f : U \rightarrow \mathring{D}^2$ existiert. Dann ist $C := f(\partial U_n)$ eine Jordankurve in \mathring{D}^2 . Sei ferner

$$M_n := \bigcup_{i=1}^{n-1} f(\partial B_i \cap U).$$

Einen Punkt $T \in M_n$, der in mehr als einem $f(\partial B_i \cap U)$ liegt, nennen wir *Kreuzungspunkt*. Ferner soll ein Jordanbogen, der nur endliche viele Schnittpunkte mit M_n besitzt *erlaubter Weg* heißen.

Kreuzungs-
punkt

erlaubter
Weg

Nach IV gibt es nur endlich viele Kreuzungspunkte. Dann gibt es eine mit \mathring{D}^2 konzentrische abgeschlossene Kreisscheibe K kleineren Radius, so dass alle diese endlich vielen Punkte sowie C im Inneren von K liegen. Betrachte dann den Kreisring $L := \mathring{D}^2 \setminus K$. Dann ist $\mathcal{M}_n := M_n \cap L$ eine endliche Vereinigung von Jordanbögen, die nirgends dicht ist. Damit gibt es zwei Punkte $P_1, P_2 \in L$ auf zwei unterschiedlichen Radien R_1, R_2 von \mathring{D}^2 , mit Umgebungen $U(P_1), U(P_2)$ so, dass $U(P_i) \cap \mathcal{M}_n = \emptyset, i = 1, 2$. Wir erhalten dann eine Zerlegung von L durch R_1 und R_2 in zwei Kreisringsektoren.

Sei $P \in \mathcal{M}_n$ und $U(P) \subset L$ eine Umgebung von P . Dann gibt es Punkte $Q, R \in \mathcal{M}_n \cap \partial U(P)$ mit minimalem Abstand zu P , so dass Q zu einem niedrigeren Parameterwert als P auf dem zugehörigen Jordanbogen und R zu einem höheren gehört. Ferner gibt es dann eine Umgebung $V(P) \subset U(P)$ von P , so dass $V(P) \cap \mathcal{M}_n$ nur Punkte zwischen Q und R enthält. Dann folgt aus dem Jordan'schen Kurvensatz, dass $V(P)$ von dem Bogen zwischen Q und R in zwei Zusammenhangskomponenten zerlegt wird. Der Satz von Schoenflies sichert dann zu, dass jeder Punkt von $V(P) \setminus \mathcal{M}_n$ mit P durch einen Weg verbunden werden kann, der außer P keinen Punkt mit \mathcal{M}_n gemein hat.

Damit haben wir für jeden Punkt in \mathcal{M}_n eine Umgebung konstruiert, so dass je zwei Punkte dieser Umgebung durch einen erlaubten Weg verbunden werden können.

Zusammen mit den Zusammenhangskomponenten von $L \setminus \mathcal{M}_n$ ist das eine Überdeckung von L , und da es einen kompakten Kreisring $L' \subset L$ gibt, der immer noch P_1 und P_2 enthält, erhalten wir damit eine endliche Überdeckung von L' und damit auch je einen erlaubten Weg von P_1 nach P_2 in den beiden von R_1 und R_2 bestimmten Kreisringsektoren. Diese beiden Jordanbögen bilden dann eine Jordankurve, die zusammen mit ihrem Inneren gerade das geforderte B_n bildet.

Im Folgenden erhalten wir nun induktiv eine Zerlegung von \mathcal{F} in topologische Polygone

$$(A_i^{(j_i)})_{i \in I, j_i \in J_i} \quad \text{mit} \quad \bigcup_{j \in J_i} A_i^{(j)} \subseteq B_i,$$

die den drei Eigenschaften von Definition 2.3.3 genügt (wenn man das Wort „Dreieck“ durch „Polygon“ ersetzt):

Wähle $A_1^{(1)} := B_1$ als erstes Polygon, $J_1 := \{1\}$. Seien

$$\{A_i^{(j_i)} \mid i = 1, \dots, n-1, j_i \in J_i\}$$

aus B_1, \dots, B_{n-1} bereits konstruiert. Dann hat ∂B_n laut Voraussetzung nur endlich viele Schnittpunkte mit $\partial B_1, \dots, \partial B_{n-1}$. Damit wird B_n von $\partial B_1, \dots, \partial B_{n-1}$ in

endlich viele topologische Polygone zerlegt, die alle endlich viele Eckpunkte besitzen, wovon wir diejenigen, die keine inneren Punkte von B_1, \dots, B_{n-1} enthalten, mit $A_n^{(1)}, \dots, A_n^{(m_n)}$ bezeichnen und damit setzen wir $J_n := \{1, \dots, m_n\}$.

Diese $A_i^{(j)}$ können nun wiederum in endlich viele Dreiecke zerlegt werden und damit erhalten wir schließlich die behauptete Triangulierung von \mathcal{F} .

Im Falle einer geschlossenen Fläche ist I aufgrund der Kompaktheit endlich wählbar und damit erhalten wir sogar die behauptete endliche Triangulierung. \square

Wir ordnen jetzt jeder endlichen Triangulierung einer geschlossenen Fläche einen Graphen zu:

Definition 2.3.8: Seien \mathcal{F} eine geschlossene Fläche, $(U_i, \sigma_i)_{i \in I}$ eine endliche Triangulierung von \mathcal{F} und $V = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ die Menge der Ecken der U_i (dabei ist ein P_k im Allgemeinen Ecke mehrerer U_i). Dann setzen wir

$$E := \{\{Q, R\} \mid Q, R \in V, \text{ so dass } \exists i \in I : Q \in U_i \wedge R \in U_i\}$$

und nennen $G := (V, E)$ das *1-Skelett der Triangulierung*.

1-Skelett

Da jede geschlossene Fläche eine endliche Triangulierung besitzt, können wir nun für jede geschlossene Fläche die Euler-Charakteristik definieren.

Definition 2.3.9: Sei \mathcal{F} eine geschlossene Fläche, $(U_i, \sigma_i)_{i \in I}$ eine endliche Triangulierung von \mathcal{F} und $G = (V, E)$ das 1-Skelett der Triangulierung. Dann setzen wir

$$\beta_0(\mathcal{F}, G) := \alpha_0(G), \tag{2.2}$$

$$\beta_1(\mathcal{F}, G) := \alpha_1(G), \tag{2.3}$$

$$\beta_2(\mathcal{F}, G) := |I|. \tag{2.4}$$

Ferner setzen wir

$$E(\mathcal{F}) := \beta_0(\mathcal{F}, G) - \beta_1(\mathcal{F}, G) + \beta_2(\mathcal{F}, G)$$

und nennen $E(\mathcal{F})$ die *Euler-Charakteristik* von \mathcal{F} .

Euler-Charakteristik

Bemerkung 2.3.10: In [5] wurde gezeigt, dass die Euler-Charakteristik wohldefiniert ist, also nicht von der Wahl der Triangulierung sondern nur von der Fläche \mathcal{F} abhängt.

In [5] wurde ferner gezeigt, dass jede geschlossene Fläche zu einer der in Tabelle 2.1 aufgeführten Normalformen homöomorph ist.

Definition 2.3.11: Sei $(\mathcal{F}, \mathcal{O})$ eine topologische Fläche und (T, \mathcal{O}') ein topologisches Viereck wie in Abbildung 2.4. Seien ferner $K \subset \mathcal{F}$ und $L \subset T$ zwei Jordankurven. Dann betrachten wir die Menge $\mathcal{G} := (\mathcal{F} \setminus \mathcal{I}(K)) \dot{\cup} (T \setminus \mathcal{I}(L))$ mit der Topologie

\mathcal{F}	$E(\mathcal{F})$	
(S_0)	2	
(S_p)	$2 - 2p$	$\forall p \in \mathbb{N}$
(N_q)	$2 - q$	$\forall q \in \mathbb{N}$

Tabelle 2.1: Normalformen geschlossener Flächen

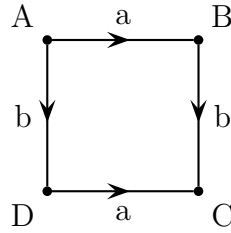


Abbildung 2.4: Ein topologisches Viereck

$\tau = \{U \cup V \mid U \in \mathcal{O}, V \in \mathcal{O}'\}$.³ Dann sagen wir, dass der Raum $\mathcal{G}/(\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{AD}, K \sim L)$ mit der Quotiententopologie aus \mathcal{F} durch *Ankleben eines Henkels* hervorgeht.

Ankleben eines Henkels

Bemerkung 2.3.12: Beim Ankleben eines Henkels werden aus einem Torus T und der Fläche \mathcal{F} jeweils ein Stück herausgeschnitten und die entstehenden Schnittländer dann miteinander verklebt.

Satz 2.3.13: *Sei \mathcal{F} eine topologische Fläche und \mathcal{G} entstehe aus \mathcal{F} durch Ankleben eines Henkels. Dann ist \mathcal{G} wieder eine topologische Fläche und es gilt*

$$E(\mathcal{G}) = E(\mathcal{F}) - 2.$$

Beweis: Sei $K \in \mathcal{G}$ die Jordankurve, an der verklebt wurde und T das topologische Viereck, das angeklebt wurde. Alle Punkte in $\mathcal{G} \setminus K$ sind dann entweder Punkte von \mathcal{F} oder von T und besitzen damit in diesen jeweils eine zu \mathring{D}^2 homöomorphe Umgebung.

Sei nun $P \in K$. Dann gibt es zu P zwei Homöomorphismen $f_i : U_i \rightarrow \mathring{D}^2$, $i = 1, 2$, wobei U_1 eine Umgebung von P in \mathcal{F} und U_2 eine Umgebung von P in T ist.

Durch K werden die U_i , $i = 1, 2$ in zwei Zusammenhangskomponenten zerlegt, nämlich $U_i \cap \mathcal{I}(K)$ und $U_i \cap \mathcal{A}(K)$.

Durch stetige Deformation kann man erreichen, dass $\partial U_i \cap K$ auf einen Durchmesser und P auf den Mittelpunkt von \mathring{D}^2 abgebildet wird. In \mathcal{G} sind nur noch $U_i \setminus \mathcal{I}(K)$ enthalten, und da diese gerade durch f_i , $i = 1, 2$ auf Halbkreise abgebildet werden, bildet damit $(U_1 \cup U_2) \setminus \mathcal{I}(K)$ eine zu \mathring{D}^2 homöomorphe Umgebung von P in \mathcal{G} .

³Hierbei bezeichnet $A \dot{\cup} B$ die disjunkte Vereinigung von A und B .

O.b.d.A. sei K nun der Rand eines der Dreiecke der Triangulierung von \mathcal{F} bzw. T . Dann erhalten wir eine Triangulierung von \mathcal{G} , indem wir die beiden Triangulierungen von \mathcal{F} und T kombinieren:

$$\begin{aligned}\beta_0(\mathcal{G}) &= \beta_0(\mathcal{F}) + \beta_0(T) - 3 \\ \beta_1(\mathcal{G}) &= \beta_1(\mathcal{F}) + \beta_1(T) - 3 \\ \beta_2(\mathcal{G}) &= \beta_2(\mathcal{F}) + \beta_2(T) - 2 \\ \Leftrightarrow E(\mathcal{G}) &= E(\mathcal{F}) + E(T) - 2 = E(\mathcal{F}) - 2.\end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.3.14: Satz 2.3.13 zeigt also gerade, dass S_{p+1} aus S_p durch das Ankleben eines Henkels hervorgeht. Deswegen ist das Standardmodell für den S_p auch eine Kugel mit p Henkeln.

Um zu definieren, wann ein Graph in eine Fläche einbettbar ist, benötigen wir zunächst den Begriff der Homöomorphie auch für Graphen.

Definition 2.3.15: Seien $G = (V, E)$ ein Graph, $P \in V$ ein Knoten mit $\text{val}(P) = 2$, sowie $Q, R \in V$ die beiden mit P benachbarten Knoten. Wenn Q und R nicht benachbart sind, dann sagen wir, dass der Graph $G' = (V', E')$ mit $V' := V \setminus \{P\}$ und

$$E' := (E \setminus \{\{P, Q\}, \{P, R\}\}) \cup \{\{Q, R\}\}$$

aus G durch eine *Komposition* hervorgeht.

Komposition

Die Forderung, dass Q und R nicht benachbart sind, ist wichtig, damit ihre Valenzen durch die Komposition nicht kleiner werden.

Definition 2.3.16: Seien $G = (V, E)$ ein Graph und $\{P, Q\} \in E$ eine Kante. Dann sagen wir, dass der Graph $G' = (V', E')$ mit $V' := V \cup \{\perp\}$ ⁴ und

$$E' := (E \setminus \{\{P, Q\}\}) \cup \{\{P, \perp\}, \{\perp, Q\}\}$$

aus G durch eine *Unterteilung* hervorgeht.

Unterteilung

Offensichtlich sind diese beiden Operationen gerade invers zueinander.

Definition 2.3.17: Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ zwei Graphen. Wir sagen, dass G und G' *homöomorph* sind, wenn G' durch endlich viele Kompositionen und Unterteilungen aus G hervorgeht.

homöomorph

Definition 2.3.18: Seien $G = (V, E)$ ein Graph und \mathcal{F} eine geschlossene Fläche. Wenn G zu einem Teilgraphen des 1-Skeletts einer Triangulierung von \mathcal{F} homöomorph ist, so sagen wir G *ist in \mathcal{F} einbettbar* und wir schreiben $G \sqsubset \mathcal{F}$. Ist G sogar zum 1-Skelett isomorph, so schreiben wir $G \triangleleft \mathcal{F}$.

einbettbar

⁴ \perp steht hier für ein Element, welches bisher kein Knoten von G ist.

Damit haben wir jetzt eine formale Beschreibung dafür, dass wir eine Karte auf eine Fläche zeichnen, nämlich indem wir den zur Karte gehörenden Graphen in die Fläche einbetten. Wir können damit jetzt auch formal die Zahl $\chi(\mathcal{F})$ definieren, die angibt, wie viele Farben zum Färben einer Karte auf der Fläche \mathcal{F} maximal nötig sind:

Definition 2.3.19: Sei \mathcal{F} eine geschlossene Fläche. Dann definieren wir

$$\chi(\mathcal{F}) := \max_{G \triangleleft \mathcal{F}} \chi(G).$$

Der folgende Satz liefert uns einen Zusammenhang zwischen Triangulierungen einer orientierbaren Fläche und Triangulierungen eines Graphen.

Satz 2.3.20: Sei \mathcal{F} eine orientierbare geschlossene Fläche und $G \triangleleft \mathcal{F}$. Dann besitzt G eine Triangulierung τ .

Beweis: Da \mathcal{F} orientierbar ist können wir für alle Dreiecke von \mathcal{F} eine Orientierung wählen, so dass wir an jedem Knoten P gerade $\tau_P(Q) = R$ setzen, falls das Dreieck $\triangle PQR$ in der Reihenfolge QPR orientiert ist. Dadurch induziert das Rotationssystem τ dann gerade genau die Flächen von \mathcal{F} als Zyklen und ist damit eine Triangulierung von G . \square

Folgerung 2.3.21: Für eine orientierbare Fläche \mathcal{F} können wir in Definition 2.3.9 also sogar $\beta_2(\mathcal{F}, G) := \mu(G)$ setzen und damit gilt für die eben konstruierte Triangulierung τ sogar

$$E(\mathcal{F}) = \alpha_0(G) - \alpha_1(G) + \alpha_2(G, \tau).$$

In [5] wurde das folgende, wichtige Resultat gezeigt.

Lemma 2.3.22: Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $\text{val}(P) \geq 2 \forall P \in V$ und sei G in eine geschlossene Fläche \mathcal{F} einbettbar. Dann gilt

$$\alpha_1 \leq 3\alpha_0 - 3E(\mathcal{F}).$$

Für Triangulierungen gilt sogar das Folgende:

Lemma 2.3.23: Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $G \triangleleft \mathcal{F}$ für eine geschlossene Fläche \mathcal{F} . Dann gilt $\alpha_1 = 3\alpha_0 - 3E(\mathcal{F})$.

Beweis: Für jede Triangulierung gilt $3\beta_2 = 2\beta_1$, denn jede Kante gehört zu genau 2 Dreiecken und jedes Dreieck hat 3 Kanten. Setzt man dies in die Euler-Charakteristik $E(\mathcal{F}) = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2$ ein, so erhält man $3E(\mathcal{F}) = 3\beta_0 - 3\beta_1 + 2\beta_1$. Da G isomorph zum 1-Skelett von \mathcal{F} ist, gilt per Definition 2.3.9, dass $\alpha_i = \beta_i$ für $i = 1, 2$. Damit folgt gerade die behauptete Gleichung. \square

3 Geschlecht von Graphen

3.1 Einführung

Definition 3.1.1: Sei $G = (V, E)$ ein Graph. Dann bezeichnen wir mit

$$\gamma(G) := \min\{p \mid G \sqsubset S_p\}$$

das *Geschlecht* von G .

Geschlecht

Lemma 3.1.2: Sei K_n der vollständige Graph mit n Knoten. Dann gilt

$$\gamma(K_n) \geq \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil.$$

Beweis: Sei $p := \gamma(K_n)$. Dann gilt nach Lemma 2.3.22

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\leq 3\alpha_0 - 3E(S_p) \\ \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} &\leq 3n - 3(2 - 2p) \\ \Leftrightarrow n(n-1) &\leq 6n - 12 + 12p \\ \Leftrightarrow 0 &\geq n^2 - 7n + 12 - 12p \\ \Leftrightarrow 0 &\geq \left(n - \frac{7 - \sqrt{49 - 48 + 48p}}{2}\right) \left(n - \frac{7 + \sqrt{49 - 48 + 48p}}{2}\right) \\ \Leftrightarrow 0 &\geq \left(n - \frac{7 - \sqrt{1 + 48p}}{2}\right) \left(n - \frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2}\right). \end{aligned}$$

Nun ist für $p > 0$ der erste Faktor stets positiv und damit folgt

$$\begin{aligned} 0 &\geq n - \frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} \\ \Leftrightarrow 1 + 48p &\geq 4n^2 - 28n + 49 \\ \Leftrightarrow 12p &\geq n^2 - 7n + 12 \\ \Leftrightarrow p &\geq \frac{(n-3)(n-4)}{12}. \end{aligned}$$

□

Im Rest dieser Arbeit werden wir sogar das folgende, stärkere Theorem beweisen.

Theorem 3.1.3: Sei K_n der vollständige Graph mit n Knoten. Dann gilt

$$\gamma(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil.$$

Satz 3.1.4: Wenn Theorem 3.1.3 gilt, dann gilt für alle $p > 0$

$$\chi(S_p) = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} \right\rfloor.$$

Beweis: Sei $p > 0$ fest. Sei ferner $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $K_n \sqsubset S_p$ und $K_{n+1} \not\sqsubset S_p$. Aus Theorem 3.1.3 und $p \in \mathbb{N}$ folgt

$$\begin{aligned} p &< \left\lfloor \frac{((n+1)-3)((n+1)-4)}{12} \right\rfloor \\ \Leftrightarrow p &< \frac{(n-2)(n-3)}{12} \\ \Leftrightarrow 12p &< n^2 - 5n + 6 \\ \Leftrightarrow 0 &< n^2 - 5n + 6 - 12p \\ \Leftrightarrow 0 &< \left(n - \frac{5 + \sqrt{25 - 24 + 48p}}{2} \right) \left(n - \frac{5 - \sqrt{25 - 24 + 48p}}{2} \right). \end{aligned}$$

Der zweite Faktor ist für $p > 0$ stets positiv und es gilt $\chi(S_p) \geq \chi(K_n) = n$. Damit folgt

$$n > \frac{5 + \sqrt{1 + 48p}}{2}$$

und somit

$$\chi(S_p) > \frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} - 1.$$

Damit folgt $\chi(S_p) \geq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} \right\rfloor$ und in [5] wurde bereits gezeigt, dass $\chi(S_p) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} \right\rfloor$ gilt. Insgesamt folgt damit die Behauptung. \square

Bemerkung 3.1.5: Satz 3.1.4 führt das Problem der Kartenfärbbarkeit auf das Problem der Bestimmung des Geschlechts aller vollständigen Graphen zurück. Insbesondere müssen wir damit nicht mehr *alle* Karten untersuchen sondern nur noch diejenigen, in denen jedes Land an jedes andere grenzt.

3.2 Unterteilung von Theorem 3.1.3

Zum Beweis von Theorem 3.1.3 müssen wir für alle vollständigen Graphen K_n ein Rotationssystem σ finden mit

$$\begin{aligned} \alpha_0(K_n) - \alpha_1(K_n) + \alpha_2(K_n, \sigma) &= n - \frac{n(n-1)}{2} + \alpha_2(K_n, \sigma) \\ &= 2 - 2 \left\lfloor \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Die Formel $\left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$ lässt vermuten, dass die Lösung von der Restklasse $n \pmod{12}$ abhängt. In der Tat werden in den folgenden Abschnitten die Rotationssysteme für diese 12 Fälle separat hergeleitet. Dabei können wir nach Satz 2.1.23 nur in den Fällen $n \equiv 0, 3, 4, 7 \pmod{12}$ erwarten, dass σ eine Triangulierung ist.

Satz 3.2.1: *Sei K_n der vollständige Graph mit n Knoten und existiere eine Triangulierung σ von K_n . Dann gilt Theorem 3.1.3 für K_n .*

Beweis: analog zum Beweis von Lemma 3.1.2, nur dass wegen Lemma 2.3.23 in allen Zeilen Gleichheit gilt. \square

Im Verlauf dieser Arbeit wird es immer wieder nötig sein, zu zeigen, dass ein Rotationssystem eine Triangulierung ist. Dazu ist es einfacher die folgende Regel zu überprüfen.

Regel Δ : Wenn im Schema eines Rotationssystems die Zeile

$$i. \quad \dots \quad j \quad k \quad \dots$$

auftaucht, dann auch

$$k. \quad \dots \quad i \quad j \quad \dots$$

Satz 3.2.2: *Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $\text{val}(P) > 1 \forall P \in V$. Ein Rotationssystem σ von G erfüllt Regel Δ genau dann, wenn σ eine Triangulierung von G ist.*

Beweis: Seien $P, Q \in V$ beliebig und σ ein Rotationssystem von G , das Regel Δ erfüllt. Betrachten wir den von (P, Q) induzierten Zyklus. Setze dann $R := \sigma_Q(P)$. Dann gilt $R \neq Q$, da Q nicht in der Rotation von Q auftauchen kann und $R \neq P$, da sonst $\text{val}(Q) = 1$ wäre. Also kann man Regel Δ auf

$$Q. \quad \dots \quad P \quad R \quad \dots$$

anwenden und erhält

$$R. \quad \dots \quad Q \quad P \quad \dots,$$

d. h. $\sigma_R(Q) = P$. Eine erneute Anwendung von Regel Δ liefert uns schließlich

$$P. \quad \dots \quad R \quad Q \quad \dots$$

und damit $\sigma_P(R) = Q$. Also induziert (P, Q) den Zyklus PQR und, da $P, Q \in V$ beliebig waren, folgt, dass σ eine Triangulierung von G ist.

Sei nun σ eine Triangulierung von G und

$$Q. \quad \dots \quad P \quad R \quad \dots$$

ein beliebiger Ausschnitt einer beliebigen Zeile des Schemas von σ . Da σ eine Triangulierung ist, muss der durch (P, Q) induzierte Zyklus dann PQR sein. Damit taucht aber auch

$$R. \dots Q P \dots$$

im Schema auf und σ erfüllt damit Regel Δ . □

Was aber machen wir in den Fällen, wo es keine Triangulierung des K_n geben kann? Wir versuchen für eine möglichst kleine Teilmenge $H \subset E$ eine Triangulierung von $K_n - H$ zu konstruieren und versuchen dann, die fehlenden Nachbarschaften durch Ankleben von Henkeln an die Fläche zu erreichen.

Satz 3.2.3: *Angenommen es existiert eine Triangulierung σ von $K_n - H$, dann gilt*

$$n(n-7) \equiv 2|H| \pmod{12}.$$

Beweis: Es gelten

$$\begin{aligned} \alpha_0(K_n - H) &= \alpha_0(K_n) = n, \\ \alpha_1(K_n - H) &= \alpha_1(K_n) - |H| = \frac{n(n-1)}{2} - |H|, \\ 3\alpha_2(K_n - H, \sigma) &= 2\alpha_1(K_n - H). \end{aligned}$$

Nach Folgerung 2.1.20 gilt also

$$\begin{aligned} 6n - n(n-1) + 2|H| &\equiv 0 \pmod{12} \\ \Leftrightarrow n(n-1) - 6n &\equiv 2|H| \pmod{12} \\ \Leftrightarrow n(n-7) &\equiv 2|H| \pmod{12}. \end{aligned}$$

□

Folgerung 3.2.4: Wir erhalten vier verschiedene Klassen von möglichen Triangulierungen:

1. Falls $n \equiv 0, 3, 4, 7 \pmod{12}$, dann ist $|H| \equiv 0 \pmod{6}$ und $H = \emptyset$.
2. Falls $n \equiv 2, 5 \pmod{12}$, dann ist $|H| \equiv 1 \pmod{6}$ und $H = K_2$.
3. Falls $n \equiv 1, 6, 9, 10 \pmod{12}$, dann ist $|H| \equiv 3 \pmod{6}$ und $H = K_3$.
4. Falls $n \equiv 8, 11 \pmod{12}$, dann ist $|H| \equiv 4 \pmod{6}$ und $H = K_5$.

Wir werden tatsächlich in den Fällen $n \equiv 0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 10$ und $11 \pmod{12}$ Triangulierungen für $K_n - H$ konstruieren. Die restlichen Fälle $n \equiv 2, 8, 9 \pmod{12}$ werden wir allerdings auf andere Art und Weise lösen.

Im Verlauf dieser Arbeit interessiert uns insbesondere, wieviele Henkel wir an die Fläche ankleben dürfen, um die in Theorem 3.1.3 behauptete Zahl nicht zu übersteigen.

Satz 3.2.5: Sei $K_n - H \triangleleft S_p$ mit einer Menge $H \subset E$ und $p \in \mathbb{N}$. Falls wir die restlichen $|H|$ Nachbarschaften durch $\left\lceil \frac{|H|}{6} \right\rceil$ Henkel erreichen können, so gilt Theorem 3.1.3 für K_n .

Beweis: Laut Voraussetzung haben wir

$$\begin{aligned} K_n - H &\triangleleft S_p, \\ K_n &\sqsubset S_{p + \left\lceil \frac{|H|}{6} \right\rceil}. \end{aligned}$$

Aus der ersten Einbettung erhalten wir mit Lemma 2.3.23

$$\begin{aligned} \alpha_1(K_n) - |H| &= 3\alpha_0(K_n) - 6 + 6p \\ \Leftrightarrow p &= \frac{(n-3)(n-4) - 2|H|}{12}. \end{aligned}$$

Die zweite Einbettung liefert mit Lemma 3.1.2

$$\begin{aligned} \gamma(K_n) \leq p + \left\lceil \frac{|H|}{6} \right\rceil &= \frac{(n-3)(n-4) - 2|H|}{12} + \left\lceil \frac{2|H|}{12} \right\rceil \\ &= \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil \leq \gamma(K_n). \end{aligned}$$

□

3.3 Gewichtete Graphen

Zur Herleitung von Rotationssystemen für die vollständigen Graphen K_n werden wir wiederum Graphen verwenden. Allerdings wird in diesen Graphen jeder Kante ein Element einer (endlichen) Gruppe zugewiesen.

Definition 3.3.1: Ein *gewichteter Graph* G ist ein Paar (V, E) mit einer endlichen Knotenmenge $V \neq \emptyset$ und einer Menge gewichteter Kanten

gewichteter Graph

$$E = \{(P, Q, k) \mid P, Q \in V, P \neq Q, k \in H\}$$

mit einer Gruppe H . Wir nennen k das *Gewicht der Kante* (P, Q) . Dabei fordern wir zusätzlich, dass

Gewicht

$$(P, Q, k) \in E \Leftrightarrow (Q, P, -k) \in E. \quad (3.1)$$

Wir wollen gewichtete Graphen als ungerichtete Graphen ansehen, in denen jede Kante ein gerichtetes Gewicht erhält. Wenn man sich den Graphen als einen Stromkreis vorstellt, dann bedeutet $(P, Q, k) \in E$ gerade, dass von P nach Q ein Strom von k Ampere fließt. Entsprechend der Zusatzforderung fließt dann von Q nach P ein Strom von $-k$ Ampere.

Definition 3.3.2 (Kirchhoff'sches Gesetz): Wir sagen, dass ein gewichteter Graph $G = (V, E)$ das *Kirchhoff'sche Gesetz* im Knoten $P \in V$ erfüllt, wenn gilt

Kirchhoff'sche Gesetz

$$\sum_{(P,Q,k) \in E} k = 0.$$

Das Kirchhoff'sche Gesetz sagt gerade aus, dass in den Knoten P genau so viel Strom hineinfließt wie aus ihm herausfließt.

Definition 3.3.3: Sei $G = (V, E)$ ein gewichteter Graph mit Rotationssystem σ . Dann nennen wir $\alpha_2(G, \sigma)$ den *Index* von (G, σ) .

Index

3.4 Konstruktion von Triangulierungen aus gewichteten Graphen

In den Graphen, die wir für die folgenden Konstruktionen nutzen, wollen wir zusätzlich zu unserer bisherigen Graphendefinition auch Kanten zulassen, die nur einen Anfangs- aber keinen Endpunkt besitzen. Solch eine Kante wollen wir *Sackgasse* nennen.

Sackgasse

Wir werden nun gewichtete Graphen $G = (V, E)$ mit Gewichten aus einer Gruppe H (in der Regel ist dies $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für ein $n \in \mathbb{N}$) und einem Rotationssystem σ konstruieren, die die folgenden Eigenschaften erfüllen:

- (C1) Es gilt $\text{val}(P) = 1 \vee \text{val}(P) = 3 \forall P \in V$, wobei Knoten mit Valenz 1 mit Kleinbuchstaben x, y, z, \dots markiert werden.
- (C2) σ induziert einen einzigen Zyklus.
- (C3) Jedes Element $a \in H \setminus \{0\}$ taucht genau einmal als Gewicht einer Kante $e \in E$ auf.
- (C4) Das Kirchhoff'sche Gesetz gilt in jedem Knoten mit Valenz 3.
- (C5) Jedes Gewicht a , einer an einen Knoten mit Valenz 1 grenzenden Kante, erzeugt H (d. h. $\langle a \rangle = H$ bzw. für $H = \mathbb{Z}_n : \text{ggT}(a, n) = 1$).
- (C6) Die Elemente $a \in H$ der Ordnung 2 sind genau die Gewichte der Sackgassen.

Bemerkung 3.4.1: Wegen Bedingung (3.1) ist (C3) für $H = \mathbb{Z}_n$ mit ungeradem n gerade erfüllt, wenn jedes Element $1, \dots, \frac{n-1}{2}$ einmal in einer graphischen Darstellung des Graphen auftaucht. Insbesondere sagt uns (C6), dass in diesen Graphen keine Sackgassen auftauchen dürfen, da \mathbb{Z}_n für ungerade n keine Elemente der Ordnung 2 besitzt.

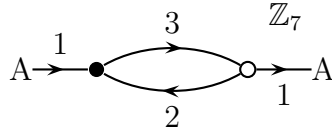


Abbildung 3.1: Ein gewichteter Graph zur Erzeugung einer Triangulierung des K_7

Für gerade n ist (C3) erfüllt, wenn jedes der Elemente $1, \dots, \frac{n}{2}$ einmal in der graphischen Darstellung auftritt. Dabei muss wegen (C6) aber gelten, dass $\frac{n}{2}$ das Gewicht einer Sackgasse ist.

Ein einfaches Beispiel so eines Graphen ist in Abbildung 3.1 zu sehen, dabei identifizieren wir die beiden mit A markierten Punkte, d. h. wir betrachten die mit 1 beschrifteten Kanten als eine einzige Kante und verwenden die additive Gruppe \mathbb{Z}_7 , d. h. $n = 7$. Offensichtlich erfüllt dieser Graph gerade (C1) – (C5).

Wenn man in so einem Graphen nun den Zyklus durchläuft und dabei jeweils die Gewichte der Kanten, die man passiert, notiert, so erhält man in unserem Beispiel

$$1 \ 3 \ 2 \ 6 \ 4 \ 5$$

denn in \mathbb{Z}_7 gilt $-1 = 6$, $-2 = 5$ und $-3 = 4$.

Durchläuft man in diesem Zyklus einen mit einem Kleinbuchstaben markierten Knoten, so notiert man diesen zwischen den beiden Gewichten der an diesen Knoten grenzenden Kanten.

Durchläuft man schließlich eine Sackgasse, so kehrt man am Ende der Sackgasse um, notiert das Gewicht der Sackgasse allerdings nur einmal.¹

Insgesamt enthält die Zeile dann wegen (C3) jedes Element von $H \setminus \{0\}$ genau einmal.

Die so erhaltene Zeile kann also als Rotation eines Knotens 0 im Graphen K_n angesehen werden:

$$0. \ 1 \ 3 \ 2 \ 6 \ 4 \ 5.$$

Die weiteren Rotationen für Knoten $i \in H$ erhalten wir über die folgende Regel.

Regel A: Wir erhalten die Rotation des Knotens i , indem wir jede Zahl in der Rotation von 0 mit i in H addieren und die Reihenfolge beibehalten. Tauchen in der Rotation von 0 Elemente $x \notin H$ auf, so werden diese unverändert in die Rotation von i übernommen.

Regel B: Für Knoten $x \notin H$ gibt es genau ein $a \in H$, so dass $(P, x, a) \in E$ für einen

¹Aufgrund von (C6) gilt für so ein Gewicht a nämlich gerade $a = -a$ und damit trägt eine Sackgasse in beiden Richtung das gleiche Gewicht.

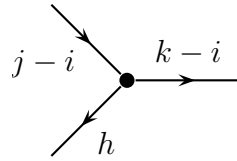


Abbildung 3.2: lokales Bild des gewichteten Graphen im Beweis von Satz 3.4.2

Knoten P . Wir legen dann die Rotation von x wie folgt fest:

$$x. \quad \dots \quad -a \quad 0 \quad a \quad 2a \quad \dots$$

Wegen (C5) taucht in der Rotation von x jedes Element von H genau einmal auf.

Insgesamt erhalten wir damit das folgende Rotationssystem des K_7 :

$$\begin{array}{l} 0. \quad 1 \quad 3 \quad 2 \quad 6 \quad 4 \quad 5 \\ 1. \quad 2 \quad 4 \quad 3 \quad 0 \quad 5 \quad 6 \\ 2. \quad 3 \quad 5 \quad 4 \quad 1 \quad 6 \quad 0 \\ 3. \quad 4 \quad 6 \quad 5 \quad 2 \quad 0 \quad 1 \\ 4. \quad 5 \quad 0 \quad 6 \quad 3 \quad 1 \quad 2 \\ 5. \quad 6 \quad 1 \quad 0 \quad 4 \quad 2 \quad 3 \\ 6. \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 5 \quad 3 \quad 4. \end{array}$$

Dieses Rotationssystem erfüllt sogar Regel Δ und wir haben damit eine Triangulierung für K_7 gefunden. Dass dies kein Zufall war, sichert der folgende Satz.

Satz 3.4.2: *Ein Rotationssystem, welches auf diese Art und Weise aus einem Graphen G , der (C1) – (C6) erfüllt, konstruiert wird, ist eine Triangulierung.*

Beweis: Wir müssen lediglich die Gültigkeit von Regel Δ nachweisen. Sei also

$$i. \quad \dots \quad j \quad k \quad \dots$$

ein Teil des erhaltenen Rotationssystems mit $j, k \in \mathbb{Z}_n$. Dann gilt nach Regel A, dass

$$0. \quad \dots \quad j - i \quad k - i \quad \dots$$

ebenfalls im Rotationssystem auftaucht. Dann taucht o.B.d.A. in G das lokale Bild in Abbildung 3.2 auf. Dann gilt wegen (C4), dass $h = (j - i) - (k - i) = j - k$ ist. Also taucht irgendwo in der Rotation von 0 auch

$$0. \quad \dots \quad i - k \quad j - k \quad \dots$$

auf. Dies gilt auch, wenn $k - i$ das Gewicht einer Sackgasse ist, da dann $k - i = i - k$ gilt. Mit Regel A erhalten wir daraus

$$k. \dots i \ j \ \dots$$

Sei nun

$$i. \dots x \ k \ \dots$$

ein Teil des erhaltenen Rotationssystems mit $x \notin \mathbb{Z}_n$. Dann gilt nach Regel A und (C1), dass

$$0. \dots i - k \ x \ k - i \ \dots$$

ebenfalls im Rotationssystem auftaucht. Nach Regel A erhalten wir damit aber wiederum

$$k. \dots i \ x \ \dots$$

Die letzten beiden Fälle

$$i. \dots j \ x \ \dots \quad \text{und} \quad x. \dots j \ k \ \dots$$

führen wir mit Regel A, (C1) und Regel B auf

$$0. \dots j - i \ x \ i - j \ \dots \quad \text{und} \quad 0. \dots k - j \ x \ j - k \ \dots$$

zurück. Dies führt dann durch erneute Anwendung zu

$$x. \dots i \ j \ \dots \quad \text{und} \quad k. \dots x \ j \ \dots$$

□

Bemerkung 3.4.3: Damit ist nun klar, wofür die jeweiligen Eigenschaften gefordert werden. (C1) schränkt die erlaubten Graphen auf ein überschaubares Maß ein, (C2) und (C3) stellen sicher, dass es sich beim entstehenden Zyklus um eine Rotation von 0 im K_n handelt, (C5) stellt sicher, dass die Rotationen von $x \notin \mathbb{Z}_n$ alle Elemente von \mathbb{Z}_n enthalten. (C4) und (C6) stellen schließlich sicher, dass es sich bei dem produzierten Rotationssystem tatsächlich um eine Triangulierung handelt.

4 Beweis von Theorem 3.1.3

Der Beweis der einzelnen Fälle ist je nach Restklasse von n komplexer oder einfacher. Die hier gewählte Reihenfolge ist so gewählt, weil spätere Fälle teilweise die Methoden oder Ergebnisse der vorherigen Fälle benutzen und die komplexeren Fälle ein höheres Verständnis der Vorgänge benötigen, welches zunächst durch die einfacheren Fällen vermittelt wird.

4.1 $n \equiv 7 \pmod{12}$

Betrachten wir den gewichteten Graphen in Abbildung 4.1, wobei wir wieder die beiden mit A markierten Punkte miteinander identifizieren. Wir wollen erklären, wie der Graph in den nicht dargestellten Bereichen aussieht.

Die vertikalen Kanten tragen von links nach rechts die Gewichte $1, 2, \dots, 2s$ mit wechselnder Orientierung nach unten und oben.

Die Kanten der oberen Reihe tragen als Gewichte die beiden verschränkten arithmetischen Folgen $5s + 3, 5s + 2, \dots, 4s + 3$ und $5s + 4, 5s + 5, \dots, 6s + 3$, wobei alle Rotationen der Knoten im Uhrzeigersinn laufen und alle Kanten von links nach rechts orientiert sind.

Die Kanten der unteren Reihe tragen ebenfalls Gewichte zweier verschränkter arithmetischer Folgen $3s + 2, 3s + 1, \dots, 2s + 2$ und $3s + 3, 3s + 4, \dots, 4s + 2$, wobei hier alle Rotationen der Knoten entgegen dem Uhrzeigersinn laufen und alle Kanten von rechts nach links orientiert sind.

Satz 4.1.1: *Der gewichtete Graph in Abbildung 4.1 erfüllt für jedes $s \in \mathbb{N}$ die Prin-*

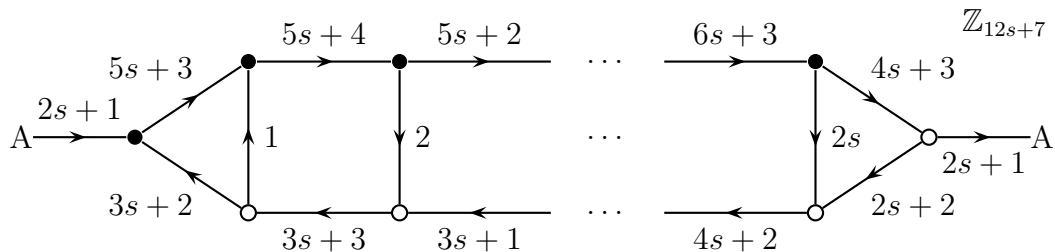


Abbildung 4.1: Triangulierungsgraph für den K_{12s+7}

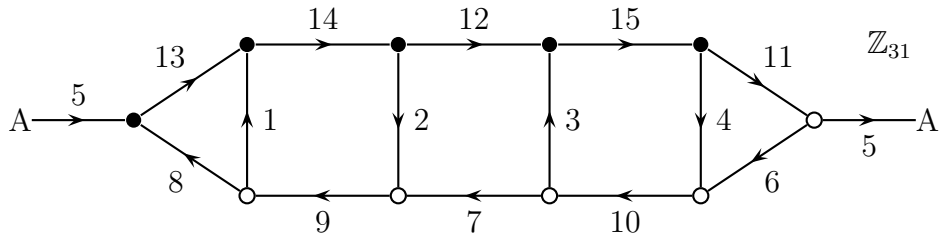


Abbildung 4.2: Triangulierungsgraph für den K_{31}

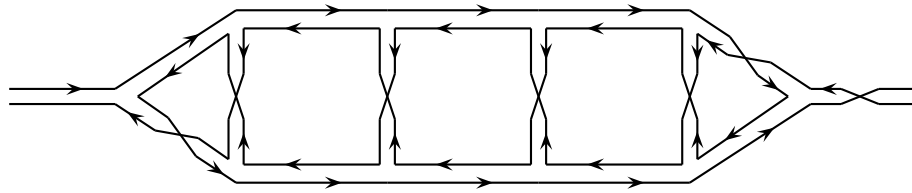


Abbildung 4.3: Zyklus des Graphen in Abbildung 4.2

zipien (C1) – (C6).

Beweis: Es ist offensichtlich, dass der Graph die Prinzipien (C1), (C3), (C5) und (C6) erfüllt. Durch die verschränkten arithmetischen Folgen und die wechselnden Orientierungen der vertikalen Kanten ist auch (C4) sichergestellt.

Abbildung 4.3 zeigt für den Fall $s = 2$ den induzierten Zyklus in dem Graphen in Abbildung 4.2. Es ist klar, dass sich durch Hinzunahme zweier „Quadrate“ nichts an der Zahl der Zyklen ändert und damit ist (C2) immer erfüllt. \square

Insgesamt haben wir damit eine Triangulierung für jeden Graphen der Form K_{12s+7} und mit Satz 3.2.1 auch Theorem 3.1.3 für $n \equiv 7 \pmod{12}$ bewiesen.

Bemerkung 4.1.2: Die hier verwendete Vorgehensweise, sowie der Graph für den Fall $n \equiv 7 \pmod{12}$ wurden von Gustin in [2] entwickelt. Bemerkenswert ist auch, dass der Graph in Abbildung 3.1 tatsächlich der Graph ist, den man aus dieser Konstruktion mit $s = 0$ erhält.

4.2 $n \equiv 10 \pmod{12}$

Wegen Satz 2.1.23 kann es für K_{12s+10} keine Triangulierung geben. Das Beste, was wir hoffen können, ist, eine Triangulierung von $K_{12s+10} - K_3$ zu finden, d. h. des Graphen, der aus K_{12s+10} entsteht, indem wir ein Dreieck aus Kanten aus dem

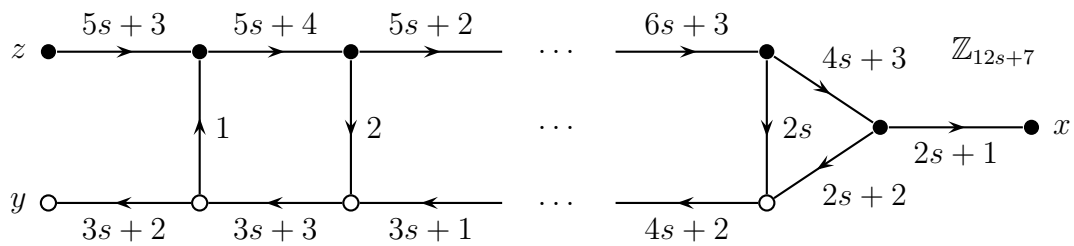


Abbildung 4.4: Triangulierungsgraph für den $K_{12s+10} - K_3$

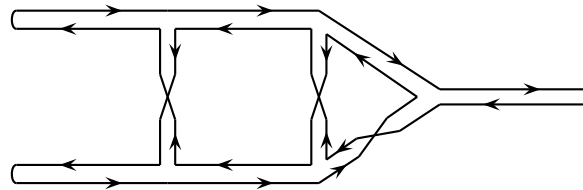


Abbildung 4.5: Zyklus des Graphen in Abbildung 4.4 für $s = 1$

Graphen entfernen. Dies geht beinahe analog zum Fall $n \equiv 7 \pmod{12}$ mit dem in Abbildung 4.4 dargestellten gewichteten Graphen, welcher – aufbauend auf den Methoden von Gustin – von Ringel in [7] entwickelt wurde.

Satz 4.2.1: *Der in Abbildung 4.4 dargestellte Graph erfüllt die Prinzipien (C1) – (C6).*

Beweis: Es ist wieder offensichtlich, dass (C1) und (C6) gelten. Die Veränderungen gegenüber dem Graphen in Abbildung 4.1 haben weder die vorkommenden Gewichte noch die Knoten der Valenz 3 verändert. Damit gelten auch (C3) und (C4) weiterhin. Die Gültigkeit von (C2) lässt sich wieder von dem Graphen in Abbildung 4.5 verallgemeinern.

Für $K_{10} - K_3$ (vgl. Abbildung 4.6) ist die Gültigkeit aller Prinzipien offensichtlich.

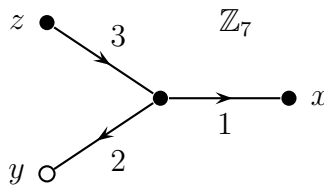


Abbildung 4.6: Triangulierungsgraph für den $K_{10} - K_3$

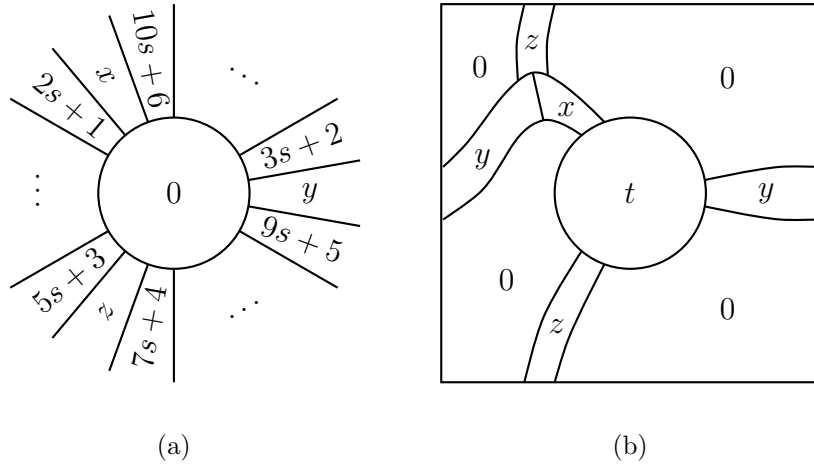


Abbildung 4.7: Henkel zur Verbindung der Länder x, y und z

Bleibt also lediglich (C5) zu zeigen, genauer also

$$\text{ggT}(5s + 3, 12s + 7) = \text{ggT}(2s + 1, 12s + 7) = \text{ggT}(3s + 2, 12s + 7) = 1.$$

Wir verwenden die algebraische Identität $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a, b - na)$ für $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{ggT}(2s + 1, 12s + 7) = \text{ggT}(2s + 1, 1) = 1, \quad (4.1)$$

$$\text{ggT}(3s + 2, 12s + 7) = \text{ggT}(3s + 2, -1) = 1, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \text{ggT}(5s + 3, 12s + 7) &= \text{ggT}(5s + 3, 2s + 1) = \text{ggT}(s + 1, 2s + 1) & (4.3) \\ &= \text{ggT}(s + 1, -1) = 1. \end{aligned}$$

□

Dass das entstehende Schema tatsächlich ein Rotationssystem des $K_{12s+10} - K_3$ ist, liegt daran, dass alle Knoten miteinander benachbart sind, mit Ausnahme der Knoten x, y und z . Dies sind gerade die drei Kanten, die aus dem K_{12s+10} entfernt wurden.

Laut Satz 3.2.5 bleibt uns ein Henkel übrig, um diese 3 fehlenden Nachbarschaften zu erreichen. Der Graph in Abbildung 4.4 liefert uns den folgenden Ausschnitt aus der Rotation von 0:

$$0. \quad \dots \quad 2s + 1 \quad x \quad 10s + 6 \quad \dots \quad 3s + 2 \quad y \quad 9s + 5 \quad \dots \quad 7s + 4 \quad z \quad 5s + 3.$$

Damit haben wir lokal die Situation wie in Abbildung 4.7a. Identifizieren wir nun das Land 0 in Abbildung 4.7a mit dem Land t in dem Torus in Abbildung 4.7b, so

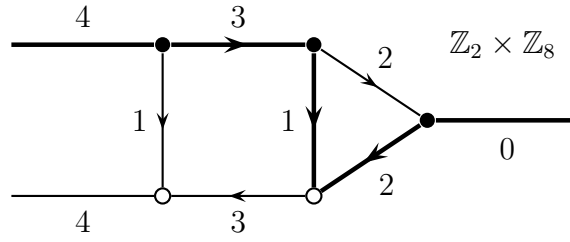


Abbildung 4.8: Triangulierungsgraph für den K_{16}

erhalten wir gerade die 3 fehlenden Nachbarschaften durch Ankleben eines Henkels und Theorem 3.1.3 ist damit auch für $n \equiv 10 \pmod{12}$ bewiesen. Zu beachten ist dabei, dass sämtliche Nachbarschaften von Land 0 erhalten bleiben, da das neue Land 0 im Torus an die Länder x, y, z grenzt und durch die Verklebung an allen anderen Stellen weiterhin an die bisherigen Nachbarn.

4.3 $n \equiv 4 \pmod{12}$

Im Fall $n \equiv 4 \pmod{12}$ nutzen wir nicht die Gruppe \mathbb{Z}_{12s+4} , sondern die Gruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{6s+2}$. Da diese Gruppe keinen Erzeuger besitzt kann das Prinzip (C5) nur gelten, wenn unser Graph keine Knoten mit Valenz 1 enthält. Allerdings besitzt die Gruppe 3 Elemente der Ordnung 2, nämlich $(0, 3s + 1)$, $(1, 3s + 1)$ und $(1, 0)$, und damit muss unser Graph 3 Sackgassen enthalten.

Um Gewichte aus einem direkten Produkt der Form $\mathbb{Z}_2 \times N$ mit einer zyklischen Gruppe N darzustellen, werden wir die Kanten mit der zweiten Komponente des Gewichts beschriften und die Kante fett zeichnen, wenn die erste Komponente 1 ist. Ein Beispiel für einen solchen Graphen, der sogar die Prinzipien (C1) – (C6) erfüllt ist in Abbildung 4.8 zu sehen.

Um (C4) in einem solchen Graphen zu überprüfen genügt es, dies für die Komponenten einzeln zu tun. Dabei bedeutet (C4) für die erste Komponente gerade, dass an jedem Knoten eine gerade Anzahl von fetten Kanten grenzen muss. Die zweite Komponente ist analog zu den bisherigen Graphen überprüfbar.

Da es nun wegen (C3) in einem solchen Graphen außer der 0 jede Beschriftung einer Kante zweimal gibt (einmal als normale, einmal als fette Kante), bietet es sich an, in den oberen und unteren Horizontalen jeweils die gleichen Werte zu wählen. Auf den Vertikalen werden wir wieder versuchen die Zahlen $1, 2, \dots, s$ zu verteilen, genauer gesagt in der Reihenfolge

$$s \ s - 1 \ \dots \ 1 \ \mathbf{s} \ \mathbf{1} \ \mathbf{2} \ \dots \ \mathbf{s} - 1.$$

Dabei stehen fette Zahlen wiederum dafür, dass die erste Komponente 1 ist, d.h.

$$\mathbf{k} = (1, k), \quad k = (0, k).$$

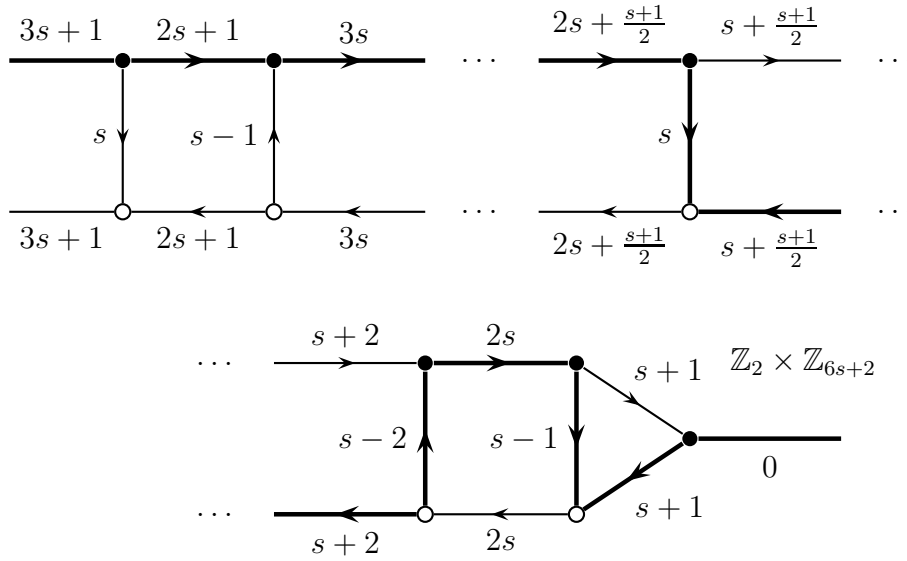


Abbildung 4.9: Triangulierungsgraph für den K_{12s+4}

Weiterhin ist klar, dass wir am linken Rand mit $3s+1$ und am rechten Rand mit $\mathbf{0}$ beginnen. Durch das Kirchhoff'sche Gesetz (C4) bleiben damit für die Horizontalen kaum Möglichkeiten übrig. Die nächste Zahl, die an $3s+1$ grenzt, muss $2s+1$ sein. Damit ergeben sich erneut zwei verschränkte arithmetische Folgen und zwar

$$3s+1 \quad 2s+1 \quad 3s \quad 2s+2 \quad \dots$$

Analog starten wir von rechts mit den verschränkten arithmetischen Folgen

$$\dots \quad 2s-1 \quad s+2 \quad 2s \quad s+1.$$

Insgesamt liefert uns das für ungerade Werte von s den Graphen in Abbildung 4.9. Für gerade Werte von s erhalten wir in der Mitte die beiden Horizontalen

$$2s+1 + \frac{s}{2} \quad \text{und} \quad s+1 + \frac{s}{2}.$$

In beiden Fällen ist damit das Kirchhoff'sche Gesetz im gesamten Graphen erfüllt.

Insgesamt haben wir so einen Graphen konstruiert, der für die Gruppe $H = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{6s+2}$ die Prinzipien (C1) – (C6) erfüllt und somit erhalten wir eine Triangulierung für K_{12s+4} , d.h. wir haben Theorem 3.1.3 für $n \equiv 4 \pmod{12}$ gezeigt.

Bemerkung 4.3.1: Diese Lösung baut einerseits auf der Lösung von Gustin ([2]), andererseits auf der Lösung von Ringel ([8]) für den Fall 10 auf.

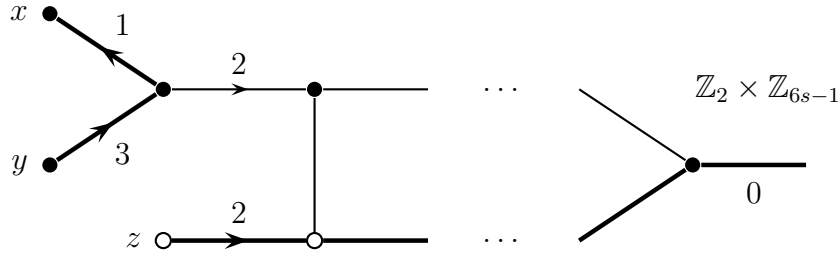


Abbildung 4.10: partielles Bild des Triangulierungsgraphen für den $K_{12s+1} - K_3$

4.4 $n \equiv 1 \pmod{12}$

In diesem Fall versuchen wir eine Triangulierung für $K_n - K_3$ zu finden. Damit ergibt sich die Gruppe $H = \mathbb{Z}_{12s-2} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{6s-1}$. Um (C5) und (C6) zu erfüllen benötigen wir drei Knoten x, y, z mit Gewichten, die H erzeugen, sowie eine Sackgasse mit dem Gewicht $(1, 0)$. Für die Knoten x, y, z verwenden wir die Gewichte $(1, 1)$, $(1, 2)$ und $(1, 3)$, da stets gilt:

$$\text{ggT}(1, 6s - 1) = \text{ggT}(2, 6s - 1) = \text{ggT}(3, 6s - 1) = 1.$$

Allerdings müssen wir dabei voraussetzen, dass $s > 1$, da für $s = 1$ gilt, dass $(1, 2) = -(1, 3)$.

Da ferner gilt, dass $(1, 3) - (1, 1) = (0, 2)$ und wir wie im letzten Fall die Horizontalen unseres Graphen wieder mit den gleichen zweiten Komponenten beschriften wollen, erhalten wir das partielle Bild in Abbildung 4.10.

Dadurch, dass nun aber bereits vier der Werte, die wir im Fall $n \equiv 4 \pmod{12}$ auf die Vertikalen gesetzt haben auf den Horizontalen festgelegt sind brauchen wir ein anderes Drittel der Zahlen, welches wir auf die Vertikalen verteilen können. Dafür bieten sich die durch 3 teilbaren Zahlen an, mit denen wir dann wieder zwei verschränkte arithmetische Folgen von links bzw. von rechts starten können. Starten wir diese Folgen von links, so erhalten wir auf den Horizontalen stets

$$2 + 3k \equiv 2 \pmod{3},$$

so dass wir durch diese Folgen lediglich die Zahlen $3k - 1$ für $k = 1, \dots, s$ abdecken können. Damit bleiben für die rechten Folgen noch die Zahlen $3k - 2$ für $k = 2, \dots, s$, da $(1, 1)$ bereits für die Kante zu x verwendet wurde.

Ebenso fehlt für die Vertikalen die Zahl $(1, 3)$, allerdings ist die $(0, 1)$ dafür noch nirgendwo verwendet worden. Diese werden wir als Vertikale verwenden um die beiden von links bzw. von rechts kommenden Folgen zu verbinden.

Als Gewichte der Horizontalen erhalten wir dann von links nach rechts

$$2, 3s - 1, 5, 3s - 4, \dots, s + 3 + \frac{s + 1}{2}, s + \frac{s + 1}{2}, s + \frac{s - 1}{2}, s + 3 + \frac{s - 1}{2}, \dots, 4, 3s - 2$$

für ungerade s bzw.

$$2, 3s - 1, 5, 3s - 4, \dots, s - 1 + \frac{s}{2}, s + 2 + \frac{s}{2}, s + 1 + \frac{s}{2}, s + 4 + \frac{s}{2}, \dots, 3s - 2, 4$$

für gerade s .

Dann haben wir als Differenzen (und damit als Gewichte der Vertikalen) in der ersten Hälfte gerade

$$3s - 3, 3s - 6, \dots, 6, 3, 1.$$

In der zweiten Hälfte können wir dann nur noch $6, 9, \dots, 3s - 3$ verteilen, allerdings können wir damit das Kirchhoff'sche Gesetz für die zweite Komponente in \mathbb{Z} nicht erfüllen, in \mathbb{Z}_{6s-1} jedoch schon.

Für ungerade s gilt

$$\left(s + \frac{s - 1}{2}\right) + \left(s + 3 + \frac{s - 1}{2}\right) = 3s + 2 = -(3s - 3)$$

und für gerade s

$$\left(s + 1 + \frac{s}{2}\right) + \left(s + 4 + \frac{s}{2}\right) = 3s + 5 = -(3s - 6),$$

sowie

$$(3s - 2) + 4 = 3s + 2 = -(3s - 3).$$

Insgesamt erhalten wir damit für die Vertikalen für ungerade s

$$3s - 3, 3s - 6, \dots, 6, 3, 1, \mathbf{3s - 3}, \mathbf{6}, \mathbf{9}, \dots, \mathbf{3s - 9}, \mathbf{3s - 6}$$

bzw. für gerade s

$$3s - 3, 3s - 6, \dots, 6, 3, 1, \mathbf{3s - 6}, \mathbf{6}, \mathbf{9}, \dots, \mathbf{3s - 9}, \mathbf{3s - 3}.$$

Damit erhalten wir die Graphen in Abbildung 4.11 bzw. 4.12, die jeweils die Prinzipien (C1) – (C6) erfüllen. Damit erhalten wir eine Triangulierung für den $K_{12s+1} - K_3$, die fehlenden 3 Nachbarschaften können analog zum Abschnitt 4.2 durch einen einzigen Henkel erreicht werden. Den letzten fehlenden Fall K_{13} haben wir in Anhang A.1 gelöst. Damit ist Theorem 3.1.3 für $n \equiv 1 \pmod{12}$ gezeigt.

Bemerkung 4.4.1: Diese Lösung wurde von Youngs in [12] zusammen mit den Methoden für die Fälle 7 und 10 veröffentlicht.

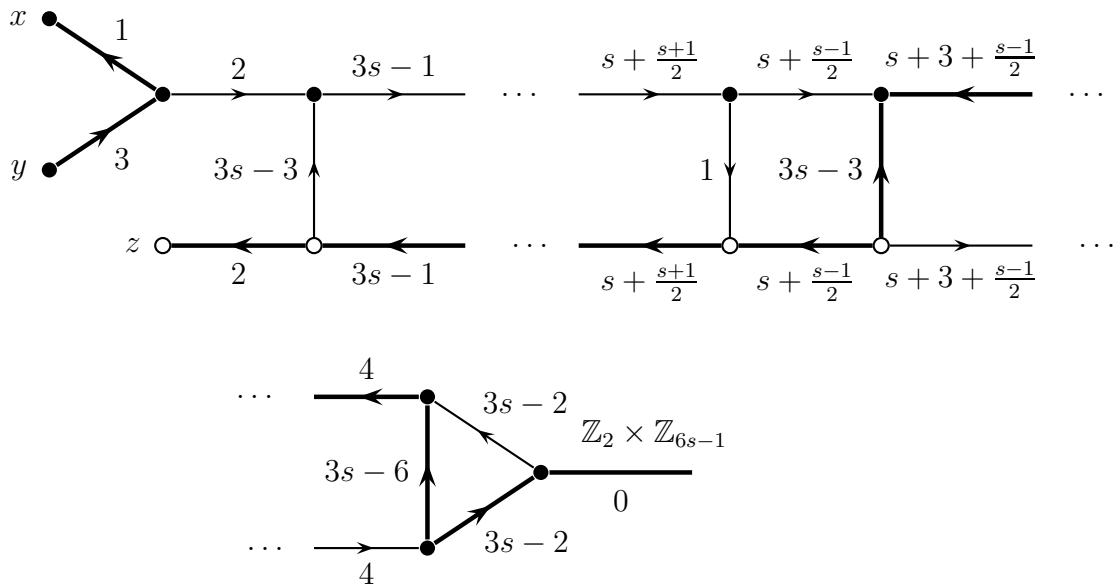


Abbildung 4.11: Triangulierungsgraph für den $K_{12s+1} - K_3$ bei ungeradem s

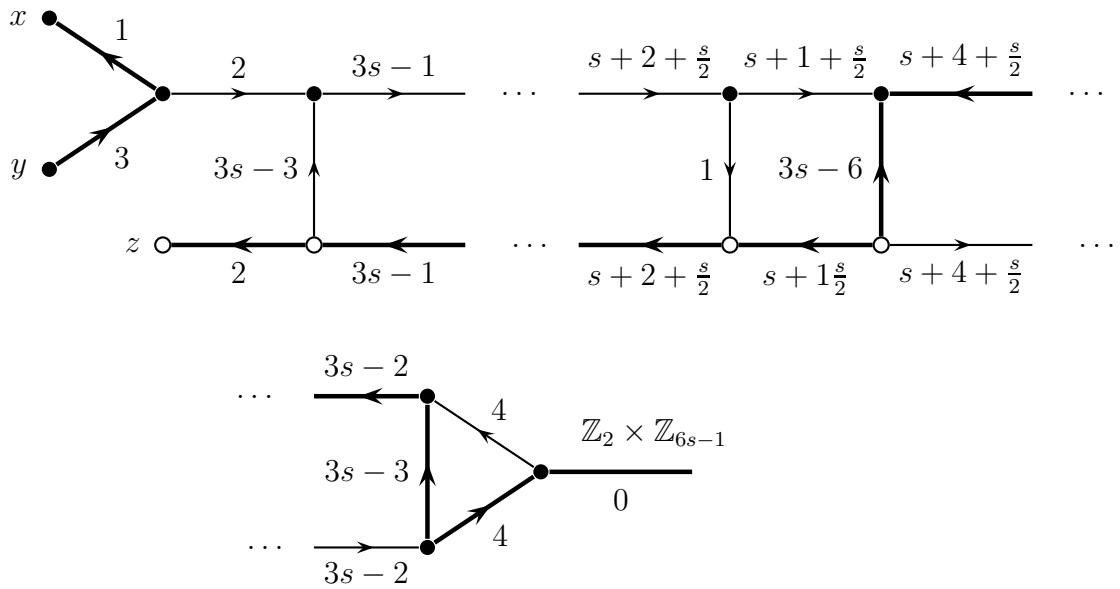


Abbildung 4.12: Triangulierungsgraph für den $K_{12s+1} - K_3$ bei geradem s

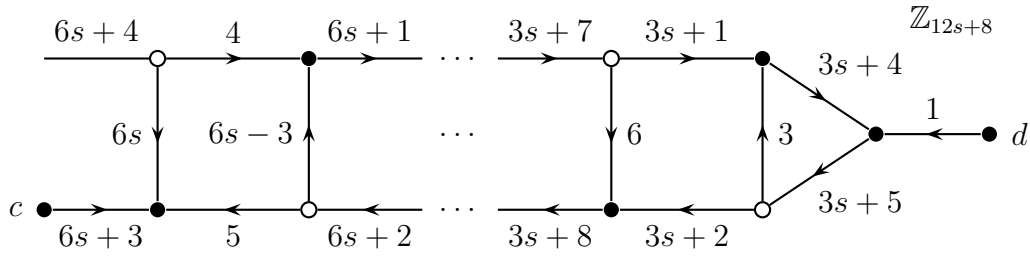


Abbildung 4.13: Triangulierungsgraph für den modifizierten $K_{12s+10} - K_2$

4.5 $n \equiv 9 \pmod{12}$

Dieser Fall ist mit den normalen Methoden relativ schwer zu lösen, es wurde aber von Jungerman in seiner Dissertation [4] durch eine interessante Substitutionsmethode gelöst, welche wir hier deswegen anführen.

Anstatt zu versuchen den $K_{12s+9} - K_3$ zu triangulieren benutzen wir den $K_{12s+10} - K_2$, aus dem wir für jedes reguläre Land¹ zwei Nachbarschaftsbeziehungen entfernt haben. Anschließend verändern wir durch eine einzelne Operation das Rotationssystem auf geschickte Art und Weise, so dass alle fehlenden Nachbarschaften zwischen den regulären Ländern wieder entstehen. Die fehlenden Nachbarschaften der nicht-regulären Nachbarschaften werden schließlich durch einen zusätzlichen Henkel erzeugt.

Betrachten wir den Graphen in Abbildung 4.13, so sehen wir, dass er die Prinzipien (C1), (C2), (C4), (C5) und (C6) erfüllt. Lediglich die 2 fehlt als Gewicht, weswegen (C3) nicht erfüllt ist.

Dadurch erhalten wir aus diesem Graphen eine Rotation für den Knoten 0, in dem lediglich die 2 und -2 fehlen. Wenn wir mit Regel A hieraus ein Rotationssystem erzeugen, so erhalten wir eine Triangulierung für den oben beschriebenen Graphen, in dem der Knoten j mit allen Ländern außer $j - 2$ und $j + 2$ benachbart ist.

Ein Beispiel für $s = 0$ (ohne die Zeilen für c und d):

0.	5	c	3	4	7	d	1
1.	6	c	4	5	0	d	2
2.	7	c	5	6	1	d	3
3.	0	c	6	7	2	d	4
4.	1	c	7	0	3	d	5
5.	2	c	0	1	4	d	6
6.	3	c	1	2	5	d	7
7.	4	c	2	3	6	d	0.

¹Reguläre Länder sind solche, die im Graphen noch mit allen anderen benachbart sind, d.h. es gibt hier $12s + 8$ reguläre Länder.

In dem so entstehenden Rotationsschema gilt weiterhin Regel Δ . Nun wenden wir auf dieses Schema die folgende Operation an:

Operation: In Zeile j :

Wenn $j \equiv 0 \pmod{2}$, so ersetze c durch $j - 2 \ x \ j + 2$ und streiche d .

Wenn $j \equiv 1 \pmod{2}$, so streiche c und ersetze d durch $j - 2 \ y \ j + 2$.

Damit erhalten wir in den geraden Zeilen

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 -2. & \dots & 6s+3 & 0 & x & -4 & 6s+1 & \dots & -3 & -1 & \dots \\
 0. & \dots & 6s+5 & 2 & x & -2 & 6s+3 & \dots & -1 & 1 & \dots \\
 2. & \dots & 6s+7 & 4 & x & 0 & 6s+5 & \dots & 1 & 3 & \dots \\
 \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots \\
 6s+4. & \dots & 1 & 6s+6 & x & 6s+2 & -1 & \dots & 6s+3 & 6s+5 & \dots \\
 6s+6. & \dots & 3 & 6s+8 & x & 6s+4 & 1 & \dots & 6s+5 & 6s+7 & \dots
 \end{array}$$

und in den ungeraden Zeilen

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 -1. & \dots & 6s+4 & 6s+2 & \dots & -2 & -3 & y & 1 & 0 & \dots \\
 1. & \dots & 6s+6 & 6s+4 & \dots & 0 & -1 & y & 3 & 2 & \dots \\
 3. & \dots & 6s+8 & 6s+6 & \dots & 2 & 1 & y & 5 & 4 & \dots \\
 \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots \\
 6s+3. & \dots & 0 & -2 & \dots & 6s+2 & 6s+1 & y & 6s+5 & 6s+4 & \dots \\
 6s+5. & \dots & 2 & 0 & \dots & 6s+4 & 6s+3 & y & 6s+7 & 6s+6 & \dots
 \end{array}$$

Wir müssen nun Regel Δ nur an den Stellen überprüfen, die durch die Operation geändert wurden, an allen anderen Stellen gilt sie weiterhin. Wenn wir allerdings Zeile 0 mit den Zeilen $\pm 2, \pm 1, 6s+5$ und $6s+3$ vergleichen, so ist ersichtlich, dass die Änderungen in Zeile 0 die Regel Δ erfüllen. Wegen Regel A gilt dies dann für alle geraden Zeilen. Für die ungeraden Zeilen kann dies ebenso durch Vergleich von Zeile 1 mit den Zeilen $3, -1, 0, 2, 6s+4$ und $6s+6$ bestätigt werden.

Insgesamt haben wir so eine Triangulierung für einen Graphen G mit den Ländern

$$V = \{0, 1, 2, \dots, 12s+7, x, y\}$$

erhalten, in dem alle nummerierten Länder untereinander benachbart sind und das Land x (bzw. y) mit allen geraden (bzw. ungeraden) Ländern. Das heißt jedes nummerierte Land hat $12s+8$ Nachbarn und x bzw. y hat $6s+4$ Nachbarn. Mit Hilfe der

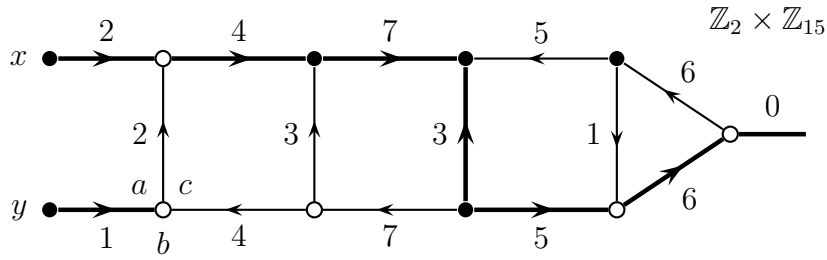


Abbildung 4.14: Triangulierungsgraph für den $K_{35} - K_5$

Euler-Charakteristik ermitteln wir somit das Geschlecht der Fläche S_p mit $G \triangleleft S_p$:

$$\begin{aligned}
 \beta_0 &= 12s + 10, \\
 2\beta_1 &= (12s + 8)(12s + 8) + 2(6s + 4), \\
 3\beta_2 &= 2\beta_1 \\
 \Rightarrow 6(2 - 2p) &= 6\beta_0 - 6\beta_1 + 4\beta_1 \\
 \Leftrightarrow 2\beta_1 &= 6\beta_0 - 6(2 - 2p) \\
 \Rightarrow 12p &= (12s + 9)(12s + 8) - 6(12s + 10) + 12 \\
 \Leftrightarrow 12p &= (12s + 6)(12s + 5) - 6.
 \end{aligned}$$

Beim Vergleich mit dem zu beweisenden Ergebnis aus Theorem 3.1.3 ist das hier bestimmte Geschlecht gerade genau um eins kleiner. Durch einen zusätzlichen Henkel können nun noch x und y verbunden und dann zum Land $12s + 8$ verschmolzen werden, und damit ist Theorem 3.1.3 für $n \equiv 9 \pmod{12}$ bewiesen.

4.6 $n \equiv 11 \pmod{12}$

In diesem Fall werden wir versuchen eine Triangulierung für $K_{12s+11} - K_5$ zu konstruieren, d. h. $H = \mathbb{Z}_{12s+6} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{6s+3}$.

Dafür benötigen wir allerdings ein weiteres Konstruktionsprinzip und (C4) muss abgewandelt werden, damit es zum neuen Prinzip kompatibel ist:

(C4*) Das Kirchhoff'sche Gesetz gilt in jedem Knoten mit Valenz 3, der nicht durch Buchstaben gekennzeichnet ist.

(C7) Ein Knoten P mit $\text{val}(P) = 3$ kann zwischen den eingehenden Kanten (Q, P, α) , (R, P, β) und (S, P, γ) mit drei Kleinbuchstaben markiert werden, wenn

$$\alpha \equiv \beta \equiv \gamma \not\equiv 0 \pmod{3}$$

und $\alpha + \beta + \gamma$ die Untergruppe $3H \subset H$ erzeugt.

Nun müssen wir noch angeben, wie sich die Buchstaben eines (C7)-Knotens auf die entstehende Rotation des Knotens 0 auswirken. Wenn man beim Durchlauf des Zyklus einen (C7)-Knoten passiert, so notiert man an genau dieser Stelle den Buchstaben, den man dem Zyklus zufolge passiert. So erhalten wir z. B. aus Abbildung 4.14 folgende Rotation:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 0. & \mathbf{0} & 6 & 1 & \mathbf{10} & 7 & 3 & \mathbf{11} & \mathbf{13} & x & \mathbf{2} & 13 & a & \mathbf{14} & y & \mathbf{1} & b & 11 \\
 & 8 & \mathbf{3} & \mathbf{8} & 12 & 4 & c & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{7} & 10 & 9 & \mathbf{9} & 14 & 5 & \mathbf{12} & \mathbf{5} & \mathbf{6}.
 \end{array}$$

Die Konstruktion der Rotationen der restlichen Knoten muss ebenfalls an (C7) angepasst werden:

Regel A*: Wir erhalten die Rotation des Knotens i , indem wir jede Zahl in der Rotation von 0 mit i in H addieren und die Reihenfolge beibehalten. Tauchen in der Rotation von 0 Elemente $x \notin H$ auf, die Beschriftung eines Knoten P mit $\text{val}(P) = 1$ sind, so werden diese unverändert in die Rotation von i übernommen.

Taucht hingegen ein Buchstabe $a \notin H$ auf, der Beschriftung eines Knotens P mit $\text{val}(P) = 3$ ist, so ist dieser entsprechend der Rotation von P mit den anderen P beschriftenden Buchstaben i mal zu permutieren.

Wir erhalten also aus der Rotation von 0 die folgenden Rotationen von $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$ und $\mathbf{3}$ (das entspricht $1, 2, 3 \in \mathbb{Z}_{30}$):

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 \mathbf{1.} & \dots & 14 & x & \mathbf{3} & \mathbf{14} & b & 0 & y & \mathbf{2} & c & \mathbf{12} & \mathbf{9} & 4 & 9 & \mathbf{13} & \mathbf{5} & a & \mathbf{3} & \dots \\
 \mathbf{2.} & \dots & \mathbf{0} & x & \mathbf{4} & 0 & c & \mathbf{1} & y & \mathbf{3} & a & 13 & 10 & \mathbf{5} & \mathbf{10} & 14 & 6 & b & 4 & \dots \\
 \mathbf{3.} & \dots & 1 & x & 5 & \mathbf{1} & a & 2 & y & 4 & b & \mathbf{14} & \mathbf{11} & 6 & 11 & \mathbf{0} & \mathbf{7} & c & \mathbf{5} & \dots
 \end{array}$$

Die Rotation für i erhält man aus der Rotation von i , indem man alle fetten Zahlen durch ihr normales Äquivalent ersetzt und umgekehrt. Dabei bleiben wegen $\mathbf{0} \cong 6s + 3 \equiv 0 \pmod{3}$ alle Buchstaben unverändert. Die Rotationen von a, b und c ergeben sich wiederum aus Regel Δ .

Satz 4.6.1: *Jedes mit Regel A* aus einem (C1) – (C3), (C4*) und (C5) – (C7) erfüllenden gewichteten Graphen konstruierte Rotationssystem kann auf genau eine Art und Weise durch Rotationen für mit Buchstaben bezeichnete Knoten ergänzt werden, so dass es eine Triangulierung eines $K_n - K_m$ ist, wobei der K_m genau aus den mit Buchstaben bezeichneten Knoten besteht.*

Beweis: Die meiste Arbeit hierfür wurde bereits im Beweis von Satz 3.4.2 getan. Wir müssen hier lediglich noch zeigen, dass jeder (C7)-Knoten an jeden nummerierten Knoten grenzt. Dazu sei P ein solcher Knoten mit Beschriftungen a, b, c und eingehenden Kantengewichten α, β, γ (vgl. Abbildung 4.15). Ferner sei $\delta := \alpha + \beta + \gamma$

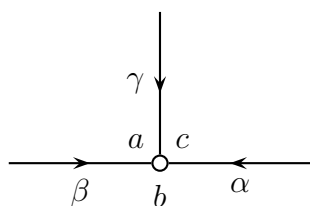


Abbildung 4.15: lokales Bild des gewichteten Graphen im Beweis von Satz 4.6.1

ein Erzeuger von $3H$ (vgl. (C7)). Dann erhalten wir den folgenden Ausschnitt des mit Regel A^* erzeugten Rotationssystems:

0.	...	α	c	$-\gamma$...	γ	a	$-\beta$...	β	b	$-\alpha$...
γ	$\delta - \beta$	a	0
$\delta - \beta$	δ	a	γ	...
δ	$\delta + \gamma$	a	$\delta - \beta$
$\delta + \gamma$	$2\delta - \beta$	a	δ

Damit Regel Δ erfüllt ist bleibt also für die Zeile a nur die Möglichkeit:

$$a. \quad \dots \quad -\beta \quad 0 \quad \gamma \quad \delta - \beta \quad \delta \quad \delta + \gamma \quad 2\delta - \beta \quad \dots$$

Dies ist gerade die Verschränkung der drei arithmetischen Folgen

$$\begin{aligned} &-\beta, \quad \delta - \beta, \quad 2\delta - \beta, \quad \dots, \\ &0, \quad \delta, \quad 2\delta, \quad \dots \quad \text{und} \\ &\gamma, \quad \delta + \gamma, \quad 2\delta + \gamma, \quad \dots. \end{aligned}$$

Da δ ein Erzeuger von $3H$ ist und $\beta \equiv \gamma \not\equiv 0 \pmod{3}$ kommt damit jedes Element von H einmal in der Rotation von a vor. Analog folgt die Behauptung für b und c . □

In den Abbildungen 4.16 und 4.17 ist die Verallgemeinerung des Graphen für den $K_{3s} - K_5$ auf den $K_{12s+11} - K_5$ mit $s \geq 1$ zu sehen.

Es sollte noch erwähnt werden, wie die Graphen an den Stellen aussehen, die nicht dargestellt sind. Auf den Vertikalen haben wir in der ersten Hälfte die arithmetische Folge $6k$ für $k = 2, \dots, s$ eingetragen. Dabei gilt $3s + 3 \equiv -3s \pmod{6s + 3}$ und wir verwenden wie bisher stets den betragsmäßig kleinsten Repräsentanten zur Beschriftung im Graphen. Die Orientierungen der Kanten wechseln sich dabei stets ab. Die zweite Hälfte ergibt sich dann aus der arithmetischen Folge $6\mathbf{k}$ für $\mathbf{k} = \mathbf{s}, \dots, \mathbf{2}$.

Die Horizontalen treten wieder in Paaren aus fetten und normalen Gewichten übereinander auf. Dabei ergeben sie sich (beginnend bei 4 und endend bei 5) aus

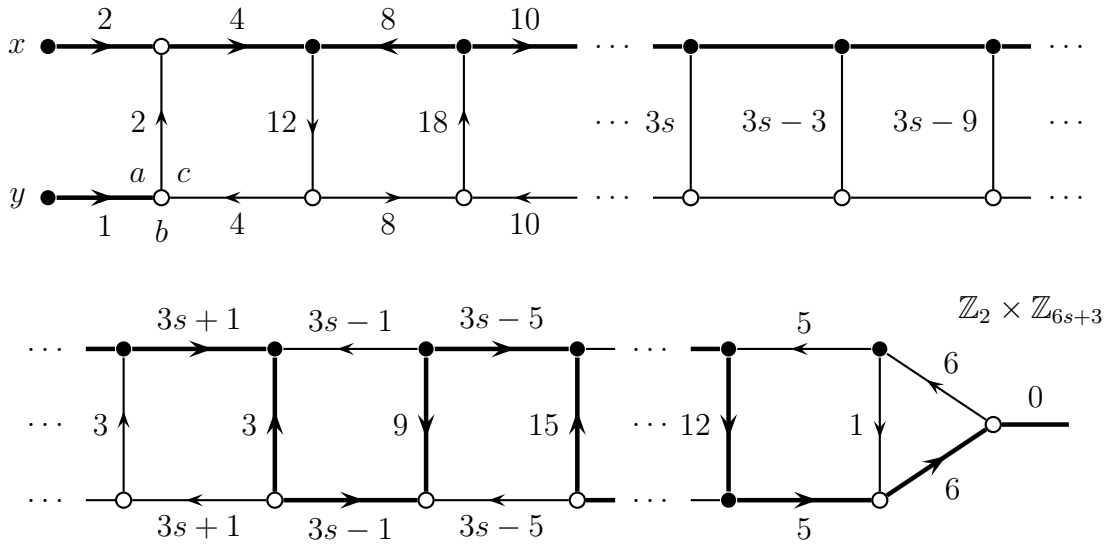


Abbildung 4.16: Triangulierungsgraph für den $K_{12s+11} - K_5$, s gerade

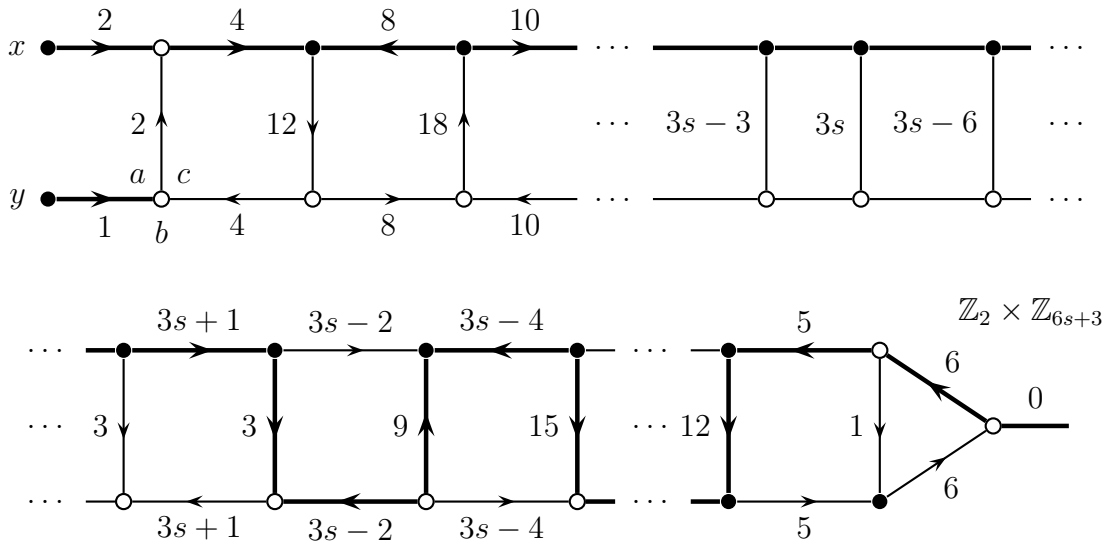


Abbildung 4.17: Triangulierungsgraph für den $K_{12s+11} - K_5$, s ungerade

der Verschränkung der beiden arithmetischen Folgen

$$\begin{aligned} 6k - 2, \quad k = 1, \dots, s & \quad \text{mit Orientierung von links nach rechts,} \\ 6k + 2, \quad k = 1, \dots, s - 1 & \quad \text{mit Orientierung von rechts nach links.} \end{aligned}$$

Die Rotationen der nicht dargestellten Knoten sind im Uhrzeigersinn in der oberen Zeile (\bullet) und gegen den Uhrzeigersinn in der unteren Zeile (\circ).

Satz 4.6.2: *Die Graphen in Abbildungen 4.16 für gerade s und 4.17 für ungerade s erfüllen die Prinzipien (C1) – (C3), (C4*) und (C5) – (C7) und liefern damit Triangulierungen des $K_{12s+11} - K_5$.*

Beweis: (C1), (C5) und (C6) sind offensichtlich erfüllt.

Die drei Folgen

$$\begin{aligned} \pm 6k, \quad k = 2, \dots, s, \\ \pm(6k - 2), \quad k = 1, \dots, s, \\ \pm(6k + 2), \quad k = 1, \dots, s - 1 \end{aligned}$$

decken alle Zahlen von \mathbb{Z}_{6s+3} mit Ausnahme von $0, \pm 1, \pm 6$ und ± 2 ab. Diese tauchen aber gerade an den Rändern der Graphen als Gewichte auf. Damit ist (C3) gezeigt.

Das Kirchhoff'sche Gesetz in der ersten Komponente ist offensichtlich. Für die zweite Komponente gilt jeweils

$$\begin{aligned} (6k - 2) + (6k + 2) &= 12k, \\ (6k + 2) + (6(k + 1) - 2) &= 12k + 6 \end{aligned}$$

und da die Orientierungen sowohl auf den Vertikalen als auch auf den Horizontalen jeweils wechseln ist damit das Kirchhoff'sche Gesetz im Inneren des Graphen erfüllt. Die Gültigkeit am Rand (außer links unten) ist offensichtlich. Dies zeigt (C4*).

Da (C2) im Graphen in Abbildung 4.14 gilt und wir bereits gesehen haben, dass das Einfügen von 2 Quadraten der hier vorliegenden Art nichts an der Zahl der Zyklen ändert, ist (C2) auch hier erfüllt. Die Tatsache, dass die Rotation an zwei Knoten im Graphen in Abbildung 4.16 gerade vertauscht ist ändert auch nichts an der Anzahl der induzierten Zyklen.

Die Gewichte an den in den (C7)-Knoten einfließenden Kanten sind

$$\begin{aligned} \mathbf{1} &\cong 1 \equiv 1 \pmod{3}, \\ 6s + 1 &\cong 12s + 4 \equiv 1 \pmod{3}, \\ 4 &\cong 4 \equiv 1 \pmod{3}. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\mathbf{1} + (6s + 1) + 4 \equiv \mathbf{3} \cong 3$$

offensichtlich ein Erzeuger von $3\mathbb{Z}_{12s+6}$. Damit ist auch (C7) erfüllt. \square

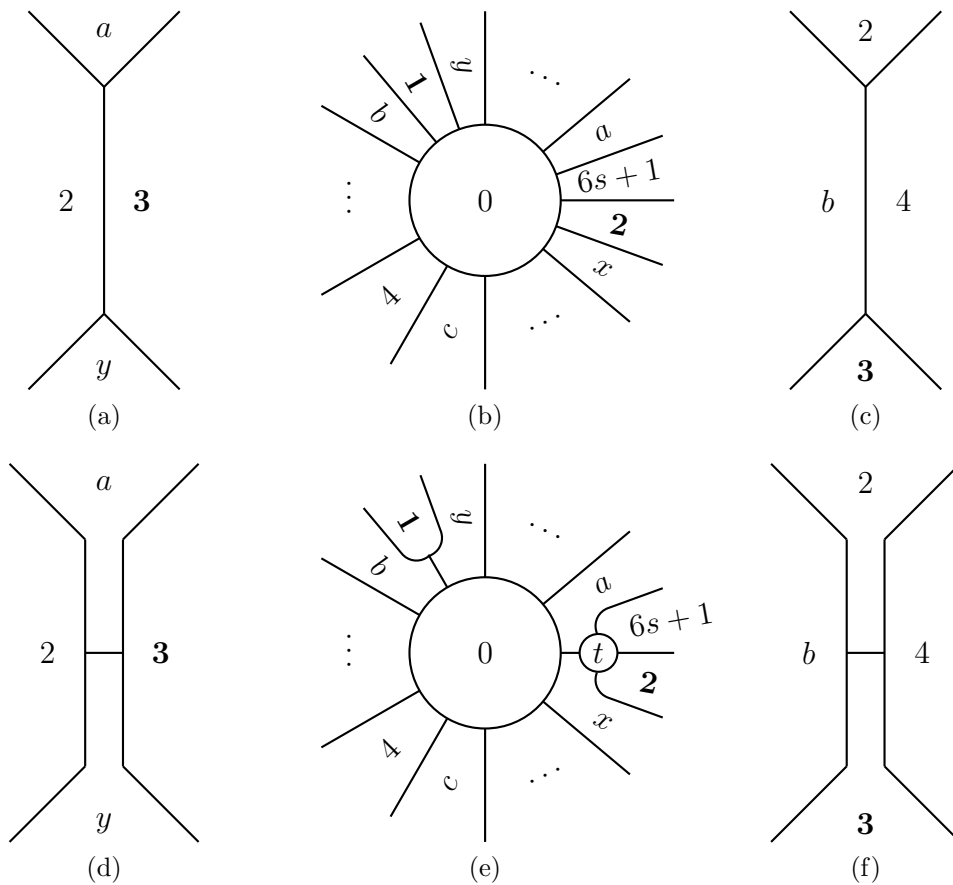


Abbildung 4.18: Erste Modifikationen an der Triangulierung des $K_{12s+11} - K_5$

Wir haben nun eine Triangulierung für den $K_{12s+11} - K_5$ und müssen nach Satz 3.2.5 nun noch die fehlenden 10 Nachbarschaften

$$(x, y), (x, a) (x, b) (x, c) (y, a) (y, b) (y, c) (a, b) (a, c) (b, c)$$

durch 2 Henkel erzeugen.

Aus Abbildung 4.16 bzw. 4.17 erhalten wir den folgenden Ausschnitt des Rota-

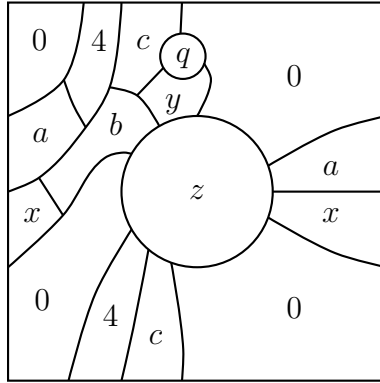


Abbildung 4.19: Henkel zur Herstellung der fehlenden Nachbarschaften im $K_{12s+11} - K_5$

tionssystems des $K_{12s+11} - K_5$:

0.	x	2	$6s + 1$	a	$6s + 2$	y	1	b	$6s - 1$...	4	c	...
1.	x	3	$6s + 2$	b	0	y	2	c	$6s$...	5	a	...
2.	x	4	0	c	1	y	3	a	$6s + 1$...	6	b	...
3.	x	5	1	a	2	y	4	b	$6s + 2$...	7	c	...
4.	x	6	2	b	3	y	5	c	0	...	8	a	...
.
$6s + 1.$	y	$6s + 2$	c	$6s - 3$
$6s + 2.$	y	0	a	$6s - 2$

Damit erhalten wir die lokalen Bilder um 0, **3** und 4 wie in Abbildung 4.18(a)–(c).

Durch die in Abbildung 4.18(d)–(f) dargestellten Modifikationen erhalten wir die Nachbarschaften

$$(x, a), (y, a), (y, b),$$

verlieren aber die Nachbarschaften

$$(b, 4), (0, \mathbf{1}), (0, \mathbf{2}), (0, 6s + 1).$$

Nun identifizieren wir 0 aus Abbildung 4.18(e) mit z aus Abbildung 4.19 und t identifizieren wir mit q . Dadurch erhalten wir ein neues Land 0, welches aber weiterhin an die gleichen Länder grenzt.

Dann erhalten wird durch die erste Identifizierung die Nachbarschaften

$$(x, b) (y, c) (a, b) (b, c) (b, 4) (x, a) (y, b)$$

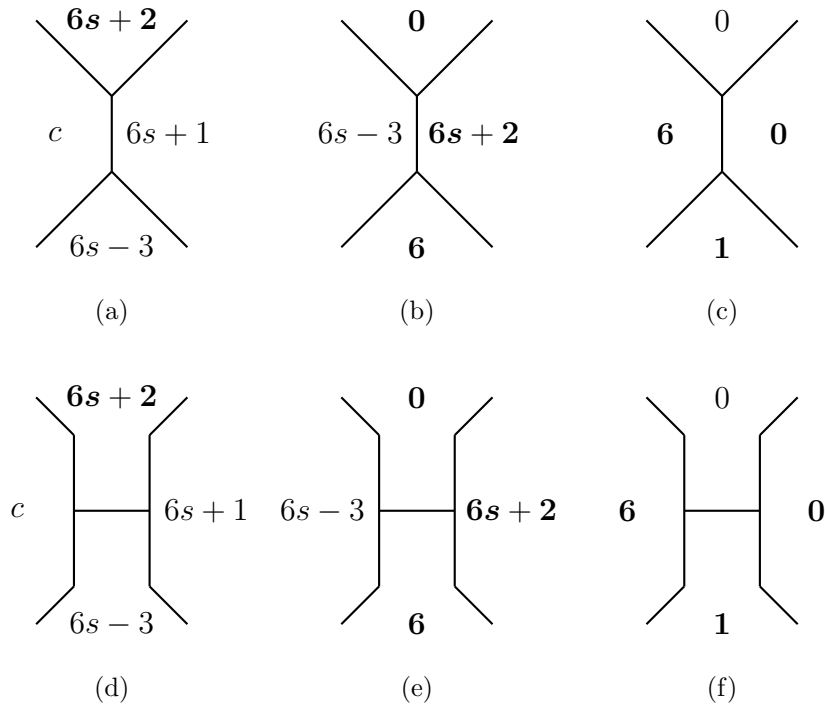


Abbildung 4.20: Letzte Modifikationen an der Triangulierung des $K_{12s+11} - K_5$

(die letzten beiden gab es schon vorher) und durch die zweite die Nachbarschaften

$$(x, y) \quad (x, c) \quad (a, c) \quad (0, 6s + 1) \quad (0, \mathbf{2}), \quad (c, 6s + 1).$$

Damit fehlt lediglich noch die Nachbarschaft $(0, \mathbf{1})$, dafür ist aber die Nachbarschaft $(c, 6s + 1)$ nun doppelt vorhanden. Um diese Nachbarschaft herzustellen benötigen wir noch den aus dem rechten Teil von Abbildung 4.16 erzeugten Teil des Rotationssystems:

$$0. \quad \dots \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{6} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{6s - 2} \quad \mathbf{7} \quad \dots$$

bzw. aus Abbildung 4.17

$$0. \quad \dots \quad \mathbf{7} \quad \mathbf{6s - 2} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{6} \quad \mathbf{0} \quad \dots$$

Da die Reihenfolge für die folgenden Ausführungen nicht relevant ist, sei nun o.B.d.A. s gerade. Dann erhalten wir mit Regel A:

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbf{0}. & & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{6} & \mathbf{1} & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{6s + 2}. & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{6s - 3} & \mathbf{6} & \dots \end{array}$$

Damit erhalten wir das lokale Bild in Abbildung 4.20(a) – (c) und durch die Umformungen in Abbildung 4.20(d) – (f) auch die letzte Nachbarschaft. Der letzte

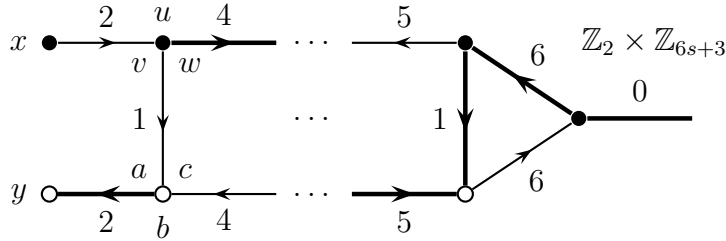


Abbildung 4.21: Triangulierungsgraph für $n = 12s + 14$, s gerade

fehlende Fall K_{11} ist in Anhang A.2 dargestellt. Damit haben wir Theorem 3.1.3 auch für $n \equiv 11 \pmod{12}$ bewiesen.

Bemerkung 4.6.3: Dieser Fall war der letzte, der von Ringel und Youngs ([8]) gelöst wurde, was größtenteils daran liegt, dass sie es vorher nicht geschafft haben, die 10 Nachbarschaften mit nur 2 Henkeln herzustellen.

4.7 $n \equiv 2 \pmod{12}$

Der gewichtete Graph für den Fall $n \equiv 2 \pmod{12}$ sieht nun fast genauso wie der Graph im Fall $n \equiv 11 \pmod{12}$ aus. Dafür wählen wir die Darstellung $n = 12s + 14$ und verwenden den in Abbildung 4.21 bzw. 4.22 dargestellten Triangulierungsgraph. Dabei erhalten alle nicht dargestellten Kanten exakt die Gewichte, wie sie im Fall $n \equiv 11 \pmod{12}$ konstruiert wurden. Dies ist wieder nur für $s \geq 1$ möglich.

In diesem Graph sind (C1) – (C3), (C4*) und (C6) offensichtlich erfüllt. Ferner gelten

$$\begin{aligned} (2, 0) + (-1, 0) + (-4, 1) &= (-3, 1) \text{ und} \\ (-2, 1) + (1, 0) + (4, 0) &= (3, 1), \end{aligned}$$

d.h. auch (C7) ist erfüllt. (C5) ist an y auch erfüllt, für x gilt aber, dass 2 nur die Untergruppe $\{0\} \times \mathbb{Z}_{6s+3} \subset H$ erzeugt. Nach Bemerkung 3.4.3 wird (C5) lediglich dazu benötigt sicherzustellen, dass alle Elemente von H in der Rotation von x vorkommen. Ersetzen wir nach Anwenden der Regel A* jedoch x in den Rotationen der Elemente $(1, a)$ durch \mathbf{x} und konstruieren die Rotation von \mathbf{x} mit Regel B aus der Rotation von 0 und die Rotation von \mathbf{x} aus der Rotation von 0, so erhalten wir eine

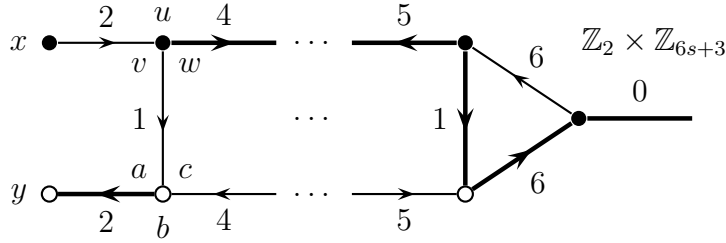


Abbildung 4.22: Triangulierungsgraph für $n = 12s + 14$, s ungerade

Triangulierung eines Graphen G_{12s+15} mit $12s + 15$ Knoten:

$0, 1, \dots, 6s + 2, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{6s} + \mathbf{2}, a, b, c, u, v, w, y, x, \mathbf{x}$.

Dieser Graph hat nun die Eigenschaft, dass alle nummerierten Knoten untereinander, sowie a, b, c, u, v, w und y mit jedem nummerierten Knoten benachbart sind. \mathbf{x} ist nur mit allen fett nummerierten Knoten und x nur mit allen normalen nummerierten Knoten benachbart.

Mit Lemma 2.3.23 erhalten wir nun die Fläche mit $G_{12s+15} \triangleleft S_p$:

$$\begin{aligned}
 \alpha_0(G_{12s+15}) &= 12s + 15, \\
 \alpha_1(G_{12s+15}) &= \frac{(12s+6)(12s+5)}{2} + 7(12s + 6) + 2\frac{12s+6}{2} = (6s + 3)(12s + 21) \\
 \Rightarrow 3E(S_p) &= 3(12s + 15) - 3(2s + 1)(12s + 21) \\
 \Leftrightarrow 2 - 2p &= 12s + 15 - 24s^2 - 54s - 21 \\
 \Leftrightarrow p &= 12s^2 + 21s + 4.
 \end{aligned}$$

Um Theorem 3.1.3 zu zeigen müssen wir das Geschlecht von K_{12s+14} als

$$\left\lceil \frac{(12s+11)(12s+10)}{12} \right\rceil = 12s^2 + 21s + 10$$

ermitteln. Damit bleiben uns 6 Henkel um die fehlenden 28 Nachbarschaften zwischen den Ländern a, b, c, u, v, w, x, y und eine Nachbarschaft zwischen x und \mathbf{x} herzustellen. Denn wenn wir dann die Grenze zwischen den Ländern x und \mathbf{x} aufheben erhalten wir tatsächlich den K_{12s+14} auf der S_p .

Aus dem Triangulierungsgraphen erhalten wir den folgenden Ausschnitt der Rotation von 0:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 0. & \dots & \mathbf{6s} - \mathbf{1} & w & 1 & a & \mathbf{2} & y & \mathbf{6s} + \mathbf{1} & b & 6s - 1 & \dots \\
 & & 4 & c & 6s + 2 & v & 6s + 1 & x & 2 & u & 4 & \dots
 \end{array}$$

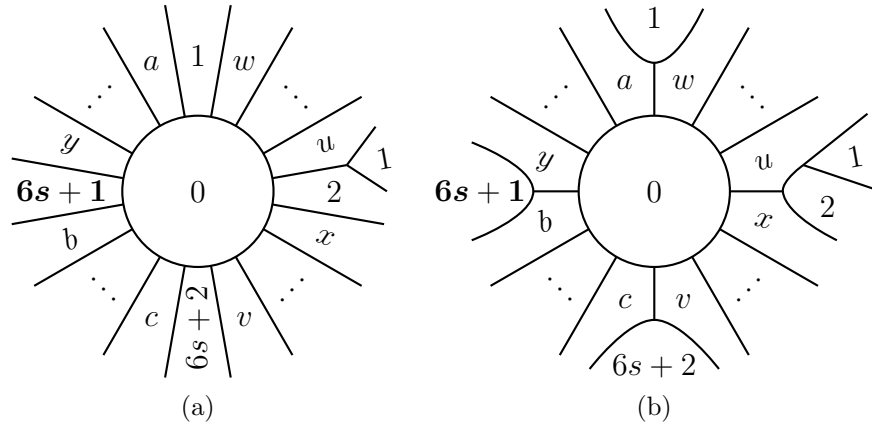


Abbildung 4.23: Erste Modifikationen an der Triangulierung des G_{12s+15}

sowie mit Regel A* daraus die folgenden Teile der Rotationen von **1** und **2**:

$$\begin{array}{cccccc}
 0. & \dots & 6s+2 & v & 6s+1 & \dots \\
 \mathbf{1}. & \dots & \mathbf{0} & w & \mathbf{6s+2} & \dots \\
 2. & \dots & 1 & u & 0 & \dots
 \end{array}$$

Nun modifizieren wir wiederum den sich daraus ergebenden Teil in Abbildung 4.23 um die Nachbarschaften

$$(a, w), (b, y), (c, v), (u, x)$$

zu erhalten, dabei aber die Nachbarschaften

$$(0, 1), (0, 2), (0, \mathbf{6s+1}), (0, 6s+2) \tag{4.4}$$

zu verlieren.

Nun verkleben wir wiederum das Land 0 in Abbildung 4.23(b) mit dem Land t in Abbildung 4.24(a). Dadurch erhalten wir die Nachbarschaften

$$(a, c), (b, x), (y, u), (v, w).$$

Als zweiten Henkel verkleben wir die beiden gestrichelten Kreise in Abbildung 4.24 (a) wie in Abbildung 4.24 (b) zu sehen. Dadurch erhalten wir die Nachbarschaften

$$(a, b), (b, w), (w, x), (x, v), (v, u), (u, c), (c, y), (y, a).$$

Als dritten und vierten Henkel verkleben wir nun wiederum den oberen und unteren bzw. den rechten und linken Kreis in Abbildung 4.24(b) wie in Abbildung 4.25(a) und (b) zu sehen. Dadurch erhalten wir die Nachbarschaften

$$(a, u), (u, b), (b, v), (v, a), (u, w), (b, c), (c, x), (x, y), (y, w), (w, c), (a, x), (v, y).$$

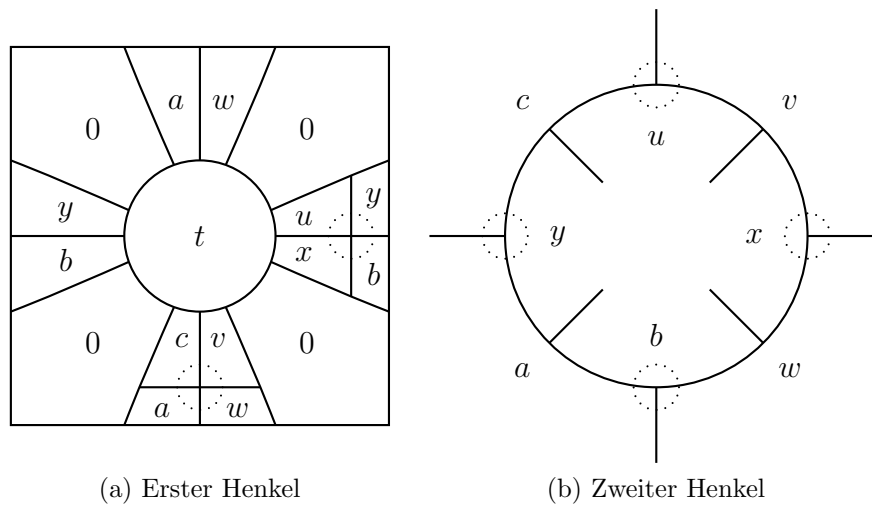


Abbildung 4.24: Erste beiden Henkel zur Herstellung der fehlenden Nachbarschaften im G_{12s+15}

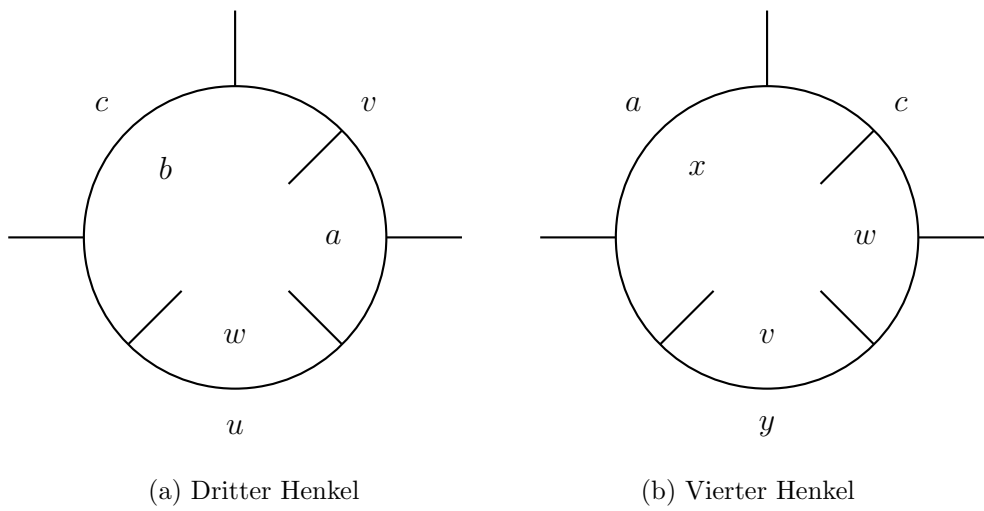


Abbildung 4.25: Dritter und vierter Henkel zur Herstellung der fehlenden Nachbarschaften im G_{12s+15}

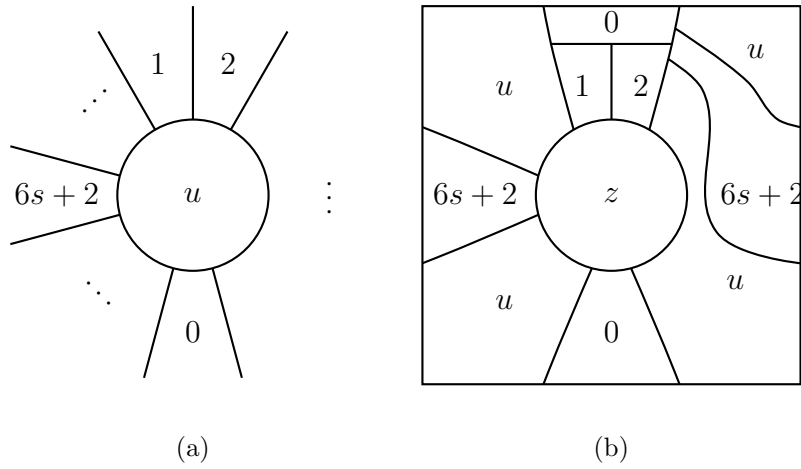


Abbildung 4.26: Fünfter Henkel zur Herstellung der fehlenden Nachbarschaften im G_{12s+15}

Dadurch haben wir mit bereits vier Henkeln die 28 Nachbarschaften zwischen a, b, c, u, v, w, x, y hergestellt und müssen mit den letzten beiden Henkeln nur die in (4.4) verlorenen Nachbarschaften und die eine Nachbarschaft (x, \boldsymbol{x}) erzeugen.

Aus der Rotation von 2 erhalten wir das lokale Bild um u in Abbildung 4.26(a). Durch Verkleben des Landes u mit dem Land z im Torus in Abbildung 4.26(b) erhalten wir die Nachbarschaften

$$(0, 1), (0, 2), (0, 6s + 2).$$

Dadurch dass x an 0 und \boldsymbol{x} an $6s + 1$ grenzt ist es nun trivial die fehlenden zwei Nachbarschaften mit einem weiteren Henkel herzustellen, anschließend die Grenze zwischen x und \boldsymbol{x} aufzuheben. Damit fehlen nur noch Einbettungen von K_2 in S_0 – was offensichtlich ist – und von K_{14} in die S_{10} (s. Anhang A.3) und haben damit Theorem 3.1.3 für $n \equiv 2 \pmod{12}$ gezeigt.

Bemerkung 4.7.1: Auch dieser Fall gehörte mit zu den letzten Lösungen, die von Ringel und Youngs ([8]) gefunden wurden, allerdings war es durch die große Zahl an Henkeln leichter möglich, die fehlenden Nachbarschaften herzustellen.

4.8 $n \equiv 8 \pmod{12}$

Auch in diesem Fall werden wir wieder $H := \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{6s+3}$ verwenden. Allerdings ist die Verteilung der Gewichte auf den Graphen deutlich komplizierter zu beschreiben.

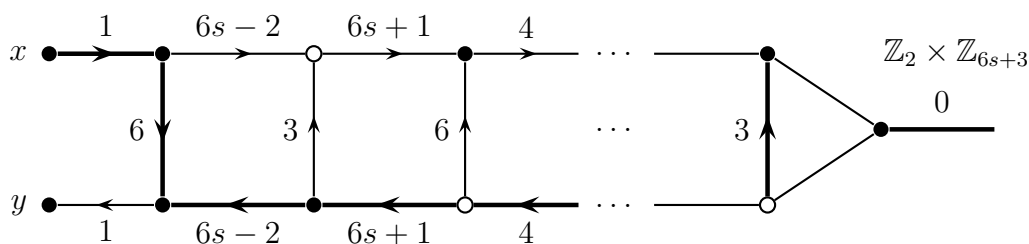


Abbildung 4.27: Triangulierungsgraph für den G_{12s+9}

In Abbildung 4.27 ist der linke Teil des Triangulierungsgraphen bereits beschriftet, die nicht eingezeichneten Knoten sollen wiederum in der oberen Zeile eine Rotation im Uhrzeigersinn (\bullet) und in der unteren Zeile gegen den Uhrzeigersinn (\circ) besitzen. Damit gelten in diesem Graph stets (C1), (C2), und (C6). (C5) ist an x erfüllt, das Gewicht an der Kante von y erzeugt wie im Fall $n \equiv 2 \pmod{12}$ nur $\{0\} \times \mathbb{Z}_{6s+3}$ und damit müssen wir es als zwei Länder y und \mathbf{y} betrachten. Den Graphen, für den wir hier eine Triangulierung erhalten werden, wollen wir wieder mit G_{12s+9} bezeichnen.

Wir müssen auch hier wieder gerade und ungerade Werte für s unterscheiden, allerdings hat dies eine deutlich größere Auswirkung auf die Lösung.

4.8.1 s gerade

In diesem Fall werden wir eine sogenannte „Foxtrott-Lösung“ verwenden. Für die Vertikalen ergibt sich die Folge

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{6}, & 3, & 6, & \\ \mathbf{12k + 3}, & \mathbf{12k + 6}, & 12k + 3, & 12k + 6, \quad (k = 1, 2, \dots, \frac{s}{2} - 1) \\ & & \mathbf{3}. & \end{array}$$

Foxtrott bezieht sich dabei darauf, dass sich das Muster nach vier Schritten wiederholt. Dabei haben wir hier (C3) für alle Elemente $(0, 3k), (1, 3k), k \in 3\mathbb{Z}_{6s+3}$ erfüllt, indem wir nur die zweiten Komponenten $3k \equiv 3, 6 \pmod{12}$ verwendet haben.

Für die Horizontalen müssen wir wiederum nur die zweite Komponente für die obere Zeile angeben, die restlichen Werte ergeben sich zusammen mit den Vertikalen dann bereits eindeutig daraus. Da der Beginn der Folge schon in Abbildung 4.27 zu sehen ist ergibt sich durch (C4) zwangsläufig

$$\begin{array}{cccc} 1, & 6s - 2, & 6s + 1, & 4, \\ 6s - 2 - 6k, & 1 + 6k, & 6s + 1 - 6k, & 4 + 6k, \quad (k = 1, 2, \dots, \frac{s}{2} - 1) \\ & & 3s + 1. & \end{array}$$

Hier haben wir (C3) für alle restlichen Elemente erfüllt, indem wir alle zweiten Komponenten $k \equiv 1 \pmod{3}$ verwendet haben, denn für ein Element $a \in \mathbb{Z}_{6s+3}$ mit

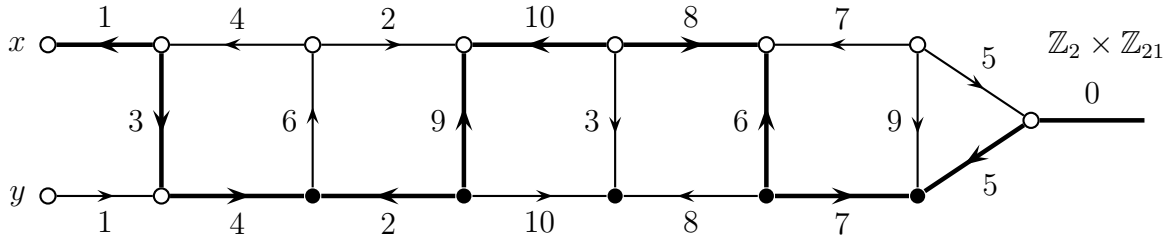


Abbildung 4.28: Triangulierungsgraph für den G_{45}

$a \equiv 2 \pmod{3}$ gilt stets $-a \equiv 1 \pmod{3}$. Durch Vergleich mit den entsprechenden Vertikalen ist ersichtlich, dass (C4) tatsächlich erfüllt ist und wir somit für gerade s eine Triangulierung von G_{12s+9} erhalten.

4.8.2 s ungerade

Die Lösung für ungerade $s \geq 5$ ist etwas komplexer. Die Vertikalen ergeben sich aus diesen Folgen:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{6}, \quad 3, \quad \mathbf{6}, \\
 & \quad \quad \quad 3k, \quad (k = s, s-1, \dots, 3) \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{3k}, \quad (k = s-4, s-3, s-2, s-1, s) \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{3k}, \quad (k = 3, 4, \dots, s-5) \\
 & \quad \quad \quad \mathbf{3}.
 \end{aligned}$$

Dabei ist hier (C3) für alle Elemente $(0, 3k), (1, 3k), k \in 3\mathbb{Z}_{6s+3}$ dadurch gezeigt, dass wir alle solchen Elemente mit $k \leq s$ verwendet haben.

Die Horizontalen ergeben sich nun wieder aus dem vorhandenen Teil in Abbildung 4.27 und (C4):

$$\begin{aligned}
 & 1, \quad 6s-2, \quad 6s+1, \\
 & \quad \quad 3k+1, \quad 3(s+2-k)+1, \quad (k = 1, 2, \dots, \frac{s-1}{2}) \\
 & \quad \quad 3k+1, \quad (k = \frac{3s-3}{2}, \frac{s+3}{2}, \frac{3s-1}{2}, \frac{s+1}{2}, \frac{3s+1}{2}) \\
 & \quad \quad 3(s+1+k)+1, \quad 3(2s-2-k)+1, \quad (k = \frac{s-7}{2}, \frac{s-5}{2}, \dots, 1) \\
 & \quad \quad 6s-5.
 \end{aligned}$$

Wiederum deckt dies alle zweiten Komponenten $k \equiv 1 \pmod{3}$ ab und erfüllt somit (C3). Durch Vergleich mit den entsprechenden Vertikalen ist ersichtlich, dass (C4) tatsächlich erfüllt ist und wir somit auch für ungerade s eine Triangulierung von G_{12s+9} erhalten.

Für $s = 0$, $s = 1$ und $s = 3$ funktioniert das allgemeine Prinzip nicht, allerdings erfüllt der Graph in Abbildung 4.28 die Prinzipien (C1) – (C6). Der K_8 ist ein

Teilgraph des G_9 in Abschnitt 4.5 und damit ebenfalls in die S_2 einbettbar. Für den K_{20} ist in Anhang A.4 ein Rotationssystem angegeben.

4.8.3 Bestimmung des Geschlechts

Der Graph G_{12s+9} besteht aus $12s + 9$ Knoten:

$$0, 1, \dots, 6s + 2, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \mathbf{6s + 2}, x, y, \mathbf{y}.$$

In diesem Graphen sind wiederum alle nummerierten Knoten untereinander, sowie x mit jedem nummerierten Knoten benachbart. \mathbf{y} ist nur mit allen fett nummerierten Knoten und y nur mit allen normalen nummerierten Knoten benachbart.

Mit Lemma 2.3.23 erhalten wir nun die Fläche mit $G_{12s+9} \triangleleft S_p$:

$$\begin{aligned} \alpha_0(G_{12s+9}) &= 12s + 9, \\ \alpha_1(G_{12s+9}) &= \frac{(12s + 6)(12s + 5)}{2} + (12s + 6) + 2\frac{12s + 6}{2} \\ &= (6s + 3)(12s + 9) \\ \Rightarrow 3E(S_p) &= 3(12s + 9) - 3(2s + 1)(12s + 9) \\ \Leftrightarrow 2 - 2p &= 12s + 9 - 24s^2 - 30s - 9 \\ \Leftrightarrow p &= 12s^2 + 9s + 1. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Um Theorem 3.1.3 zu zeigen müssen wir das Geschlecht von K_{12s+8} als

$$\left\lceil \frac{(12s+5)(12s+4)}{12} \right\rceil = 12s^2 + 9s + 2$$

ermitteln.

Wir müssen also durch einen einzigen Henkel die Nachbarschaften (x, y) und (y, \mathbf{y}) herstellen. Dazu benötigen wir den folgenden Ausschnitt aus dem Rotationssystem von G_{12s+9} :

0.	...	1	y	$6s + 2$...	x	$\mathbf{1}$...	$\mathbf{6}$	$\mathbf{5}$	3	$6s + 1$	4	...
$6s.$	0	$6s - 2$	1	...
$\mathbf{6s - 2}.$...	$\mathbf{6s - 1}$	\mathbf{y}	$\mathbf{6s - 3}$...	x	$6s - 1$...	1	0
$6s - 1.$...	$6s$	y	$6s - 2$

Damit erhalten wir den Ausschnitt in Abbildung 4.29(a)–(c), den wir entsprechend nach (d)–(f) umformen. Durch Verkleben des Landes t im Torus aus Abbildung 4.30 mit dem Land $\mathbf{6s - 2}$ in Abbildung 4.29(e) erhalten wir schließlich die fehlenden Nachbarschaften und erhalten durch Entfernen der Grenze zwischen y und \mathbf{y} tatsächlich die behauptete Einbettung des K_{12s+8} . Damit haben wir Theorem 3.1.3 auch für $n \equiv 8 \pmod{12}$ gezeigt.

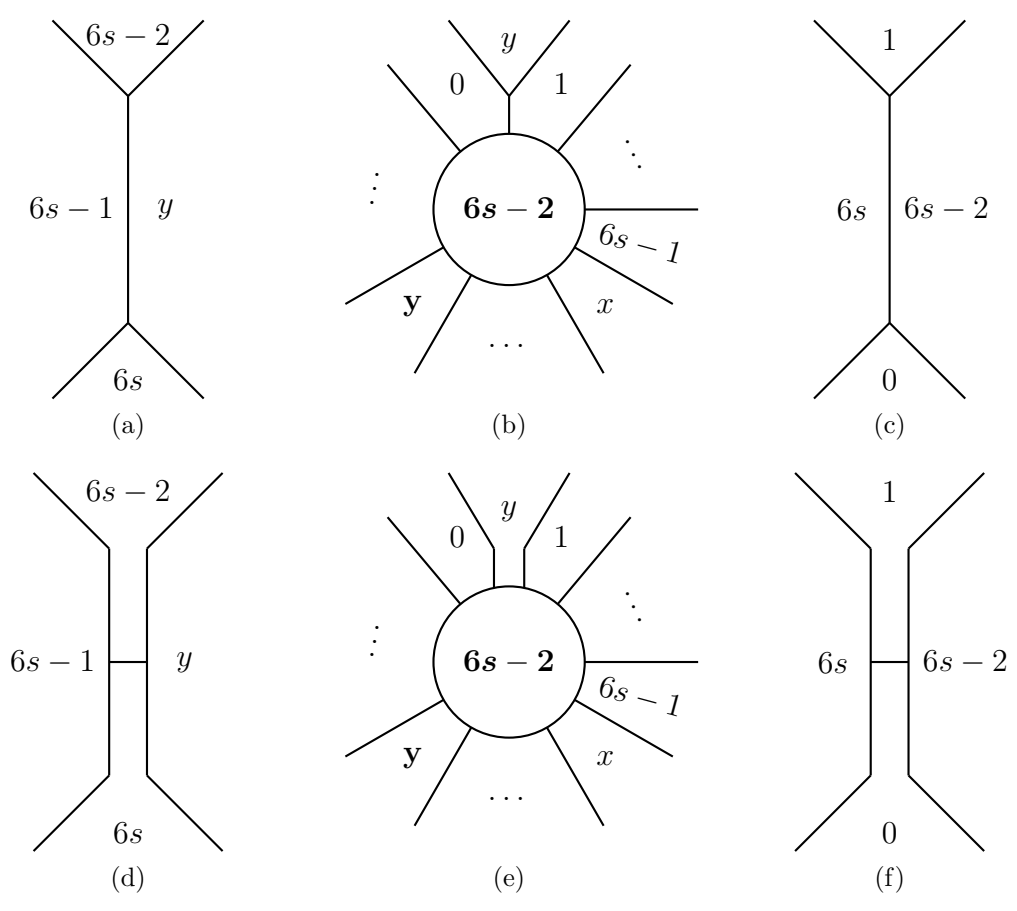


Abbildung 4.29: Modifikationen an der Triangulierung des G_{12s+9}

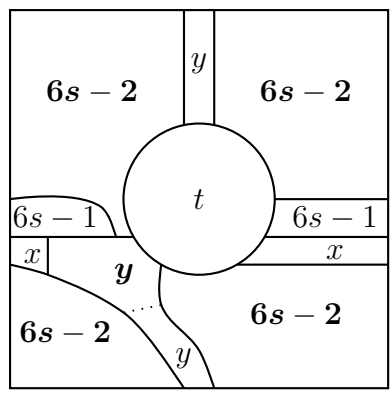


Abbildung 4.30: Henkel zur Herstellung der fehlenden Nachbarschaften im G_{12s+9}

Bemerkung 4.8.1: Dieser Fall wurde ebenfalls als einer der letzten direkt nach dem Fall 2 von Ringel und Youngs ([8]) gelöst. Dabei hat ihnen insbesondere geholfen, das Problem immer weiter zu vereinfachen, bis es sich nur noch um ein so genanntes „Fadenproblem“ handelte.

4.9 Lösungen höheren Index'

Wegen (C2) haben alle bisherigen gewichteten Graphen stets den Index 1 gehabt. Wir können allerdings die Prinzipien (C1) – (C6) so verallgemeinern, dass sie für einen beliebigen Index q des gewichteten Graphen gelten:

- (D_q1) Für alle $P \in V$ gilt $\text{val}(P) = 3$ oder $\text{val}(P) = q$ und P ist mit einem Kleinbuchstaben x, y, z, \dots markiert.
- (D_q2) σ induziert q Zyklen, die mit $[0], [1], \dots, [q-1]$ bezeichnet werden.
- (D_q3) Jedes Element $a \in H \setminus \{0\}$ taucht in jedem Zyklus genau einmal als Gewicht einer Kante auf.
- (D_q4) Das Kirchhoff'sche Gesetz gilt in jedem Knoten, der nicht mit einem Kleinbuchstaben markiert ist.
- (D_q5) Für jeden mit einem Kleinbuchstaben markierten Knoten p gilt, dass p in jedem Zyklus vorkommt. Seien ferner

$$(Q_0, p, k_0), \dots, (Q_{q-1}, p, k_{q-1})$$

die in p einfließenden Kanten. Dann gilt

$$k_i \equiv k_j \pmod{q} \text{ für alle } i, j \in \{0, \dots, q-1\}, \text{ ggT}(k_0, q) = 1$$

und

$$k := \sum_{i=0}^{q-1} k_i$$

erzeugt die Untergruppe $qH \subset H$ (d.h. $\langle k \rangle = qH$, bzw. für $H = \mathbb{Z}_n$: $\text{ggT}(k, n) = q$).

- (D_q6) Jedes Element $a \in H$ der Ordnung 2 ist entweder Gewicht einer Sackgasse oder einer Kante, die in zwei unterschiedlichen Zyklen vorkommt.
- (D_q7) Wenn (P, Q, k) im Zyklus $[a]$ vorkommt und $(Q, P, -k)$ im Zyklus $[b]$, dann gilt

$$k \equiv b - a \pmod{q}.$$

Für $q = 1$ entspricht dies gerade den Prinzipien (C1) – (C6), da (D₁7) nichts aussagt. Wir werden die in (D_q2) definierten Zyklen manchmal auch mit $[b], b \notin \{0, \dots, q-1\}$ bezeichnen und meinen dann den Zyklus $[a]$ mit $a \equiv b \pmod{q}$.

Nun verallgemeinern wir noch Regel A und Regel B entsprechend:

Regel A_q: Wir erhalten die Rotation des Knotens i , indem wir jede Zahl in dem Zyklus $[i]$ mit i in H addieren und die Reihenfolge beibehalten. Tauchen im Zyklus $[i]$ Elemente $x \notin H$ auf, so werden diese unverändert in die Rotation von i übernommen.

Regel B_q: Für Knoten $x \notin H$ seien

$$(P_0, x, k_0), \dots, (P_{q-1}, x, k_{q-1})$$

die an x grenzenden Kanten, in der durch die Rotation von x vorgegebenen Reihenfolge, wobei (P_0, x, k_0) in $[0]$ vorkommt. Setze

$$k := \sum_{i=0}^{q-1} k_i.$$

Wir legen dann die Rotation von x wie folgt fest:

$$x. \quad \dots \quad -k_1 \quad 0 \quad k_0 \quad k_0 + k_{q-1} \quad k_0 + k_{q-1} + k_{q-2} \quad \dots \quad k - k_1 \quad k \quad k + k_0 \quad \dots$$

Wegen (D_q5) taucht in der Rotation von x jedes Element von H genau einmal auf. Wenn wir wieder $k_j := k_i$ für alle $j \notin \{0, \dots, q-1\}, j \equiv i \pmod{q}$ setzen, gilt außerdem

$$a := \sum_{i=0}^l k_{-i} \Rightarrow a \equiv (l+1)k_0 \pmod{q}.$$

Lemma 4.9.1: *Seien die Bezeichnungen wie in Regel B_q. Dann taucht*

$$[a]. \quad \dots \quad k_i \quad x \quad k_{i+1} \quad \dots$$

genau dann als Teil eines Zyklus auf, wenn $a \equiv ik_i \pmod{q}$.

Beweis: Wegen (D_q5) ist

$$t \equiv k_i \pmod{q}, \quad t \in \{0, \dots, q-1\}$$

unabhängig von i . In $[0]$ haben wir

$$[0]. \quad \dots \quad k_0 \quad x \quad -k_1 \quad \dots$$

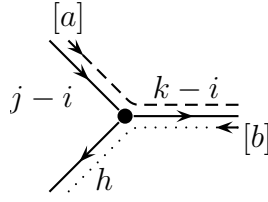


Abbildung 4.31: lokales Bild des gewichteten Graphen im Beweis von Satz 4.9.2

Wegen (D_q7) folgt daraus, dass die Kante (P_1, x, k_1) in $[-t]$ auftauchen muss. Wir erhalten also

$$[-t]. \quad \dots \quad k_1 \quad x \quad -k_2 \quad \dots$$

Induktiv erhalten wir

$$[-it]. \quad \dots \quad k_i \quad x \quad -k_{i+1} \quad \dots,$$

und damit gerade die Behauptung. \square

Wir werden nun Satz 3.4.2 auf beliebige Indizes erweitern:

Satz 4.9.2: *Ein Rotationssystem τ , welches mit Regel A_q und Regel B_q aus einem Graphen G mit Rotationssystem σ , der $(D_q1) - (D_q7)$ erfüllt, konstruiert wird, ist eine Triangulierung.*

Beweis: Wir müssen lediglich die Gültigkeit von Regel Δ nachweisen. Sei also

$$i. \quad \dots \quad j \quad k \quad \dots$$

ein Teil des erhaltenen Rotationssystems mit $j, k \in H$. Dann gilt nach Regel A_q , dass

$$[a]. \quad \dots \quad j - i \quad k - i \quad \dots \quad \text{mit } i \equiv a \pmod{q} \quad (4.6)$$

ein Teil der ursprünglichen Zyklen ist. O.B.d.A. taucht in G dann das lokale Bild in Abbildung 4.31 auf. Daraus folgt wegen (D_q4) , dass $h = (j - i) - (k - i) = j - k$ ist. Also taucht im Zyklus $[b]$

$$[b]. \quad \dots \quad i - k \quad j - k \quad \dots$$

auf. Dies gilt auch, wenn $k - i$ das Gewicht einer Sackgasse ist, da dann $k - i = i - k$ gilt. Wegen (D_q7) gilt

$$k - i \equiv b - a \pmod{q}.$$

Aus (4.6) erhalten wir also

$$k \equiv b \pmod{q}.$$

Mit Regel A_q erhalten wir daraus

$$k. \dots i \ j \dots$$

Sei nun

$$j. \dots x \ l \dots$$

ein Teil des Rotationssystems. Dann gilt nach Regel A_q , dass

$$[a]. \dots x \ l - j \dots \text{ mit } j \equiv a \pmod{q} \tag{4.7}$$

ein Teil der ursprünglichen Zyklen ist. Wegen (D_q5) ist dann auch

$$[b]. \dots j - l \ x \dots$$

ein ursprünglicher Zyklus. Aus (D_q7) und (4.7) folgt dann

$$l \equiv b \pmod{q}$$

und damit

$$l. \dots j \ x \dots$$

Den Fall

$$j. \dots l \ x \dots$$

führen wir mit Regel A_q auf

$$[a]. \dots l - j \ x \dots, \ a \equiv j \pmod{q}.$$

Daraus folgt nun

$$k_i = l - j \text{ für ein } k_i$$

und wegen Lemma 4.9.1 auch

$$j \equiv ik_i \pmod{q} \Rightarrow l \equiv (i + 1)k_i.$$

Mit Regel B_q erhalten wir daraus

$$x. \dots j \ l \dots$$

Der letzte Fall

$$x. \dots j \ l \dots$$

wird mit Regel B_q zu

$$k_i = l - j \text{ für ein } k_i, \ l \equiv (1 - i)t \pmod{q}.$$

Aus Lemma 4.9.1 erhalten wir nun

$$[a]. \dots x \ j - l \dots \ a \equiv l \pmod{q}$$

und damit

$$l. \dots x \ j \dots$$

□

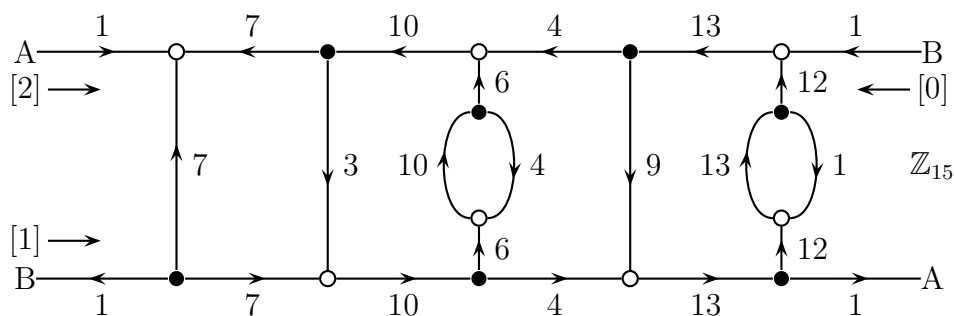


Abbildung 4.32: Triangulierungsgraph für den K_{15}

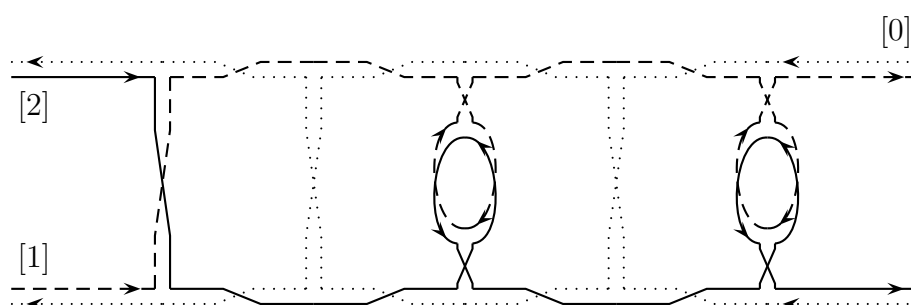


Abbildung 4.33: Zyklen des Triangulierungsgraphen des K_{15}

4.10 $n \equiv 3 \pmod{12}$

Hierfür werden wir eine Index-3-Lösung verwenden. Dazu sei $H := \mathbb{Z}_{12s+3}$. Zuerst betrachten wir dazu das Beispiel für $s = 1$ in Abbildung 4.32, (D_3^2) ist in Abbildung 4.33 verdeutlicht. Hier gilt wieder, dass die beiden mit A markierten Punkte identifiziert werden, ebenso für B. Zu beachten ist dabei, dass die Identifikation wie bei einem Möbiusband passiert, d.h. wenn man den Zyklus des Graphen über die Kante rechts oben verfolgt, so gelangt man zur Kante links unten.

Wir verwenden hier wegen (D_3^3) jede Zahl dreimal als Gewicht einer Kante. Für die Gewichte k der Vertikalen gilt wieder $k \equiv 0 \pmod{3}$ (mit Ausnahme der 7, vgl. folgenden Absatz) und sie tauchen je einmal als lange Vertikale und einmal als zwei kurze Vertikale übereinander auf (beachte: $12 \equiv -3 \pmod{15}$ etc.).

Die Gewichte der Horizontalen tauchen als Dreierpaare übereinander auf, wobei die mittlere Kante die Hälfte eines Kreises bildet. Die 7 nimmt dabei eine Sonderstellung ein, sie taucht als mittlere Kante in Form einer Vertikalen auf. Es genügt nun, (D_3^4) nur in der unteren Zeile zu überprüfen. Dabei ist der Knoten, an dem

zwei Kanten mit dem Gewicht 7 anliegen, der einzige, in dem (D_34) nur in H , nicht aber in \mathbb{Z} gilt.

Wir verwenden für die Horizontalen nur die Gewichte k mit $k \equiv 1 \pmod{3}$ und (D_37) legt dann die Orientierung der Horizontalen eindeutig fest. Die Vertikalen (mit Ausnahme der 7) sind dabei noch flexibel und können deswegen so ausgerichtet werden, dass (D_34) erfüllt ist.

Im allgemeine Graphen verwenden wir nun $2s$ Kreise und $2s + 1$ lange Vertikalen, analog zum Fall $s = 1$. Es genügt nun nur die untere Zeile anzugeben, der Rest ergibt sich aus den Regeln zur Platzierung der Vertikalen und Horizontalen.

Dazu platzieren wir die Vertikalen in der arithmetischen Folge (beachte wieder die Ausnahme $6s + 1$)

$$6s + 1, 3k, k \in \{1, \dots, 4s\}$$

und die Horizontalen in den zwei verschränkten arithmetischen Folgen

$$6s + 1 - 3k, k \in \{0, \dots, 2s\} \text{ und } 6s + 4 + 3k, k \in \{0, \dots, 2s - 1\}.$$

Diese Folge endet in 1 und damit erhalten wir in dem außergewöhnlichen Knoten am linken Rand wiederum

$$-(6s + 1) - (6s + 1) - 1 = -(12s + 3) \equiv 0 \pmod{12s + 3}$$

und damit gilt (D_34) im gesamten Graphen.

Wir erhalten also einen Graphen, der $(D_31) - (D_37)$ erfüllt und damit eine Triangulierung des K_{12s+3} , d.h. wir haben Theorem 3.1.3 für den K_{12s+3} gezeigt.

Bemerkung 4.10.1: Der hier verwendete Graph – und damit auch der im nächsten Fall – wurde von Gustin ([2]) zusammen mit seinen allgemeinen Prinzipien, die einer frühen Form von $(D_q1) - (D_q4)$ und (D_q7) entsprechen, entwickelt.

4.11 $n \equiv 5 \pmod{12}$

Auch hier werden wir wieder eine Index 3 Lösung verwenden, und zwar mit derselben Gruppe $H := \mathbb{Z}_{12s+3}$, um eine Triangulierung für den $K_{12s+5} - K_2$ zu erhalten.

Wir betrachten dazu den Graphen in Abbildung 4.34. Prinzipiell ist es fast der gleiche Graph wie im vorherigen Fall, nur dass die außergewöhnliche Vertikale diesmal zwei mit Kleinbuchstaben markierte Knoten verbindet und das Gewicht 1 trägt. Wir verwenden für den allgemeinen Fall sogar dieselben Folgen für die Vertikalen und Horizontalen, so dass wir $(D_31) - (D_34)$, (D_36) und (D_37) automatisch erhalten.

(D_35) ist nun in x und y leicht zu überprüfen:

$$\begin{aligned} 1 &\equiv 6s + 1 \pmod{3}, \\ 1 + 1 + (6s + 1) &= 6s + 3, \\ ggT(6s + 3, 12s + 3) &= ggT(6s + 3, 6s) = ggT(3, 6s) = 3. \end{aligned} \tag{4.8}$$

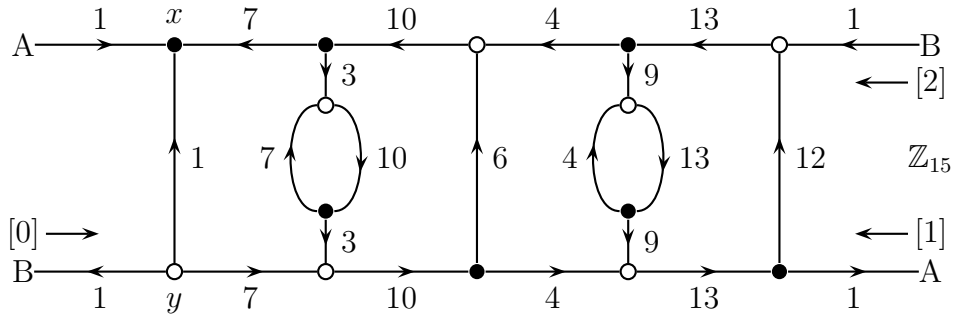


Abbildung 4.34: Triangulierungsgraph für den $K_{17} - K_2$

Wir erhalten also eine Triangulierung des $K_{12s+5} - K_2$ und können die fehlende Nachbarschaft problemlos durch einen weiteren Henkel herstellen. (4.8) gilt nicht für $s = 0$. Der K_5 ist aber ein Teilgraph des K_7 und damit nach Abschnitt 4.1 in die S_1 einbettbar. Damit haben wir Theorem 3.1.3 auch für den K_{12s+5} gezeigt.

Bemerkung 4.11.1: Diese Lösung wurde ursprünglich von Ringel entwickelt, aufbauend auf den Resultaten von Gustin ([2]) dann aber von Ringel ([8]) weiter vereinfacht.

4.12 $n \equiv 6 \pmod{12}$

In diesem Fall wollen wir eine Triangulierung des $K_{12s+6} - K_3$ konstruieren und damit können wir wiederum die Gruppe $H := \mathbb{Z}_{12s+3}$ verwenden.

Der erste Fall K_6 ist ein Teilgraph des K_7 in Abschnitt 4.1 und damit ebenfalls in die S_1 einbettbar. Für den K_{18} haben wir in Anhang A.5 ein Rotationssystem angegeben. Zur Lösung mit $n = 30$ benötigen wir noch ein weiteres Konstruktionsprinzip:

- (D_q8) Ein Element $a \in H$ der Ordnung 3 darf auch Gewicht einer orientierten Sackgasse sein (dann wird in der entstehenden Rotation für 0 beim Durchlaufen der Kante aber $a, -a$ hintereinander notiert)

Bemerkung 4.12.1: Aus (D_q7) folgt automatisch, dass für solche Gewichte stets

$$a \equiv 0 \pmod{q}$$

gelten muss, und damit ist das Prinzip nur anwendbar, wenn $|H|$ ein Vielfaches von $3q$ ist. Ferner muss (D_q6) so modifiziert werden, dass es mit (D_q8) verträglich ist.

Lemma 4.12.2: *Mit (D_q1) – (D_q8) und den gleichen Voraussetzungen wie in Satz 4.9.2 erhält man ebenfalls eine Triangulierung.*

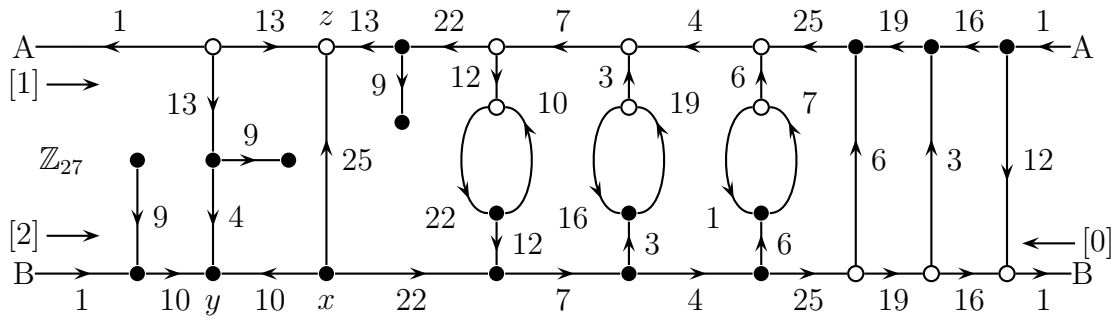


Abbildung 4.35: Triangulierungsgraph für den $K_{30} - K_3$

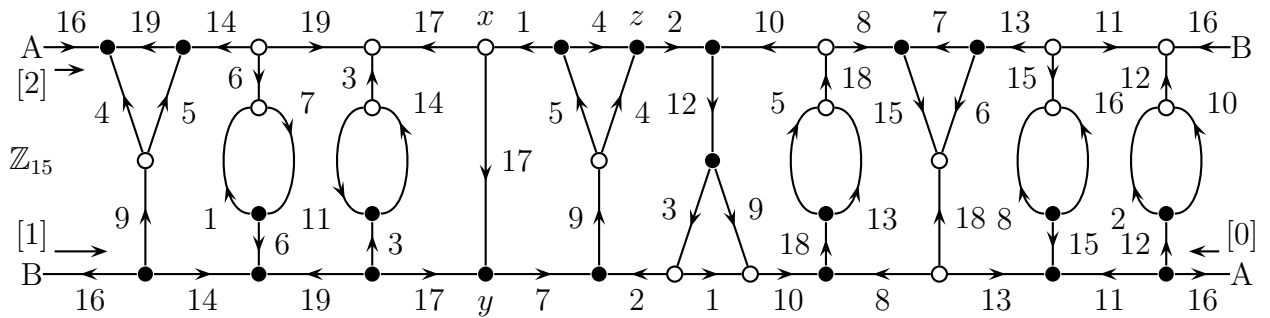


Abbildung 4.36: Triangulierungsgraph für den $K_{42} - K_3$

Beweis: Wir müssen Regel Δ lediglich noch für den Ausschnitt

$$[k]. \quad \dots \quad a \quad -a \quad \dots$$

bzw.

$$k. \quad \dots \quad a + k \quad -a + k \quad \dots$$

für $k = 1, \dots, q$ prüfen. Mit Bemerkung 4.12.1 erhalten wir dann

$$\begin{array}{ccccccc} a + k. & \dots & 2a + k & k & \dots & & \\ -a + k. & \dots & k & -2a + k & \dots, & & \end{array}$$

und, da nach Voraussetzung $2a = -a$ ist, folgt die Behauptung. \square

Der Triangulierungsgraph für den $K_{30} - K_3$ ist in Abbildung 4.35 dargestellt. Für $n = 42$ lässt sich das allgemeine Verfahren noch nicht gut beschreiben, weswegen wir den Graphen dafür in Abbildung 4.36 angegeben haben. Für diese beiden Graphen lassen sich $(D_31) - (D_38)$ direkt ablesen.

Für alle $n = 12s + 6$ mit $s \geq 4$ verwenden wir den in Abbildung 4.37 abgebildeten Graphen.

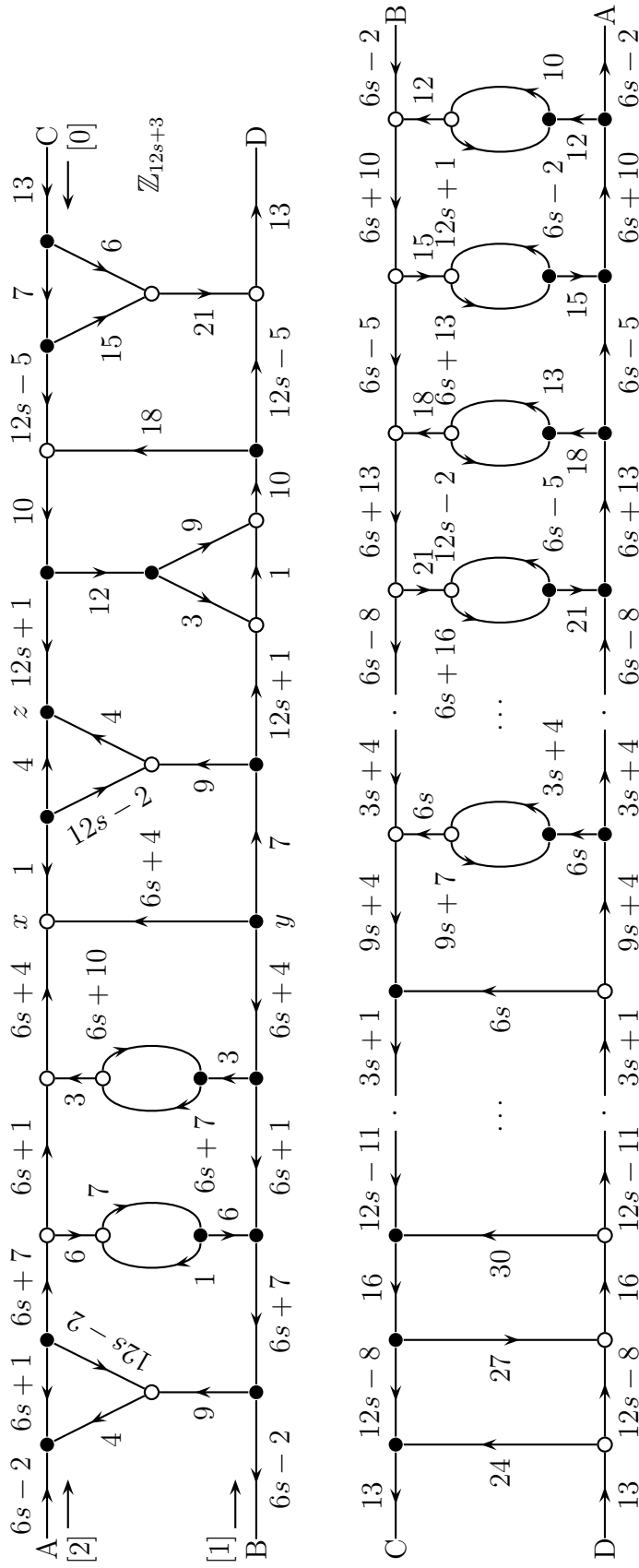


Abbildung 4.37: Triangulierungsgraph für den $K_{12s+6} - K_3$

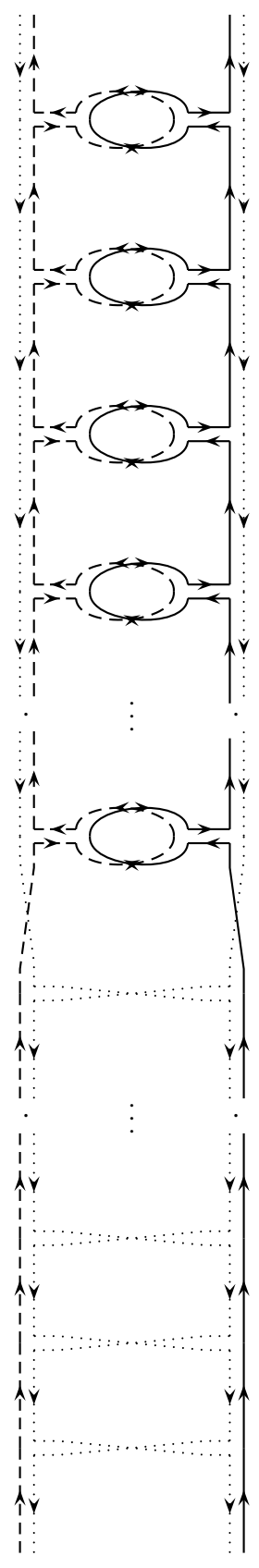
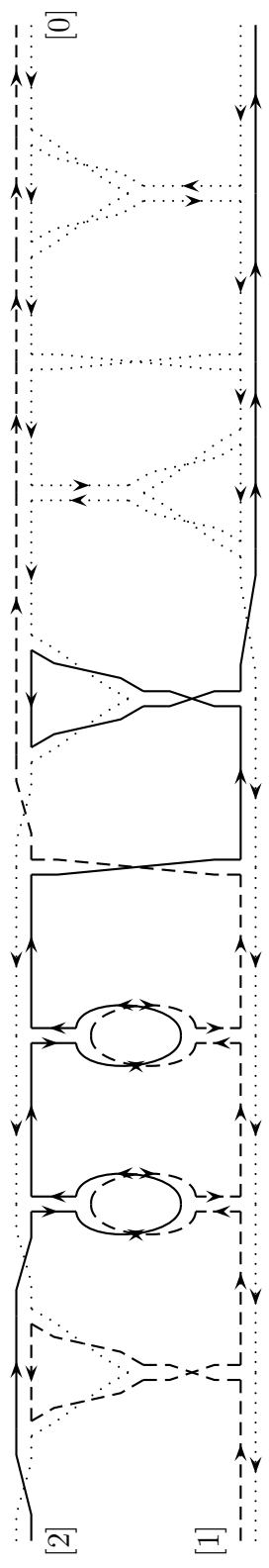


Abbildung 4.38: Zyklen des Triangulierungsgraphen für den $K_{12s+6} - K_3$

Dazu klären wir zuerst, wie die Lücken im unteren Teil des Graphen auszufüllen sind. Auf der linken Seite haben wir für die Horizontalen die beiden verschränkten Folgen

$$3k + 1, k = 4, \dots, s \text{ und } 12s + 4 - 3k, k = 4, \dots, s. \quad (4.9)$$

Die Vertikalen bilden die Folge

$$3k, k = 8, \dots, 2s. \quad (4.10)$$

Auf der rechten Seite setzen sich auf den Horizontalen die verschränkten Folgen fort:

$$3k + 1, k = s + 1, \dots, 2s - 1 \text{ und } 12s + 4 - 3k, k = s + 1, \dots, 2s - 2. \quad (4.11)$$

Die Vertikalen bilden die Folge

$$3k, k = 2s, \dots, 4. \quad (4.12)$$

Auch die Gewichte der Kreise bestehen aus verschränkten Folgen. Für die linken Halbkreise sind dies

$$9s + 4 + 3k, k = 1, \dots, s - 1 \text{ und } 9s + 7 - 3k, k = 1, \dots, s - 2, \quad (4.13)$$

für die rechten Halbkreise

$$3s + 7 - 3k, k = 1, \dots, s - 1 \text{ und } 3s + 4 + 3k, k = 1, \dots, s - 2. \quad (4.14)$$

Satz 4.12.3: *Der Graph in Abbildung 4.37 erfüllt $(D_3 1) - (D_3 7)$.*

Beweis: $(D_3 1)$ und $(D_3 6)$ sind offensichtlich, $(D_3 2)$ und $(D_3 7)$ sind in Abbildung 4.38 dargestellt.

$(D_3 3)$ Die Folgen in (4.9) und (4.11) decken alle Zahlen $a \equiv 1 \pmod{3}$ mit $a \leq 12s + 3$ ab, mit Ausnahme von

$$1, 4, 7, 10, 6s + 1, 6s + 4, 6s + 7, 12s - 5, 12 - 2, 12s + 1.$$

Diese tauchen aber gerade im oberen Teil je an zwei Kanten auf, die von $[0]$ und $[1]$ bzw. $[0]$ und $[2]$ durchlaufen werden. Insgesamt kommt damit im Zyklus $[0]$ jede Zahl $a \equiv 1 \pmod{3}$, $a \leq 12s + 3$ einmal positiv und einmal negativ vor. Ferner durchläuft $[0]$ auch jede Zahl $3, 6, \dots, 6s$ einmal positiv und einmal negativ (für $3, 6, 9, 12, 18, 21$ im oberen Teil, alle weiteren sind in (4.10) enthalten). Dies deckt insgesamt dann alle Elemente von \mathbb{Z}_{12s+3} ab.

Die Folgen (4.13) und (4.14) decken wiederum alle Zahlen $a \equiv 1 \pmod{3}$ mit $a \leq 12s + 3$ ab, mit Ausnahme von

$$1, 4, 7, 6s + 1, 6s + 4, 6s + 7, 6s + 10.$$

Diese tauchen wiederum im oberen Teil als Kanten auf, die von [1] und [2] durchlaufen werden. Insgesamt kommt damit im Zyklus [1] jede Zahl $a \equiv 1 \pmod{3}$, $a \leq 12s + 3$ einmal positiv ((4.13) und (4.14)) und einmal negativ ((4.9) und (4.11)) vor. Für die Zahlen $3, 6, \dots, 6s$ gilt wiederum, dass $3, 6$ und 9 im oberen Teil und die restlichen Zahlen im unteren Teil je positiv und negativ in [1] vorkommen.

[2] verhält sich analog zu [1].

(D₃4) Im oberen Teil ist dies direkt nachprüfbar. Im unteren linken Teil gilt wegen (4.9) und (4.10)

$$\begin{aligned} & (3k + 1) - (12s + 4 - 3k) - 3(2k) \\ & \quad = 6k - (12s + 3) - 6k \equiv 0 \pmod{12s + 3}, \\ & (12s + 4 - 3k) - (3(k + 1) + 1) + 3(2k + 1) \\ & \quad = 12s - 6k + 6k + 3 \equiv 0 \pmod{12s + 3}. \end{aligned}$$

Im unteren rechten Teil gilt wegen (4.11) und (4.12)

$$\begin{aligned} & (3k + 1) - (12s + 4 - 3k) + 3(4s + 1 - 2k) \\ & \quad = 6k - (12s + 3) + (12s + 3 - 6k) \equiv 0 \pmod{12s + 3}, \\ & (12s + 4 - 3k) - (3(k + 1) + 1) - 3(4s + 1 - (2k + 1)) \\ & \quad = 12s - 6k - (12s - 6k) \equiv 0 \pmod{12s + 3} \end{aligned}$$

und wegen (4.12), (4.13) und (4.14)

$$\begin{aligned} & (9s + 4 + 3k) - (3s + 7 - 3k) + 3(2s + 2 - 2k) \\ & \quad = 6s - 3 + 6k + (6s + 6 - 6k) \equiv 0 \pmod{12s + 3}, \\ & (9s + 7 - 3k) - (3s + 4 + 3k) - 3(2s + 2 - (2k + 1)) \\ & \quad = 6s + 3 - 6k - (6s + 3 - 6k) \equiv 0 \pmod{12s + 3}. \end{aligned}$$

(D₃5) Es gelten

$$\begin{aligned} & 6s + 4 \equiv 1 \equiv 7 \equiv 4 \equiv 12s + 1 \equiv 1 \pmod{3}, \\ & (6s + 4) + (6s + 4) + 1 \equiv 6 \pmod{12s + 3}, \\ & -(6s + 4) - (6s + 4) - 7 \equiv 12s - 9 \pmod{12s + 3}, \\ & 4 + 4 + (12s + 1) \equiv 6 \pmod{12s + 3} \end{aligned}$$

und ferner

$$\begin{aligned} ggT(6, 12s + 3) &= ggT(6, 3) = 3, \\ ggT(12s - 9, 12s + 3) &= ggT(12s - 9, 12) = ggT(-9, 12) = ggT(-9, 3) = 3. \end{aligned}$$

□

Wir erhalten also eine Triangulierung des $K_{12s+6} - K_3$. Die fehlenden Nachbarschaften lassen sich nun auf dieselbe Art und Weise wie im Fall $n \equiv 10 \pmod{12}$ durch Ankleben des Henkels in Abbildung 4.7(b) herstellen. Damit haben wir Theorem 3.1.3 auch für den K_{12s+6} gezeigt.

Bemerkung 4.12.4: Diese Lösung für den Fall 6 wurde von Youngs in [13] ein Jahr nach den vorherigen Fällen 3 und 5 gefunden.

4.13 $n \equiv 0 \pmod{12}$

Dieser Fall ist der einzige, der bisher nicht mit Hilfe einer abelschen Gruppe gelöst werden konnte. Wir werden deswegen hier zwar die bisherigen Methoden verwenden, sie allerdings für nicht-kommutative Gruppen leicht umformulieren.

Sei H eine nicht-kommutative Gruppe mit neutralem Element ε . Wir werden die Gruppenoperation, wie für nicht-kommutative Gruppen üblich, als Multiplikation schreiben. Dann erhalten wir folgende nicht-kommutative Varianten unserer bisherigen Methoden:

Definition 4.13.1 (Kirchhoff'sches Gesetz (nicht-kommutativ)): Sei $G = (V, E)$ ein gewichteter Graph mit Gewichten aus einer nicht-kommutativen Gruppe H , σ ein Rotationssystem von G und $P \in V$ ein Knoten von G . Seien ferner

$$(P, Q_1, k_1), (P, Q_2, k_2), \dots, (P, Q_n, k_n)$$

die an P grenzenden Kanten mit $\sigma_P(Q_i) = Q_{i+1}$.

Dann sagen wir, dass G das *Kirchhoff'sche Gesetz* in P erfüllt, wenn gilt

$$\prod_{i=1}^n k_i = \varepsilon.$$

Regel A (kommutativ): Wir erhalten die Rotation des Knotens i , indem wir jedes Element in der Rotation von ε von links mit i in H multiplizieren und die Reihenfolge beibehalten.

Da wir direkt eine Triangulierung für K_{12s} finden werden, reicht uns diese einfache Variante von Regel A aus und wir benötigen Regel B nicht.

Satz 4.9.2 und Lemma 4.12.2 gelten dann weiterhin, da die Beweise die Kommutativität nicht benutzen.

Um die Gruppe, die wir verwenden wollen, zu beschreiben, sei zunächst

$$12s = 3 \cdot 2^k(2r + 1)$$

und $(\mathbb{F}_{2^k}, +, \cdot)$ der Körper mit 2^k Elementen.

Zur einfacheren Bezeichnung setzen wir

$$\mathbb{F}_{2^k}^+ := (\mathbb{F}_{2^k}, +), \quad \mathbb{F}_{2^k}^* := (\mathbb{F}_{2^k} \setminus \{0\}, \cdot).$$

Sei nun θ ein Erzeuger von $\mathbb{F}_{2^k}^*$. Dann ist $(1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{k-1})$ eine Basis von \mathbb{F}_{2^k} als \mathbb{F}_2 -Vektorraum. Wir definieren dann einen \mathbb{F}_2 -Automorphismus α auf \mathbb{F}_{2^k} durch

$$\begin{aligned} \alpha(1) &:= \theta, \\ \alpha(\theta) &:= 1 + \theta, \\ \alpha(\theta^i) &:= \theta^i \quad \forall i = 2, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Dann gelten

$$\begin{aligned} \alpha^3(1) &= \alpha^2(\theta) = \alpha(1 + \theta) = 1 + 2\theta = 1, \\ \alpha^3(\theta) &= \alpha^2(1 + \theta) = \alpha(1) = \theta, \\ \alpha^3(\theta^i) &= \theta^i \quad \forall i = 2, \dots, k-1. \end{aligned}$$

Damit gilt also, dass $(\{1, \alpha, \alpha^2\}, \circ)$ eine zyklische Abbildungsgruppe A mit 3 Elementen bildet.

Damit können wir nun unsere Gruppe definieren:

$$H := (\mathbb{F}_{2^k}^+ \rtimes A) \times \mathbb{Z}_{2r+1},$$

wobei \rtimes das semidirekte Produkt darstellt. Genauer bedeutet dies, dass H als Menge gerade

$$\mathbb{F}_{2^k} \times A \times \mathbb{Z}_{2r+1}$$

ist, mit der Multiplikation

$$(p, a, k) \cdot (q, b, l) := (p + a(q), a \circ b, k + l).$$

Wichtig ist hierbei, dass unsere Gruppe H wirklich $2^k \cdot 3(2r + 1) = 12s$ Elemente enthält. Ferner ist es keine kommutative Gruppe, da z.B.

$$(1, \alpha, 0) \cdot (1, 1, 0) = (1 + \theta, \alpha, 0) \neq (0, \alpha, 0) = (1, 1, 0)(1, \alpha, 0).$$

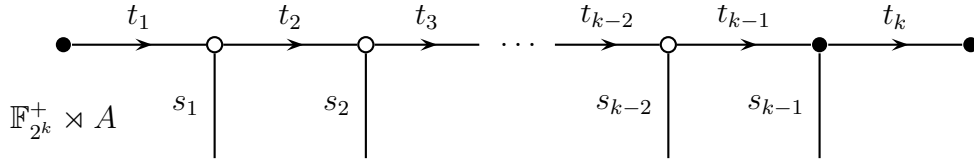


Abbildung 4.39: Teilkomponente des Triangulierungsgraphen für den K_{12s}

In den früheren Fällen haben wir schon gesehen, dass es ausreicht, für kartesische Produkte (C4) bzw. (D₁4) in den Komponenten einzeln zu überprüfen. Wir werden deswegen die Graphen für die Komponenten $\mathbb{F}_{2^k}^+ \rtimes A$ und \mathbb{Z}_{2r+1} getrennt beschreiben. (D₁1) und (D₁2) gelten in diesen Graphen, wenn sie in einem der beiden Graphen gelten, da sie nicht von den Gewichten abhängen.

Um (D₁6) zu überprüfen benötigen wir das folgende Lemma:

Lemma 4.13.2: *Ein Element $(p, a, i) \in H$ hat Ordnung 2 genau dann, wenn $p \neq 0$, $a = \mathbf{1}$ und $i = 0$.*

Beweis: Sei

$$(p, a, i)^2 = (p + a(p), a^2, 2i) = (0, \mathbf{1}, 0).$$

Da \mathbb{Z}_{2r+1} keine Elemente der Ordnung 2 hat, folgt damit $i = 0$. Auch A enthält keine Elemente der Ordnung 2 und damit muss $a = \mathbf{1}$ sein. Da nun aber $p + p = 0$ für alle $p \in \mathbb{F}_{2^k}$ gilt, hat $(p, \mathbf{1}, 0)$ höchstens Ordnung 2, und nur $(0, \mathbf{1}, 0)$ hat Ordnung 1. \square

Definition 4.13.3: Mit den vorherigen Bezeichnungen definieren wir

$$\begin{aligned} s_i &:= (\theta^i + \theta^{i+1}, \mathbf{1}), & \forall i = 1, 2, \dots, 2^k - 1, \\ t_i &:= (\theta^i, \alpha), & \forall i = 1, 2, \dots, 2^k - 1, \\ t_{2^k} &:= (0, \alpha), \\ \epsilon &:= (0, \mathbf{1}). \end{aligned}$$

Bemerkung 4.13.4: Nach Lemma 4.13.2 müssen also die Elemente $(s_i, 0)$ gerade die Gewichte der Sackgassen sein.

Da $\theta^i + \theta^{i+1} = \theta^i(1 + \theta)$ und θ ein Erzeuger von $\mathbb{F}_{2^k}^*$ ist, sind alle s_i paarweise verschieden. Insgesamt sind die t_i und s_i damit alle paarweise verschieden.

Lemma 4.13.5: *Sei $(p, a) \in \mathbb{F}_{2^k}^+ \rtimes A$, dann gilt*

$$(p, a)^{-1} = (a^{-1}(p), a^{-1}).$$

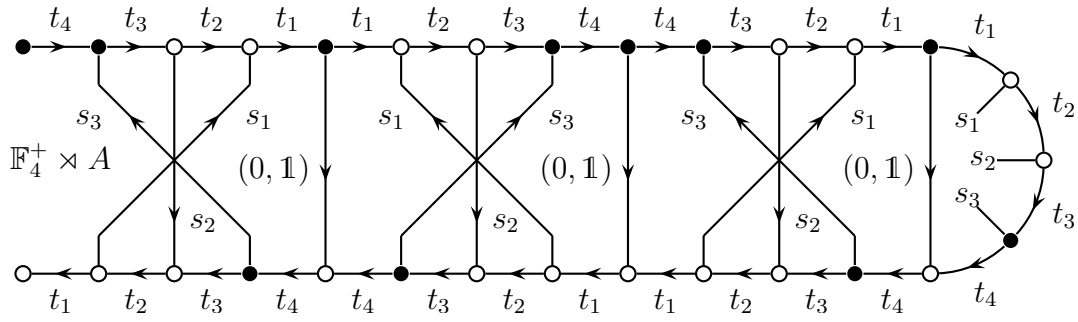


Abbildung 4.40: erste Komponente des Triangulierungsgraphen für den K_{48}

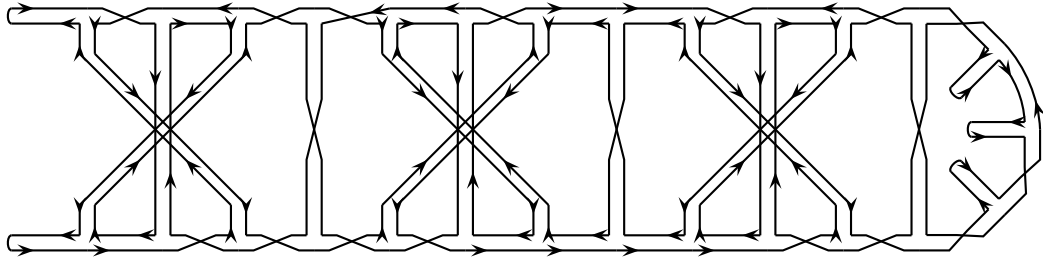


Abbildung 4.41: Zyklus des Triangulierungsgraphen für den K_{48}

Beweis: Es gilt

$$(p, a) (a^{-1}(p), a^{-1}) = (p + a(a^{-1}(p)), a \circ a^{-1}) = (p + p, \mathbb{1}) = \epsilon.$$

□

Da $\alpha^{-1} = \alpha^2$ gilt somit, dass die t_i^{-1} von allen t_i und s_i verschieden sind. Ferner ist α bijektiv und dadurch sind die t_i^{-1} auch paarweise verschieden. Damit ergibt die Menge der s_i , t_i und t_i^{-1} insgesamt $3 \cdot 2^k - 1$ verschiedene Elemente von $(\mathbb{F}_{2^k}^+ \times A) \setminus \{\epsilon\}$ und damit die gesamte Menge. Dadurch erfüllt der in Abbildung 4.39 dargestellte Graph gerade (D₁1), (D₁3) und (D₁5) – (D₁7) für die erste Komponente von H . Diesen fügen wir nun $(2r + 1)$ -mal zusammen, wie in Abbildung 4.40 für $k = 2$, $r = 3$ zu sehen. (D₁2) ist in Abbildung 4.41 für $k = 2$, $r = 3$ dargestellt.

Abschließend bleiben also einzig noch (D₁4) und (D₁8) zu zeigen, diese sind gerade die Aussagen der folgenden Lemmata:

Lemma 4.13.6: *Es gelten*

$$t_i^{-1} s_i t_{i+1} = \epsilon, \quad \forall i = 1, 2, \dots, 2^k - 2,$$

$$t_{2^k-1}^{-1} t_{2^k} s_{2^k-1} = \epsilon.$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} s_i t_i &= (\theta^i + \theta^{i+1}, \mathbf{1})(\theta^i, \alpha) = (\theta^i + \theta^{i+1} + \theta^i, \alpha) \\ &= (\theta^{i+1}, \alpha) = t_{i+1} \end{aligned}$$

für alle $i \leq b - 2$.

Damit erhalten wir also

$$t_i^{-1} s_i t_{i+1} = t_i^{-1} s_i s_i t_i = \epsilon,$$

da s_i Ordnung 2 besitzt. Ferner gilt

$$\begin{aligned} t_{2^k-1} s_{2^k-1} &= (1, \alpha)(1 + \theta, \mathbf{1}) = (1 + \alpha(1) + \alpha(\theta), \alpha) \\ &= (1 + \theta + 1 + \theta, \alpha) = t_{2^k}. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir wiederum

$$t_{2^k-1}^{-1} t_{2^k} s_{2^k-1} = t_{2^k-1}^{-1} t_{2^k-1} s_{2^k-1} s_{2^k-1} = \epsilon.$$

□

Lemma 4.13.7: $t_1 = (\theta, \alpha)$ und $t_{2^k} = (0, \alpha)$ haben Ordnung 3 in $\mathbb{F}_{2^k}^+ \rtimes A$.

Beweis: Es gelten

$$\begin{aligned} (\theta, \alpha)^3 &= (\theta + \alpha(\theta), \alpha^2) \cdot (\theta, \alpha) = (\theta + 1 + \theta, \alpha^2) \cdot (\theta, \alpha) \\ &= (1, \alpha^2) \cdot (\theta, \alpha) = (1 + \alpha^2(\theta), \mathbf{1}) = (0, \mathbf{1}) \end{aligned}$$

und

$$(0, \alpha)^3 = (0, \alpha^2) \cdot (0, \alpha) = (0, \mathbf{1}).$$

□

Der Graph für die zweite Komponente ergibt sich als Verallgemeinerung des Graphen in Abbildung 4.42 auf beliebige r . Zu beachten ist dabei, dass $-3 = 4$ in \mathbb{Z}_7 gilt und sich damit die verschränkten Folgen

$$-i, (i = 0, 1, \dots, 2r) \text{ und } i, (i = 1, \dots, 2r + 1)$$

ergeben, wobei jedes Element dieser Folgen 2^{k-1} -mal wiederholt wird, bevor die jeweilige Folge zum nächsten Folgenglied wechselt. Die Vertikalen sind von links nach rechts alle Elemente von $\mathbb{Z}_{2^{r+1}} \setminus \{0\}$ in aufsteigender Reihenfolge, wiederum mit entsprechenden Häufigkeiten. In diesem Teilgraphen sind (D₁1) – (D₁8) erfüllt (entweder offensichtlich, oder weil sie es in der ersten Komponente sind) und wir erhalten somit schließlich auch den Beweis von Theorem 3.1.3 für $n \equiv 0 \pmod{12}$.

Bemerkung 4.13.8: Diese Lösung wurde in gemeinschaftlicher Arbeit von Terry, Welch und Youngs in [10] erarbeitet, was dazu führte, dass hier die algebraischen Techniken stärkeren Einfluß auf die Lösung hatten.

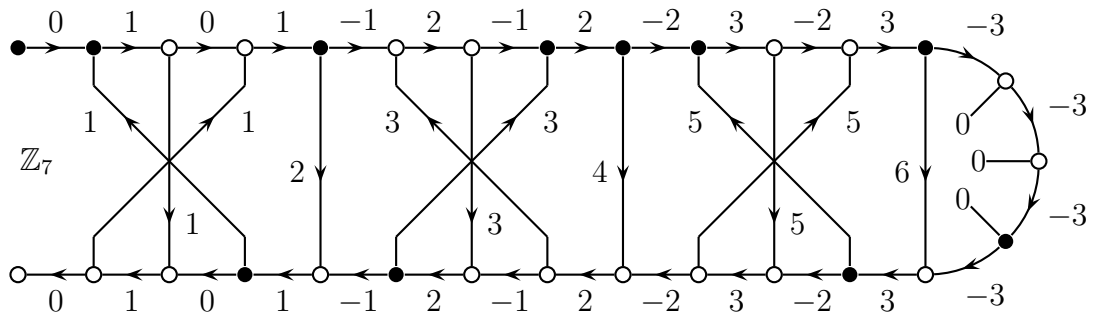


Abbildung 4.42: zweite Komponente des Triangulierungsgraphen für den K_{48}

5 Zusammenfassung

Im letzten Kapitel haben wir über 12 verschiedene Fälle das folgende Theorem gezeigt:

Theorem 3.1.3: *Sei K_n der vollständige Graph mit n Knoten. Dann gilt*

$$\gamma(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil.$$

Ferner haben wir bereits in Abschnitt 3.1 bewiesen:

Satz 3.1.4: *Wenn Theorem 3.1.3 gilt, dann gilt für alle $p > 0$*

$$\chi(S_p) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{1 + 48p}}{2} \right\rceil.$$

Insgesamt haben wir damit also sogar die Heawood'sche Vermutung für orientierbare Flächen bewiesen:

Theorem 5.0.9 (Heawood [3]): *Sei \mathcal{F} eine geschlossene Fläche mit $E(\mathcal{F}) \neq 2$ (d.h. \mathcal{F} ist nicht homöomorph zu S^2). Dann gilt*

$$\chi(\mathcal{F}) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24E(\mathcal{F})}}{2} \right\rceil.$$

Bemerkung 5.0.10: Es kann sogar gezeigt werden, dass die Heawood'sche Vermutung auch für nicht-orientierbare Flächen gilt (vgl. [8]), allerdings würde dies den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

A Spezialfälle

Wir werden hier Triangulierungen von Graphen angeben und dann mit Hilfe von Lemma 2.3.23 das Geschlecht der Graphen bestimmen, um daraus auf das Geschlecht des jeweils zu untersuchenden K_n zu schließen.

A.1 K_{13}

Das Schema

0.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1.	4	2	0	12	6	10	7	11	8	x	3	9	5
2.	3	0	1	4	10	9	6	12	8	5	11	7	
3.	0	2	7	5	8	11	6	9	1	x	10	12	4
4.	10	2	1	5	0	3	12	11	9	7	6	8	
5.	11	2	8	3	7	12	10	6	0	4	1	9	
6.	3	11	x	8	4	7	0	5	10	1	12	2	9
7.	1	10	8	0	6	4	9	12	5	3	2	11	
8.	9	0	7	10	4	6	x	1	11	3	5	2	12
9.	2	10	0	8	12	7	4	11	5	1	3	6	
10.	9	2	4	8	7	1	6	5	12	3	x	11	0
11.	6	3	8	1	7	2	5	9	4	12	0	10	x
12.	5	7	9	8	2	6	1	0	11	4	3	10	
$x.$	6	11	10	3	1	8							

ist eine Triangulierung eines Graphen mit 14 Knoten, der den K_{13} als Teilgraph enthält. Lemma 2.3.23 liefert uns als Geschlecht dieses Graphen

$$6 - 6p = 3 \cdot 14 - \left(\frac{12 \cdot 13}{2} + 6 \right) = -3 \cdot 14$$

$$\Leftrightarrow p = 8.$$

Damit gilt $\gamma(K_{13}) = 8$.

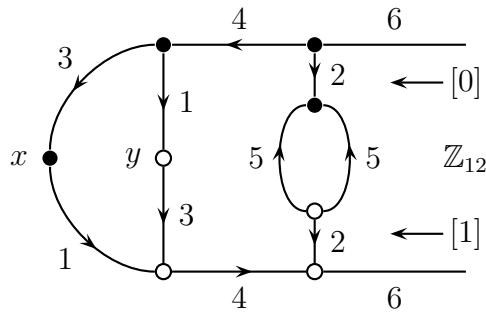


Abbildung A.1: Triangulierungsgraph für den K_{14}

A.2 K_{11}

Das Schema

0.	3	9	4	6	x	2	1	5	8	7	10	
1.	3	4	10	y	7	9	5	0	2	6	8	
2.	4	5	9	6	1	0	x	7	3	10	8	
3.	5	6	9	0	10	2	7	4	1	8		
4.	6	0	9	10	1	3	7	5	2	8		
5.	0	1	9	2	4	7	y	10	6	3	8	
6.	1	2	9	3	5	10	7	x	0	4	8	
7.	x	6	10	0	8	9	1	y	5	4	3	2
8.	2	10	9	7	0	5	3	1	6	4		
9.	4	0	3	6	2	5	1	7	8	10		
10.	8	2	3	0	7	6	5	y	1	4	9	
$x.$	0	6	7	2								
$y.$	1	10	5	7								

ist eine Triangulierung eines Graphen mit 13 Knoten, der den K_{11} als Teilgraph enthält. Lemma 2.3.23 liefert uns als Geschlecht dieses Graphen

$$6 - 6p = 3 \cdot 13 - \left(\frac{10 \cdot 11}{2} + 8 \right) = -3 \cdot 8$$

$$\Leftrightarrow p = 5.$$

Damit gilt $\gamma(K_{11}) = 5$.

A.3 K_{14}

Diesen Spezialfall erhalten wir durch den gewichteten Graphen vom Index 2 in Abbildung A.1 und den üblichen Henkel zur Herstellung der Nachbarschaft (x, y) .

A.4 K_{20}

Das Schema

0.	7	3	4	16	10	15	14	18	5	13	8	2	19	1	11	12	6	9	17		
1.	0	19	8	10	4	12	2	15	18	6	14	5	3	13	17	9	7	16	11		
2.	0	8	3	18	4	6	10	16	14	9	11	15	1	12	13	5	7	17	19		
3.	0	7	13	1	5	12	16	17	10	11	18	2	8	19	9	14	15	6	4		
4.	0	3	6	2	18	9	8	13	15	19	12	1	10	x	7	14	11	5	17	16	
5.	0	18	16	9	15	12	3	1	14	8	17	4	11	6	19	10	7	2	13		
6.	0	12	14	1	18	17	13	16	19	5	11	7	10	2	4	3	15	8	9		
7.	0	17	2	5	10	6	11	19	16	1	9	12	8	14	4	x	18	15	13	3	
8.	0	13	4	9	6	15	16	18	11	17	5	14	7	12	10	1	19	3	2		
9.	0	6	8	4	18	10	13	11	2	14	3	19	15	5	16	12	7	1	17		
10.	0	16	2	6	7	5	19	14	13	9	18	x	4	1	8	12	11	3	17	15	
11.	0	1	16	15	2	9	13	19	7	6	5	4	14	17	8	18	3	10	12		
12.	0	11	10	8	7	9	16	3	5	15	17	18	13	2	1	4	19	y	14	6	
13.	0	5	2	12	18	19	11	9	10	14	16	6	17	1	3	7	15	4	8		
14.	0	15	3	9	2	16	13	10	19	17	11	4	7	8	5	1	6	12	y	18	
15.	0	10	17	12	5	9	19	4	13	7	18	1	2	11	16	8	6	3	14		
16.	0	4	17	4	12	9	5	18	8	15	11	1	7	19	6	13	14	2	10		
17.	0	9	1	13	6	18	12	15	10	3	16	4	5	8	11	14	19	2	7		
18.	0	14	y	19	13	12	17	6	1	15	7	x	10	9	4	2	3	11	8	16	5
19.	0	2	17	14	10	5	6	16	7	11	13	18	y	12	4	15	9	3	8	1	
x .	4	10	18	7																	
y .	14	12	19	18																	

ist eine Triangulierung eines Graphen mit 22 Knoten, der den K_{20} als Teilgraph enthält. Lemma 2.3.23 liefert uns als Geschlecht dieses Graphen

$$6 - 6p = 3 \cdot 22 - \left(\frac{19 \cdot 20}{2} + 8 \right) = -3 \cdot 44$$

$$\Leftrightarrow p = 23.$$

Damit gilt $\gamma(K_{20}) = 23$.

A.5 K_{18}

Das Schema

0.	12	15	7	16	5	x_0	10	3	11	8	4	1	9	6	2	14	13
1.	0	4	7	6	14	10	8	x_1	11	12	5	15	16	3	13	2	9
2.	0	6	3	16	7	5	12	x_1	4	9	1	13	8	15	11	10	14
3.	0	10	13	1	16	2	6	8	7	x_0	5	9	15	12	4	14	11
4.	0	8	14	3	12	9	2	x_1	16	6	11	15	10	5	13	7	1
5.	0	16	14	15	1	12	2	7	8	11	13	4	10	6	9	3	x_0
6.	0	9	5	10	12	14	1	7	11	4	16	13	15	x_1	8	3	2
7.	0	15	14	12	11	6	1	4	13	9	10	x_0	3	8	5	2	16
8.	0	11	5	7	3	6	x_1	1	10	9	12	16	15	2	13	14	4
9.	0	1	2	4	12	8	10	7	13	16	11	14	x_1	15	3	5	6
10.	0	x_0	7	9	8	1	14	2	11	16	12	6	5	4	15	13	3
11.	0	3	14	9	16	10	2	15	4	6	7	12	1	x_1	13	5	8
12.	0	13	x_1	2	5	1	11	7	14	6	10	16	8	9	4	3	15
13.	0	14	8	2	1	3	10	15	6	16	9	7	4	5	11	x_1	12
14.	0	2	10	1	6	12	7	15	5	16	x_1	9	11	3	4	8	13
15.	0	12	3	9	x_1	6	13	10	4	11	2	8	16	1	5	14	7
16.	0	7	2	3	1	15	8	12	10	11	9	13	6	4	x_1	14	5
x_0 .	3	7	10	0	5												
x_1 .	4	2	12	13	11	1	8	6	15	9	14	16					

ist eine Triangulierung eines Graphen mit 19 Knoten. Lemma 2.3.23 liefert uns als Geschlecht dieses Graphen

$$6 - 6p = 3 \cdot 19 - \left(\frac{16 \cdot 17}{2} + 17 \right) = -3 \cdot 32$$

$$\Leftrightarrow p = 17.$$

Durch einen einzigen Henkel können wir nun die Länder x_0 und x_1 miteinander verbinden und erhalten dann den K_{18} auf der S_{18} und damit gilt $\gamma(K_{18}) = 18$.

Index

- (C1), 27
- (C2), 27
- (C3), 27
- (C4), 27
- (C4*), 42
- (C5), 27
- (C6), 27
- (C7), 42
- (D_q1), 59
- (D_q2), 59
- (D_q3), 59
- (D_q4), 59
- (D_q5), 59
- (D_q6), 59
- (D_q7), 59
- (D_q8), 65
- 1-Skelett, 18

- Abschluß, 13
- Ankleben eines Henkels, 19

- chromatische Zahl, 7

- einbettbar, 20
- Euler-Charakteristik, 18

- Färbung, 6
- Fläche, 14
 - geschlossene -, 14

- Geschlecht, 22
- Gewicht, 26
- Graph, 6
 - gerichteter -, 6
 - gewichteter -, 26
 - ungerichteter -, 6
 - vollständiger, 7
- gültig, 6

- homöomorph, 13
 - (Graphen), 20
- Homöomorphismus, 13

- Index, 27
- Innere, 13
- isomorph (Graphen), 12

- Jordanbogen, 14
- Jordankurve, 14

- k*-färbbar, 6
- Kantenmenge, 6
- Knotenmenge, 6
- kompakt, 13
- Komposition, 20
- Kreis, 8

- Pfad, 8
- Polygon, 14

- Quotiententopologie, 14

- Rand, 13
- Regel
 - A, 28
 - A (kommutativ), 71
 - A*, 43
 - A_q, 60
 - B, 28

B_q , 60
 Δ , 24
Rotationssystem, 7
Rotation, 7

Sackgasse, 27
stetig, 13

Topologie, 13
topologischer Raum, 13
Triangulierung
 (Fläche), 15
 (Graph), 12
 endliche - (Fläche), 15

Unterteilung, 20

Valenz, 6

Weg, 8
 -länge, 8

Zusammenhangskomponente, 13
zusammenhängend
 (Graph), 8
 (topologischer Raum), 13
Zyklus, 8
 induzierter -, 8

Literaturverzeichnis

- [1] APPEL, Kenneth ; HAKEN, Wolfgang: Every planar map is four colorable. In: *Bull. Amer. Math. Soc.* 82 (1976), Nr. 5, S. 711–712
- [2] GUSTIN, William: Orientable embedding of Cayley graphs. In: *Bull. Amer. Math. Soc.* 69 (1963), S. 272–275. – ISSN 0002–9904
- [3] HEAWOOD, P. J.: Map-Colour Theorems. In: *Quarterly Journal of Mathematics* 24 (1890), S. 332–338
- [4] JUNGERMAN, Mark A.: *Orientable Cascades and Related Embedding Techniques*. Santa Cruz, University of California, Dissertation, 1975
- [5] MOLL, Benjamin: *Kartenfärbung auf einem Torus*. Leipzig : Universität Leipzig, Fakultät für Mathematik und Informatik, Examensarbeit, Februar 2010
- [6] RADÓ, Tibor: Über den Begriff der Riemannschen Fläche. In: *Acta Litt. Sci. Szeged* 2 (1925), S. 101–121
- [7] RINGEL, Gerhard: Über das Problem der Nachbargebiete auf orientierbaren Flächen. In: *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg* 25 (1961), 105–127. <http://dx.doi.org/10.1007/BF02992781>. – ISSN 0025–5858. – 10.1007/BF02992781
- [8] RINGEL, Gerhard: *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*. Bd. 209: *Map color theorem*. Berlin; Heidelberg; New York : Springer, 1974
- [9] SCHOENFLIES, A.: Beiträge zur Theorie der Punktmengen. III. In: *Mathematische Annalen* 62 (1906), 286–328. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01449982>. – ISSN 0025–5831. – 10.1007/BF01449982
- [10] TERRY, C.M. ; WELCH, L.R. ; YOUNGS, J.W.T.: The genus of K_{12} s. In: *Journal of Combinatorial Theory* 2 (1967), Nr. 1, 43 - 60. [http://dx.doi.org/DOI: 10.1016/S0021-9800\(67\)80113-3](http://dx.doi.org/DOI: 10.1016/S0021-9800(67)80113-3). – DOI DOI: 10.1016/S0021-9800(67)80113-3. – ISSN 0021–9800

- [11] THOMASSEN, Carsten: The Jordan-Schonflies Theorem and the classification of surfaces. In: *American Mathematical Monthly* 99 (1992), Nr. 2, S. 116–131
- [12] YOUNGS, J.W.T.: The heawood map-coloring problem—Cases 1, 7, and 10. In: *Journal of Combinatorial Theory* 8 (1970), Nr. 2, 220 - 231. [http://dx.doi.org/DOI: 10.1016/S0021-9800\(70\)80076-X](http://dx.doi.org/DOI: 10.1016/S0021-9800(70)80076-X). – DOI DOI: 10.1016/S0021-9800(70)80076-X. – ISSN 0021-9800
- [13] YOUNGS, J.W.T.: Solution of the heawood map-coloring problem—Cases 3, 5, 6, and 9. In: *Journal of Combinatorial Theory* 8 (1970), Nr. 2, 175 - 219. [http://dx.doi.org/DOI: 10.1016/S0021-9800\(70\)80075-8](http://dx.doi.org/DOI: 10.1016/S0021-9800(70)80075-8). – DOI DOI: 10.1016/S0021-9800(70)80075-8. – ISSN 0021-9800

Abbildungsverzeichnis

1.1	Eine Karte mit vier Ländern auf einem Torus	5
2.1	Drei Darstellungsformen für Rotationssysteme von Graphen	8
2.2	Aufteilung und Vereinigung von Zyklen in $G - e$	11
2.3	Beispiele für topologische Polygone	15
2.4	Ein topologisches Viereck	19
3.1	Ein gewichteter Graph zur Erzeugung einer Triangulierung des K_7	28
3.2	lokales Bild des gewichteten Graphen im Beweis von Satz 3.4.2	29
4.1	Triangulierungsgraph für den K_{12s+7}	31
4.2	Triangulierungsgraph für den K_{31}	32
4.3	Zyklus des Graphen in Abbildung 4.2	32
4.4	Triangulierungsgraph für den $K_{12s+10} - K_3$	33
4.5	Zyklus des Graphen in Abbildung 4.4 für $s = 1$	33
4.6	Triangulierungsgraph für den $K_{10} - K_3$	33
4.7	Henkel zur Verbindung der Länder x, y und z	34
4.8	Triangulierungsgraph für den K_{16}	35
4.9	Triangulierungsgraph für den K_{12s+4}	36
4.10	partielles Bild des Triangulierungsgraphen für den $K_{12s+1} - K_3$	37
4.11	Triangulierungsgraph für den $K_{12s+1} - K_3$ bei ungeradem s	39
4.12	Triangulierungsgraph für den $K_{12s+1} - K_3$ bei geradem s	39
4.13	Triangulierungsgraph für den modifizierten $K_{12s+10} - K_2$	40
4.14	Triangulierungsgraph für den $K_{35} - K_5$	42
4.15	lokales Bild des gewichteten Graphen im Beweis von Satz 4.6.1	44
4.16	Triangulierungsgraph für den $K_{12s+11} - K_5$, s gerade	45
4.17	Triangulierungsgraph für den $K_{12s+11} - K_5$, s ungerade	45
4.18	Erste Modifikationen an der Triangulierung des $K_{12s+11} - K_5$	47
4.19	Henkel zur Herstellung der fehlenden Nachbarschaften im $K_{12s+11} - K_5$	48
4.20	Letzte Modifikationen an der Triangulierung des $K_{12s+11} - K_5$	49
4.21	Triangulierungsgraph für $n = 12s + 14$, s gerade	50
4.22	Triangulierungsgraph für $n = 12s + 14$, s ungerade	51
4.23	Erste Modifikationen an der Triangulierung des G_{12s+15}	52

4.24	Erste beiden Henkel zur Herstellung der fehlenden Nachbarschaften im G_{12s+15}	53
4.25	Dritter und vierter Henkel zur Herstellung der fehlenden Nachbarschaften im G_{12s+15}	53
4.26	Fünfter Henkel zur Herstellung der fehlenden Nachbarschaften im G_{12s+15}	54
4.27	Triangulierungsgraph für den G_{12s+9}	55
4.28	Triangulierungsgraph für den G_{45}	56
4.29	Modifikationen an der Triangulierung des G_{12s+9}	58
4.30	Henkel zur Herstellung der fehlenden Nachbarschaften im G_{12s+9}	58
4.31	lokales Bild des gewichteten Graphen im Beweis von Satz 4.9.2	61
4.32	Triangulierungsgraph für den K_{15}	63
4.33	Zyklen des Triangulierungsgraphen des K_{15}	63
4.34	Triangulierungsgraph für den $K_{17} - K_2$	65
4.35	Triangulierungsgraph für den $K_{30} - K_3$	66
4.36	Triangulierungsgraph für den $K_{42} - K_3$	66
4.37	Triangulierungsgraph für den $K_{12s+6} - K_3$	67
4.38	Zyklen des Triangulierungsgraphen für den $K_{12s+6} - K_3$	68
4.39	Teilkomponente des Triangulierungsgraphen für den K_{12s}	73
4.40	erste Komponente des Triangulierungsgraphen für den K_{48}	74
4.41	Zyklus des Triangulierungsgraphen für den K_{48}	74
4.42	zweite Komponente des Triangulierungsgraphen für den K_{48}	76
A.1	Triangulierungsgraph für den K_{14}	79

Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe, insbesondere sind wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet. Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandlung auch nachträglich zur Aberkennung des Abschlusses führen kann.

.....
Ort, Datum

.....
(Unterschrift)