

Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

**Verallgemeinerte Charakteristiken am Beispiel
hyperbolischer Erhaltungsgleichungen**

Diplomarbeit
Zur Erlangung des Diplomgrades in Mathematik

Vorgelegt von

Matthias Schenk
Studiengang Diplom-Mathematik

Leipzig, Mai 2011

Betreuender Hochschullehrer

Prof. Dr. Hans-Peter Gittel
Universität Leipzig
Mathematisches Institut

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Bemerkungen zur Notation	5
2	Die Viskositätslösung	6
2.1	Grundbegriffe in der Theorie der Erhaltungsgleichungen	6
2.1.1	Zulässige Lösungen	10
2.2	Die Methode der verschwindenden Viskosität	11
2.3	Die Viskositätslösung	13
2.4	Singularitäten	17
3	Die Methode der Charakteristiken	26
3.1	Die klassische Methode	26
3.1.1	Ein Beispiel	35
3.2	Geometrische Verallgemeinerung	36
3.3	Singuläre Charakteristiken für $q + f(p) = 0$	45
3.3.1	Die nichtdegenerierte Welle	45
3.3.2	Die einfach degenerierte Welle	47
3.3.3	Die zweifach degenerierte Welle	50
3.4	Singularitäten induzierende Anfangsbedingungen	52
3.4.1	Beispiele	57
4	Verallgemeinerte i-Charakteristiken	65
4.1	Differentialinklusion	65
4.2	i -Charakteristiken	68
5	Gegenüberstellung der Herangehensweisen	73
6	Zusammenfassung	78
	Literatur	79

1 Einleitung

In dieser Arbeit werden wir Systeme von Erhaltungsgleichungen betrachten. Dabei handelt es sich um hyperbolische Systeme erster Ordnung. Durch hyperbolische Differentialgleichungen werden Wellen und deren Ausbreitung beschrieben, skalare Differentialgleichungen erster Ordnung sind immer hyperbolisch. Wichtige Beispiele für hyperbolische Erhaltungsgleichungen sind die nichtviskose Burgersgleichung, die Buckley–Leverett–Gleichung zur Beschreibung von Zweiphasenströmungen, die Eulergleichungen der nichtviskosen Strömungsmechanik und bestimmte Gleichungen der Magnetohydrodynamik. Ausserdem finden sie auch Anwendung in Verkehrsflussmodellen, beispielsweise beim Modell von Lighthill, Whitham und Richards.

Charakteristiken sind ein geeignetes Werkzeug um qualitative Aussagen über hyperbolische Differentialgleichung zu treffen. Die Charakteristikenmethode als Lösungsmethode beruht auf der grundlegenden Idee des Auffindens sogenannter charakteristischer Kurven, auf denen sich die Lösung einer partiellen Differentialgleichung auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen reduziert. Problemfrei funktioniert diese Methode allerdings selten. So kann es durchaus passieren, dass nicht alle Gebiete des Definitionsbereichs der betrachteten Differentialgleichung von Charakteristiken erreicht werden. In solchen Fällen sind weitere Forderungen an die Lösung zu stellen, um eine der Fragestellung angemessene Lösung zu ermitteln. Ein bekanntes Beispiel eines solchen Verhaltens ist eine sogenannte *Verdünnungswelle*. Aber auch der Fall von sich berührenden oder überschneidenden Charakteristiken kann auftreten. Anschaulich ausgedrückt, impliziert jede charakteristische Kurve einen Lösungswert entlang jener Kurve. Laufen zwei Charakteristiken in einen gemeinsamen Punkt hinein, so bedeutet dies, dass es für diesen Punkt zwei Funktionswerte gibt. Die Schnittpunkte erzeugen also Unstetigkeiten in der Lösung der hyperbolischen Gleichung. Solche Unstetigkeiten können sogar bei glatten Anfangsdaten auftreten. Ein solches Verhalten der Charakteristiken signalisiert das Vorhandensein von *Stoßwellen* in der Lösung der Differentialgleichung. Wir werden uns in dieser Arbeit auf die Betrachtung von Stoßwellen und die damit verbundene Unstetigkeit der Lösung einer Er-

haltungsgleichung konzentrieren.

Eine unstetige oder auch nur stellenweise nicht differenzierbare Lösung widerspricht dem klassischen Lösungsbegriff, einer zweimal stetig differenzierbaren Lösung. Unser Ziel soll es also sein, im Sinne eines verallgemeinerten Lösungsbegriffs eine physikalisch sinnvolle Lösung für Erhaltungsgleichungen zu finden, welche insbesondere das Auftreten von Stoßwellen berücksichtigt. Es erscheint natürlich, bei der Suche nach einer verallgemeinerten Lösung eine Verallgemeinerung des Charakteristikenbegriffs zu nutzen.

In der Literatur tauchen zwei verschiedene Konzepte für verallgemeinerte Charakteristiken auf. Melikyan verallgemeinert in [28] das zu betrachtende Problem geometrisch, Dafermos dagegen erweitert in [11] die Definition der Charakteristiken von einer Differentialgleichung zu einer Differentialinklusion. Wir werden beide Methoden untersuchen um festzustellen, ob und unter welchen Bedingungen beide Ansätze gleiche Ergebnisse liefern und ob diese Ergebnisse physikalisch sinnvolle Lösungen für Erhaltungsgleichungen sind. Wir werden deshalb in Kapitel 2 Grundbegriffe der Theorie der Erhaltungsgleichungen zusammentragen um anschließend den Begriff der Viskositätslösung einzuführen, wie er in [8] definiert wurde. In Kapitel 3 werden wir die klassische Methode der Charakteristiken vorstellen und mit den dabei gewonnenen Werkzeugen die geometrische Verallgemeinerung nach Melikyan [28] darlegen. Im Anschluss daran befassen wir uns insbesondere mit unstetigen Anfangswerten. In Kapitel 4 werden wir nach einem kleinen Exkurs über Differentialinklusionen die verallgemeinerten Charakteristiken nach Dafermos [10] kennenlernen. In Kapitel 5 werden wir beide Ansätze vergleichen und mit Hilfe von [31] aufzeigen, dass für den Fall der skalaren Erhaltungsgleichung beide Methoden äquivalent sind.

Der Fokus dieser Arbeit soll dabei auf der geometrischen Verallgemeinerung nach Melikyan liegen.

Diese Arbeit ist so angelegt, dass sie schon für Studenten im Hauptstudium Mathematik verständlich sein sollte. Es werden Grundkenntnisse in Analysis, linearer Algebra und besonders bei der Behandlung von gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen vorausgesetzt.

1.1 Bemerkungen zur Notation

Als Grundraum betrachten wir den reellen n -dimensionalen Vektorraum \mathbb{R}^n . Für ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichnet $\partial\Omega$ den Rand des Gebiets und $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ den Abschluß von Ω .

Vektoren werden durch Pfeile gekennzeichnet, es ist also a ein Skalar und $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ein Vektor. Das Skalarprodukt zweier Vektoren \vec{x}, \vec{y} wird bezeichnet mit

$$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i. \quad (1.1)$$

und als vektorielles Tensorprodukt bezeichnen wir

$$\vec{x} \otimes \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \dots & x_1 y_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & \dots & x_n y_n \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Für eine skalare Funktion $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet $f'(x)$ die Ableitung von f . Für eine Funktion $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet $\frac{\partial f}{\partial x}$ die partielle Ableitung von f nach x . Andere Bezeichnungen sind $\partial_x f$ oder falls keine Verwechslung mit einem Parameter möglich ist auch f_x .

Ist $f(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit einem Vektor als Argument, so bezeichnet

$$\nabla_{\vec{x}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \quad (1.3)$$

den Gradienten von f .

Für eine vektorwertige Funktion $\vec{f}(\vec{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \vec{f} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j} \right), \quad j = 1, \dots, n \quad (1.4)$$

Wir werden uns mit partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung befassen.

$$F(y_1, \dots, y_n, u, u_{y_1}, \dots, u_{y_n}) = F(\vec{y}, u, \vec{p}) = 0, \quad (1.5)$$

mit $\vec{y} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $u = u(\vec{y}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\vec{p} = \nabla_{\vec{y}} u \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Die Funktion $F : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ wird in jedem Fall als hinreichend glatt angenommen.

2 Die Viskositätslösung

2.1 Grundbegriffe in der Theorie der Erhaltungsgleichungen

In dieser Arbeit betrachten wir Systeme von Erhaltungsgleichungen. Sie haben die allgemeine Form

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{f}_j(\vec{v})}{\partial x_j} = 0. \quad (2.1)$$

Hierbei ist $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$ der Vektor der m unbekannt Funktionen $v_k, k = 1, \dots, m$ mit $v_k = v_k(\vec{x}, t) : \mathbb{R}^n \times [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ mit \vec{x} dem Vektor der Raumvariablen $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, m, n \in \mathbb{N}$. Die Funktionen $\vec{f}_j = (f_{j1}, \dots, f_{jm})$ nennt man Flüsse der Größen v_k in Richtung x_j , sie werden von uns im weiteren Verlauf als hinreichend glatt angenommen.

Unter der Annahme $v_k \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, \infty])$ kann das im Allgemeinen nichtlineare System (2.1) in das quasilineare System

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \sum_{j=1}^n A_j(\vec{v}) \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j} = 0 \quad (2.2)$$

umgewandelt werden, dabei bezeichnet A_j die Jacobi-Matrix der Funktion \vec{f}_j . Das System (2.1) heißt *hyperbolisch*, wenn die Matrix $A := \alpha_1 A_1 + \dots + \alpha_n A_n$ für alle $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ nur reelle Eigenwerte besitzt, sind diese zusätzlich paarweise verschieden, so heißt (2.1) *streng hyperbolisch*.

Im Folgenden werden wir aus Gründen der besseren Übersichtlichkeit nur Systeme in einer Raumdimension $\vec{x} = x \in \mathbb{R}$ betrachten, dadurch vereinfacht sich (2.1) zu

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}(\vec{v})}{\partial x} = 0. \quad (2.3)$$

Dies wird ab jetzt als Grundtyp für hyperbolische Erhaltungsgleichungen gelten, der einfachste Fall ($m = 1$) wird als skalare Erhaltungsgleichung

bezeichnet:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f(v)}{\partial x} = 0. \quad t > 0, x \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

Häufig werden bei Erhaltungsgleichungen insbesondere Flussfunktionen betrachtet, welche hinreichend nichtlinear sind. In der Literatur ([26],[27],[11]) wird hierfür als Kriterium oftmals $f''(v) \neq 0$ genannt, das bedeutet, es werden häufig nur Flussfunktionen betrachtet, welche entweder *streng konvex* oder *streng konkav* sind. Wir wollen in dieser Arbeit versuchen, so wenig Anforderungen wie möglich an die Flussfunktion zu stellen, werden aber am Ende von Kapitel 3 nochmals speziell auf konkave und konvexe Flussfunktionen zu sprechen kommen. In Kapitel 4 wird es nötig sein, die Flussfunktion als streng konkav anzunehmen.

An dem einfachen Beispiel der skalaren Erhaltungsgleichung wollen wir uns nochmals die physikalische Bedeutung der Differentialgleichung (2.4) vor Augen führen, welche den Begriff der Erhaltungsgleichung geprägt hat. Es sei v eine Lösung von (2.4), wir betrachten ein beliebiges, aber festes räumliches Intervall $[a, b]$, dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_a^b v(t, x) \, dx &= \int_a^b \frac{d}{dt} v(t, x) \, dx \\ &\stackrel{(2.4)}{=} - \int_a^b \frac{df(v(t, x))}{dx} \, dx \\ &= f(v(t, a)) - f(v(t, b)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Das heißt der Gesamtwert von v in $[a, b]$ hängt lediglich vom Fluss $f(v)$ an den Grenzen des Intervalls ab. In diesem Verständnis ist v also in $[a, b]$ eine Erhaltungsgröße. Solche Größen treten in der Physik sehr häufig auf, man denke dabei etwa an Massen- oder Energieerhaltung.

Es hat sich in der Analysis gezeigt, dass der natürliche Lösungsraum für Erhaltungsgleichungen der Raum BV der Funktionen beschränkter Variation ist, siehe etwa [11].

Definition 1 (beschränkte Variation, nach [11])

Es bezeichne L^1_{loc} den Raum der lokal integrierbaren Funktionen. Eine skalare Funktion ϕ ist von **lokal beschränkter Variation** auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, wenn $\phi \in L^1_{loc}(\Omega)$ gilt und ein \mathbb{R}^n -wertiges Radonmaß μ auf Ω existiert, sodass für jede Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^n)$ gilt

$$-\int_{\Omega} \phi \operatorname{div} \varphi(\vec{x}) \, d\vec{x} = \int_{\Omega} \varphi(\vec{x}) \, d\mu. \quad (2.6)$$

Wir schreiben dies als $\phi \in BV_{loc}(\Omega)$.

Ist zusätzlich $\phi \in L^1(\Omega)$ und μ endlich, so ist ϕ von **beschränkter Variation** in Ω mit **totaler Variation**

$$TV_{\Omega}(\phi) := \sup_{|\varphi(\vec{x})|=1} \int_{\Omega} \phi(\vec{x}) \operatorname{div} \varphi(\vec{x}) \, d\vec{x}. \quad (2.7)$$

Wir schreiben dies als $\phi \in BV(\Omega)$.

Eine Funktion ϕ mit beschränkter Variation ist stetig mit Ausnahme höchstens abzählbar vieler Unstetigkeiten, welche nur in Form von Sprungunstetigkeiten auftreten. Ausserdem ist ϕ fast überall differenzierbar und es ist μ die schwache Ableitung von ϕ (s.u.), genauer gesagt der Gradient im Sinne der Distributionen.

Es sei $v \in BV_{loc}(\Omega)$. Dann ist Ω die Vereinigung dreier disjunkter Mengen \mathcal{C} , \mathcal{J} und \mathcal{I} . Dabei ist \mathcal{C} die Menge aller Punkte, für die v stetig ist, \mathcal{J} bezeichnet die Menge aller Sprungunstetigkeiten von v und \mathcal{I} ist die Menge aller irregulären Punkte von u . Das $(n-1)$ -dimensionale Hausdorff-Maß von \mathcal{I} ist Null.

Wir nehmen an, dass für $v(x, t) \in BV(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ bei festem $\tilde{t} \in [0, \infty)$ $v(\cdot, \tilde{t}) \in BV(\mathbb{R})$ gilt und einseitige (recht- und linksseitige) Grenzwerte existieren. Wir bezeichnen diese Grenzwerte mit $v(\tilde{x}+, \tilde{t}) := \lim_{x \searrow \tilde{x}} v(x, \tilde{t})$ und $v(\tilde{x}-, \tilde{t}) := \lim_{x \nearrow \tilde{x}} v(x, \tilde{t})$.

Ist $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \mathcal{C}$, so gilt $v(\tilde{x}+, \tilde{t}) = v(\tilde{x}-, \tilde{t}) = v(\tilde{x}, \tilde{t})$. Ist dagegen $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \mathcal{J}$, so stimmen die einseitigen Grenzwerte $v_+ := v(\tilde{x}+, \tilde{t})$ und $v_- := v(\tilde{x}-, \tilde{t})$ nicht überein, $v_- \neq v_+$.

Lösungen von Erhaltungsgleichungen können Unstetigkeiten aufweisen, diese nennen wir Stoßwellen.

Eine klassische Lösung ist stetig differenzierbar und damit insbesondere stetig. Das Auftreten von Stoßwellen widerspricht also offensichtlich der klassischen Lösungsdefinition.

Für eine auf einem offenem Intervall $I = (a, b)$ definierte differenzierbare Funktion g und eine beliebige Testfunktion $\varphi \in C_0^\infty(I)$ mit $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ gilt nach den Regeln der partiellen Integration

$$\int_a^b g'(x)\varphi(x) \, dx = - \int_a^b g(x)\varphi'(x) \, dx. \quad (2.8)$$

Ist $g \in L^1(I)$, so kann es, sogar wenn g nicht differenzierbar ist, eine Funktion $h \in L^1(I)$ geben, so dass

$$\int_a^b h(x)\varphi(x) \, dx = - \int_a^b g(x)\varphi'(x) \, dx \quad (2.9)$$

für jede Testfunktion φ gilt.

Definition 2 (schwache Ableitung)

Sei $I = (a, b)$ und die Funktionen $g, h \in L^1(I)$ erfüllen (2.9) für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^\infty(I)$ mit $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Die Funktion h heißt dann die **schwache Ableitung** von g .

Sofern existent, ist die schwache Ableitung eindeutig, vergleiche [15].

Definition 3 (schwache Lösung)

Eine Funktion $v \in L_{loc}^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ heißt **schwache Lösung** von (2.4), wenn für alle Testfunktionen $\varphi \in C_0^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ gilt:

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (v \cdot \varphi_t + f(v) \cdot \varphi_x) \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}} u_0 \cdot \varphi(x, 0) \, dx = 0 \quad (2.10)$$

Der Begriff der schwachen Lösung erlaubt abzählbar viele Sprungunstetigkeiten. Schwache Lösungen sind damit häufig nicht eindeutig. Durch das Vorhandensein von mehr als einer Lösung ergibt sich das Problem, aus einer

Vielzahl von Lösungen die für die konkrete Fragestellung Sinnvollste zu ermitteln. Als *sinnvoll* wollen wir im Weiteren eine Lösung bezeichnen, wenn sie aus physikalischer Sicht plausibel ist.

2.1.1 Zulässige Lösungen

Es gibt verschiedene Zulässigkeitsbedingungen an die Lösungen von Erhaltungsgleichungen um sicherzustellen, ob diese auch physikalisch plausibel sind. Wir werden uns auf die beiden bekanntesten Bedingungen konzentrieren, namentlich die Rankine–Hugoniot–Bedingung und die Lax–Entropie–Bedingung.

Zum Einen gibt es die berühmte Rankine–Hugoniot–Bedingung. Wir betrachten dazu einen Sprung Γ in einer Lösung v von (2.4), diese Unstetigkeit bewegt sich als Welle durch die Lösung mit einer bestimmten Geschwindigkeit ν . Es bezeichne v_- den linksseitigen Grenzwert von v vor dem Sprung und v_+ den rechtsseitigen Grenzwert der Lösung hinter dem Sprung, es gilt dann:

$$f(v_+) - f(v_-) = \nu(v_+ - v_-). \quad (2.11)$$

Dies ist die Rankine–Hugoniot–Bedingung, sie gilt im nichtskalaren Fall (2.3) als Vektorgleichung.

Bedingung (2.11) allein reicht jedoch nicht aus um eine eindeutige Lösung zu identifizieren.

Zum Anderen gibt es die Lax–Entropie–Bedingung. Diese Bedingung beruht auf energetischen Überlegungen, die die Existenz einer (Stoß-)Welle ermöglichen. Eine Welle, welche nicht die Lax–Entropie–Bedingung erfüllt, verstößt gegen den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik.

Es sei das System (2.3) mit $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ und $\vec{f}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ hyperbolisch und in konservativer Form darstellbar, also

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + A(\vec{v}) \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = 0, \quad (2.12)$$

mit $A = D\vec{f}(\vec{v})$ der Jacobi-Matrix der Flussfunktion \vec{f} ,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial v_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial v_m} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Die Matrix A hat m reelle Eigenwerte λ_i , $i = 1, \dots, m$. Eine energetisch plausible Lösung von (2.12) sei durch einen Schock mit Geschwindigkeit ν geteilt und es gelte die Rankine-Hugoniot-Bedingung. Für die Eigenwerte gilt dann die folgende Bedingung [11, S.240ff]

$$\lambda_i(v_-) \geq \nu \geq \lambda_i(v_+), \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.14)$$

Im Falle der skalaren Erhaltungsgleichung (2.4) gilt demnach

$$f'(v_-) \geq \nu \geq f'(v_+). \quad (2.15)$$

Zur Herleitung und genauen Bedeutung der Bedingungen (2.11) und (2.14) siehe etwa [11] oder auch [27]. Wir wollen lediglich festhalten, dass eine zulässige Lösung von (2.4) beide Bedingungen erfüllen soll. Diese beiden Bedingungen sind in unserem Verständnis sogar hinreichend für eine zulässige Lösung, das bedeutet, wir werden jede Lösung als zulässig bezeichnen, wenn sie (2.11) und (2.14) bzw. (2.15) erfüllt.

2.2 Die Methode der verschwindenden Viskosität

Der in dieser Arbeit vorgestellte Begriff der Viskositätslösung basiert auf der Methode der verschwindenden Viskosität. Wir wollen dazu als Erstes den Begriff der Viskosität erläutern.

Bei der Modellierung des Verhaltens von Fluiden in der Strömungsmechanik ergeben sich die Navier-Stokes-Gleichungen, zur Herleitung siehe etwa [16]. Es bezeichnet ρ die Dichte, \vec{v} die Geschwindigkeit, \vec{p} den Druck und \vec{f} steht für die Dichte der äußeren Volumenkräfte, etwa Gravitationskräfte. Die Im-

pulsgleichung der Navier–Stokes–Gleichungen schreibt sich

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \rho \vec{f} - \nabla \vec{p} + \nabla(\lambda \operatorname{div} \vec{v}) + \operatorname{div}(2\mu \mathbb{D}) \quad (2.16)$$

Dabei ist \mathbb{D} der Deformationsgeschwindigkeitstensor mit $\mathbb{D} = (d_{ij})_{i,j=1}^3$ wobei $d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$. Die beiden Differentialterme zweiter Ordnung beinhalten die Koeffizienten λ und μ . Sie stehen für verschiedene Arten von Reibung, der äußeren und inneren Reibung des Fluids. Diese werden in der Modellierung unter dem Begriff *Viskosität* zusammengefasst. Die Viskosekoeffizienten können Funktionen thermodynamischer Größen sein, wir nehmen jedoch an, λ und μ seien Konstanten.

Die Viskosität eines Fluids, insbesondere eines Gases, ist zwar oft sehr klein, verschwindet jedoch nie. Bei den Euler–Gleichungen, eines der wichtigsten Beispiele für hyperbolische Erhaltungsgleichungen, wird in der Herleitung der Einfluss dieser viskosen Terme vernachlässigt, die Viskositätskoeffizienten μ und η werden also gleich Null gesetzt. Die Euler–Gleichungen dienen demnach der Modellierung nichtviskoser Strömungen eines idealen Gases.

$$\frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v} \otimes \vec{v}) = \rho \vec{f} - \nabla \vec{p} \quad (2.17)$$

Wie oben erklärt, ist die schwache Lösung von (2.17) nicht eindeutig.

Es ist zu erwarten, dass eine Lösung von (2.16) mit kleinen Viskositätskoeffizienten $\lambda, \mu \rightarrow 0$ unter bestimmten Umständen gegen eine Lösung für (2.17) konvergiert. Diese ist dann als ein guter Kandidat für eine physikalisch sinnvolle Lösung zu betrachten.

Inspiriert von diesem Zusammenhang entwickelten sich Lösungsmethoden für hyperbolische Erhaltungsgleichungen, die unter dem Sammelbegriff der *Methode verschwindender Viskosität* zusammengefasst werden. Die Grundidee des dabei genutzten Viskositätsargument besteht im Konstruieren einer schwachen Lösung für das System

$$\frac{\partial}{\partial t} v + \frac{\partial}{\partial x} f(v) = 0 \quad (2.18)$$

als Grenzwert für $\varepsilon \rightarrow 0$ einer hinreichend glatten klassischen Lösung für das parabolische System

$$\frac{\partial}{\partial t}v + \frac{\partial}{\partial x}f(v) = \varepsilon v_{xx}. \quad (2.19)$$

Dabei übernimmt der als hinreichend klein angenommene Parameter ε die Rolle des Viskositätskoeffizienten. Bei dieser Vorgehensweise sind jedoch vom konkreten Problem abhängige Einschränkungen zu beachten, insbesondere sind die Anfangsbedingungen der Systeme (2.18) und (2.19) zu berücksichtigen und in Einklang zu bringen. Schwierigkeiten ergeben sich dadurch, dass (2.18) im Allgemeinen nur durch Anfangsdaten ergänzt wird, ein korrekt gestelltes parabolisches System (2.19) aber Anfangs- und Randbedingungen erfordert. Ferner ist sicherzustellen, dass (2.19) eine klassische Lösung besitzt und es sind deren Konvergenzeigenschaften funktionalanalytisch abzusichern. Es gibt nun verschiedenste Interpretationen und Varianten dieser Grundidee, so kann es zum Beispiel nützlich sein, die rechte Seite der Gleichung (2.19) durch $\varepsilon t v_{xx}$ zu ersetzen (vergleiche dazu [9]). Da eine genauere Darstellung dieser Methoden sich zu weit vom eigentlichen Thema dieser Arbeit entfernen würde, sei an dieser Stelle auf die zahlreichen Beispiele aus der Literatur verweisen, wie etwa [19], [9] oder [4].

Lösungsansätze mit der Methode der verschwindenden Viskosität werden also mit Erfolg zum Lösen hyperbolischer Erhaltungsgleichungen genutzt.

2.3 Die Viskositätslösung

Motiviert durch die Methode der verschwindenden Viskosität definierten Crandell, Evans und Lions in [8] und [7] den Begriff der Viskositätslösung für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung.

Wir betrachte das Anfangswertproblem

$$F(\vec{y}, u, \vec{p}) = 0, \quad \vec{y} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \quad (2.20)$$

mit $u(\vec{y}) = g(\vec{y})$ für $\vec{y} \in M \subseteq \partial\Omega$ und der Bezeichnung $\vec{p} := \nabla_{\vec{y}}u$.

Definition 4 (Viskositätslösung)

Eine stetige Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Viskositätslösung** von (2.20), wenn

1. $u(\vec{y}) = g(\vec{y})$ für $\vec{y} \in M$
2. für jede Testfunktion $\varphi(\vec{y}) \in C^1(\Omega)$ mit lokalem Minimum von $u(\vec{y}) - \varphi(\vec{y})$ im Punkt \vec{y}_* gilt:

$$F(\vec{y}_*, u(\vec{y}_*), \nabla_{\vec{y}}\varphi(\vec{y}_*)) \geq 0 \quad (2.21)$$

3. für jede Testfunktion $\varphi(\vec{y}) \in C^1(\Omega)$ mit lokalem Maximum von $u(\vec{y}) - \varphi(\vec{y})$ im Punkt \vec{y}_* gilt:

$$F(\vec{y}_*, u(\vec{y}_*), \nabla_{\vec{y}}\varphi(\vec{y}_*)) \leq 0 \quad (2.22)$$

Gelten lediglich 2. und 3., so heißt u nur lokale Viskositätslösung.

Es ist anzumerken, dass jede klassische Lösung von (2.20) auch eine Viskositätslösung ist. Für eine klassische Lösung existieren in jedem Fall Testfunktionen, so dass (2.21) und (2.22) erfüllt sind, denn tatsächlich kann eine klassische Lösung selbst auch als Testfunktion dienen. Mit $\varphi(\vec{y}) \equiv u(\vec{y})$ folgt sofort $u(\vec{y}) - \varphi(\vec{y}) \equiv 0$ und $\nabla_{\vec{y}}\varphi \equiv \nabla_{\vec{y}}u$, weshalb $u(\vec{y}) - \varphi(\vec{y})$ in jedem Punkt $\vec{y} \in \Omega$ sowohl Minimum als auch Maximum annimmt und ebenso (2.21) und (2.22) erfüllt sind.

Anhand der Definition 4 ist wegen der Verwendung von Ungleichungen auch klar, dass $F = 0$ und $-F = 0$ im viskosen Sinne nicht äquivalent sind und eventuell verschiedene Viskositätslösungen besitzen können. Dies widerspricht deutlich dem klassischen Lösungs begriff, da hier $F = 0$ und $-F = 0$ identische Lösungen besitzen.

Unter Nutzung der Methode verschwindender Viskosität wurde in [8] folgende Existenzaussage bewiesen:

Satz 1 (Existenz der Viskositätslösung)

Mit $\varepsilon \in (0, 1)$ sei $F_\varepsilon(\vec{y}, u_\varepsilon, \vec{p}_\varepsilon)$ eine Familie stetiger Funktionen, so dass $F_\varepsilon(\vec{y}, u_\varepsilon, \vec{p}_\varepsilon)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ gegen eine Funktion $F(\vec{y}, u, \vec{p})$ konvergiert. Sei ausserdem angenommen, dass

$u_\varepsilon \in C^2(\Omega)$ eine Lösung von

$$-\varepsilon \Delta u_\varepsilon + F_\varepsilon(\vec{y}, u_\varepsilon, \vec{p}_\varepsilon) = 0 \quad \vec{y} \in \Omega \quad (2.23)$$

$$u_\varepsilon = g_\varepsilon \quad \vec{y} \in \partial\Omega \quad (2.24)$$

ist und u_ε für $\varepsilon \rightarrow 0$ gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von Ω gegen eine Funktion $u \in C(\bar{\Omega})$ konvergiert. Zusätzlich gelte $g_\varepsilon \rightarrow g \in C(\partial\Omega)$. Dann gilt $u|_{\partial\Omega} = g$ und es ist u eine Viskositätslösung von

$$F(\vec{y}, u, \vec{p}) = 0, \quad \vec{y} \in \Omega, \quad u = g, \quad \vec{y} \in \partial\Omega \quad (2.25)$$

Beweis: siehe [8] □

Die Bedingungen zur Existenz und Eindeutigkeit von u_ε als Lösung von (2.23), (2.24) entnimmt man beispielsweise [14] und [18]. Ebenso gibt es in [14] genauere Hinweise, wann obige Bedingungen erfüllt sind, beispielsweise muss u_ε aus dem Raum beschränkter Variation stammen und die Funktion F_ε muss beschränkt sein, ebenso ihre partiellen Ableitungen nach \vec{y} , u und \vec{p} . Beim Umgang mit Viskositätslösungen müssten also an der konkreten Aufgabe verschiedenste Bedingungen geprüft werden um die Existenz der Viskositätslösung sicherzustellen. Wir werden im weiteren Verlauf davon ausgehen, dass alle nötigen Bedingungen erfüllt sind und wenden uns direkt der Frage nach der Eindeutigkeit der Viskositätslösung für die von uns betrachteten Erhaltungsgleichungen zu.

Satz 2

Betrachtet wird die Hamilton–Jacobi–Gleichung

$$u_t + f(u_x) = 0 \quad (2.26)$$

mit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ und $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. Es sei $u_1(x, t)$ eine Viskositätslösung von (2.26) zu den Anfangsdaten $u(x, 0) = g_1(x) \forall x \in \mathbb{R}$ und $u_2(x, t)$ eine Viskositätslösung von (2.26) zu den Anfangsdaten $u(x, 0) = g_2(x) \forall x \in \mathbb{R}$.

Ferner seien $g_1, g_2 \in C_{u,b}(\mathbb{R})$, wobei $C_{u,b}$ den Raum der gleichmäßig stetigen, beschränkten Funktionen bezeichnet. Dann sind $u_1, u_2 \in C_{u,b}(\mathbb{R} \times [0, T])$ für

jedes $T \in (0, \infty)$ und es gilt

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0, T]} (u_1 - u_2)^+ \leq \sup_{\mathbb{R}^n} (g_1 - g_2)^+, \quad (2.27)$$

wobei $r^+ := \max\{r, 0\}$.

Beweis: siehe Kapitel 4 und 5 in [7]. □

Es lässt sich nun leicht die Eindeutigkeit der Viskositätslösung von (2.26) bei gegebenen Anfangswerten herleiten.

Korollar 1 (Eindeutigkeit der Viskositätslösung)

Sofern existent, ist die Viskositätslösung u von (2.26) bei gegebenem Anfangswert $u(x, 0) = g(x) \forall x \in \mathbb{R}$ mit $g \in C_{u,b}(\mathbb{R})$ eindeutig.

Beweis: Wir nutzen Satz 2 mit der Zusatzbedingung $g_1 \equiv g_2 \equiv g$. Dann folgt

$$\sup(u_1 - u_2)^+ \leq 0, \quad \sup(u_2 - u_1)^+ \leq 0 \quad (2.28)$$

und wegen $|r| = \max\{r, 0\} + \max\{-r, 0\} = r^+ + (-r)^+$ erhalten wir

$$0 \leq |u_1 - u_2| = (u_1 - u_2)^+ + (u_2 - u_1)^+ \leq 0. \quad (2.29)$$

Also folgt $u_1 \equiv u_2$. □

Damit ist es auch gerechtfertigt, bei Problemen der Art (2.26) von *der* Viskositätslösung zu sprechen.

Wir betrachten nun folgende Gleichung in Hamilton–Jacobi–Form:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \quad (2.30)$$

Wegen $\frac{\partial f}{\partial u} = 0$ geht (2.30) bei Differentiation nach x über in

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \quad (2.31)$$

Mit $v := \frac{\partial u}{\partial x}$ ergibt sich eine hyperbolische Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial f(v)}{\partial x} = 0 \quad (2.32)$$

Damit können wir also die Konstruktion einer unstetigen Lösung für (2.32) auf die Konstruktion einer stetigen (Viskositäts-)Lösung von (2.30) reduzieren. Die Lösung von (2.32) werden wir dann auch im viskosen Sinne verstehen, sie ist als schwache Ableitung der eindeutigen Viskositätslösung von (2.30) ebenso eindeutig. Wir werden deswegen auch von der Viskositätslösung einer Erhaltungsgleichung (2.32) sprechen, sollten dabei jedoch immer bedenken, dass wir dann eigentlich die Viskositätslösung der zugehörigen Hamilton–Jacobi–Gleichung (2.30) meinen.

2.4 Singularitäten

Definition 5 (singuläre Punkte und einfachste Singularitäten)

Ein Punkt $\vec{y}_* \in \Omega$ einer Viskositätslösung von (2.20) heißt **regulär**, falls er eine Umgebung $D \subseteq \Omega$ besitzt, in welcher $u(\vec{y}) \in C^2(D)$ gilt und $F(\vec{y}, u, \vec{p}) \in C^2(\mathfrak{D})$, wobei \mathfrak{D} eine Umgebung von $(\vec{y}_*, u_*, \vec{p}_*)$ mit $u_* := u(\vec{y}_*)$ und $\vec{p}_* := \nabla_{\vec{y}} u(\vec{y}_*)$ ist.

Alle Punkte von Ω die nicht regulär sind, heißen **singulär**. Singuläre Mannigfaltigkeiten bestehen aus singulären Punkten, sie werden im Folgenden mit Γ bezeichnet und als hinreichend glatt angenommen.

Eine singuläre Hyperfläche Γ einer nichtglatten Lösung wird als **einfachste Singularität** bezeichnet.

Im Folgenden werden wir uns nur noch mit einfachsten Singularitäten befassen, die Bezeichnung Γ wird beibehalten ohne jedesmal explizit darauf hinzuweisen, dass es sich um eine Singularität handelt.

Es sei nun $u(\vec{y})$ eine lokale Viskositätslösung von (2.20), dessen singuläre Punkte eine glatte Hyperfläche Γ in einer Umgebung D um einen festen Referenzpunkt \vec{y}_* bilden. Γ teile D , sodass $D = D_l \cup \Gamma \cup D_r$.

Es bezeichne $u_l := u|_{D_l}$ und entsprechend $u_r := u|_{D_r}$, dann gilt $u \in C(D)$ und nach Definition 5 gilt $u_l \in C^2(D_l)$ bzw. $u_r \in C^2(D_r)$. Es sei nun also ein

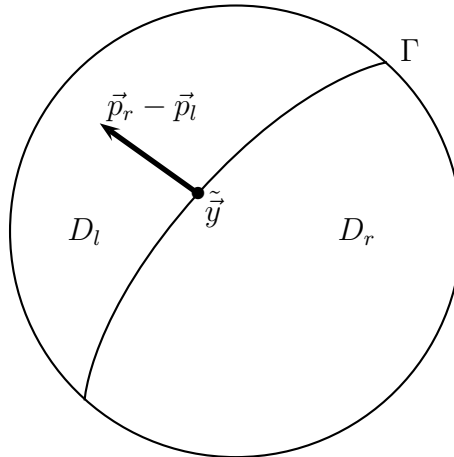


Abbildung 1: Umgebung D der Singularität

Sprung im Gradienten \vec{p} von u entlang Γ , \vec{p} lasse sich aber von D_l bzw. D_r stetig nach Γ erweitern. Damit lassen sich u_l und u_r jeweils glatt nach ganz D erweitern, siehe dazu auch [28]. Die Viskositätslösung u erzeugt also zwei glatte Funktionen u_l und u_r mit $u_l = u_r$ auf Γ .

Die hier vorgestellte Methode beruht auf der Annahme $\vec{p}_r(\vec{y}) - \vec{p}_l(\vec{y}) \neq 0$ für alle $\vec{y} \in \Gamma$. Dabei bezeichnet $\vec{p}_r := \nabla_{\vec{y}} u_r$ und $\vec{p}_l := \nabla_{\vec{y}} u_l$. Es ist $\vec{p}_r(\vec{y}) - \vec{p}_l(\vec{y})$ ein Normalenvektor an Γ , denn Γ kann als $\gamma(\vec{y}) := u_r(\vec{y}) - u_l(\vec{y}) = 0$ dargestellt werden, der Gradient $\nabla_{\vec{y}} \gamma = \vec{p}_r(\vec{y}) - \vec{p}_l(\vec{y})$ von γ ist eine Normale an Γ . Wir können nun zwei Möglichkeiten unterscheiden, entweder $\vec{p}_r - \vec{p}_l$ ist von D_r nach D_l gerichtet oder umgekehrt. Ist $\vec{p}_r - \vec{p}_l$ von D_r nach D_l gerichtet, so gilt $u_r < u_l$ in D_r und $u_r > u_l$ in D_l . Damit kann also die Viskositätslösung u durch die von ihr erzeugten glatten Funktionen ausgedrückt werden: $u = \min[u_l, u_r]$. Ist $\vec{p}_r - \vec{p}_l$ von D_r nach D_l gerichtet, so ergibt sich $u = \max[u_l, u_r]$. In Abschnitt 3.2 werden wir noch eine genauere Unterteilung der Singularitäten hinsichtlich des Verhaltens klassischer Charakteristiken an den Grenzen der Singularität vornehmen.

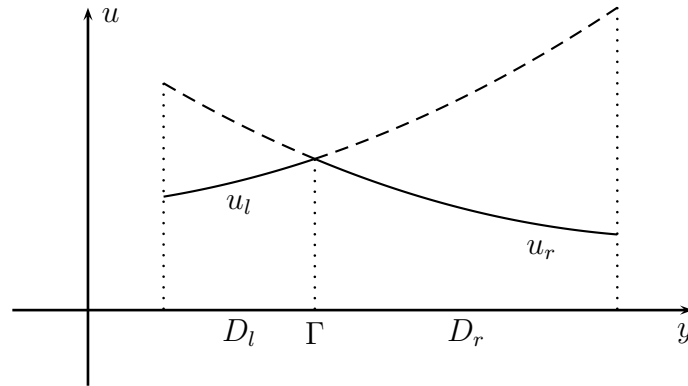


Abbildung 2: Einfachste Singularität der Form $u = \min[u_l, u_r]$

Satz 3

Für eine einfachste Singularität vom Typ $u = \min[u_l, u_r]$ muss in obiger Definition 4 der Viskositätslösung lediglich

$$F(\vec{y}, u(\vec{y}), \vec{p}_\lambda(\vec{y})) \leq 0, \quad \vec{y} \in \Gamma \tag{2.33}$$

mit $\vec{p}_\lambda(\vec{y}) := \lambda \vec{p}_r(\vec{y}) + (1 - \lambda) \vec{p}_l(\vec{y})$, $\lambda \in [0, 1]$ geprüft werden.

Ist die Singularität vom Typ $u = \max[u_l, u_r]$, so muss nur

$$F(\vec{y}, u(\vec{y}), \vec{p}_\lambda(\vec{y})) \geq 0, \quad \vec{y} \in \Gamma \tag{2.34}$$

geprüft werden.

Beweis: (vergleiche [28, S.60ff])

Wir betrachten $u = \min[u_l, u_r]$ und beschränken uns auf $\vec{y} = (x, t) \in \mathbb{R}^2$ und damit $u(\vec{y}) = u(x, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Für $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ betrachte man [28].

Ausserdem sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\Gamma = \{(x, t) | x = 0\}$. Beliebige glatte Hyperflächen Γ in der x - t -Ebene können mittels einer invertierbaren Koordinatentransformation κ auf den Fall $\Gamma = \{\vec{z} = (\tilde{x}, \tilde{t}) | \tilde{x} = 0\}$ in der \tilde{x} - \tilde{t} -Ebene gebracht werden. Mit $\vec{z} = \kappa(\vec{y})$ gilt dann $\nabla_{\vec{z}} u = K \nabla_{\vec{y}} u$, wobei K die Jacobi-Matrix von κ ist. Mit diesen Hilfsmitteln sind die nun folgenden Überlegungen für beliebiges Γ replizierbar.

Es sei also $D = D_l \cup \Gamma \cup D_r$ mit $\Gamma = \{(x, t) | x = 0\}$ und folglich $D_l = \{(x, t) | x < 0\}$ und $D_r = \{(x, t) | x > 0\}$. Aus der von uns gewählten geome-

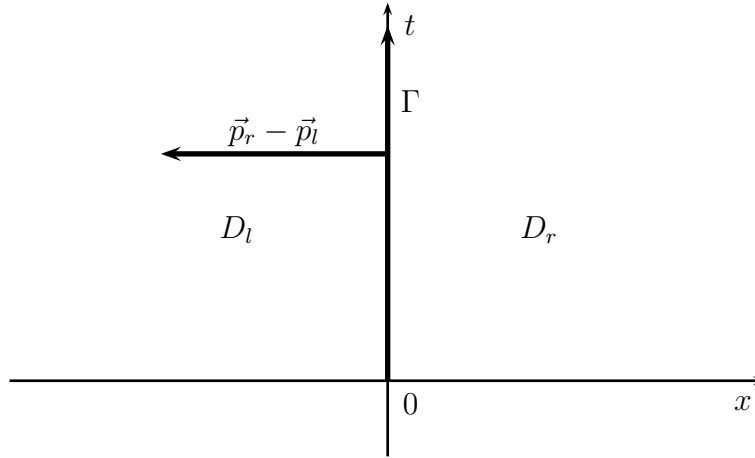


Abbildung 3: Geometrische Situation zum Beweis von Satz 3

trischen Situation (Abbildung 3) ergibt sich, dass Γ mit der t -Achse zusammenfällt und da $\vec{p}_r - \vec{p}_l$ Normale an Γ ist, folgt für alle $x \in \Gamma$

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} - \frac{\partial u_l}{\partial t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{\partial u_l}{\partial t} \quad (2.35)$$

und

$$\frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_l}{\partial x} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial u_r}{\partial x} < \frac{\partial u_l}{\partial x} \quad (2.36)$$

Als Erstes sei angenommen, es gäbe eine Testfunktion $\tilde{\varphi}$ mit $\min(u - \tilde{\varphi})$ auf Γ . Wir betrachten dazu die Funktion $\beta(\vec{x}) := u(\vec{x}) - \tilde{\varphi}(\vec{x})$. Es ist dann

$$\beta(x, t) = \begin{cases} u_l(x, t) - \tilde{\varphi}(x, t), & x < 0 \\ u(x, t) - \tilde{\varphi}(x, t), & x = 0, \\ u_r(x, t) - \tilde{\varphi}(x, t), & x > 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

man beachte dabei $u = u_r = u_l$ für $\vec{y} \in \Gamma$, vgl. auch Abbildung 2. Da nun das Minimum von β für $\vec{y} \in \Gamma$, also $x = 0$, angenommen werden soll, muss folglich gelten

$$\lim_{x \nearrow 0} \frac{\partial}{\partial x} \beta(x, t) = \frac{\partial u_l(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} - \frac{\partial \tilde{\varphi}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \leq 0, \quad (2.38)$$

$$\lim_{x \searrow 0} \frac{\partial}{\partial x} \beta(x, t) = \frac{\partial u_r(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} - \frac{\partial \tilde{\varphi}(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} \geq 0. \quad (2.39)$$

Hieraus folgen die Ungleichungen

$$\frac{\partial u_l}{\partial x} \leq \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} \leq \frac{\partial u_r}{\partial x}, \quad x = 0, \quad (2.40)$$

welche (2.36) widersprechen. Folglich kann eine solche Testfunktion $\tilde{\varphi}$ nicht existieren.

Für jede Testfunktion φ mit $\max(u - \varphi)$ auf Γ , erhält man durch analoges Schließen

$$\frac{\partial u_l}{\partial x} \geq \frac{\partial \varphi}{\partial x} \geq \frac{\partial u_r}{\partial x}, \quad x = 0. \quad (2.41)$$

Es existiert also ein $\lambda \in [0, 1]$, so dass

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial x} + (1 - \lambda) \frac{\partial u_l}{\partial x}. \quad (2.42)$$

Gleichzeitig gilt $\frac{\partial u_r}{\partial t} = \frac{\partial u_l}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}$, so dass für jedes $\lambda \in [0, 1]$ gilt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lambda \frac{\partial u_r}{\partial t} + (1 - \lambda) \frac{\partial u_l}{\partial t}. \quad (2.43)$$

Folglich besitzt jede Testfunktion φ einen Gradienten der Form \vec{p}_λ

$$\nabla_{\vec{y}} \varphi = \lambda \vec{p}_r + (1 - \lambda) \vec{p}_l. \quad (2.44)$$

und es muss lediglich Bedingung 3 in Definition 4 geprüft werden, was sich zu (2.33) zusammenfassen lässt. Analog führt man den Beweis für Singularitäten vom Typ $u = \max[u_l, u_r]$. \square

Durch obigen Satz 3 motiviert, definieren wir uns eine Funktion θ gemäß

$$\theta(\lambda) := F(\vec{y}, u(\vec{y}), \vec{p}_\lambda(y)), \quad \vec{y} \in \Gamma, \lambda \in [0, 1] \quad (2.45)$$

und werden versuchen, durch analytische Betrachtungen zu dieser eindimensionalen Funktion weitere Eigenschaften der Viskositätslösung u zu erkennen.

Korollar 2 (Eigenschaften von $\theta(\lambda)$)

Es sei $u = \min[u_l, u_r]$ eine Viskositätslösung. Für θ gemäß (2.45) gilt:

1. Es ist $\theta(\lambda) \leq 0 \quad \forall \lambda \in [0, 1]$, insbesondere gilt $\theta(0) = \theta(1) = 0$. Ferner ist $\theta(\lambda)$ auf $(0, 1)$ stetig differenzierbar und die Ableitung $\theta'(\lambda)$ lässt sich auf $[0, 1]$ stetig fortsetzen.

2. Es ist $\theta'(\lambda) = \langle \nabla_{\vec{p}} F(\vec{y}, \vec{u}, \vec{p}_\lambda) \mid \vec{p}_r - \vec{p}_l \rangle$ und es gilt:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \theta'(\lambda) \leq 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow 1} \theta'(\lambda) \geq 0, \quad (2.46)$$

Beweis:

1. Die Aussage $\theta(\lambda) \leq 0$ folgt direkt aus (2.33). Und es ist

$$\theta(0) = F(\vec{y}, u(\vec{y}), \vec{p}_0(\vec{y})) = F(\vec{y}, u(\vec{x}), \vec{p}_l(\vec{y})) \stackrel{(2.20)}{=} 0, \quad (2.47)$$

ebenso ergibt sich

$$\theta(1) = F(\vec{y}, u(\vec{y}), \vec{p}_1(\vec{y})) = F(\vec{y}, u(\vec{y}), \vec{p}_r(\vec{y})) \stackrel{(2.20)}{=} 0. \quad (2.48)$$

Die C^1 -Eigenschaft von θ ist eine triviale Folgerung aus der Glattheit von F .

2. Aus der Definition von θ ergibt sich $\theta'(\lambda) = \left\langle \nabla_{\vec{p}} F \mid \frac{\partial \vec{p}_\lambda}{\partial \lambda} \right\rangle$. Mit $\vec{p}_\lambda = \lambda \vec{p}_r + (1 - \lambda) \vec{p}_l$ folgt $\frac{\partial \vec{p}_\lambda}{\partial \lambda} = \vec{p}_r - \vec{p}_l$ und die Behauptung ist gezeigt.

Da θ differenzierbar ist, lässt sich $\theta(\lambda)$ in einer hinreichend kleinen Umgebung eines festen, aber beliebigem $\lambda^* \in (0, 1)$ darstellen als

$$\theta(\lambda) = \theta(\lambda^*) + \theta'(\lambda^*)(\lambda - \lambda^*) + r(\lambda - \lambda^*), \quad (2.49)$$

wobei für den stetigen Fehlerterm $r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda^*} \frac{|r(\lambda - \lambda^*)|}{|\lambda - \lambda^*|} = 0. \quad (2.50)$$

Umstellen von (2.49) liefert

$$\theta'(\lambda^*) = \frac{1}{\lambda - \lambda^*} \left(\theta(\lambda) - \theta(\lambda^*) - r(\lambda - \lambda^*) \right) \quad (2.51)$$

Für $\lambda^* \rightarrow 0$ folgt

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda^* \rightarrow 0} \theta'(\lambda^*) &= \lim_{\lambda^* \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\lambda - \lambda^*} \left(\theta(\lambda) - \theta(\lambda^*) - r(\lambda - \lambda^*) \right) \right) \\ &= \frac{\theta(\lambda)}{\lambda} - \underbrace{\frac{\theta(0)}{\lambda}}_{\stackrel{(2.47)}{=} 0} - \frac{r(\lambda)}{\lambda} = \frac{\theta(\lambda)}{\lambda} - \frac{r(\lambda)}{\lambda}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Analog folgern wir

$$\lim_{\lambda^* \rightarrow 1} \theta'(\lambda^*) = \frac{\theta(\lambda)}{\lambda - 1} - \frac{r(\lambda - 1)}{\lambda - 1}. \quad (2.53)$$

(2.52) und (2.53) gelten in hinreichend kleinen Intervallen $[0, \varepsilon]$ bzw. $[1 - \tilde{\varepsilon}, 1]$ mit $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} > 0$, insbesondere behalten diese Gleichungen ihre Gültigkeit für $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} \rightarrow 0$, so dass wir unter Verweis auf (2.50)

$$\lim_{\lambda^* \rightarrow 0} \theta'(\lambda^*) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\theta(\lambda)}{\lambda}, \quad \lim_{\lambda^* \rightarrow 1} \theta'(\lambda^*) = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{\theta(\lambda)}{\lambda - 1} \quad (2.54)$$

erhalten. Wegen $0 \leq \lambda \leq 1$ folgt insbesondere $\lambda \geq 0$ und $\lambda - 1 \leq 0$, mit $\theta(\lambda) \leq 0$ ergibt sich

$$\frac{\theta(\lambda)}{\lambda} \leq 0, \quad \frac{\theta(\lambda)}{\lambda - 1} \geq 0, \quad (2.55)$$

woraus die behaupteten Ungleichungen (2.46) folgen.

Analoge Aussagen gelten natürlich auch für $u = \max[u_l, u_r]$, dann sind in Korollar 2 lediglich alle Ungleichungen umzukehren. \square

Eigenschaften (2.46) werden wir im weiteren Verlauf abkürzend als $\theta'(0) \leq 0$ und $\theta'(1) \geq 0$ bezeichnen.

Folgerung 1

Genügt die Viskositätslösung einer Erhaltungsgleichung (2.32) der Rankine-

Hugoniot-Bedingung (2.11), so genügt sie auch der *Lax-Entropie-Bedingung* (2.15).

Beweis: Wir betrachten $\vec{y} = (x, t)$ und es liege eine viskose Lösung v für die Erhaltungsgleichung

$$v_t + f_x(v) = 0 \quad (2.56)$$

vor, mit einer Stoßwelle entlang Γ . Die Lösung v erfülle die Bedingung (2.11). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei v in einer hinreichend kleinen Umgebung D auf beiden Seiten von Γ konstant. Wir bezeichnen den Wert von v vor der Unstetigkeit mit v_l und den Wert von v nach der Unstetigkeit mit v_r . Es ist $v_l \neq v_r$. Beim Auffinden von v betrachteten wir die Viskositätslösung u der Differentialgleichung

$$u_t + f(u_x) = 0 \quad (2.57)$$

mit einfachster Singularität Γ . Es ist $v = u_x$, vergleiche Seite 16. Gilt $v_l > v_r$, so ist $u = \min[u_l, u_r]$, ist dagegen $v_l < v_r$, so erhalten wir $u = \max[u_l, u_r]$, siehe auch Seite 19.

Es sei $u = \min[u_l, u_r]$. Nach (2.45) ergibt sich

$$\theta(\lambda) = \lambda q_r + (1 - \lambda)q_l + f(\lambda p_r + (1 - \lambda)p_l), \quad \lambda \in [0, 1], \quad (2.58)$$

wobei zur besseren Übersicht die Bezeichnungen $q_{l/r} := \frac{\partial u_{l/r}}{\partial t}$ und $p_{l/r} := \frac{\partial u_{l/r}}{\partial x}$ genutzt wurden. Damit gilt $\theta'(\lambda) = f'(p_\lambda)(p_r - p_l) + (q_r - q_l)$, insbesondere ergibt sich wegen (2.46)

$$f'(p_l)(p_r - p_l) + (q_r - q_l) \leq 0 \quad (2.59)$$

$$f'(p_r)(p_r - p_l) + (q_r - q_l) \geq 0 \quad (2.60)$$

Dies lässt sich zusammenfassen zu

$$f'(p_l)(p_r - p_l) \leq q_l - q_r \leq f'(p_r)(p_r - p_l). \quad (2.61)$$

Wegen $\theta(0) = \theta(1) = 0$ folgt $q_l = -f(p_l)$ und $q_r = -f(p_r)$, somit

$$f'(p_l)(p_r - p_l) \leq f(p_r) - f(p_l) \leq f'(p_r)(p_r - p_l). \quad (2.62)$$

Wegen $v = u_x$ erhalten wir $p_l = v_l$ und $p_r = v_r$, insgesamt also

$$f'(v_l)(v_r - v_l) \leq f(v_r) - f(v_l) \leq f'(v_r)(v_r - v_l). \quad (2.63)$$

Wegen $u = \min[u_l, u_r]$, gilt $v_r - v_l < 0$, somit

$$f'(v_l) \geq \frac{f(v_r) - f(v_l)}{v_r - v_l} \geq f'(v_r). \quad (2.64)$$

Mit (2.11) ergibt sich also die Lax-Bedingung für (2.56).

$$f'(v_l) \geq \nu \geq f'(v_r). \quad (2.65)$$

Im Fall $u = \max[u_l, u_r]$ kehren sich die Ungleichungen (2.59)-(2.63) um. Gleichzeitig gilt jedoch $v_r - v_l > 0$, so dass letztlich wieder (2.64) folgt. Sind v_l und v_r in D nicht konstant, so sind in obigen Betrachtungen jeweils die links- bzw. rechtsseitigen Grenzwerte an der Sprungunstetigkeit zu betrachten. \square

3 Die Methode der Charakteristiken

3.1 Die klassische Methode

Einführend betrachten wir die hyperbolische quasilineare Differentialgleichung

$$a(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y, u) \frac{\partial u}{\partial y} = c(x, y, u). \quad (3.1)$$

Dabei sei $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ die gesuchte Funktion der Variablen $x, y \in \mathbb{R}$ und $a, b, c : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ seien gegebene Funktionen. Es sei nun $u(x, y)$ eine Lösung von (3.1), dann betrachten wir deren Graphen $z := u(x, y)$, dieser bildet eine Hyperfläche in \mathbb{R}^3 . Der Vektor $\vec{n} := (u_x(x, y), u_y(x, y), -1)$ ist ein Normalenvektor zu dieser Fläche. Betrachten wir nun noch das Vektorfeld definiert durch $\vec{V}(x, y, z) := (a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z))$, so sagt Gleichung (3.1) aus, dass \vec{V} in jedem Punkt tangential zu obiger Hyperfläche $z = u(x, y)$ ist.

$$\langle \vec{V}(x, y, z) \mid \vec{n} \rangle = a(x, y, z)u_x(x, y) + b(x, y, z)u_y(x, y) - c(x, y, z) \stackrel{(3.1)}{=} 0 \quad (3.2)$$

Der Graph der Lösung $u(x, y)$ ist also die Vereinigung der Integralkurven des Vektorfelds \vec{V} . Diese Integralkurven werden charakteristische Kurven der partiellen Differentialgleichung (3.1) genannt. Für diese Kurven gilt dann

$$\frac{dx}{a(x, y, z)} = \frac{dy}{b(x, y, z)} = \frac{dz}{c(x, y, z)}, \quad (3.3)$$

siehe dazu etwa [6],[21] oder auch [12]. Es sei nun angenommen, diese Kurven besitzen eine Parametrisierung nach dem Parameter τ , so wird (3.3) zu

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x, y, z), \quad \frac{dy}{d\tau} = b(x, y, z), \quad \frac{du}{d\tau} = c(x, y, z). \quad (3.4)$$

Dieses System gewöhnlicher Differentialgleichungen ist das charakteristische System der ursprünglichen partiellen Differentialgleichung (3.1).

Motiviert durch obige Überlegungen werden wir uns nun das charakteristische System für eine beliebige Differentialgleichung erster Ordnung herleiten. Wir

betrachten das Cauchy–Problem

$$F(y_1, \dots, y_n, u, u_{y_1}, \dots, u_{y_n}) = F(\vec{y}, u, \vec{p}) = 0, \quad (3.5)$$

mit $\vec{y} \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $u = u(\vec{y}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $\vec{p} = \nabla_{\vec{y}} u \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Ferner sei noch eine parametrisierte Anfangsmannigfaltigkeit

$$M = \{ \vec{y} \in \Omega \mid \vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{s}), \vec{s} \in G \subset \mathbb{R}^{n-1} \} \quad (3.6)$$

gegeben, auf welcher die Anfangsbedingung $u(\vec{\varphi}(\vec{s})) = \omega(\vec{s})$ gilt. M ist eine Hyperfläche in \mathbb{R}^n . Um das charakteristische System eindeutig lösen zu können, benötigen wir neben den schon gegebenen Anfangswerten $\vec{\varphi}, \omega$ noch Anfangsdaten für \vec{p} . Differentiation der Anfangsbedingung $u(\vec{\varphi}(\vec{s})) = \omega(\vec{s})$ nach \vec{s} liefert ein System mit den n Unbekannten $p_i(s)$.

$$F(\vec{\varphi}(\vec{s}), \omega(\vec{s}), \vec{p}(\vec{s})) = 0 \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \omega(\vec{s})}{\partial s_j} - \left\langle \vec{p} \mid \frac{\partial \vec{\varphi}(\vec{s})}{\partial s_j} \right\rangle = 0 \quad j = 1, \dots, n-1 \quad (3.8)$$

Die Vektoren $\frac{\partial \vec{\varphi}(\vec{s})}{\partial s_j}$, $j = 1, \dots, n-1$, spannen den Tangentialraum von M auf und obiges System ist nur dann eindeutig lösbar, wenn die Jacobi–Matrix von $\vec{\varphi}(\vec{s})$ vollen Rang hat und $\nabla_{\vec{p}} F$ linear unabhängig von den Vektoren $\left(\frac{\partial \vec{\varphi}(\vec{s})}{\partial s_j} \right)_{j=1}^{n-1}$ ist¹. Also existiert für $\nabla_{\vec{p}} F$ nicht-tangential zu M eine eindeutige Lösung $\vec{p} = \vec{\psi}(\vec{s}) \in C^1(G)$ des Systems. Die Forderung des vollen Rangs der Jacobi–Matrix und dass $\nabla_{\vec{p}} F$ nicht-tangential zur Anfangsmannigfaltigkeit sein soll, werden wir Transversalbedingung nennen.

Unser Ziel ist es für einen festen Punkt $\vec{y}_* \in \Omega$ den Wert $u(\vec{y}_*)$ einer Lösung von (3.5) zu bestimmen, indem wir eine Verbindungskurve von \vec{y}_* mit einem Punkt $\vec{y}_0 \in M$ finden und entlang jener Kurve ausgehend vom Anfangswert $u(\vec{y}_0)$ die Funktion u berechnen. Diese Verbindungskurve nennen wir charakteristische Kurve und wie oben nehmen wir nun an, diese Kurve sei durch τ parametrisiert, wobei τ aus einem den Nullpunkt einschließen-

¹vgl. auch “Satz von der impliziten Funktion“, bspw. Kapitel 8 in [17]

den Teilintervall von \mathbb{R}_+ stammt. Mit der Bezeichnung $\vec{\xi}(\tau, \vec{s}) := \vec{y}(\tau, \vec{s}) = (y_1(\tau, \vec{s}), \dots, y_n(\tau, \vec{s}))$ haben wir dann

$$\eta(\tau, \vec{s}) := u(\vec{\xi}(\tau, \vec{s})) = u(\xi_1(\tau, \vec{s}), \dots, \xi_n(\tau, \vec{s})) \quad (3.9)$$

$$\vec{\rho}(\tau, \vec{s}) := \vec{p}(\vec{\xi}(\tau, \vec{s})) = \left(\frac{\partial u(\vec{\xi})}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial u(\vec{\xi})}{\partial \xi_n} \right) \quad (3.10)$$

Die Kern der Methode der Charakteristiken besteht also in einer Koordinatentransformation

$$F(\vec{y}, u, \vec{p}) \equiv F(\vec{\xi}(\tau, \vec{s}), \eta(\tau, \vec{s}), \vec{\rho}(\tau, \vec{s})). \quad (3.11)$$

Dabei wählen wir mit \vec{s} den Anfangspunkt der Charakteristik auf der Mannigfaltigkeit M und mit τ bestimmen wir die Position auf der Charakteristik. Differentiation nach τ – im Folgenden durch den Punkt symbolisiert – liefert

$$\dot{\eta} = \frac{\partial u(\vec{\xi}(\tau, \vec{s}))}{\partial \tau} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial \tau} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j = \langle \vec{\rho} \mid \dot{\vec{\xi}} \rangle. \quad (3.12)$$

Es sei nun auch noch die zu lösende Differentialgleichung $F(\xi, \eta, \rho) = 0$ unter Berücksichtigung der Kettenregel nach τ differenziert:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} F(\vec{\xi}, \eta, \vec{\rho}) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i + \frac{\partial F}{\partial \eta} \dot{\eta} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial \rho_i} \dot{\rho}_i \\ &\stackrel{(3.12)}{=} \langle \nabla_{\vec{\xi}} F \mid \dot{\vec{\xi}} \rangle + F_\eta \langle \vec{\rho} \mid \dot{\vec{\xi}} \rangle + \langle \nabla_{\vec{\rho}} F \mid \dot{\vec{\rho}} \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Unserem geometrischen Einführungsbeispiel entnehmen wir wegen (3.4) die Motivation zur Festlegung $\dot{\xi}_i \stackrel{!}{=} \frac{\partial F}{\partial \rho_i}$. Setzen wir also $\dot{\vec{\xi}} = \nabla_{\vec{\rho}} F$, so erhalten wir aus (3.12) sofort

$$\dot{\eta} = \langle \vec{\rho} \mid \nabla_{\vec{\rho}} F \rangle \quad (3.14)$$

und (3.13) erlaubt nun weitere Umformungen

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \nabla_{\vec{\xi}} F \mid \nabla_{\vec{\rho}} F \rangle + \langle F_{\eta} \cdot \vec{\rho} \mid \nabla_{\vec{\rho}} F \rangle + \langle \dot{\vec{\rho}} \mid \nabla_{\vec{\rho}} F \rangle \\ &= \langle \nabla_{\vec{\xi}} F + F_{\eta} \cdot \vec{\rho} + \dot{\vec{\rho}} \mid \nabla_{\vec{\rho}} F \rangle. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Da (3.15) für alle Werte von τ gelten soll und $\nabla_{\vec{\rho}} F \neq 0$ gilt, denn ansonsten hätten wir keine Differentialgleichung vorliegen, bleibt für uns nur die Folgerung

$$\nabla_{\vec{\xi}} F + F_{\eta} \cdot \vec{\rho} + \dot{\vec{\rho}} = 0. \quad (3.16)$$

Zusammengefasst erhalten wir also als charakteristisches System

$$\dot{\vec{\xi}} = \nabla_{\vec{\rho}} F \quad (3.17)$$

$$\dot{\eta} = \langle \vec{\rho} \mid \nabla_{\vec{\rho}} F \rangle \quad (3.18)$$

$$\dot{\vec{\rho}} = -\nabla_{\vec{\xi}} F - F_{\eta} \cdot \vec{\rho} \quad (3.19)$$

Die mit den Anfangswerten $(\vec{\varphi}, \omega, \vec{\psi})$ gewonnene Lösung $(\vec{\xi}, \eta, \vec{\rho})$ des Systems wird als Charakteristik bezeichnet. Die Funktion $\vec{\xi}$ ist die *projizierte Charakteristik*, sie ist die Projektion der Charakteristik $(\vec{\xi}, \eta, \vec{\rho})$ aus dem Raum \mathbb{R}^{2n+1} in den physikalischen Raum $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, siehe dazu etwa [15]. Üblicherweise wird daher nur $\vec{\xi}$ als Charakteristik bezeichnet, ferner sieht man aus Gründen der Übersichtlichkeit häufig von der durch die Abhängigkeit von den Parametern \vec{s} und τ bedingte Umtaufung von \vec{y}, u, \vec{p} in $\vec{\xi}, \eta, \vec{\rho}$ ab. Wir wollen uns an dieser Ungenauigkeit nicht stören und werden im weiteren Verlauf der Arbeit dieser Konvention folgen. Für eine gegebene partielle Differentialgleichung erster Ordnung (3.5) ist das charakteristische System also gegeben durch

$$\dot{\vec{y}} = \nabla_{\vec{p}} F \quad \dot{u} = \langle \vec{p} \mid \nabla_{\vec{p}} F \rangle \quad \dot{\vec{p}} = -\nabla_{\vec{y}} F - F_u \vec{p} \quad (3.20)$$

mit Anfangsdaten $\vec{y}_0 = \vec{\varphi}(\vec{s}), u_0 = \omega(\vec{s}), \vec{p}_0 = \vec{\psi}(\vec{s}), \vec{s} \in G$.

Definition 6 (reguläre Charakteristiken)

Das System (3.20) gewöhnlicher Differentialgleichungen heißt **System regulärer Charakteristiken**. Die Lösung wird als reguläre Charakteristik be-

zeichnet.

Aus (3.20) folgt insbesondere, dass $\vec{p} = \nabla_{\vec{y}}u$ einmal stetig differenzierbar ist und folglich muss die mit klassischen Charakteristiken ermittelte Lösung u zweimal stetig differenzierbar sein. Eine solche Lösung nennen wir klassische Lösung. Die Funktion $F(\vec{y}(\tau), u(\tau), \vec{p}(\tau))$ wird auch als ein Integral des charakteristischen Systems (3.20) bezeichnet, da sie entlang jeder Lösung $\tau \mapsto (\vec{y}(\tau), u(\tau), \vec{p}(\tau))$ von (3.20) konstante Werte annimmt. Abschließend ist zu bemerken, dass diese Herleitung des charakteristischen Systems keineswegs Anspruch auf Vollständigkeit erhebt. In der Literatur gibt es umfangreichere Herleitungen, die zum Beispiel auch Möglichkeiten aufzeigen, wie und unter welchen Voraussetzungen man auch bei Nichterfülltsein der Transversalbedingung die Methode der Charakteristiken verwenden kann, siehe dazu etwa Kapitel 1 in [28]. Weitere Herleitungen verallgemeinern den von uns gewählten geometrischen Ansatz unter Zuhilfenahme von Monge-Kegeln, siehe etwa [6] oder [21].

Wir wollen nun noch das charakteristische System unseres Grundtyps für Erhaltungsgleichung (2.3) aufstellen. Wegen der Einschränkung $v \in \mathbb{R}$ in (3.5) gelingt uns dies jedoch nur für den Fall einer skalaren Erhaltungsgleichung.

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial f(v(x, t))}{\partial x} = 0, \quad v(x, 0) = g(x) \quad (3.21)$$

Die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben. Es ist $n = 2$ und wir setzen $\vec{y} =: (x, t)$ und $\vec{p} = (v_x, v_t) =: (p, q)$. Die zu betrachtende Differentialgleichung schreibt sich damit als

$$F(x, t, v, p, q) = q + f'(v)p = 0, \quad v(x, 0) = g(x), \quad (3.22)$$

sofern wir f und u als stetig differenzierbar voraussetzen.

Die Anfangsmannigfaltigkeit M ist die x -Achse

$$M = \{(x, t) | x = s, t = 0, s \in \mathbb{R}\} = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 | \vec{y} = (s, 0), s \in \mathbb{R}\} \quad (3.23)$$

und damit ergibt sich entsprechend als Anfangsbedingung für das charakte-

ristische System

$$(x(s, \tau), t(s, \tau))|_{\tau=0} = \vec{\varphi}(s) = (s, 0) \quad (3.24)$$

$$v(s, \tau)|_{\tau=0} = \omega(s) = g(s) \quad (3.25)$$

Daraus berechnen wir die noch fehlenden Anfangsdaten $\vec{\psi}$, vorher ist jedoch die Transversalbedingung zu überprüfen. Es ist $\frac{\partial}{\partial s}\varphi(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\nabla_{\vec{p}}F = \begin{pmatrix} F_p \\ F_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(v) \\ 1 \end{pmatrix}$ und da $a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} f'(v) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur für $a = b = 0$ gilt, ist die Transversalbedingung erfüllt. Das Gleichungssystem

$$F(s, 0, g(s), p, q) = q + f'(g(s))p = 0 \quad (3.26)$$

$$g'(s) - \left\langle \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = g'(s) - p = 0 \quad (3.27)$$

hat die Lösung $p = g'(s)$ und $q = -f'(g(s))g'(s)$, also gilt:

$$(p(s, \tau), q(s, \tau))|_{\tau=0} = \psi(s) = (g'(s), -f'(g(s))g'(s)) \quad (3.28)$$

Nach (3.20) lautet das charakteristische System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial p} \\ \frac{\partial F}{\partial q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(v) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

$$\dot{v} = \left\langle \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} F_p \\ F_q \end{pmatrix} \right\rangle = pF_p + qF_q = pf'(v) + q \stackrel{(3.22)}{=} 0 \quad (3.30)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial t} \end{pmatrix} - \underbrace{F_v}_{=pf''(v)} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = -pf''(v) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

Die Lösung von (3.31) wird uns im Weiteren nicht interessieren, da diese Gleichung vom System abgekoppelt ist und somit für uns keinen weiteren direkten Nutzen hat. Aus (3.24) und (3.29) folgt zuerst einmal $t = \tau + t_0 = \tau$. Somit kann τ mit t identifiziert werden und entlang den Charakteristiken kann t als Parameter gelten. Deshalb und wegen der besonderen Struktur der Variablen – einer zeitlichen und einer räumlichen Variablen – findet hier nochmals eine Spezialisierung des Charakteristikenbegriffs statt. Bei Erhaltungssystemen vom Typ (3.21) werden im Allgemeinen nur die zu den räumlichen

Variablen gehörenden projizierten Charakteristiken als Charakteristiken bezeichnet. Wegen (3.30) wissen wir, dass v entlang der Charakteristik zeitunabhängig ist, also $v = v_0 \stackrel{(3.25)}{=} g(s)$, wobei wir wegen (3.24) wissen, dass $s = x_0$ gilt. Es bleibt noch die nach unserer Begriffskonvention eigentliche Charakteristik x zu berechnen:

$$\dot{x} = f'(v) = f'(g(s)) \quad \implies \quad x = f'(g(s))t + s. \quad (3.32)$$

Wir erkennen, dass die Charakteristiken von Erhaltungssystemen immer Geraden sind. Je nach Beschaffenheit der Flussfunktion f und des Anfangszustands g haben wir damit eine Möglichkeit die Lösung $v = g(s)$ unserer Erhaltungsgleichung in jedem Fall implizit anzugeben, falls (3.32) nach s auflösbar ist, können wir die Lösung $v = v(x, t)$ sogar explizit angeben.

Um Missverständnisse zu vermeiden sei an dieser Stelle nochmals an die etwas ungenaue Notation und die stillschweigend durchgeführte Koordinatentransformation erinnert. Mit $v = g(s)$ ist genauer $v(x, t) = \eta(s, t) = g(s)$ gemeint, (3.32) meint $x = \xi(s, t) = f'(g(s))t + s$, zum abschließenden Lösen der Differentialgleichung (3.21) benötigen wir nun noch $s = s(x, t)$, so dass wir schließlich mit $\eta(s(x, t), t) = g(s(x, t)) = v(x, t)$ die gesuchte explizite Lösung erhalten.

Unser Ziel wird es sein, eine Viskositätslösung für (3.21) zu finden. Wie in Abschnitt 2.3 erklärt, werden wir dazu anstatt (3.21) die Hamilton–Jacobi–Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad u(x, 0) = G(x) \quad (3.33)$$

betrachten. Die Funktion $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben. Es ist wieder $n = 2$ und wie oben nutzen wir die Notation $\vec{y} =: (x, t)$ und $\vec{p} = (u_x, u_t) =: (p, q)$. Die zu betrachtende Differentialgleichung schreibt sich damit als

$$F(x, t, u, p, q) = q + f(p) = 0, \quad u(x, 0) = G(x). \quad (3.34)$$

Die Anfangsmannigfaltigkeit M ist wieder die x -Achse

$$M = \{(x, t) | x = s, t = 0, s \in \mathbb{R}\} = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 | \vec{y} = (s, 0), s \in \mathbb{R}\} \quad (3.35)$$

und damit ergibt sich entsprechend als Anfangsbedingung für das charakteristische System

$$(x(s, \tau), t(s, \tau))|_{\tau=0} = \vec{\varphi}(s) = (s, 0) \quad (3.36)$$

$$u(s, \tau)|_{\tau=0} = \omega(s) = G(s) \quad (3.37)$$

Es ist $\frac{\partial}{\partial s}\varphi(s) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} F_p \\ F_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(p) \\ 1 \end{pmatrix}$ und da $a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} f'(p) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ nur für $a = b = 0$ gilt, ist die Transversalbedingung erfüllt. Das Gleichungssystem

$$F(s, 0, g(s), p, q) = q + f(p) = 0 \quad (3.38)$$

$$G'(s) - \langle \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} | \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = G'(s) - p = 0 \quad (3.39)$$

hat die Lösung $p = G'(s)$ und $q = -f(G'(s))$, also gilt:

$$(p(s, \tau), q(s, \tau))|_{\tau=0} = \vec{\psi}(s) = (G'(s), -f(G'(s))) \quad (3.40)$$

Nach (3.20) lautet das charakteristische System

$$\dot{x} = F_p = f'(p) \quad (3.41)$$

$$\dot{t} = F_q = 1 \quad (3.42)$$

$$\dot{u} = pF_p + qF_q = pf'(p) + q \quad (3.43)$$

$$\dot{p} = -F_x - pF_u = 0 \quad (3.44)$$

$$\dot{q} = -F_t - qF_u = 0 \quad (3.45)$$

Wiederum ist $t = \tau$ zu erkennen, ebenso sind p und q hinsichtlich t konstant, d.h. $p = G'(s)$ und $q = -f(G'(s))$. Davon ausgehend erhalten wir

$$x(s, t) = tf'(G'(s)) + s \quad (3.46)$$

und für die Lösung u gilt damit

$$u(s, t) = t \cdot [G'(s)f'(G'(s)) - f(G'(s))] + G(s). \quad (3.47)$$

Im Gegensatz zu (3.21) ist hier die Lösung also nicht zeitlich konstant, die Charakteristiken sind für festes s jedoch auch wieder Geraden. In diesem System taucht nun die Ableitung G' der Anfangsfunktion auf. Es ist aber nicht sichergestellt, dass G überall differenzierbar ist. Erinnern wir uns jedoch an den Grund, weswegen wir Gleichungen des Typs (3.33) betrachten und insbesondere daran, dass wir beim Übergang von (2.30) nach (2.32) die Ableitung von u nach x betrachteten, wird klar, dass $G' = g$ im Sinne einer schwachen Ableitung gelten muss. Mit $G' \equiv g$ sind (3.46) und (3.32) äquivalent und folglich stimmen die Charakteristiken von (3.33) und (3.21) überein. Somit lassen sich alle Überlegungen zum Verhalten der Charakteristiken einer Erhaltungsgleichung (3.21) auf die Charakteristiken der passenden Hamilton–Jacobi–Gleichung (3.33) übertragen.

In der bisherigen Herleitung hatten wir keine Bedingungen an die Anfangsdaten einer Erhaltungsgleichung gestellt, wir hatten lediglich in (3.27) und (3.28) kommentarlos die Ableitung der Anfangsfunktion g verwendet, kurz danach aber festgestellt, dass uns die dabei gewonnenen Erkenntnisse für die von uns betrachteten Erhaltungsgleichungen nicht interessieren. Es stellt also in unserer Herleitung gar kein Problem dar, wenn g nicht überall differenzierbar ist.

Wenn wir unstetige oder nicht differenzierbare Lösung zulassen, müssen auch entsprechende Anfangsdaten erlaubt sein. Tatsächlich wissen wir aus dem letzten Kapitel, dass eine Viskositätslösung mit einfachster Singularität aus C^2 -Lösungen für Teilgebiete des betrachteten Gebiets zusammengesetzt wird. Wir können dazu übergehen, die Charakteristikenmethode in diesen Teilgebieten anzuwenden, sollten aber erwarten, dass es zu Überschneidungen der Charakteristiken kommen wird und deswegen die Lösung im klassischen Sinne gar nicht oder nur für einen beschränkten Zeitraum existieren wird.

3.1.1 Ein Beispiel

Wir betrachten die Erhaltungsgleichung

$$v_t + vv_x = 0. \quad (3.48)$$

Die Flussfunktion $f(v)$ lautet $f(v) = \frac{1}{2}v^2$. Diese Erhaltungsgleichung ist als Burgersgleichung bekannt. Weiter betrachten wir die stetige, aber nicht überall differenzierbare Anfangsfunktion

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 1 - x^2 & x \in [0, 1] \\ 0 & x > 1 \end{cases} \quad (3.49)$$

Mit der Methode der Charakteristiken ergibt sich

$$x(s, t) = g(s)t + s = \begin{cases} t + s & s < 0 \\ (1 - s^2)t + s & s \in [0, 1] \\ s & s > 1 \end{cases} \quad (3.50)$$

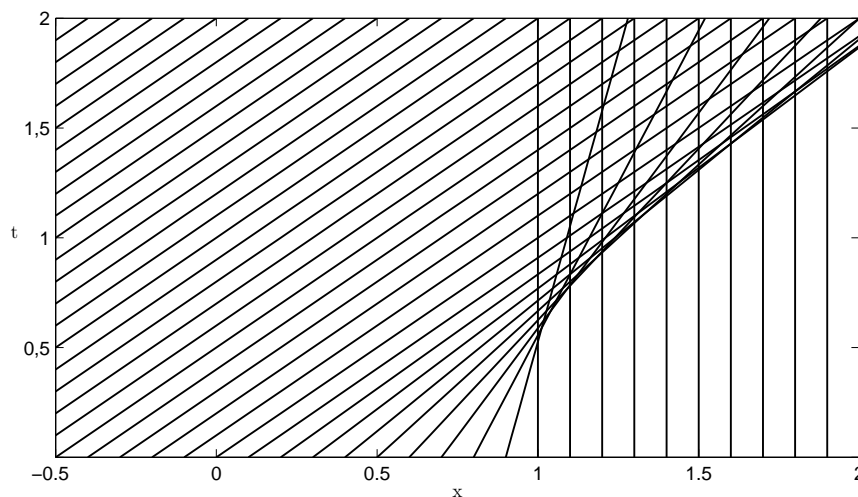


Abbildung 4: Charakteristiken zu Burgersgleichung (3.48) mit Anfangsdaten (3.49)

Abbildung 4 entnehmen wir, dass die Lösung v nur für sehr kleine Werte von t im klassischen Sinne existiert. Eine durch Charakteristiken parametrisierte Darstellung der Lösung in Abbildung 5 zeigt, dass die durch die Lösung erzeugte Fläche nicht der Graph einer Funktion sein kann, da es Paare (x, t) gibt, für die $v(x, t)$ mehr als einen Wert hat.

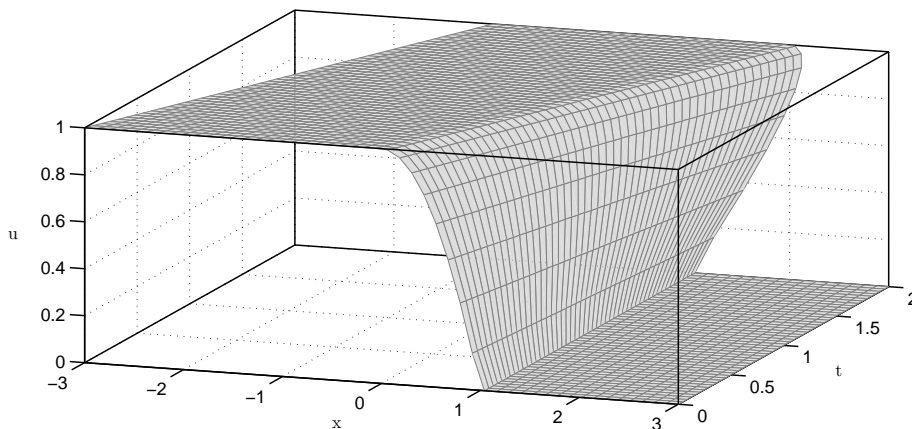


Abbildung 5: Parametrisierte Lösung der Burgersgleichung

Wir suchen nun eine Möglichkeit, trotz dieses Problems eine Lösung zu konstruieren. Hierzu werden wir die Methode der Charakteristiken verallgemeinern.

3.2 Geometrische Verallgemeinerung

Mit $\vec{z} := (\vec{y}, u, \vec{p}) \in N := \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^{2n+1}$ definiert (3.5) eine Mannigfaltigkeit W_1 in \mathbb{R}^{2n+1}

$$W_1 := \{\vec{z} \in N \mid F(\vec{z}) = 0\} \quad (3.51)$$

Das charakteristische Feld $(\nabla_{\vec{p}}F, \langle \vec{p} \mid \nabla_{\vec{p}}F \rangle, -\nabla_{\vec{y}}F - F_u\vec{p})$ beschreibt einen Tangentialvektoren an W_1 . Die Anfangsbedingung (3.6) definiert in N eine $(n - 1)$ -dimensionale Integralfläche

$$\Sigma_1 := \left\{ (\vec{y}, u, \vec{p}) \in N \mid \vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{s}), u = \omega(\vec{s}), p = \vec{\psi}(\vec{s}), \vec{s} \in G \right\}, \quad (3.52)$$

wobei zum Auffinden von $\vec{\psi}(\vec{s})$ die Gleichung $F(\vec{z}) = 0$ hinzugezogen werden musste. Die mittels klassischer Charakteristikenmethode gewonnene Lösung von (3.5) definiert dagegen eine n -dimensionale Integralfäche

$$\Sigma_0 := \left\{ (\vec{y}, u, \vec{p}) \in N \mid \vec{y} = \vec{\xi}(s, t), u = \eta(s, t), \vec{p} = \vec{\rho}(s, t), (s, t) \in G \times \mathbb{R}_+ \right\}. \quad (3.53)$$

bzw. nach Umkehrung der Koordinatentransformation

$$\tilde{\Sigma}_0 := \{ (\vec{y}, u, \vec{p}) \in N \mid u = u(\vec{y}), \vec{p} = \vec{p}(\vec{y}), \vec{y} \in \Omega \}. \quad (3.54)$$

Die Frage des Umwandeln von Σ_0 in $\tilde{\Sigma}_0$ ist hier lediglich eine Frage nach der Umkehrbarkeit der Koordinatentransformation und damit die Frage, ob es uns möglich ist, die Lösung lediglich implizit (Σ_0) oder auch explizit ($\tilde{\Sigma}_0$) darzustellen.

Das Cauchy-Problem (3.5) erlaubt damit aus geometrischer Sicht folgende Formulierung: Gegeben seien $W_1 = \{ \vec{z} \in \mathbb{R}^{2n+1} \mid F(\vec{z}) = 0 \}$ und Σ_1 mit $\Sigma_1 \subset W_1$. Gesucht ist eine Integralfäche Σ_0 , so dass $\Sigma_1 \subset \Sigma_0 \subset W_1$.

Eine entsprechende Verallgemeinerung des Cauchy-Problems (3.5) lautet damit wie folgt:

Gegeben sei eine $(n - (m + 1))$ -dimensionale Integralfäche Σ_{m+1} .

$$\Sigma_{m+1} := \left\{ (\vec{y}, u, \vec{p}) \in N \mid \vec{y} = \vec{\varphi}(\vec{s}), u = \omega(\vec{s}), \vec{p} = \vec{\psi}(\vec{s}), \vec{s} \in G_{m+1} \right\}, \quad (3.55)$$

wobei $G_{m+1} \subseteq \mathbb{R}^{n-(m+1)}$. Wir suchen nun eine $(n - m)$ -dimensionale Integralfäche Σ_m ,

$$\Sigma_m := \left\{ (\vec{y}, u, \vec{p}) \in N \mid \vec{y} = \vec{\xi}(s, t), u = \eta(s, t), \vec{p} = \vec{\rho}(s, t), (s, t) \in G_{m+1} \times \mathbb{R}_+ \right\}, \quad (3.56)$$

so dass $\Sigma_{m+1} \subset \Sigma_m \subset W_{2m+1}$! Hierbei bezeichnet nun

$$W_{2m+1} := \{ \vec{z} \in N \mid F_i(\vec{z}) = 0, |i| \leq m \} \quad (3.57)$$

Durch diese Verallgemeinerung benötigen wir plötzlich nicht nur eine Gleichung $F = 0$, sondern insgesamt $2m + 1$ Gleichungen $F_i = 0, |i| \leq m$. Dies

lässt sich dadurch begründen, dass wir analog zu obigen Überlegungen zur klassischen Charakteristikenmethode in Abschnitt 3.1 wieder die Forderung nach maximalem Rang der Jacobi-Determinante von $\varphi(\vec{s})$ stellen, dieser beträgt hier $n - (m + 1)$. Um also aus der Streifenbedingung

$$\frac{\partial \omega(\vec{s})}{\partial s_j} - \left\langle \vec{p} \mid \frac{\partial \vec{\varphi}(\vec{s})}{\partial s_j} \right\rangle = 0 \quad j = 1, \dots, n - (m + 1) \quad (3.58)$$

einen eindeutigen Anfangswert für \vec{p} zu erhalten, fehlt uns diesmal nicht nur eine Gleichung, sondern es fehlen insgesamt $m + 1$ Gleichungen $F_k = 0$, $k = 0, \dots, m$, mit $\left\{ \nabla_{\vec{p}} F_0, \dots, \nabla_{\vec{p}} F_m, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial s_{n-(m+1)}} \right\}$ linear unabhängig. Kennen wir diese zusätzlichen Gleichungen, können wir mittels Charakteristikenmethode nun Σ_m ermitteln. Eine Lösung von (3.5) spannt aber eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit auf, vergleiche [2]. Um aus dem $(n - m)$ -dimensionalen Σ_m eine eindeutige Lösung u über dem n -dimensionalen physikalischen Raum Ω zu konstruieren, benötigen wir also noch weitere m Bedingungen, welche den zu suchenden Lösungsbegriff erklären und eingrenzen, vergleiche hierzu auch [28, S.21-24].

Deswegen definieren wir uns mit $\vec{z} = (\vec{y}, u, \vec{p})$ die *singuläre Hamiltonfunktion*

$$H(\vec{z}) := \sum_{|i| \leq m} \lambda_i(\vec{z}) F_i(\vec{z}) \quad (3.59)$$

mit Lagrange-Multiplikatoren $\lambda_i(\vec{z})$ und dem charakteristischen Feld

$$\dot{\vec{y}} = \nabla_{\vec{p}} H, \quad \dot{u} = \langle \vec{p} \mid \nabla_{\vec{p}} H \rangle, \quad \dot{\vec{p}} = -\nabla_{\vec{y}} H - H_u \vec{p}. \quad (3.60)$$

Die Restriktion von (3.60) auf die Mannigfaltigkeit W_{2m+1} erzeugt die Gleichungen

$$\dot{\vec{y}} = \sum_{|i| \leq m} \lambda_i \nabla_{\vec{p}} F_i, \quad \dot{u} = \sum_{|i| \leq m} \lambda_i \langle \vec{p} \mid \nabla_{\vec{p}} F_i \rangle, \quad \dot{\vec{p}} = - \sum_{|i| \leq m} \lambda_i (\nabla_{\vec{y}} F_i + \vec{p} \partial_u F_i), \quad (3.61)$$

da wegen $F_i = 0$ die Terme mit den Ableitungen der λ_i auf W_{2m+1} verschwinden.

Definition 7 (verallgemeinerte Charakteristiken)

Die durch (3.60) definierten Charakteristiken zu $H(\vec{y}, u, \vec{p}) = 0$ werden als **singuläre Charakteristiken** von (3.5) bezeichnet, zusammen mit den regulären Charakteristiken bilden sie die **verallgemeinerten Charakteristiken** von (3.5).

Erinnern wir uns an Abbildung 1 auf Seite 18 und benutzen die dortige Notation, so können wir sinnvoll von einer D_l - und einer D_r -Seite von Γ sprechen. Die D_l -Seite von Γ wird *singuläre Seite* genannt, wenn die notwendigen Bedingungen $F_i = 0$ in den Variablen $(\vec{y}, u_l, \vec{p}_l)$ erfüllt sind, also $F_i(\vec{y}, u_l, \vec{p}_l) = 0$ für alle $|i| \leq m$. Analog heißt die D_r -Seite *singulär*, wenn $F_i(\vec{y}, u_r, \vec{p}_r) = 0$ für alle $|i| \leq m$ gilt. Eine Singularität kann also eine, zwei oder keine singulären Seiten haben, somit haben wir eine natürliche Unterteilung des Begriffs der singulären Hyperfläche gefunden.

Melikyan unterscheidet in [28] entsprechend zwischen Dispersionsflächen (*dispersal surface*), wenn keine singuläre Seite vorhanden ist, equivocalen Flächen (*equivocal surface*), wenn eine singuläre Seite existiert und Fokalflächen (*focal surface*), wenn zwei singuläre Seiten vorhanden sind. Die Bezeichnungen sind dem Gebiet der Differentialspiele entlehnt, vgl. dazu auch [20].

Aus Definition 7 ist ersichtlich, dass singuläre Charakteristiken immer an eine singuläre Seite gekoppelt sind. Dispersionsflächen werden also immer ohne singuläre Charakteristiken konstruiert, laut [28, S.63] ist dies immer möglich.

Wir wollen uns nun die beiden einfachsten Fälle der singulären Hamiltonfunktion anschauen. Für $m = 0$ ergibt sich mit $\lambda = 1$ das ursprüngliche Cauchy-Problem (3.5). Für $m = 1$ errechnet man [28, S.24ff]

$$\mu H = \{F_0, F_1\}F_{-1} + \{F_1, F_{-1}\}F_0 + \{F_{-1}, F_0\}F_1 \quad (3.62)$$

Wobei $\mu = \mu(\vec{z})$ ein homogener Multiplikator ist, der zur Normalisierung der Lagrange-Multiplikatoren λ_i dienen wird. Es bezeichnet $\{.,.\}$ die Jacobi-Klammer.

Definition 8 (Jacobi-Klammer)

Es seien $F(\vec{y}, u, \vec{p}), G(\vec{y}, u, \vec{p}) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ hinreichend glatte Funktionen. Die **Jacobi-Klammer** $\{F, G\}$ ist ein bilinearer Differentialoperator und errechnet sich gemäß

$$\begin{aligned} \{F, G\} &:= \sum_{i=1}^n \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y_i} + p_i \frac{\partial F}{\partial u} \right) \frac{\partial G}{\partial p_i} - \left(\frac{\partial G}{\partial y_i} + p_i \frac{\partial G}{\partial u} \right) \frac{\partial F}{\partial p_i} \right] \\ &= \langle \nabla_{\vec{y}} F + F_u \vec{p} \mid \nabla_{\vec{p}} G \rangle - \langle \nabla_{\vec{y}} G + G_u \vec{p} \mid \nabla_{\vec{p}} F \rangle \end{aligned} \quad (3.63)$$

Wenn also der Fall $m = 0$ mit regulären Charakteristiken nicht mehr zufriedenstellend lösbar ist, etwa wegen des Vorhandenseins einer Singularität Γ , werden wir auf den Fall $m = 1$ ausweichen. Sollte dies ebenso nicht ausreichend sein, kann m weiter inkrementiert werden, solange $m < n$ gilt. Für unsere Zwecke wird dies jedoch nicht nötig sein. Wir werden uns im Weiteren nur für spezielle Mannigfaltigkeiten W_3 interessieren, welche definiert werden durch

$$\begin{aligned} F_0 = F(\vec{y}, u, \vec{p}) &= 0, & F_1 = F_1(\vec{y}, u) &= u - d(\vec{y}) = 0, \\ F_{-1} &= \langle \nabla_{\vec{p}} F \mid \vec{p} - \nabla_{\vec{y}} d \rangle = 0, \end{aligned} \quad (3.64)$$

wobei $d(\vec{y})$ eine gegebene Funktion ist und $F(\vec{y}, u, \vec{p})$ aus (3.5) bekannt ist. Aus (3.62) wissen wir nun, dass

$$\lambda_{-1} = \{F_0, F_1\}, \quad \lambda_0 = \{F_1, F_{-1}\}, \quad \lambda_1 = \{F_{-1}, F_0\} \quad (3.65)$$

gilt. Es ist

$$\begin{aligned} \{F_0, F_1\} &= \{F(\vec{y}, u, \vec{p}), u - d(\vec{y})\} \\ &= \langle \nabla_{\vec{y}} F + \vec{p} F_u \mid \nabla_{\vec{p}}(u - d(\vec{y})) \rangle - \langle \nabla_{\vec{y}}(u - d(\vec{y})) + \vec{p}(u - d(\vec{y}))_u \mid \nabla_{\vec{p}} F \rangle \\ &= \langle \nabla_{\vec{y}} F + \vec{p} F_u \mid 0 \rangle - \langle -\nabla_{\vec{y}} d + \vec{p} \mid \nabla_{\vec{p}} F \rangle \\ &= -\langle \vec{p} - \nabla_{\vec{y}} d \mid \nabla_{\vec{p}} F \rangle = -\langle \nabla_{\vec{p}} F \mid \vec{p} - \nabla_{\vec{y}} d \rangle = -F_{-1}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

Damit ist also $\lambda_{-1}(\vec{z}) = 0$ für $\vec{z} \in W_3$. Wir wählen $\mu = \lambda_0$, so dass sich unter

der Annahme $\mu \neq 0$ aus (3.62)

$$H = \frac{\lambda_{-1}}{\lambda_0} F_{-1} + F_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} F_1 \quad (3.67)$$

ergibt. Die Restriktion des charakteristischen Systems auf W_3 liefert dann gemäß (3.61) unter Einbeziehung von $\lambda_{-1} = 0$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{y}} &= \nabla_{\vec{p}} F_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \nabla_{\vec{p}} F_1, & \dot{u} &= \langle \vec{p} \mid \nabla_{\vec{p}} F_0 \rangle + \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \langle \vec{p} \mid \nabla_{\vec{p}} F_1 \rangle, \\ \dot{\vec{p}} &= -(\nabla_{\vec{y}} F_0 + \vec{p} \partial_u F_0) - \frac{\lambda_1}{\lambda_0} (\nabla_{\vec{y}} F_1 + \vec{p} \partial_u F_1). \end{aligned} \quad (3.68)$$

Wir wissen $\nabla_{\vec{y}} F_1 = -\nabla_{\vec{y}} d$, $\partial_u F_1 = 1$ und $\nabla_{\vec{p}} F_1 = 0$, so dass sich (3.68) unter Nutzung von $F_0 = F$ weiter vereinfachen lässt:

$$\dot{\vec{y}} = \nabla_{\vec{p}} F, \quad \dot{u} = \langle \vec{p} \mid \nabla_{\vec{p}} F \rangle, \quad \dot{\vec{p}} = -\nabla_{\vec{y}} F - \vec{p} F_u - \frac{\{F_{-1}, F_0\}}{\{F_1, F_{-1}\}} (\vec{p} - \nabla_{\vec{y}} d). \quad (3.69)$$

Wir haben also mit (3.69) ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen für die singulären Charakteristiken von (3.5) über der Mannigfaltigkeit (3.64) gefunden.

Wie in Kapitel 2 angekündigt, wollen wir uns nun der Klassifikation von Singularitäten anhand des Verhaltens regulärer Charakteristiken an den beiden Seiten der Singularität zuwenden. Sie können dabei transversal, asymptotisch oder auch tangential in die Charakteristik hineinlaufen. Ausserdem kann die Singularität selbst mit einer regulären Charakteristik zusammenfallen. Es sind sogar Fälle denkbar, in denen Charakteristiken tangential oder transversal aus der Singularität herauslaufen, etwa dann, wenn eine Charakteristik nur bis zu einem gewissen Zeitpunkt mit der Singularität zusammenfiel.

Wegen der ersten Gleichung in (3.20) wissen wir, dass $\nabla_{\vec{p}} F$ Tangente an der Charakteristik \vec{y} ist und da wir auch wissen, dass $\vec{p}_r - \vec{p}_l$ Orthogonale an Γ ist, können wir das Verhalten der Charakteristik \vec{y} an Γ auf das Skalarprodukt $\langle \nabla_{\vec{p}} F \mid \vec{p}_r - \vec{p}_l \rangle$ übertragen. Somit wird hier wieder die schon in Kapitel 2 in (2.45) definierte Funktion θ wichtig, insbesondere deren Ableitung mit den

Eigenschaften (2.46) aus Korollar 2.

Wir suchen eine Viskositätslösung für $F_0(\vec{y}, u, \vec{p}) = F(\vec{y}, u, \vec{p}) = 0$, wobei eine Singularität Γ auftritt. Diese Lösung soll stetig sein, also $u_l(\vec{y}) = u_r(\vec{y})$ für $\vec{y} \in \Gamma$, so dass sich als zweite Gleichung $F_1(\vec{y}, u, \vec{p}) = u_l - u_r = 0$ ergibt. Ausserdem kennen wir aus Satz 3 hinreichende Bedingungen für die Viskositätslösung, so dass wir noch $F_{-1}(\vec{y}, u, \vec{p}) = \theta'(\lambda) = \langle \nabla_{\vec{p}_\lambda} F \mid \vec{p}_r - \vec{p}_l \rangle$ betrachten. Es gelten die Ungleichungen aus (2.46), also $F_{-1}(\vec{y}, u_r, \vec{p}_r) = \theta'(1) \geq 0$ und $F_{-1}(\vec{y}, u_l, \vec{p}_l) = \theta'(0) \leq 0$. Sind diese Ungleichungen durch Gleichheit erfüllt, so handelt es sich bei der betrachteten Seite um eine singuläre Seite von Γ . Beim Auffinden der singulären Charakteristiken einer Viskositätslösung haben wir also immer eine Mannigfaltigkeit der Form (3.64) vorliegen.

Wir wollen uns an einem kurzen Gedankenspiel verdeutlichen, wie die Methode der singulären Charakteristiken im Allgemeinen auf die Viskositätslösung einer Differentialgleichung $F(\vec{y}, u, \vec{p}) = 0$ anzuwenden ist. Wir betrachten dazu eine Singularität Γ vom Typ $u = \min[u_l, u_r]$, in welche von der D_l -Seite die Charakteristiken transversal hineinlaufen und auf der D_r -Seite sollen die Charakteristiken tangential aus Γ hinauslaufen. Es ist $\vec{p}_r - \vec{p}_l$ von D_r nach D_l gerichtet. Wenn die Charakteristiken tangential aus der D_r -Seite herauslaufen, dann muss der Winkel α zwischen $\vec{p}_r - \vec{p}_l$ und $\nabla_{\vec{p}} F(\vec{y}, u_r, \vec{p}_r)$ größer als 90° sein, damit also

$$\langle \nabla_{\vec{p}_r} F \mid \vec{p}_r - \vec{p}_l \rangle = \underbrace{|\nabla_{\vec{p}_r} F| \cdot |\vec{p}_r - \vec{p}_l|}_{\geq 0} \cdot \underbrace{\cos(\alpha)}_{\leq 0} \leq 0. \quad (3.70)$$

Da wir eine Viskositätslösung suchen, muss gleichzeitig $\theta'(1) \geq 0$ gelten, folglich muss $\langle \nabla_{\vec{p}} F(\vec{y}, u_r, \vec{p}_r) \mid \vec{p}_r - \vec{p}_l \rangle = 0$ sein. Die D_r -Seite von Γ ist also eine singuläre Seite. Die D_l -Seite von Γ ist dagegen nichtsingulär, da hier die regulären Charakteristiken transversal in Γ hineinlaufen, der Winkel zwischen $\nabla_{\vec{p}} F(\vec{y}, u_l, \vec{p}_l)$ und $\vec{p}_r - \vec{p}_l$ ist auch hier größer als 90° , so dass $\langle \nabla_{\vec{p}_r} F \mid \vec{p}_r - \vec{p}_l \rangle \leq 0$ gilt. Dies stimmt mit der Forderung $\theta'(0) \leq 0$ überein, so dass an dieser Seite von Γ lediglich $F_{-1}(\vec{y}, u_l, \vec{p}_l) \leq 0$ und nicht explizit $F_{-1}(\vec{y}, u_l, \vec{p}_l) = 0$ erfüllt ist. Nach Definition 7 ist die D_l -Seite damit nicht-singulär, mittels klassischer Charakteristiken können wir eine Lösung u_l für

die nichtsinguläre Seite konstruieren. Die Singularität Γ ist eine equivocale Fläche. An der D_r -Seite von Γ gilt $F_0 \equiv F(\vec{y}, u_r, \vec{p}_r) = 0$, $F_1 \equiv u_r - u_l = 0$ und $F_{-1} \equiv \theta'(1) = 0$. Wir können also an der D_r -Seite die singulären Charakteristiken gemäß (3.69) berechnen, wobei $d(\vec{y}) = u_l(\vec{y})$ und damit $\nabla_{\vec{y}}d = \vec{p}_l$ gilt.

$$\begin{aligned} \dot{\vec{y}} &= \nabla_{\vec{p}_r} F, & \dot{u}_r &= \langle \vec{p}_r \mid \nabla_{\vec{p}_r} F \rangle, \\ \dot{\vec{p}}_r &= -\nabla_{\vec{y}} F - F_{u_r} \vec{p}_r - \frac{\{F_{-1}, F_0\}}{\{F_1, F_{-1}\}} (\vec{p}_r - \vec{p}_l) \end{aligned} \quad (3.71)$$

Dieses System gewöhnlicher Differentialgleichungen soll nun gelöst werden, wir erhalten u_r und damit die Lösung $u = \min[u_l, u_r]$. Gleichzeitig liefert uns $u_l = u_r$ die genaue Position der Singularität Γ .

Wir hatten festgestellt, dass die klassischen Charakteristiken bei dem für uns interessantem Gleichungstyp (3.33) Geraden der Form $x(t) = tf'(s) + s$ sind. Genauer betrachtet handelt es sich sogar um Strahlen, da uns nur der Fall $t \geq 0$ interessiert. Aus der Geradengleichung können wir $x(0) = s$ ablesen, die Halbgerade beginnt also auf der Anfangsmannigfaltigkeit M . Dies ist wenig überraschend, denn genau mit diesem Ziel hatten wir die Parametrisierung gewählt, vgl. auch Seite 28. Jede Charakteristik ist also ein Strahl und definiert damit eindeutig eine Gerade in der $x - t$ -Ebene. Geraden liegen in einer Ebene entweder parallel oder sie schneiden sich. Somit ergeben sich für Charakteristiken drei Grundverhaltensweisen. Zwei Charakteristiken verlaufen parallel zueinander, wenn die zugehörigen Geraden parallel liegen. Zwei Charakteristiken schneiden sich, wenn die zugehörigen Geraden einen Schnittpunkt in der Halbebene $t > 0$ besitzen. Zwei Charakteristiken laufen auseinander, wenn die zugehörigen Geraden einen Schnittpunkt in der Halbebene $t \leq 0$ besitzen. Diese elementaren geometrische Überlegungen zeigen uns, dass wir drei Grundtypen von Singularitäten Γ zu unterscheiden haben, welche Spezialfälle der oben auf Seite 39 erwähnten allgemeineren drei Grundtypen darstellen.

- Die Charakteristiken laufen von beiden Seiten transversal in Γ hinein, dies ist der Fall der *nichtdegenerierten Stoßwelle*. Diese Singularität hat keine singulären Seiten und gleicht damit dem Prototyp für eine

Dispersionsfläche.

- Als Zweites gibt es den Fall der *einfach degenerierten Welle*. Dies tritt ein, wenn Γ selbst mit einer Charakteristik zusammenfällt und auf einer Seite von Γ die Charakteristiken parallel zur Singularität verlaufen, auf der anderen Seite laufen die Charakteristiken transversal in Γ hinein. Diese Singularität hat eine singuläre Seite und stellt einen Spezialfall der equivocalen Singularität dar.
- Als *geometrisch indifferent* oder *zweifach degeneriert* bezeichnen wir eine Stoßwelle, auf deren beiden Seiten die Charakteristiken parallel zu Γ verlaufen, Γ selbst fällt ebenso mit einer Charakteristik zusammen. Diese Singularität hat zwei singuläre Seiten und bildet einen Spezialfall der fokalen Singularität.

Die vom Autor dieser Arbeit gewählten Bezeichnungen basieren auf der von Melikyan in [28, S.84] eingeführten Begriff *degenerate surface* für den dort kurz angesprochenen Spezialfall der equivocalen Singularität. Abbildung 6 visualisiert unsere Grundtypen. Da wir uns in dieser Arbeit primär für Stoßwellen interessieren, werden wir den Fall von auseinanderlaufenden Charakteristiken vorerst vernachlässigen, dies würde auf die Betrachtung von Verdünnungswellen hinauslaufen, was weitere analytische Überlegungen unabhängig von unserem Thema nötig machen würde, siehe hierzu auch [31], [11] oder [32]. Wir werden allerdings nochmals in Abschnitt 3.4 auf Verdünnungswellen zu sprechen kommen.

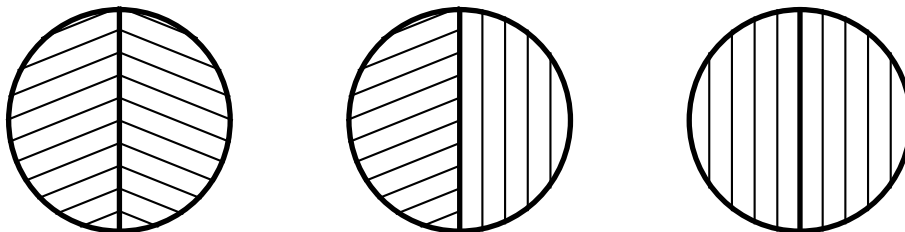


Abbildung 6: Schematische Darstellung der Grundtypen von Singularitäten bei linearem Verlauf der regulären Charakteristiken

3.3 Singuläre Charakteristiken für $q + f(p) = 0$

Wir wollen nun die verallgemeinerten Charakteristiken für die von uns gefundenen drei Grundtypen bei Betrachtung von Differentialgleichungen der Form (3.34) aufstellen, wobei wir grob den Überlegungen von Melikyan in [28, S.231ff] folgen. Betrachten werden wir wieder jeweils nur den Fall $u = \min[u_l, u_r]$, der Normalenvektor $\vec{p}_r - \vec{p}_l$ auf Γ zeigt also von D_r nach D_l . Für $u = \max[u_l, u_r]$ lassen sich analoge Betrachtungen durchführen.

Es ist also

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = \nabla_{\vec{y}} u = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

und es liege die Situation von Abbildung 1 vor.

3.3.1 Die nichtdegenerierte Welle

Als Erstes betrachten wir den Fall der nichtdegenerierten Stoßwelle. An der D_l -Seite von Γ laufen die Charakteristiken transversal, das heißt nicht tangential, in Γ hinein, folglich ist der Winkel zwischen $\vec{p}_r - \vec{p}_l$ und $\nabla_{\vec{p}} F(\vec{y}, u, \vec{p}_l)$ größer als 90° und damit gilt $\langle F_p(\vec{y}, u, \vec{p}_l) \mid \vec{p}_r - \vec{p}_l \rangle \leq 0$. Dies deckt sich mit der Forderung $\theta'(0) \leq 0$ aus Korollar 2. Die D_l -Seite von Γ ist also keine singuläre Seite. Auch an der D_r -Seite von Γ laufen die Charakteristiken transversal in Γ hinein, der Winkel zwischen $\nabla_{\vec{p}} F(\vec{y}, u, \vec{p}_r)$ und $\vec{p}_r - \vec{p}_l$ ist diesmal also kleiner als 90° , da $\vec{p}_r - \vec{p}_l$ von D_r nach D_l zeigt. Deswegen gilt $\langle F_p(\vec{y}, u, \vec{p}_r) \mid \vec{p}_r - \vec{p}_l \rangle \geq 0$. Auch dies deckt sich mit der entsprechenden Forderung $\theta'(1) \geq 0$ an eine Viskositätslösung. Die Singularität besitzt keine singulären Seiten und folglich auch keine singulären Charakteristiken. Die verallgemeinerten Charakteristiken nach Melikyan bestehen im Fall der nichtdegenerierten Stoßwelle nur aus den regulären Charakteristiken.

$$\dot{x} = f'(p_r), \quad \dot{t} = 1, \quad \dot{u}_r = p_r f'(p_r) + q_r, \quad \dot{p}_r = 0, \quad \dot{q}_r = 0 \quad (3.73)$$

Ergänzt werden die regulären Charakteristiken aber noch durch die Forderung $u_r(x, t) - u_l(x, t) = 0$ für $(x, t) \in \Gamma$. In Abschnitt 3.1 hatten wir für den betrachteten Gleichungstyp (3.33) als Parameter $\tau = t$ identifiziert, wir

können also die Gleichung $u_r - u_l = 0 = \text{const.}$ entlang Γ nach t differenzieren und erhalten

$$\frac{\partial u_r}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial u_r}{\partial t} - \left(\frac{\partial u_l}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial u_l}{\partial t} \right) = 0 \quad (3.74)$$

Die spezielle Struktur der Gleichung (3.33) liefert $\frac{\partial u_{l/r}}{\partial t} = -f\left(\frac{\partial u_{l/r}}{\partial x}\right)$, also folgt durch Umstellen

$$\dot{x} = \frac{f\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}\right) - f\left(\frac{\partial u_l}{\partial x}\right)}{\frac{\partial u_r}{\partial x} - \frac{\partial u_l}{\partial x}} \quad (3.75)$$

Für die zu (3.33) gehörende Erhaltungsgleichung (2.32) mit $\frac{\partial u_{l/r}}{\partial x} = v_{l/r}$ gilt also

$$\dot{x} = \frac{f(v_r) - f(v_l)}{v_r - v_l}. \quad (3.76)$$

Wir können die für das Problem (3.33) gültige Gleichung (3.75) problemlos in die für das Problem (2.32) gültige Gleichung (3.76) umwandeln, da wir in Abschnitt 3.1 festgestellt hatten, dass die Differentialgleichungen (3.33) und (2.32) die gleichen Charakteristiken besitzen. Da (3.76) nur entlang Γ gelten soll, bezeichnen die auftretenden Werte v_l und v_r die links- beziehungsweise rechtsseitigen Grenzwerte an der Unstetigkeit Γ in der Lösung $v = \min[v_l, v_r]$, vergleiche hierzu auch Abschnitt 2.1. Wir erhalten

$$\dot{x} = \frac{f(v_+) - f(v_-)}{v_+ - v_-} =: \nu, \quad (3.77)$$

wobei ν die Geschwindigkeit der Unstetigkeit Γ beschreibt, (3.77) ist also die uns schon bekannte Bedingung (2.11). Es ist zu bemerken, dass dies nicht nur für den Fall einer nichtdegenerierten Stoßwelle gilt, denn die Forderung $u_l = u_r$ für $(x, t) \in \Gamma$ gilt in allen von uns betrachteten Fällen.

Stoßwellen in Viskositätslösungen erfüllen die Lax-Bedingung (2.15). Im Fall der nichtdegenerierten Stoßwelle ist keine Gleichheit möglich, es ist also

$$f'(v_-) > \nu > f'(v_+). \quad (3.78)$$

3.3.2 Die einfach degenerierte Welle

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir die D_r -Seite von Γ als singulär und entsprechend die D_l -Seite als nicht-singulär. Die Mannigfaltigkeit W_3 wird hier gebildet durch

$$F_0 = F(\vec{y}, u_r, \vec{p}_r) \stackrel{(3.34)}{=} q_r + f(p_r) = 0,$$

$$F_1 = F_1(x, u_r) = u_r - u_l(x) = 0, \quad F_{-1} = \langle \nabla_{\vec{p}_r} F \mid \vec{p}_r - \vec{p}_l \rangle = 0. \quad (3.79)$$

Wobei $F_{-1} = 0$ gilt, da die klassischen Charakteristiken auf der D_r -Seite parallel zu Γ verlaufen und damit $\vec{p}_r - \vec{p}_l$ orthogonal zu den Charakteristiken liegt. Da die D_l -Seite von Γ eine nichtsinguläre Seite ist, seien u_l und damit auch \vec{p}_l mittels klassischen Charakteristiken ermittelt und werden somit als bekannt angenommen. Wir nutzen für die singulären Charakteristiken also das System (3.71) und wir führen auf der D_r -Seite die Jacobi-Klammer in den gesuchten Variablen $(\vec{y}, u_r, \vec{p}_r)$ aus. Wir können das charakteristische System (3.71) weiter vereinfachen, besonders interessiert uns dabei die Differentialgleichung

$$\dot{\vec{p}}_r = -\nabla_{\vec{y}} F - \vec{p}_r F_{u_r} - \frac{\{F_{-1}, F_0\}}{\{F_1, F_{-1}\}} (\vec{p}_r - \vec{p}_l), \quad (3.80)$$

da dies die einzige Gleichung ist, in der sich das System der singulären Charakteristiken von dem System der regulären Charakteristiken unterscheidet. In unserem Fall ist $\nabla_{\vec{y}} F = F_{u_r} = 0$, ferner gilt

$$\nabla_{\vec{p}_r} F = \begin{pmatrix} F_{p_r} \\ F_{q_r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(p_r) \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.81)$$

und

$$\vec{p}_r - \vec{p}_l = \begin{pmatrix} p_r - p_l \\ q_r - q_l \end{pmatrix} \stackrel{(3.34)}{=} \begin{pmatrix} p_r - p_l \\ -f(p_r) + f(p_l) \end{pmatrix} \quad (3.82)$$

Damit ergibt sich $F_{-1} = f'(p_r)(p_r - p_l) + f(p_l) - f(p_r)$, was insbesondere $\partial_{u_r} F_{-1} = 0$ folgern lässt. Gleichzeitig gilt $\partial_{p_r} F_1 = \nabla_{\vec{p}_r} (u_r - u_l) = 0$ und wir

erhalten

$$\begin{aligned}
 \{F_1, F_{-1}\} &= \{(u_r - u_l), F_{-1}\} \\
 &= \langle \nabla_{\vec{y}}(u_r - u_l) + \vec{p}_r \partial_{u_r}(u_r - u_l) \mid \nabla_{\vec{p}_r} F_{-1} \rangle - \langle \dots \mid \nabla_{\vec{p}_r}(u_r - u_l) \rangle \\
 &= \left\langle - \begin{pmatrix} p_l \\ q_l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_r \\ q_r \end{pmatrix} \cdot 1 \mid \begin{pmatrix} \partial_{p_r}(f'(p_r)(p_r - p_l) + f(p_l) - f(p_r)) \\ \partial_{q_r}(f'(p_r)(p_r - p_l) + f(p_l) - f(p_r)) \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= \left\langle \begin{pmatrix} p_r - p_l \\ f(p_l) - f(p_r) \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} \partial_{p_r}(f'(p_r)(p_r - p_l) + f(p_l) - f(p_r)) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= (p_r - p_l) \cdot (f''(p_r)(p_r - p_l) + f'(p_r) - f'(p_r)) \\
 &= f''(p_r)(p_r - p_l)^2
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

Es gilt $p_r \neq p_l$, somit ist also der Nenner des betrachteten Bruchs in (3.80) ungleich Null, sofern wir $f''(p_r) \neq 0$ voraussetzen. Dies entspricht unserer obigen Annahme $\mu \neq 0$, vergleiche dazu (3.67).

Betrachten wir nun noch den Zähler des Bruchs in (3.80), es ist

$$\begin{aligned}
 \{F_{-1}, F_0\} &= \{F_{-1}, F\} \\
 &= \langle \nabla_{\vec{y}} F_{-1} + \partial_{u_r} F_{-1} \vec{p}_r \mid \nabla_{\vec{p}_r} F \rangle - \langle \nabla_{\vec{y}} F + F_{u_r} \vec{p}_r \mid \nabla_{\vec{p}_r} F_{-1} \rangle \\
 &= \langle \nabla_{\vec{y}} F_{-1} + 0 \cdot \vec{p}_r \mid \nabla_{\vec{p}_r} F \rangle - \langle 0 + 0 \cdot \vec{p}_r \mid \nabla_{\vec{p}_r} F_{-1} \rangle \\
 &= \langle \nabla_{\vec{y}} F_{-1} \mid \nabla_{\vec{p}_r} F \rangle \\
 &= \left\langle \begin{pmatrix} \partial_x(f'(p_r)(p_r - p_l) + f(p_l) - f(p_r)) \\ \partial_t(f'(p_r)(p_r - p_l) + f(p_l) - f(p_r)) \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} f'(p_r) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= \left\langle \begin{pmatrix} -f'(p_r) \partial_x p_l + f'(p_l) \partial_x p_l \\ -f'(p_r) \partial_t p_l + f'(p_l) \partial_t p_l \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} f'(p_r) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \\
 &= f'(p_r) \partial_x p_l \cdot (f'(p_l) - f'(p_r)) + \partial_t p_l \cdot (f'(p_l) - f'(p_r)) \\
 &= (f'(p_r) \partial_x p_l + \partial_t p_l) \cdot (f'(p_l) - f'(p_r))
 \end{aligned} \tag{3.84}$$

Wir wissen nun, dass die Lösung u_l der D_l -Seite mittels regulären Charakteristiken gemäß System (3.41)–(3.45) gefunden wurde, und somit insbesondere zweimal stetig differenzierbar ist. Daher ist

$$\frac{\partial}{\partial t} p_l = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} u_l = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} u_l = \frac{\partial}{\partial x} q_l \stackrel{(3.34)}{=} -\frac{\partial}{\partial x} f(p_l) = -f'(p_l) \frac{\partial}{\partial x} p_l. \tag{3.85}$$

Somit wird (3.84) zu

$$\{F_{-1}, F_0\} = \partial_x p_l \cdot (f'(p_l) - f'(p_r))^2 \quad (3.86)$$

Das System der singulären Charakteristiken lautet nun also

$$\dot{x} = f'(p_r), \quad (3.87)$$

$$\dot{t} = 1 \quad (3.88)$$

$$\dot{u}_r = p_r f'(p_r) - f(p_r), \quad (3.89)$$

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial_x p_l \cdot (f'(p_l) - f'(p_r))^2}{f''(p_r)(p_r - p_l)^2} (p_r - p_l), \quad (3.90)$$

wobei bereits $q_r = -f(p_r)$ berücksichtigt wurde. Dieses Ergebnis stimmt mit den Gleichungen von Melikyan [28, S.231ff] für allgemeine Hamilton–Jacobi–Gleichungen der Form $\partial_t u + f(x, t, u, \partial_x u) = 0$ überein. Wir haben nun allerdings die Besonderheit, dass Γ parallel zu den Charakteristiken der D_r -Seite ist und wie im Fall der nichtdegenerierten Welle gilt die Rankine–Hugoniot–Bedingung (2.11). Die Welle Γ wird gebildet durch die Gerade $x = \nu t$, wobei $\nu = f'(p_r)$ gilt. Wir können $\frac{\partial \nu}{\partial t} = 0$ folgern, denn

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \nu + \frac{\partial \nu}{\partial t} \stackrel{(3.87)}{=} f'(p_r). \quad (3.91)$$

Da aber auch (2.11) gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \nu \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{f(p_r) - f(p_l)}{p_r - p_l} \\ &= \frac{-f'(p_l) \cdot \partial_t p_l \cdot (p_r - p_l) + (f(p_r) - f(p_l)) \cdot \partial_t p_l}{(p_r - p_l)^2}, \end{aligned} \quad (3.92)$$

also

$$\partial_t p_l \cdot (f(p_r) - f(p_l) - f'(p_l)(p_r - p_l)) = 0. \quad (3.93)$$

Angenommen, es wäre $\partial_t p_l \neq 0$, so muss $f(p_r) - f(p_l) - f'(p_l)(p_r - p_l) = 0$ und folglich $f'(p_l) = \nu$ gelten. Damit wären die Charakteristiken auf beiden Seiten

von Γ parallel zur Unstetigkeit, dies steht aber im Widerspruch zu unsere Annahme der einfach degenerierten Welle. Ausserdem würde sich in diesen Fall (3.90) sofort zu $\dot{p}_r = 0$ vereinfachen. Die Voraussetzung $f'(p_l) \neq \nu$ erzwingt auf Γ somit $\partial_t p_l = 0$. Hieraus folgt aber mit (3.85) sofort $f'(p_l) \frac{\partial}{\partial x} p_l = 0$ und da unsere Herleitung mit beliebiger Flussfunktion f durchgeführt wird, ergibt sich $\frac{\partial}{\partial x} p_l = 0$. Somit vereinfacht sich (3.90) auch in diesem Fall zu $\dot{p}_r = 0$.

Wir erkennen, dass die singulären Charakteristiken also mit den regulären Charakteristiken zusammenfallen. Genau dieses Ergebnis hat Melikyan für degenerierte equivocale Singularitäten vorausgesagt, vergleiche [28, S.84].

3.3.3 Die zweifach degenerierte Welle

Abschließend betrachten wir eine zweifach degenerierten Stoßwelle. Analog zur einfach degenerierten Welle gelten an der D_r -Seite von Γ die Gleichungen

$$\begin{aligned} F_0 &\equiv F(\vec{y}, u_r, \vec{p}_r) \stackrel{(3.34)}{=} q_r + f(p_r) = 0, \\ F_1 &\equiv u_r - u_l = 0, \\ F_{-1} &\equiv \langle \nabla_{\vec{p}_r} F \mid \vec{p}_r - \vec{p}_l \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} f'(p_r) \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} p_r - p_l \\ q_r - q_l \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \end{aligned} \tag{3.94}$$

Und an der D_l -Seite gelten die Gleichungen

$$\begin{aligned} F_0 &\equiv F(\vec{y}, u_l, \vec{p}_l) \stackrel{(3.34)}{=} q_l + f(p_l) = 0, \\ F_1 &\equiv u_r - u_l = 0, \\ F_{-1} &\equiv \langle \nabla_{\vec{p}_l} F \mid \vec{p}_r - \vec{p}_l \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} f'(p_l) \\ 1 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} p_r - p_l \\ q_r - q_l \end{pmatrix} \right\rangle = 0. \end{aligned} \tag{3.95}$$

Es sind also beide Seiten von Γ singuläre Seiten.

Im Allgemeinen sind Differentialgleichung erster Ordnung mit einer Singularität mit zwei singulären Seiten nicht lösbar, vergleiche dazu [28, S.74ff]. Da beide Seiten singulär sind, ist es uns nicht möglich, sich durch klassisches Vorgehen einseitig an Γ zu nähern, wie uns dies im Fall der einfach degenerierten Welle gelungen war. Es sind zusätzliche Annahmen nötig um die

Viskositätslösung und die Singularität zu konstruieren. Hilfreich ist es, dass die Charakteristiken beider Seiten parallel zueinander sind, dies ermöglicht es uns, die Systeme der singulären Charakteristiken beider Seiten zu erstellen, siehe auch [28, S.80ff].

Da sich die betrachtete Mannigfaltigkeit (3.79) nicht geändert hat, können wir einen Großteil der Überlegungen von der einfach degenerierten Welle übernehmen. Wir müssen jedoch gleichzeitig beide Seiten von Γ betrachten und so lautet das System singulärer Charakteristiken für die zweifach degenerierte Welle

$$\dot{x} = f'(p_r), \quad (3.96)$$

$$\dot{t} = 1 \quad (3.97)$$

$$\dot{u}_r = p_r f'(p_r) - f(p_r), \quad (3.98)$$

$$\dot{u}_l = p_l f'(p_l) - f(p_l), \quad (3.99)$$

$$\dot{p}_r = -\frac{(f'(p_r)\partial_x p_l + \partial_t p_l) \cdot (f'(p_l) - f'(p_r))}{f''(p_r)(p_r - p_l)^2} (\vec{p}_r - \vec{p}_l), \quad (3.100)$$

$$\dot{p}_l = -\frac{(f'(p_l)\partial_x p_r + \partial_t p_r) \cdot (f'(p_r) - f'(p_l))}{f''(p_l)(p_l - p_r)^2} (\vec{p}_r - \vec{p}_l) \quad (3.101)$$

Aus $F_1 = 0$ folgt wie im Fall der nichtdegenerierten Welle, dass die Rankine–Hugoniot–Bedingung (2.11) erfüllt ist. Da die klassischen Charakteristiken an beiden Seiten der Singularität parallel zu Γ verlaufen, gilt hier $f'(p_r) = f'(p_l) = \nu$. Damit wird aber sofort ersichtlich, dass auch im Fall der zweifach degenerierten Welle die singulären Charakteristiken mit den regulären Charakteristiken zusammenfallen, denn (3.100) und (3.101) vereinfachen sich sofort zu $\dot{\vec{p}}_r = 0$ beziehungsweise $\dot{\vec{p}}_l = 0$.

Die Verallgemeinerten Charakteristiken bestehen also in allen drei Fällen nur aus den regulären Charakteristiken ergänzt um die Rankine–Hugoniot–Bedingung (3.77). Die Methode der verallgemeinerten Charakteristiken liefert somit eine Viskositätslösung für (2.32), welche die Rankine–Hugoniot–Bedingung (2.11) erfüllt. Mit Folgerung 1 erkennen wir, dass diese Lösung auch der Lax–Entropie–Bedingung (2.15) genügt und somit nach unserer Auffassung als physikalisch sinnvoll zu bezeichnen ist.

3.4 Singularitäten induzierende Anfangsbedingungen

Unstetigkeiten bei Erhaltungsgleichungen können auch bei glatten Anfangsdaten auftreten, dies ist eine typische Eigenschaft hyperbolischer Differentialgleichungen. Da die klassischen Charakteristiken Halbgeraden sind, treten diese Unstetigkeiten innerhalb eines kegelförmigen Gebiets auf, wie in Abbildung 7 dargestellt, siehe auch [11]. Die Spitze des Kegels liege bei $t = t^*$, dann können wir eine klassische Lösung der Erhaltungsgleichung für $t \in [0; t^*)$ finden.

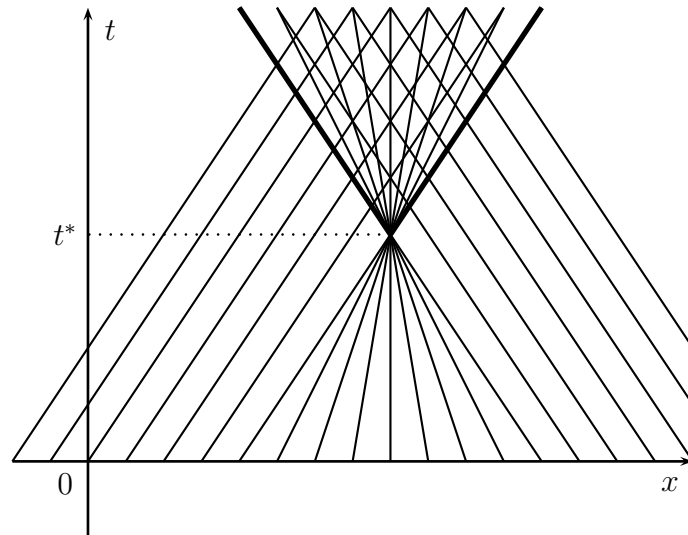


Abbildung 7: Kegelförmiges Gebiet, in welchem Singularität auftritt. Für $t \in [0; t^*)$ existiert klassische Lösung.

Setzen wir also ohne Beschränkung der Allgemeinheit $t^* = 0$, so müssen wir uns mit unstetigen Anfangsdaten befassen. Auch sind Riemann-Probleme durch unstetige Anfangsdaten charakterisiert. Diese Unstetigkeiten können das Auftreten von Stoßwellen in der Lösung von Erhaltungsgleichungen anzeigen. Diese Beobachtung wollen wir im Folgenden genauer untersuchen. Wir betrachten nochmals die Anfangsbedingung (3.37). Es lasse sich ω lokal in einer Umgebung D um die Singularität Γ darstellen als

$$\omega(x) = \min[\omega_l(x), \omega_r(x)], \quad \omega_l, \omega_r \in C^2(D), \quad (3.102)$$

es gibt also eine Sprung in der Ableitung von ω . Ohne Einschränkung sei Γ

in $x = 0$ beginnend, es ist dann

$$p_- := \frac{d}{dx}\omega(0-) = \frac{d}{dx}\omega_l(0) > \frac{d}{dx}\omega_r(0) = \frac{d}{dx}\omega(0+) =: p_+. \quad (3.103)$$

Ist dagegen $\omega(x) = \max[\omega_l(x), \omega_r(x)]$, so ergibt sich

$$p_- = \frac{d}{dx}\omega(0-) = \frac{d}{dx}\omega_l(0) < \frac{d}{dx}\omega_r(0) = \frac{d}{dx}\omega(0+) = p_+. \quad (3.104)$$

Es wird also ein Intervall $P := [p_+, p_-]$ bzw. $P = [p_-, p_+]$ erklärt. Wir nehmen nun an, (3.34) gelte für alle $p \in P$, dann ergibt sich

$$q = -f(p), \quad \forall p \in P. \quad (3.105)$$

Wir betrachten den Graph G dieser Funktion

$$G := \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid q = -f(p), p \in P\} \quad (3.106)$$

und zusätzlich deren Epigraphen

$$\text{epi } G := \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid q \geq -f(p), p \in P\} \subset \mathbb{R}^2 \quad (3.107)$$

und Hypographen

$$\text{hyp } G := \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid q \leq -f(p), p \in P\} \subset \mathbb{R}^2. \quad (3.108)$$

Zum Auffinden der Viskositätslösung wird es unser Ziel sein, für eine Anfangsbedingung der Form $\omega = \min[\omega_l, \omega_r]$ die konvexe Hülle von $\text{epi } G$ zu konstruieren und für $\omega = \max[\omega_l, \omega_r]$ interessiert uns die konvexe Hülle von $\text{hyp } G$.² Hierzu werden wir G durch gerade Segmente ergänzen, wie in Abbildung 8 für den Fall $\omega = \min[\omega_l, \omega_r]$ angedeutet. Da wir die Flussfunktion f als hinreichend regulär vorausgesetzt haben, können wir davon ausgehen, dass eine endliche Anzahl $m \geq 0$ von Segmenten S_i , $i = 1, \dots, m$ ausreichen wird. Zwischen den Segmenten werden wir konvexe Fragmente G_i von

²Die entsprechenden Beweise findet man in [28, S.237f].

G übrigbehalten. Wir erhalten

$$\bar{G} := G_0 + S_1 + G_1 + \dots + S_m + G_m. \quad (3.109)$$

Der Epigraph $\text{epi } G$ bzw. Hypograph $\text{hyp } G$ wird dann von \bar{G} und den Strahlen

$$\{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid q \geq -f(p_-), p = p_-\} \quad \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid q \geq -f(p_+), p = p_+\} \quad (3.110)$$

begrenzt.

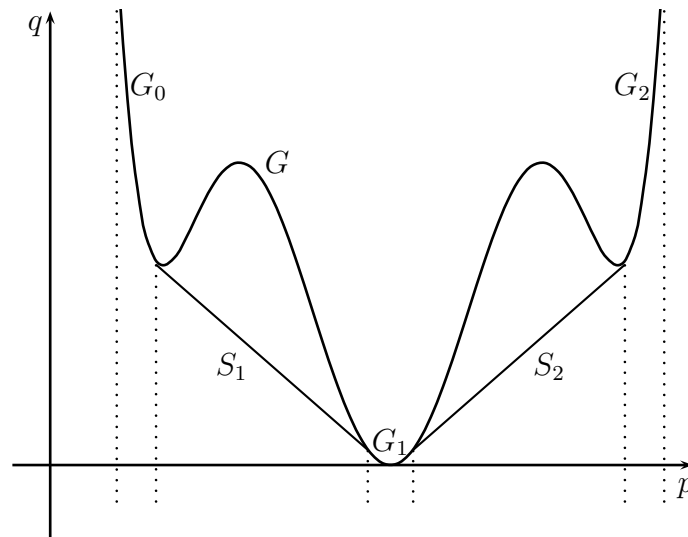


Abbildung 8: Rektifizierung des Graphen G durch zwei Segmente. $\bar{G} = G_0 + S_1 + G_1 + S_2 + G_2$

Die Segmente lassen sich klassifizieren. Sind beide Enden eines Segments tangential zu G , so nennen wir das Segment tangential. Ist lediglich ein Ende des Segments tangential an G , so heißt das Segment semitangential.

Es gibt noch den Fall des nicht-tangentialen Segments. Dies kann nur für $m = 1$ passieren, wenn das Segment die beiden Endpunkte $(p_-, -f(p_-))$, $(p_+, -f(p_+))$ von G verbindet. Wir können nun aus den verwendeten Segmenten direkt die Anzahl und Art der durch $x = 0$ induzierten Singularitäten herauslesen.

Satz 4 (Melikyan [28])

Eine Lösung von (3.33) mit Anfangsbedingung (3.102) hat genau m Stoßwel-

len, zu jedem Segment aus (3.109) gehört genau eine Welle. Die Welle, welche zu einem nicht-tangentialem Segment gehört, ist eine nicht-degenerierte Stoßwelle. Semitangentiale und tangentielle Stoßwellen erzeugen einfach bzw. zweifach degenerierte Wellen.

Beweis: Siehe [28] S.245-253, mit Verweis auf [24] □

Im allgemeinen Fall einer Viskositätslösung für eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung kann eine Unstetigkeit in den Anfangsdaten also bis zu m Stoßwellen Γ_i , $i = 1, \dots, m$ erzeugen. Ist $m > 1$, so lassen grundlegende Überlegungen aus dem Gebiet der Rektifizierung eines Graphen erkennen, dass für $i \notin \{1, m\}$ die entsprechenden Segmente S_i tangential sind und somit die zugehörigen Wellen fokalen Typs sein müssen. Die Segmente S_1 und S_m sind dann semitangential und die zugehörigen Wellen equivocalen Typs. Wir hatten jedoch oben gezeigt, dass degenerierte Wellen auf beiden Seiten von regulären Charakteristiken umgeben sind. Daraus folgt, dass eine Unstetigkeit der Anfangsbedingung maximal eine Unstetigkeitswelle in der Viskositätslösung erzeugen kann. Denn würde mehr als eine Stoßwelle erzeugt werden, so müssten zwischen den Stoßwellen singuläre Charakteristiken auftreten, welche sich von den regulären Charakteristiken unterscheiden müssten. Wir hatten in Abschnitt 3.3 aber gesehen, dass dies nicht passieren kann. Diese Beobachtung werden wir an Beispiel (3.131) nochmals verdeutlichen, vorher befassen wir uns aber noch mit einer wichtigen Folgerung aus Satz 4, welche streng konkave oder streng konvexe Flussfunktionen betrifft.

Folgerung 2

Es sei $f''(p) \neq 0$, $\forall p \in P$

1. *Ist die Flussfunktion einer Erhaltungsgleichung im obig erklärtem Intervall P streng konvex, so besitzt eine Viskositätslösung vom Typ $u = \min[u_l, u_r]$ genau eine Stoßwelle, diese ist nichtdegeneriert.
Eine Viskositätslösung vom Typ $u = \max[u_l, u_r]$ besitzt keine Stoßwelle.*
2. *Ist die Flussfunktion einer Erhaltungsgleichung im obig erklärtem Intervall P streng konkav, so besitzt eine Viskositätslösung vom Typ $u = \min[u_l, u_r]$ keine Stoßwelle.*

Eine Viskositätslösung vom Typ $u = \max[u_l, u_r]$ hat genau eine nicht-degenerierte Stoßwelle.

Beweis: Wir betrachten die zur Erhaltungsgleichung $\partial_t v + \partial_x f(v) = 0$ gehörende Hamilton–Jacobi–Gleichung $\partial_t u + f(\partial_x u) = 0$. Wir nutzen wieder die Bezeichnung $q = \partial_t u$ und $p = \partial_x u$. Uns interessiert also der Graph

$$G := \{(p, q) \in \mathbb{R}^2 \mid q = -f(p), p \in P\} \quad (3.111)$$

Ist die Flussfunktion f im Intervall P konvex, so ist $q(p) : -f(p)$ in P konkav. Hat die Viskositätslösung die Form $u = \min[u_l, u_r]$, so ist $p_r < p_l$ und wir suchen die konvexe Hülle von $\text{epi } G$. Die konvexe Hülle des Epigraphen einer konkaven Funktion wird durch das zusätzliche Segment gebildet, welches die Punkte $(p_r; -f(p_r))$ und $(p_l; -f(p_l))$ verbindet, vgl. auch [1, S.339]. Das Segment hat den Anstieg $\frac{q(p_r) - q(p_l)}{p_r - p_l}$. Da $q(p)$ konkav ist, gilt $q(p+h) < q(p) + hg'(p)$ für $h \neq 0$ (vgl. [34, S.490]), so dass speziell für $h_1 = p_l - p_r > 0$ und $h_2 = -h_1 < 0$

$$q(p_l) = q(p_r + h_1) < q(p_r) + (p_l - p_r)q'(p_r) \quad (3.112)$$

$$q(p_r) = q(p_l + h_2) < q(p_l) + (p_r - p_l)q'(p_l) \quad (3.113)$$

folgt, was letztlich zu

$$q'(p_r) > \frac{q(p_r) - q(p_l)}{p_r - p_l} > q'(p_l) \quad (3.114)$$

führt, das Segment ist also nicht-tangential. Nach Satz 4 impliziert das Segment somit eine nicht-degenerierte Stoßwelle. Ferner zeigt (3.114) das Erfülltsein der Lax–Entropie–Bedingung an, denn mit $q = -f$ folgt sofort

$$f'(p_r) < \frac{f(p_l) - f(p_r)}{p_l - p_r} < f'(p_l). \quad (3.115)$$

Hat die Viskositätslösung dagegen die Form $u = \max[u_l, u_r]$, so suchen wir die konvexe Hülle von $\text{hyp } G$. Da $-f$ jedoch konkav ist, ist $\text{hyp } G$ bereits konvex. Es sind also keine zusätzlichen Segmente nötig, aus Satz 4 folgt sofort, dass

die Lösung keine Stoßwellen besitzt.

Analoge Überlegungen lassen sich für den Fall einer konkaven Flussfunktion wiederholen. \square

Wir wollen uns die Bedeutung dieser Aussagen anhand einfacher Beispiele verdeutlichen.

3.4.1 Beispiele

Aus Gründen der Einfachheit wollen wir uns im Folgenden auf Riemann-Probleme hyperbolischer Erhaltungsgleichungen beschränken, die Anfangswerte bestehen also aus zwei Konstanten, getrennt von einer Unstetigkeit. Für Riemann-Probleme gilt $p_- = p_l$ und $p_+ = p_r$. Die passende Anfangsbedingung der zugehörigen Hamilton–Jacobi–Gleichung ist dann nicht beschränkt, so dass wir Korollar 1 nicht anwenden können.

Betrachten wir zuerst die Burgersgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} v + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} v + v \cdot \frac{\partial}{\partial x} v = 0 \quad (3.116)$$

mit konvexer Flussfunktion $f(v) = \frac{1}{2} v^2$ und dazu die Anfangsbedingungen

$$g_1(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (3.117)$$

Die passende Hamilton–Jacobi–Gleichung lautet $u_t = \frac{1}{2} u_x^2 = q + \frac{1}{2} p^2 = 0$ mit Anfangsbedingung

$$G_1(x) = \min[2x; x] = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases} \quad (3.118)$$

Wir betrachten den Graph der Funktion $q(p) = -\frac{1}{2} p^2$ im Intervall $[1, 2]$, dieser ist in Abbildung 9 dargestellt.

Es ist $p_l = 2 > 1 = p_r$, also interessiert uns der Epigraph von $q(p)$. Wie in Folgerung 2 festgestellt, entsteht für G_1 eine Singularität, diese ist nicht-

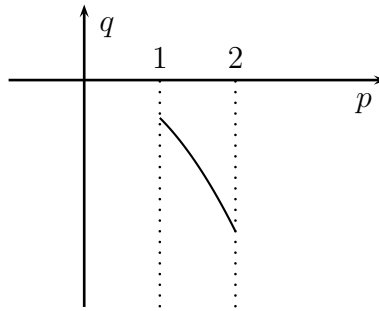


Abbildung 9

tangential. Wir wissen aus Abschnitt 3.3.1, dass wir die Lösung mittels klassischen Charakteristiken gemäß (3.46) und (3.47) ermitteln können und erhalten

$$x(t, s) = \begin{cases} 2t + s & s < 0 \\ t + s & s > 0 \end{cases} \quad (3.119)$$

$$u(t, s) = \begin{cases} 2t + 2s & s < 0 \\ \frac{1}{2}t + s & s > 0 \end{cases} \quad (3.120)$$

Dies liefert uns die für $x \in [t, 2t]$ nicht wohldefinierte Lösung

$$u(x, t) = \begin{cases} 2x - 2t & x < 2t \\ x - \frac{1}{2}t & x > t \end{cases} \quad (3.121)$$

Die Geraden $x = t$ und $x = 2t$ definieren einen Kegel in der x - t -Ebene, innerhalb dieses Kegels liegt die Singularität, auf welcher $u_l = u_r$ mit $u_l(x, t) = 2x - 2t$ und $u_r(x, t) = x - \frac{1}{2}t$ gilt. Dies führt zu $x = \frac{3}{2}t$ und tatsächlich liefert auch die Rankine–Hugoniot–Bedingung für den Anstieg der Stoßwelle

$$\nu = \frac{1}{2}(p_+ + p_-) = \frac{3}{2}, \quad (3.122)$$

die stetige Viskositätslösung lautet also

$$u(x, t) = \min[2x - 2t, x - \frac{1}{2}t] = \begin{cases} 2x - 2t & x < \frac{3}{2}t \\ x - \frac{1}{2}t & x > \frac{3}{2}t \end{cases} \quad (3.123)$$

Wir wollen noch prüfen, ob u tatsächlich eine Viskositätslösung ist, wegen Satz 3 reicht es zu prüfen, ob θ gemäß (2.45) für $\lambda \in [0, 1]$ nicht positiv wird.

$$\begin{aligned} \theta(\lambda) &= \lambda q_r + (1 - \lambda)q_l + \frac{1}{2}(\lambda p_r + (1 - \lambda)p_l)^2 \\ &= -\lambda \frac{1}{2} - (1 - \lambda)2 + \frac{1}{2}(\lambda + (1 - \lambda)2)^2 \\ &= \frac{3}{2}\lambda - 2 + \frac{1}{2}(4 - 4\lambda + \lambda^2) \\ &= \frac{1}{2}(\lambda^2 - \lambda) \end{aligned} \quad (3.124)$$

Für $\lambda \in [0, 1]$ ist $\frac{1}{2}(\lambda^2 - \lambda) \leq 0$, wir haben also tatsächlich die Viskositätslösung gefunden. Deren partielle Ableitung nach x ist dann die Lösung unserer Erhaltungsgleichung (3.116).

$$v(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}u(x, t) = \begin{cases} 2 & x < \frac{3}{2}t \\ 1 & x > \frac{3}{2}t \end{cases} \quad (3.125)$$

Betrachten wir nun die gleiche Erhaltungsgleichung mit der Anfangsbedingung

$$g_2(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases} \quad (3.126)$$

und dazu die passende Anfangsbedingung für die Hamilton–Jacobi–Gleichung

$$G_2(x) = \max[2x; x] = \begin{cases} x & x < 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases} \quad (3.127)$$

Diesmal ist $p_l = 1 < 2 = p_r$ und es interessiert uns daher der Hypograph. Dieser ist aber schon konvex, die Lösung hat keine Stoßwelle und muss ste-

tig differenzierbar sein. Mit der Methode der klassischen Charakteristiken ermitteln wir

$$u(x, t) = \begin{cases} x - \frac{1}{2}t & x < t \\ 2x - 2t & x > 2t \end{cases} \quad (3.128)$$

als Lösung der Hamilton–Jacobi–Gleichung und entsprechend

$$v(x, t) = \begin{cases} 1 & x < t \\ 2 & x > 2t \end{cases} \quad (3.129)$$

als Lösung der Erhaltungsgleichung.

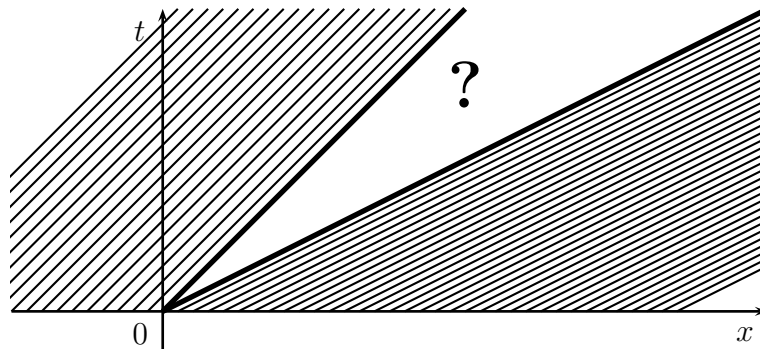


Abbildung 10: Charakteristiken der Burgersgleichung mit Anfangsbedingung (3.126)

Wir wissen aus Satz 4, dass im Kegel zwischen den Geraden $x = t$ und $x = 2t$ die Lösung u und auch ihre Ableitung $u_x = v$ eine stetige Fortsetzung benötigt. Die Methode der singulären Charakteristiken liefert keinen Hinweis über die Vorgehensweise in einem solchen Fall und trifft auch keine Aussagen über eventuell vorhandene Charakteristiken im Bereich der Verdünnungswelle. Weitere analytische Überlegungen, vergleiche etwa [32], liefern uns

$$v(x, t) = \begin{cases} 1 & x < t \\ \frac{x}{t} & t \leq x \leq 2t \\ 2 & x > 2t \end{cases} \quad (3.130)$$

als Lösung der Erhaltungsgleichung mit Verdünnungswelle. Trotz unstetiger Anfangsbedingung ist die Lösung der Erhaltungsgleichung stetig. Die Fähigkeit, stetige Lösungen auch aus unstetigen Anfangsdaten zu erzeugen,

ist typisch für hyperbolische Gleichungen.

Betrachten wir als nächstes die Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}v + \frac{\partial}{\partial x}(-\cos(v)) = \frac{\partial}{\partial t}v + \sin(v) \cdot \frac{\partial}{\partial x}v = 0 \quad (3.131)$$

mit Flussfunktion $f(p) = -\cos(p)$ und Anfangsbedingung

$$v(x, 0) = g_3(x) = \begin{cases} -\pi & x < 0 \\ \frac{7}{4}\pi & x > 0 \end{cases} \quad (3.132)$$

Die zugehörige Hamilton–Jacobi–Gleichung lautet

$$\frac{\partial}{\partial t}u - \cos\left(\frac{\partial}{\partial x}u\right) = 0 \quad (3.133)$$

und hat die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = G_3(x) = \max\left[-\pi x, \frac{7}{4}\pi x\right] = \begin{cases} -\pi x & x < 0 \\ \frac{7}{4}\pi x & x > 0 \end{cases} \quad (3.134)$$

Uns interessiert wegen $p_l = -\pi < \frac{7}{4}\pi = p_r$ die konvexe Hülle des Hypographen von $q(p) = -f(p) = \cos(p)$. Diese wird durch zwei semitangentiale

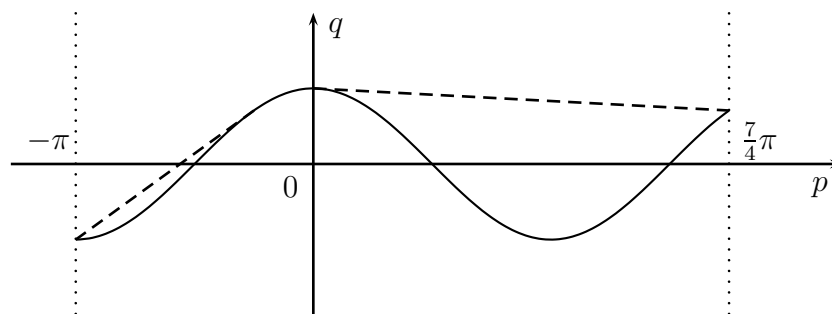


Abbildung 11: Graph von $q(p) = \cos(p)$ im Intervall $[-\pi, \frac{7}{4}\pi]$; es sind zwei Segmente nötig um die konvexe Hülle des Hypographen zu bilden

Segmente gebildet, entsprechend müsste die Lösung zwei einfach degenerierte Wellen besitzen. Wir hatten jedoch auf Seite 50 errechnet, dass auf beiden Seiten einer degenerierten Wellen nur reguläre Charakteristiken sein können.

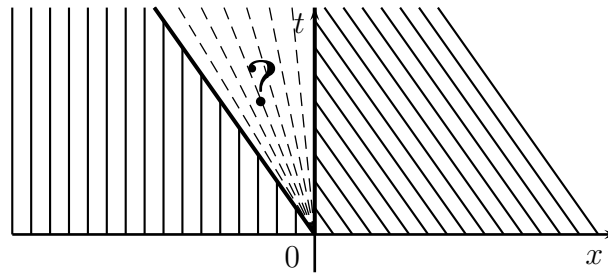


Abbildung 12: Unmögliche Lösung mit zwei Stoßwellen. Auf beiden Seiten jeder Welle sollen reguläre Charakteristiken verlaufen.

Folglich müssen beide Wellen zu einer einzigen Welle zusammenfallen, diese ist dann nicht-degeneriert, denn die Rankine–Hugoniot–Bedingung lautet

$$\nu = \frac{f(p_l) - f(p_r)}{p_l - p_r} = \frac{-\cos(-\pi) + \cos(\frac{7}{4}\pi)}{-\pi - \frac{7}{4}\pi} = -\frac{2(2 + \sqrt{2})}{11\pi} \approx -\frac{1}{5} \quad (3.135)$$

und es ist mit $f'(p_l) = \sin(-\pi) = 0 > \nu > -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin(\frac{7}{4}\pi) = f'(p_r)$ die Lax–Bedingung erfüllt. Die Lösung lautet also

$$u(x, t) = \begin{cases} -\pi x & x < \nu t \\ \frac{7}{4}\pi x & x > \nu t \end{cases} \quad (3.136)$$

und damit ergibt sich für die Lösung der Erhaltungsgleichung

$$v(x, t) = \begin{cases} -\pi & x < \nu t \\ \frac{7}{4}\pi & x > \nu t \end{cases} \quad (3.137)$$

Dieses letzte Beispiel eignet sich auch hervorragend um eine große Schwäche der Methode der singulären Charakteristiken und speziell von Satz 4 aufzuzeigen. Wie bereits in Kapitel 2 erklärt, müsste für jedes Problem die Existenz der Viskositätslösung gezeigt werden. Drehen wir für obige Erhaltungsgleichung $v_t + \sin(v)v_x = 0$ die Anfangsbedingung g_3 um, also

$$v(x, 0) = g_4(x) = \begin{cases} \frac{7}{4}\pi & x < 0 \\ -\pi & x > 0 \end{cases}, \quad (3.138)$$

so ist $p_l = \frac{7}{4}\pi > -\pi = p_r$ und wir suchen nun die konvexe Hülle des Epigraphen. Auch diese wird mit Hilfe zweier semitangentialer Segmente gebildet, mit analoger Argumentation zu oben, kann man nun annehmen, dass die durch die beiden Segmente induzierten Wellen zu einer Stoßwelle zusammenfallen. Ein Blick auf das Bild der klassischen Charakteristiken in Abbildung 13 lässt allerdings eher eine Verdünnungswelle als eine Stoßwelle vermuten.

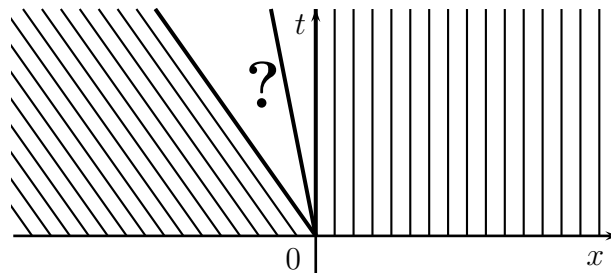


Abbildung 13: Durch Satz 4 falsch vorausgesagte Stoßwelle. Das betrachtete Problem kann folglich keine Viskositätslösung besitzen.

Tatsächlich kann eine Viskositätslösung der betrachteten Erhaltungsgleichung mit Anfangsbedingung (3.138) keine Stoßwelle besitzen, denn wegen $f'(p_l) = \sin(\frac{7}{4}\pi) > \sin(-\pi) = f'(p_r)$ kann keine Stoßwelle die Lax–Entropie–Bedingung erfüllen. Wir hatten jedoch in Folgerung 1 gezeigt, dass jede Viskositätslösung die Entropie–Bedingung erfüllen muss. Da Satz 4 jedoch eine Viskositätslösung mit Stoßwelle voraussagt, kann die Erhaltungsgleichung $v_t + \sin(v)v_x = 0$ mit Anfangsbedingung (3.138) keine Viskositätslösung besitzen.

Abschließend sei noch ein Beispiel für eine einfach degenerierten Welle dargestellt. Wir betrachten die Erhaltungsgleichung $\partial_t v + \partial_x f(v) = 0$ mit Flussfunktion $f(v) = -\frac{1}{2}v^3 + \frac{3}{2}v$ und der Anfangsbedingung

$$v(x, 0) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases} \quad (3.139)$$

Die entsprechende Hamilton–Jacobi–Gleichung lautet $q - \frac{1}{2}p^3 + \frac{3}{2}p = 0$ und

hat die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = \max[-x; 2x] = \begin{cases} -x & x < 0 \\ 2x & x > 0 \end{cases} \quad (3.140)$$

Wegen $p_l = -1 < 2 = p_r$ suchen wir die konvexe Hülle des Hypographen von $q(p) = \frac{1}{2}p^3 - \frac{3}{2}p$ im Intervall $[-1, 2]$.

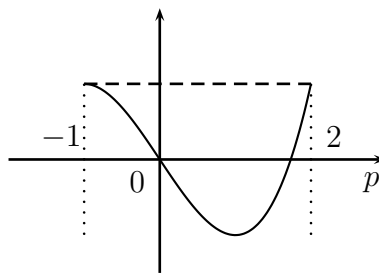


Abbildung 14

Es ist ein Segment nötig, dieses verläuft senkrecht zur p -Achse und wegen $f'(-1) = 0$ ist das Segment damit semitangential. Die Lösung hat also genau eine Welle, diese ist einfach degeneriert und besitzt den Anstieg

$$\nu = \frac{f(p_l) - f(p_r)}{p_l - p_r} = \frac{(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}) - (-4 + 3)}{-1 - 2} = -\frac{-1 - (-1)}{3} = 0 \quad (3.141)$$

Es ist mit $f'(p_l) = 0 = v > -4,5 = f'(p_r)$ die Lax-Entropie-Bedingung erfüllt. Analog zum Vorgehen bei (3.123) können wir auch hier die eigentliche Viskositätslösung $u(x, t) = \max[t - x, 2x + t]$ ermitteln. Die Lösung der Erhaltungsgleichung lautet

$$v(x, t) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases} \quad (3.142)$$

4 Verallgemeinerte i -Charakteristiken

4.1 Differentialinklusion

Die folgende kurze Erläuterung von Differentialinklusionen ist nötig um die Definition von verallgemeinerten i -Charakteristiken nach Dafermos zu verstehen. Definitionen und Beispiele stammen aus Kapitel 2 in [25].

Definition 9 (Mengenwertige Abbildungen)

Es seien X, Y nichtleere Mengen und es bezeichnet $\mathcal{P}(Y)$ die Potenzmenge von Y .

*Eine Abbildung $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\}$, welche jedem $x \in X$ eine Menge $F(x) \subseteq Y$ zuordnet, heißt **mengenwertige Abbildung**.*

*Eine **Wahl** f von F ist eine Funktion $f : X \rightarrow Y$ mit $f(x) \in F(x) \quad \forall x \in X$.*

Da die Potenzmenge auch einelementige Mengen umfasst, beinhaltet der Begriff der mengenwertigen Abbildung auch den herkömmlichen Funktionsbegriff, aber nur in jenem Sinne, dass einelementige Mengen mit ihrem Element selbst identifiziert werden, also $\{y\} \equiv y$ gilt.

Ein einfaches Beispiel ist die mengenwertige Signumfunktion.

Es sei $\text{Sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{P}([-1, 1])$ mit

$$\text{Sgn}(x) = \begin{cases} \{1\} & x > 0 \\ [-1, 1] & x = 0, \\ \{-1\} & x < 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

dann ist jede Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ a & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

eine Wahl von F , wobei $a \in [-1, 1]$ beliebig gewählt werden kann.

Mit mengenwertigen Abbildungen ergibt sich für uns auch eine Erweiterung

des Differentialgleichungsbegriffs – die Differentialinklusion. Es seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ und $F : X \rightarrow \mathcal{P}(Y) \setminus \emptyset$ sei mengenwertig, ferner sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $0 \in I$. Als Differentialinklusion bezeichnen wir das Problem:

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)), \quad t \in I, \quad x(0) = x_0 \quad (4.3)$$

Es ist nicht zu erwarten, dass eine Lösung von (4.3) überall differenzierbar ist, daher benötigen wir einen neuen Lösungsbegriff für Differentialinklusionen.

Definition 10 (Lösung einer Differentialinklusion)

Es seien obige Voraussetzungen gegeben. Eine Funktion $x : I \rightarrow X$ heißt Lösung von (4.3), wenn

1. $x(t)$ absolut stetig auf I ist,
2. $x(0) = x_0$,
3. $\dot{x}(t) \in F(x(t))$ für fast alle $t \in I$.

Eine Lösung von (4.3) muss also nur fast überall differenzierbar sein.

Definition 11 (absolut stetig)

*Eine auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierte reellwertige Funktion f heißt **absolut stetig**, falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für jede endliche Folge paarweise disjunkter Intervalle $[x_k, y_k] \subset I$, $k = 1, \dots, n$, $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$\sum_{k=1}^n |y_k - x_k| < \delta \quad (4.4)$$

gilt:

$$\sum_{k=1}^n |f(y_k) - f(x_k)| < \varepsilon \quad (4.5)$$

Jede absolut stetige Funktion ist gleichmäßig stetig und fast überall differenzierbar, sie besitzt eine schwache Ableitung. Für den weiteren Verlauf sei noch bemerkt, dass jede Lipschitz-stetige Funktion auch absolut stetig ist. Zu den Eigenschaften absolut stetiger Funktionen siehe etwa [30].

Wir betrachten ein Beispiel: (vgl. S. 11 in [25])

Es seien $I = [0, 2]$, $x(0) = 1$ und $F(x) = \text{Sgn}(-x)$, also

$$\dot{x}(t) \in F(x(t)) = \begin{cases} \{-1\} & x > 0 \\ [-1, 1] & x = 0, \\ \{1\} & x < 0 \end{cases}, \quad t \in [0, 2], \quad x(0) = 1. \quad (4.6)$$

Als erstes stellen wir fest, dass eine Lösung von (4.6) an ihren Nullstellen möglicherweise nicht differenzierbar ist. Wegen $F(x) \subseteq [-1, 1]$ gilt $\dot{x} \geq -1$ fast überall für eine Lösung $x(t)$, damit folgt

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \dot{x}(s) \, ds \geq 1 - \int_0^t 1 \, ds = 1 - t. \quad (4.7)$$

Für $t \in [0, 1)$ ist $x > 0$, damit also $\dot{x}(t) \in \{-1\}$ und deswegen gilt $x(t) = 1 - t$ für $t < 1$. Aus Stetigkeitsgründen folgt daraus sofort $x(1) = 0$, an diesem Punkt müssen wir nun eine Nichtdifferenzierbarkeit von x vermuten. Wir betrachten $\phi(\tau) := (x(\tau + 1))^2$ für $\tau \in [0, 1]$. Es ist $\phi(0) = (x(1))^2 = 0$ und

$$\phi'(\tau) = 2x(\tau + 1)\dot{x}(\tau + 1). \quad (4.8)$$

Für $x = 0$ folgt $\phi' = 0$. Aus $x > 0 \Rightarrow \dot{x} \in \{-1\}$ und $x < 0 \Rightarrow \dot{x} \in \{1\}$ schließt man $\phi'(\tau) = -2|x(\tau + 1)| = -2\sqrt{\phi(\tau)}$. Damit genügt ϕ also der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\phi'(\tau) = -2\sqrt{\phi(\tau)}, \quad \tau \in [0, 1], \quad \phi(0) = 0. \quad (4.9)$$

Diese Differentialgleichung ist nicht eindeutig lösbar. Neben der trivialen Lösung $\phi(\tau) \equiv 0$, liefert die Separationsmethode die weiteren möglichen Lösungen $\phi(\tau) = -\tau^2$ oder $\phi(\tau) = \tau^2$, je nachdem, ob wir den Term $\sqrt{\tau^2}$ als τ oder $-\tau$ auflösen. Die Interpretation $\phi(\tau) = -\tau^2 \leq 0$ erzeugt wegen $\phi(\tau) = (x(\tau + 1))^2 \geq 0$ einen Widerspruch für $\tau \neq 0$. Dagegen können wir aus $\phi(\tau) = \tau^2$ folgern, dass für $t \in [1, 2]$ entweder $x(t) = t - 1$ oder $x(t) = 1 - t$ gelten muss, beide Lösungsvorschläge stehen jedoch im Widerspruch zu (4.6).

Wir wählen als Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung also $\phi(\tau) \equiv 0$, in diesem Fall folgt $x(t) = 0$ für $t \in [1, 2]$ und man erhält zusammengefasst

$$x(t) = \begin{cases} 1 - t & t \in [0, 1] \\ 0 & t \in [1, 2] \end{cases} \quad (4.10)$$

als Lösung von (4.6).

4.2 i -Charakteristiken

Auf Seite 32 hatten wir erkannt, dass für Erhaltungsgleichungen nur ein sehr spezieller Teil der Charakteristiken wichtig ist. Im skalaren Fall interessiert uns nur die Lösung von $\dot{x} = f'(v)$, damit kennen wir bereits das Verhalten der Lösung einer Erhaltungsgleichung. Wir betrachten nun das Erhaltungssystem

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}(\vec{v})}{\partial x} = 0. \quad (4.11)$$

Hierbei ist $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m)$ der Vektor der m unbekanntenen Erhaltungsgrößen $v_k, k = 1, \dots, m$ mit $v_k = v_k(x, t) : \mathbb{R} \times [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion $\vec{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist die Flussfunktion. Für $m = 1$ soll $f'' > 0$ sein, die Flussfunktion ist also streng konkav. Wie in Abschnitt 2.1 erklärt, können wir dieses System in das quasilineare System

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + A(\vec{v}) \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = 0 \quad (4.12)$$

umwandeln, wobei $A(\vec{v}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ die Jacobi-Matrix von \vec{f} ist. Da (4.11) hyperbolisch ist, hat A nur reelle Eigenwerte $\lambda_i(\vec{v}), i = 1, \dots, m$.

Definition 12 (i -Charakteristik)

Eine i -**Charakteristik**, $i = 1, \dots, m$, des Systems (4.11) ist eine C^1 -Funktion $x = x(t)$, welche eine Integralkurve der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{x}_i(t) = \lambda_i(\vec{v}) \quad (4.13)$$

ist.

Ist (4.11) streng hyperbolisch, so gilt

$$\lambda_1(\vec{v}) < \dots < \lambda_m(\vec{v}). \quad (4.14)$$

Definition 13 (verallgemeinerte i -Charakteristik)

Eine **verallgemeinerte i -Charakteristik** für (4.11) im Zeitintervall $[t_1, t_2]$ ist eine Lipschitzfunktion $\xi : [t_1, t_2] \rightarrow (-\infty, \infty)$, welche folgende Differentialinklusion fast überall erfüllt:

$$\dot{\xi}(t) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \left[\operatorname{ess\,inf}_{x \in [\xi(t) - \varepsilon, \xi(t) + \varepsilon]} \lambda_i(\vec{v}(x, t)), \operatorname{ess\,sup}_{x \in [\xi(t) - \varepsilon, \xi(t) + \varepsilon]} \lambda_i(\vec{v}(x, t)) \right] \quad (4.15)$$

Für $m = 1$ fällt die Matrix A mit ihrem einzigen Eigenwert zusammen. Also liefert Definition 12 für $m = 1$ genau die von uns in (3.29) hergeleitete Differentialgleichung $\dot{x} = f'(v)$. Für die verallgemeinerte i -Charakteristik gilt dann

$$\dot{\xi}(t) \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \left[\operatorname{ess\,inf}_{x \in [\xi(t) - \varepsilon, \xi(t) + \varepsilon]} f'(v(x, t)), \operatorname{ess\,sup}_{x \in [\xi(t) - \varepsilon, \xi(t) + \varepsilon]} f'(v(x, t)) \right] \quad (4.16)$$

Um eine Vergleichbarkeit zu der in Kapitel 3 vorgestellten Methode zu gewährleisten werden wir im Weiteren den Fall $m = 1$ betrachten. Es ist klar, dass für eine stetige Lösung v von (4.11) die Differentialinklusion (4.16) mit der bekannten Differentialgleichung $\dot{x} = f'(v)$ zusammenfällt, denn dann gilt

$$\begin{aligned} & \bigcap_{\varepsilon > 0} \left[\operatorname{ess\,inf}_{x \in [\xi(t) - \varepsilon, \xi(t) + \varepsilon]} f'(v(x, t)), \operatorname{ess\,sup}_{x \in [\xi(t) - \varepsilon, \xi(t) + \varepsilon]} f'(v(x, t)) \right] \\ &= [f'(v(\xi, t)), f'(v(\xi, t))] = f'(v(\xi, t)). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Die verallgemeinerten i -Charakteristiken sind nur für den Fall einer Sprungunstetigkeit von den regulären i -Charakteristiken zu unterscheiden.

Aus der Theorie der Differentialinklusionen folgt, dass durch einen festen Punkt $(\tilde{x}, \tilde{t}) \in \mathbb{R} \times [0, \infty)$ mindestens zwei nicht notwendigerweise verschiedene verallgemeinerte i -Charakteristiken laufen, vergleiche [11, S.327]. Wir bezeichnen diese als die minimale Charakteristik ξ_{\min} und die maximale Cha-

rakteristik ξ_{\max} . Es ist $\xi_{\min}(t) \leq \xi_{\max}(t)$ für $t \in [0, \infty)$. Die Region zwischen ξ_{\min} und ξ_{\max} enthält die Menge aller Punkte (x, t) , die mit (\tilde{x}, \tilde{t}) durch eine zu v gehörende Charakteristik verbunden sein können. Neben klassischen i -Charakteristiken sind Stoßwellen, welche die Lax–Entropie–Bedingung erfüllen, Beispiele für verallgemeinerte i -Charakteristiken und wie Dafermos in [11] zeigt, sind dies sogar die einzigen beiden Erscheinungsformen für verallgemeinerte i -Charakteristiken. Denn obwohl Definition 13 für $\dot{\xi}$ scheinbar beliebige Werte aus dem beschriebenen Intervall zulässt, folgt aus dem Fakt, dass v eine schwache Lösung von (4.11) sein soll, dass sich ξ entweder mit klassischer charakteristischer Geschwindigkeit $\lambda_i(u)$ oder mit Stoßwellengeschwindigkeit ν bewegt.

Satz 5

Es sei ξ eine verallgemeinerte Charakteristik, definiert auf $[t_1, t_2]$. Für fast alle $t \in [t_1, t_2]$ gilt:

Ist $(\xi(t), t) \in \mathcal{C}$, dann ist $\dot{\xi} = \lambda_i(v)$, mit $v = v(\xi(t) \pm, t)$. Ist $(\xi(t), t) \in \mathcal{J}$, dann ist $\dot{\xi} = \nu$. Dabei ist ν die Geschwindigkeit der Stoßwelle, welche die Links- und rechtsseitigen Zustände $v_+ = v(\xi(t)+, t)$ und $v_- = v(\xi(t)-, t)$ miteinander verbindet. (siehe auch Seite 8ff)

Insbesondere genügt ν der Rankine–Hugoniot–Bedingung (2.11) und der Lax–Entropie–Bedingung (2.15).

Beweis: siehe Theorem 10.2.3 in [11, S.327] □

Als Konsequenz lässt sich (4.16) zu

$$\dot{\xi}(t) \in [f'(v(\xi(t)+, t)), f'(v(\xi(t)-, t))] \tag{4.18}$$

reduzieren und wir erhalten damit

$$\dot{\xi}(t) = \begin{cases} f'(v), & \text{für } v_+ = v_- \\ \frac{f(v_+) - f(v_-)}{v_+ - v_-}, & \text{für } v_+ < v_- \end{cases} \tag{4.19}$$

Die Formulierung der verallgemeinerten Charakteristiken umfasst somit alle wichtigen Aspekte der Erhaltungsgleichungen. Es lassen sich viele qualitative

Aussagen über eine zulässige Lösung einer Erhaltungsgleichung (4.11) treffen, siehe Kapitel 11 in [11].

Wir wollen uns die i -Charakteristiken an einem einfachen Beispiel anschauen. Zur besseren Vergleichbarkeit nehmen wir die ersten beiden Beispiele aus Abschnitt 3.4.1.

Wir betrachten die Burgersgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}v + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \frac{\partial}{\partial t}v + v \cdot \frac{\partial}{\partial x}v = 0 \quad (4.20)$$

mit konvexer Flussfunktion $f(v) = \frac{1}{2}v^2$ und dazu die Anfangsbedingungen

$$g_1(x) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \quad (4.21)$$

Es ist $f'(v) = v$ und somit lauten die verallgemeinerten i -Charakteristiken

$$\dot{\xi}(t) = \begin{cases} v, & \text{für } v_+ = v_- \\ \frac{1}{2}(v_+ + v_-), & \text{für } v_+ < v_- \end{cases} \quad (4.22)$$

Jede mögliche Unstetigkeit wird also durch die Bedingung (2.11) beschrieben. Die Lösung lautet nun sofort

$$v(x, t) = \frac{\partial}{\partial x}u(x, t) = \begin{cases} 2 & x < \frac{3}{2}t \\ 1 & x > \frac{3}{2}t \end{cases} \quad (4.23)$$

Dies entspricht genau der Lösung (3.125) aus dem letzten Kapitel.

Betrachten wir nun die Erhaltungsgleichung mit der Anfangsbedingung

$$g_2(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 2 & x > 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

so zeigt sich sofort der Unterschied zur Methode der singulären Charakteristiken. Die Lösung der Differentialinklusion (4.18) mit Startwert $x(0) = 0$

liefert den Verlauf der verallgemeinerten i -Charakteristiken im Kegel zwischen den Geraden $x = t$ und $x = 2t$, denn v ist entlang der i -Charakteristik konstant, so folgt wegen $f'(v) = v = v(x_0)$

$$\dot{\xi}(t) \in = [v(\xi(0)+, t), v(\xi(0)-, t)] = \begin{cases} \{1\} & \xi(0) < 0 \\ [1, 2] & \xi(0) = 0 \\ \{2\} & \xi(0) > 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

Die Lösung besitzt keine Stoßwelle, ist also stetig. Die verallgemeinerten i -Charakteristiken beschreiben somit auch das Auftreten von Verdünnungswellen.

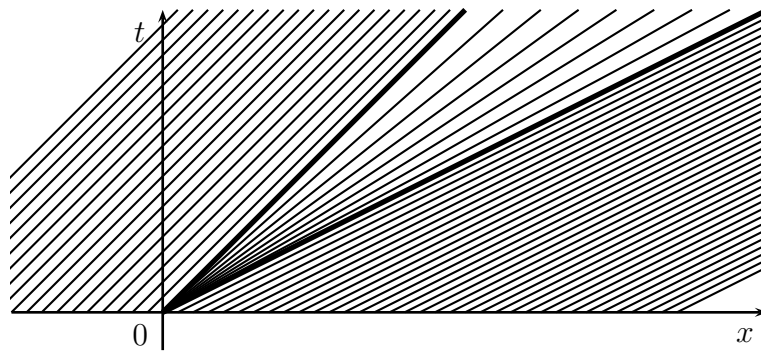


Abbildung 15: Charakteristiken der Burgersgleichung mit Anfangsbedingung (4.24), vergleiche auch Abbildung 10

Die Lösung

$$v(x, t) = \begin{cases} 1 & x < t \\ \frac{x}{t} & t \leq x \leq 2t \\ 2 & x > 2t \end{cases} \quad (4.26)$$

stimmt mit der Lösung aus Kapitel 3 überein, sie wurde jedoch im Gegensatz zu Kapitel 3 vollständig mit verallgemeinerten Charakteristiken hergeleitet.

5 Gegenüberstellung der Herangehensweisen

Melikyan erklärt eine sehr umfangreiche Lösungsmethode, welche für alle skalaren Differentialgleichungen erster Ordnung geeignet ist, die gesuchte Funktion darf dabei von beliebig vielen Variablen abhängen. Dafermos dagegen erklärt seine Lösungsmethode explizit für Erhaltungsgleichungen und lässt dafür mehrere gesuchte Funktionen zu, er ermöglicht somit ein praxisnäheres Anwenden seiner Methode. Häufig wird mehr als nur eine Erhaltungsgröße betrachtet, wie etwa bei den dreidimensionalen Euler-Gleichungen, bei welchen neben dem Impuls in allen Raumdimensionen auch Energie und Masse betrachtet werden.

Beide Herangehensweisen liefern für eine Erhaltungsgleichung eine Lösung, welche in Falle einer auftretenden Stoßwelle sowohl der Rankine-Hugoniot-Bedingung als auch der Lax-Entropie-Bedingung genügt. Dafermos musste die Forderungen nach einer konvexen Flussfunktion stellen, während Melikyan zwar grundsätzlich beliebige Flussfunktionen zulässt, aber im Fall einer degenerierten Stoßwelle Γ fordert, dass auf den singulären Seiten der Welle $\lim_{v \rightarrow \Gamma} f''(v) \neq 0$ sein soll. Damit ist Melikyans Methode auf deutlich mehr Aufgabenstellungen anwendbar.

Ein Unterschied zeigt sich beim Auftreten von Verdünnungswellen in der Lösung. Während die Differentialinklusion von Dafermos die Charakteristiken einer Verdünnungswelle umfasst, liefert Melikyan lediglich den Hinweis, dass an dieser Stelle der Lösung keine Unstetigkeit auftreten kann. Problematisch an Melikyans Methode ist, dass die Existenz der Viskositätslösung vorausgesetzt wird. Wir haben jedoch gesehen, dass dies keine selbstverständliche Annahme ist.

Umgekehrt liefert Melikyan im Fall der Stoßwelle deutlich differenziertere Beschreibungen über Art und Anzahl der Stoßwellen. Unstetigkeiten in den Anfangsbedingung einer Viskositätslösung können mehrere Stoßwellen verursachen. Wir konnten in Abschnitt 3.4 zeigen, dass bei Erhaltungsgleichungen aus jeder Unstetigkeit in den Anfangsdaten maximal eine Unstetigkeit in der Lösung hervorgehen kann.

Verallgemeinerte Charakteristiken nach Dafermos bestehen aus den regulären

Charakteristiken, ergänzt um die Rankine–Hugoniot–Bedingung, ausserdem erfüllt die Lösung die Lax–Entropie–Bedingung, so dass wir eine physikalisch zulässige Lösung erhalten.

Melikyan’s verallgemeinerte Charakteristiken bestehen aus regulären und singulären Charakteristiken, zusätzlich liefert sein Ansatz bei geeigneten Anfangsdaten eine eindeutige Lösung, welche ebenso unsere beiden Zulässigkeitsbedingungen erfüllt. Wir haben ausserdem gesehen, dass bei der skalaren Erhaltungsgleichung die singulären Charakteristiken mit den regulären Charakteristiken zusammenfallen.

Tatsächlich kann man für den Fall der skalaren Gleichung zeigen, dass beide Ansätze äquivalent sind. Subbotin führt in [33] den Begriff der *Minimax-Lösung* ein, dieser ist äquivalent zum Begriff der Viskositätslösung, vergleiche [33, S.30] und [28, S.57]. Dabei zeigt er insbesondere, dass Definition 4 äquivalent ist zur Existenz einer Differentialinklusion. Betrachten wir hierzu nun entsprechend unserem Vorgehen aus Kapitel 2 die Hamilton–Jacobi–Gleichung

$$F(\vec{y}, u, \vec{p}) = F(x, t, u, p, q) = q + f(p) = 0. \quad (5.1)$$

Ist u eine Viskositätslösung, so ist der Graph $\text{gr } u$ von u schwach invariant bezüglich einer Differentialinklusion

$$\left(\dot{x}(t), \dot{u}(t) \right) \in E(x(t), u(t), p) \subseteq \mathbb{R}^2, \quad (5.2)$$

mit gewissen Eigenschaften. Dabei bedeutet die *schwache Invarianz des Graphen*, dass für beliebige $(x_0, u_0) \in \text{gr } u = \{(x, u) \in \mathbb{R}^2 \mid u = u(x), x \in \Omega\}$ ein $\tau > 0$ und eine Lösung $(x(t), u(t))$ der Differentialinklusion existiert, so dass $x(0) = x_0$ und $u(0) = u_0$ und $(x(t), u(t)) \in \text{gr } u$ für $t \in [0, \tau]$. Mit Blick auf die Kapitel 3 und 4 lautet unsere Differentialinklusion

$$E(x, p) = \left\{ (\xi, \eta) \mid \xi \in [f'(p(x+)), f'(p(x-))]; \eta = \xi p - f(p) \right\}, \quad (5.3)$$

wobei die mengenwertige Abbildung $E(x, u, p) = E(x, p)$ folgende Eigen-

schaften³ haben muss:

1. Für alle $x, p \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist $E(x, p)$ konvex und kompakt in \mathbb{R}^2 .
2. Für festes p ist die Abbildung $x \mapsto E(x, p)$ oberhalbstetig.
3. Für alle $x, \rho \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ existiert ein p^* , so dass

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \min\{\xi\rho - \eta \mid (\xi, \eta) \in E(x, p^*)\} \\ &\geq \min\{\xi\rho - \eta \mid (\xi, \eta) \in E(x, p)\} \end{aligned} \tag{5.4}$$

für alle $p \in \mathbb{R}$ gilt.

Zum Beweis dieser Aussagen, siehe Theorem 4.3 in [33], dazu sei auf Abschnitt 2.5 beziehungsweise wegen der Hamilton–Jacobi–Gleichungsstruktur auch auf Abschnitt 3.5 in [33] verwiesen.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $E(x, p)$ gemäß (5.3) diese Eigenschaften erfüllt. Zur besseren Übersicht setzen wir $I(x) := [f'(p(x+)), f'(p(x-))]$.

1. Seien x, p fest, und $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2) \in E(x, p)$. Es ist $I(x)$ ein konvexes Intervall in \mathbb{R} , also gilt mit $\xi_1, \xi_2 \in I(x)$ auch $\lambda\xi_1 + (1 - \lambda)\xi_2 \in I(x)$ für $\lambda \in [0, 1]$. Mit $\eta_1 = \xi_1 p - f(p)$ und $\eta_2 = \xi_2 p - f(p)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \lambda\eta_1 + (1 - \lambda)\eta_2 &= \lambda(\xi_1 p - f(p)) + (1 - \lambda)(\xi_2 p - f(p)) \\ &= (\lambda\xi_1 + (1 - \lambda)\xi_2)p - f(p). \end{aligned} \tag{5.5}$$

Also ist $E(x, p)$ konvex.

Wir betrachten nun eine Folge $(\xi_k, \eta_k)_{k=1}^\infty \in E(x, p)$. Das bedeutet $(\xi_k)_{k=1}^\infty \in I(x)$ und $\eta_k = \xi_k p - f(p)$. Da $I(x)$ abgeschlossenes und beschränktes Intervall in \mathbb{R} ist, ist $I(x)$ kompakt, es existiert also eine konvergente Teilfolge $(\xi_{\tilde{k}})_{\tilde{k}=1}^\infty \subseteq (\xi_k)_{k=1}^\infty$ in $I(x)$. Zu jedem $\xi_{\tilde{k}}$ gehört ein $\eta_{\tilde{k}} = \xi_{\tilde{k}} p - f(p)$, also existiert eine konvergente Teilfolge $(\xi_{\tilde{k}}, \eta_{\tilde{k}})_{\tilde{k}=1}^\infty \in E(x, p)$.

³Dies ist keine vollständige Wiedergabe der von Subbotin geforderten Eigenschaften. Da aber $F(x, t, u, p, q) = q + f(p)$ nur von p und q abhängt und auch die von uns zu betrachtende mengenwertige Abbildung $E(x, p)$ weder von q , noch von t oder u abhängt, vereinfachen sich einige Eigenschaften oder sind trivialerweise erfüllt. Für Genaueres sei auf [33] verwiesen.

2. Die Abbildung $x \mapsto E(x, p)$ ist oberhalbstetig, genau dann wenn

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} E(x, p) \subseteq E(x_0, p) \quad (5.6)$$

gilt, vergleiche [33, S.266f]. Damit reduziert sich die Frage nach der Oberhalbstetigkeit von $E(x, p)$, auf die Frage, ob $\limsup_{x \rightarrow x_0} I(x) \subseteq I(x_0)$ gilt, wegen der Stetigkeit von f ergibt sich jedoch sofort

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} [f'(p(x+)), f'(p(x-))] = [f'(p(x_0+)), f'(p(x_0-))], \quad (5.7)$$

die Oberhalbstetigkeit ist also gezeigt.

3. Für $(\xi, \eta) \in E(x, p)$ ist $\eta = \xi p - f(p)$, also gilt $\xi \rho - \eta = \xi(\rho - p) + f(p)$ für alle $\rho \in \mathbb{R}$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und $\rho \in \mathbb{R}$ ist mit $p^* = \rho$

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \min\{f(\rho) \mid (\xi, \eta) \in E(x, p^*)\} \\ &= \min\{\xi(\rho - p^*) + f(p^*) \mid (\xi, \eta) \in E(x, p^*)\}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Es ist

$$\begin{aligned} &\max_{p \in \mathbb{R}} \min\{\xi(\rho - p) + f(p) \mid (\xi, \eta) \in E(x, p)\} \\ &\geq \min\{\xi(\rho - p) + f(p) \mid (\xi, \eta) \in E(x, p^*)\} = f(\rho). \end{aligned} \quad (5.9)$$

und mit $(\xi, \eta) \in E(x, p) \cap E(x, \rho)$ gilt gleichzeitig $\eta = \xi p - f(p)$ und $\eta = \xi \rho - f(\rho)$. Damit folgt $\xi(\rho - p) = f(\rho) - f(p)$ und so ist $\xi(\rho - p) + f(p) = f(\rho)$. Damit folgern wir

$$\begin{aligned} &\max_{p \in \mathbb{R}} \min\{\xi(\rho - p) + f(p) \mid (\xi, \eta) \in E(x, p)\} \\ &= \max_{p \in \mathbb{R}} \min\{\xi(\rho - p) + f(p) \mid (\xi, \eta) \in E(x, p) \cap E(x, \rho)\} \\ &\leq \max_{p \in \mathbb{R}} \{\xi(\rho - p) + f(p) \mid (\xi, \eta) \in E(x, p) \cap E(x, \rho)\} \\ &= f(\rho). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Somit ist nun

$$\begin{aligned} f(\rho) &= \max_{p \in \mathbb{R}} \min\{\xi(\rho - p) + f(p) \mid (\xi, \eta) \in E(x, p)\} \\ &\geq \min\{\xi\rho - \eta \mid (\xi, \eta) \in E(x, p)\}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Wir haben (5.4) gezeigt.

Ist also u eine Viskositätslösung von $\partial_t u + f(\partial_x u) = 0$, so erfüllt die projizierte Charakteristik die Differentialinklusion

$$\dot{x} \in [f'(u_x(x+)), f'(u_x(x-))]. \quad (5.12)$$

Mit $u_x = v$ gilt daher für die projizierte Charakteristik der entsprechenden Erhaltungsgleichung $\partial_t v + \partial_x f(v) = 0$ die Differentialinklusion

$$\dot{x} \in [f'(v(x+)), f'(v(x-))]. \quad (5.13)$$

Um umgekehrt von der i -Charakteristik (5.12) der Erhaltungsgleichung zur Viskositätslösung von $\partial_t u + f(\partial_x u) = 0$ zu gelangen, benötigen wir die zusätzliche Bedingung $\dot{u} = pf'(p) - f(p)$, welche aber schon durch die regulären Charakteristiken der Gleichung geliefert wird.

Wir können also trotz der Unterschiede beider Lösungsansätze für den Fall der skalaren Erhaltungsgleichung mit konvexer Flussfunktion die verallgemeinerten i -Charakteristiken nach Dafermos als äquivalent zu den verallgemeinerten Charakteristiken nach Dafermos betrachten.

6 Zusammenfassung

Wir haben in dieser Arbeit zwei grundsätzlich verschiedene Methoden zur Behandlung von hyperbolischen Erhaltungsgleichungen mit verallgemeinerten Charakteristiken kennengelernt.

Die erste Methode nutzt die Hamilton'sche Betrachtungsweise einer Differentialgleichung mit Nebenbedingung, die Charakteristiken der so ermittelten singulären Hamiltonfunktion heißen singuläre Charakteristiken und ergänzen die klassischen Charakteristiken des betrachteten Problems. Klassische und singuläre Charakteristiken bilden die verallgemeinerten Charakteristiken des betrachteten Problems.

Hierzu haben wir den Begriff der Viskositätslösung definiert und einen Weg aufgezeigt, wie man das Auffinden einer unstetigen Lösung für eine Erhaltungsgleichung auf das Auffinden einer stetigen Lösung für eine passende Hamilton–Jacobi–Gleichung mit identischen Charakteristiken zurückführt. Wir haben dabei die möglichen Arten von Unstetigkeiten bei Erhaltungsgleichungen klassifiziert und untersucht und die singulären Charakteristiken an ihnen berechnet. Insbesondere haben wir gezeigt, dass bei hyperbolischen Erhaltungsgleichungen die singulären Charakteristiken mit den klassischen Charakteristiken übereinstimmen und mit der Methode der singulären Charakteristiken eine physikalisch sinnvolle Lösung ermittelt wird, welche sowohl die Rankine–Hugoniot–Bedingung als auch die Lax–Entropie–Bedingung erfüllt.

Die zweite betrachtete Methode definiert dagegen eine Differentialinklusion als Verallgemeinerung der klassischen Charakteristiken, die Lösungen dieser Inklusion wurden verallgemeinerte i -Charakteristiken genannt. Die so ermittelte Lösung erfüllt ebenso die Rankine–Hugoniot–Bedingung und die Lax–Bedingung. Es hat sich auch gezeigt, dass die zweite Methode das Auftreten von Verdünnungswellen besser modelliert.

Wir haben gezeigt, dass beide Lösungsmethoden eine passende Beschreibung für Lösungen mit Stoßwellen liefern und im Falle der skalaren Erhaltungsgleichung zu identischen Lösungen führen.

Literatur

- [1] AMANN, Herbert ; ESCHER, Joachim: *Analysis I*. Berlin : Birkhäuser, 2006. – 3. Auflage
- [2] ARNOL'D, Vladimir I.: *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. New York : Springer, 1988. – 2.Aufl.
- [3] ATHREYA, Krishna B. ; LAHIRI, Soumendra N.: *Measure theory and probability theory*. Berlin : Springer, 2006
- [4] BIANCHINI, Stefano ; BRESSAN, Alberto: Vanishing Viscosity Solutions of Nonlinear Hyperbolic Systems. In: *ArXiv Mathematics e-prints* (2001). – arXiv:math/0111321v1 [math.AP]
- [5] BRESSAN, Alberto: *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. New York : Oxford University Press, 2000
- [6] COURANT, Richard ; HILBERT, David: *Methoden der Mathematischen Physik II*. Berlin : Springer, 1968
- [7] CRANDELL, Michael G. ; EVANS, Lawrence C. ; LIONS, Pierre-Louis: Some Properties of Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi Equations. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 282 (1984), Nr. 2, S. 487–502
- [8] CRANDELL, Michael G. ; LIONS, Pierre-Louis: Viscosity Solutions of Hamilton–Jacobi Equations. In: *Transactions of the American Mathematical Society* 277 (1983), Nr. 1, S. 1–42
- [9] DAFERMOS, Constantine M.: Solution of the Riemann problem for a class of hyperbolic systems of conservation laws by the viscosity method. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 52 (1973), Nr. 1, S. 1–9
- [10] DAFERMOS, Constantine M.: Generalized Characteristics in Hyperbolic Systems of Conservations Laws. In: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 107 (1989), Nr. 2, S. 127–155

- [11] DAFERMOS, Constantine M.: *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*. Berlin : Springer, 2010
- [12] DELGADO, Manuel: The Lagrange-Charpit Method. In: *SIAM Review* 39 (1997), Nr. 2, S. 298–304
- [13] ECK, Christof ; GARCKE, Harald ; KNABNER, Peter: *Mathematische Modellierung*. Berlin : Springer, 2008
- [14] EVANS, Lawrence C.: On solving certain nonlinear partial differential equations by accretive operator methods. In: *Israel Journal of Mathematics* 36 (1980), Nr. 3-4, S. 225–247
- [15] EVANS, Lawrence C.: *Partial Differential Equations*. Providence, R.I. : American Mathematical Society, 2002. – Reprint mit Korrekturen
- [16] FEISTAUER, Miloslav ; FELCMAN, Jiří; STRAŠKRABA, Ivan: *Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow*. Oxford : Oxford University Press, 2003
- [17] FORSTER, Otto: *Analysis 2*. Wiesbaden : Vieweg+Teubner, 2008
- [18] FRIEDMAN, Avner: The Cauchy problem for first order partial differential equations. In: *Indiana University Mathematics Journal* 23 (1974), S. 27–40
- [19] HOPF, Eberhard: The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$. In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 3 (1950), Nr. 3, S. 201–230
- [20] ISAACS, Rufus: *Differential Games: A Mathematical Theory with Applications to Warfare and Pursuit, Control and Optimization*. Mineola : Dover Publications, 1999
- [21] JOHN, Fritz: *Partial Differential Equations*. Berlin : Springer, 2005
- [22] KRUZHKOV, Stanislav N.: Generalized solutions of nonlinear equations of the first order with several variables I. In: *Mat. Sbornik* 70(122) (1966), S. 394–415. – auf Russisch

- [23] KRUZHKOVA, Stanislav N.: Generalized solutions of nonlinear equations of the first order with several variables II. In: *Math. USSR-Sbornik* 1 (1967), Nr. 1, S. 93–116
- [24] KRUZHKOVA, Stanislav N. ; GORICKIJ, Andreij J. ; CHECHKIN, Gregorij A.: *Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung*. Moskau : Verlag der Moskauer staatlichen Universität, 1999. – auf Russisch
- [25] KUNZE, Markus: *Non-Smooth Dynamical Systems*. Berlin : Springer, 2000
- [26] LAX, Peter D.: Hyperbolic systems of conservation laws II. In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 10 (1957), Nr. 4, S. 537–566
- [27] LAX, Peter D.: *Selected papers I*. Berlin : Springer, 2005
- [28] MELIKYAN, Arik A.: *Generalized Characteristics of First Order PDEs*. Boston : Birkhäuser, 1998
- [29] MELIKYAN, Arik A.: Singular Characteristics of First Order PDEs in Optimal Control and Differential Games. In: *Journal of Mathematical Sciences* 103 (2001), Nr. 6, S. 745–755
- [30] ROYDEN, Halsey L.: *Real Analysis*. Englewood Cliffs : Prentice Hall, 1988. – 3rd Edition
- [31] SMOLLER, Joel: *Shock Waves and Reaction-diffusion Equations*. New York : Springer, 1994
- [32] STRAUSS, Walter A.: *Partielle Differentialgleichungen*. Braunschweig : Vieweg, 1995
- [33] SUBBOTIN, Andreï I.: *Generalized Solutions of First-Order PDEs*. Boston : Birkhäuser, 1995
- [34] VARIAN, Hal R.: *Microeconomic Analysis*. New York : W.W. Norton and Company, 1992. – Third Edition

Selbstständigkeitserklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe, insbesondere sind wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet. Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandlung auch nachträglich zur Aberkennung des Abschlusses führen kann.

Leipzig, den 24. Mai 2011

Matthias Schenk