Universität Leipzig

Fakultät für Mathematik und Informatik

Mathematisches Institut

Modellunabhängige Bewertung von Optionen mithilfe des optimalen Transports

Diplomarbeit

vorgelegt durch:

Florian Schleu

Diplom-Wirtschaftsmathematik

Betreuer Junprof. Dr. Michał Barski

Mathematisches Institut

Universität Lepizig

Leipzig, November 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Möchte man den fairen Preis einer Option ermitteln, ist der normale Weg ein Modell zu entwickeln und damit den Preis der Option zu bestimmen. Zu nennen sind dort das Black-Scholes Modell oder das Cox-Ross-Rubinstein Modell. Da verschiedene Modelle meistens auch verschiedene Preise liefern, bleibt die Frage ob es eine allgemeingültige Preisgrenze gibt, die unter möglichst vielen Modellen gültig ist.
Das untersucht die vorliegende Arbeit. Dabei werden die Arbeitsblätter [ABPS13] und [BHLP13] untersucht und ausgearbeitet. Es werden Superreplikation Resultate aufgestellt, die obere Preisschranken für eine zu bewertende Option liefern.
Dabei werden zwei Ansätze betrachtet. Erstens den klassischen Ansatz über Aufstellung des Fundamentalen Theorems der Optionspreistheorie, welches das Superreplikation Theorem als Folgerung hat. Als zweiter Ansatz dient der optimale Transport. Dabei wird das Dualitätstheorem als ein Superreplikation Resultat interpretiert.

Zu Beginn werden wir den klassischen Ansatz verfolgen. [ABPS13] folgend werden wir eine modellunabhängige Version des Fundamentalen Theorems der Optionspreistheorie (Theorem 2.5) aufstellen. Dies stellt die Äquivalenz zwischen einem arbitragefreien Markt und der Existenz eines Martingalmaßes bereit. Als Folgerung hat es ein Superreplikation Resultat (Theorem 2.16), welches eine obere Preisgrenze einer Option liefert. Dabei wird eine semistatische Strategie, bestehend aus Optionen und einer Handelstrategie auf ein riskantes Asset, betrachtet, welche die Option superrepliziert. Als Hilfsmittel brauchen wir hierfür eine superlinear wachsende Option. In einem weiteren Resultat werden diese durch eine Familie von Optionen mit wachsenden Strikes ersetzen. Und darauf aufbauend werden wir ein Resultat angeben bei dem die Verteilung des Assets zum Endzeitpunkt bekannt ist.

In Abschnitt 3 werden wir mithilfe von [Vil09] und [AG13] eine Einführung in die optimale Transporttheorie geben. Dabei werden wir den Begriff der Kopplung definieren, womit wir das Transportproblem nach Kantorovich aufstellen. Anschließend werden wir das Konzept der zyklischen Monotonie anführen. Ziel ist schlussendlich das Dualitätstheorem nach Kantorovich (Theorem 3.16). Anschließend werden wir die Verbindung zur Bewertung von Optionen ziehen, indem wir einige Voraussetzungen abändern.

Im anschließenden Abschnitt 4 werden wir [BHLP13] folgend das Dualitätstheorem

(Theorem 4.1) benutzen, um eine exotische Option zu bewerten. Wir stellen das angepasste primale Problem vor, welches die untere Preisgrenze der Option liefert, indem über alle zulässigen Martingalmaße minimiert wird. Das duale Problem maximiert den Preis einer Strategie, welche die Option subrepliziert. Dabei wird wieder eine semistatische Strategie betrachtet. Die obere Preisgrenze erhalten wir durch ein anschließendes Korollar.

Im abschließenden Abschnitt 5 werden wir Beispiele bearbeiten. Einerseits ein konstruiertes analytisches Beispiel. Hierbei wird das Hauptresultat aus Abschnitt 4 auf eine Long Straddle Option und ein bestimmtes Modell angewandt. Andererseits behandeln wir ein Gegenbeispiel. Dieses zeigt, dass im Allgemeinen das duale Problem, im Fall der Optionsbewertung, keine exakte Lösung hat.

2 klassischer Ansatz

Das Ziel in diesem ersten Abschnitt ist einige Superreplikation Resultate herzuleiten. Wir werden noch den Weg der klassischen Finanzmathematik gehen. Im Detail heißt das, dass wir das FTAP angeben werden, welches die Äquivalenz zwischen der Abwesenheit von Arbitragemöglichkeiten und der Existenz eines Martingalmaßes beweist.
Als Folgerung des FTAP werden wir ein Superreplikation Resultat angeben, welches eine Preisspanne einer Option liefert, in dem eine superreplizierende Strategie betrachtet wird. Im Gegensatz zu der klassischen gehen wir in der modellunabhängigen Finanzmathematik nicht von einem gegeben Martingalmaß aus, welches einem Modell entspricht, sondern lassen die Menge der Martingalmaße so allgemein wie möglich. Dadurch können die Preise nur in der gewissen Spanne berechnet werden.
Außerdem werden wir Korollare angeben, welche dieses Resultat erweitern.

2.1 Rahmenbedingungen

Wir betrachten einen diskreten Zeitrahmen mit T Zeitpunkten und ein riskantes Asset[1] $S = (S_t)_{t=0}^T$, wobei $S_0 \in \mathbb{R}$ den Preis in $t = 0$ bezeichnet. $S : \mathbb{R}_+^T \to \mathbb{R}$ wird dabei durch $S_t(x_1, ..., x_T) = x_t$ gebildet.
Außerdem benötigen wir eine risikolose Anlange $B = (B_t)_{t=0}^T$, welche wir der Einfachheit halber zu $B_t \equiv 1$ normieren. Mit diesen Bedingungen ermöglichen wir die Wahl jedes Modells, da jeder nichtnegative stochastische Prozess $S = (S_t)_{t=0}^T$ durch die Wahl des passenden Maßes realisiert werden kann.
Sei I eine beliebige Indexmenge und seien $\varphi_i : \mathbb{R}_+^T \to \mathbb{R}$, $i \in I$ die Auszahlungsfunktionen von Optionen, die von dem Pfad von S abhängen und zum Zeitpunkt $t = 0$ auf dem Finanzmarkt gekauft werden können. Außerdem bezeichne φ_i^0 ihren Preis.
Definiere eine Familie $\tilde{\varphi}_i,\ i \in I$ durch $\tilde{\varphi}_i := \varphi_i - \varphi_i^0$. Nun hat jede Option $\tilde{\varphi}_i,\ i \in I$ den Preis $\tilde{\varphi}_i^0 = 0$. Da es für unsere späteren Überlegungen keinen Unterschied macht, ob wir die Familie $\varphi_i\ i \in I$ oder $\tilde{\varphi}_i,\ i \in I$ betrachten, können wir o.B.d.A. annehmen, dass $\varphi_i^0 = 0$ gilt.

Aus der klassischen Finanzmathematik bzw. unter einem bestimmten Modell mit Martingalmaß $\mathbb{Q}$, ist bekannt, dass der Erwartungswert einer Option φ unter $\mathbb{Q}$ kleiner oder gleich als deren Preis ist, d.h. $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\varphi) \leq \varphi^0$.

[1] Am häufigsten werden Aktien oder ein Aktienindex betrachtet.

Hat diese Option einen Preis $\varphi^0 = 0$, dann gilt somit

$$\int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi(x)\, d\mathbb{Q}(x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\varphi(S)\right) \leq \varphi^0 = 0$$

Wir benötigen für unsere weiteren Betrachtungen Martingalmaße, die diese Eigenschaft erfüllen.
Bezeichne $\mathcal{P}(\mathbb{R}_+^T)$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}_+^T$.

Definition 2.1 (zulässige Wahrscheinlichkeitsmaße). *Die Menge der zulässigen Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}_+^T$ wird defniert durch*

$$\mathcal{P}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}} := \left\{ \pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+^T) \ : \ \int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi_i(x)\, d\pi(x) \leq 0,\ i \in I \right\}.$$

Die Menge $\mathcal{M}$ aller Martingalmaße auf $\mathbb{R}_+^T$, besteht aus allen Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}_+^T$, unter denen der Preisprozess ein endliches erstes Moment hat und ein Martingal in seiner natürlichen Filtration ist.

Definition 2.2 (zulässige Martingalmaße). *Die Menge der zulässigen Martingalmaße auf $\mathbb{R}_+^T$ wird definiert durch*

$$\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}} := \mathcal{P}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}} \cap \mathcal{M}.$$

Bevor wir das FTAP aufstellen, benötigen wir noch die Definition einer Handelsstrategie, sowie eine passende Superreplikation Strategie, um damit Arbitrage zu definieren.

Definition 2.3 (Handelsstrategie). *Eine Familie $\Delta = (\Delta_t)_{t=0}^{T-1}$ von Borel messbaren Funktionen $\Delta_t : \mathbb{R}_+^t \to \mathbb{R},\ t = 0, ..., T-1$, heißt Handelsstrategie. Die Menge aller Handelsstrategien wird mit $\mathcal{H}$ bezeichnet.*
Außerdem bezeichnen wir das stochastische Integral

$$(\Delta \bullet x)_T := \sum_{t=0}^{T-1} \Delta_t(x_1, ..., x_t)(x_{t+1} - x_t)$$

als Handelsgewinn der Handelsstrategie Δ.

Zur Veranschaulichung ist der Handelsgewinn $(\Delta \bullet S)_T$ der Gewinn oder Verlust, wenn das Asset S mit der Handelstrategie Δ gehandelt wird. Genauer gesagt, wenn zu jedem Zeitpunkt t Anteile an S gehalten werden, die durch Δ_t bestimmt werden.

Wenn ein Anleger nun zum Zeitpunkt $t = 0$ Optionen auf ein Asset S mit Fälligkeit

T kauft und dazu mit einer Handelstrategie das selbe Asset handelt, bezeichnen wir das als *semistatische Strategie*[2]. Die Strategie ist dabei selbstfinanzierend, indem Transaktionen zwischen der risikolosen Anlage B und der Strategie zugelassen werden.

Für Optionen φ_{i_n}, $n = 1, ..., N$ und Handelsstrategie $\Delta \in \mathcal{H}$ ist $f : \mathbb{R}_+^T \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x_1, ..., x_T) := \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_{i_n}(x_1, ..., x_T) + (\Delta \bullet x)_T,$$

die Auszahlung dieser semistatischen Strategie.

Mit solchen Strategien möchten wir nun die Definition von Arbitrage angeben.

Definition 2.4 (Arbitrage). *Es existiert modellunabhängie Arbitrage, falls eine Handelsstrategie $\Delta \in \mathcal{H}$, Koeffizienten $a_1, ..., a_N \geq 0$ und Indizes $i_1, ..., i_N \in I$ existieren, so dass*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_{i_n}(x) + (\Delta \bullet x)_T > 0$$

für alle $x^3 \in \mathbb{R}_+^T$.

2.2 Fundamentales Theorem der Optionspreistheorie

Um das Fundamentale Theorem der Optionspreistheorie (auch: Fundamental Theorem of Asset Pricing, kurz: FTAP) aufstellen zu können, brauchen wir die Existenz einer speziellen Option φ_0. Sei dazu $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine konvexe superlineare[4] Funktion, d.h. $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \infty$. Dann defniere φ_0 durch $\varphi_0(S) = g(S_T)$.

φ_0 ist somit eine Option mit superlinear wachsender Auszahlung, die nur von dem Endwert S_T abhängt. Diese Option garantiert im Beweis, dass die Menge $\mathcal{P}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}}$ kompakt ist.

Theorem 2.5 (FTAP). *Seien φ_i, $i \in I$ stetige Funktionen auf $\mathbb{R}_+^T$ und sei $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine konvexe superlineare Funktion. Weiter sei 0 in I enthalten und φ_0 der Form $\varphi_0(S) = g(S_T)$. Außerdem sollen folgende Annahmen gelten:*

[2] vgl. [DH07, Ch. 3]

[3] Im Folgenden werden wir x sowohl für $(x_1, ..., x_T) \in \mathbb{R}^T$, als auch für $x \in \mathbb{R}$ schreiben. An einigen Stellen, wie Definitionen, werden wir Ausnahmen machen.

[4] Eine Funktion, die stärker als linear wächst.

$$\lim_{||x||\to\infty} \frac{\varphi_i(x)^+}{m(x)} < \infty, \tag{2.1}$$

$$\lim_{||x||\to\infty} \frac{\varphi_i(x)^-}{m(x)} = 0, \tag{2.2}$$

mit $m(x_1, ..., x_T) = \sum_{t=1}^{T} g(x_t)$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es existiert keine modellunabhängie Arbitrage.

(ii) $\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}} \neq \emptyset$.

Die Bedingungen (2.1) und (2.2) können zum Beispiel durch eine Familie europäischer Optionen erfüllt werden. Allerdings gilt das nicht für die Option φ_0. Aus praktischer Sicht ist es schwer eine solche Option zu finden. Wir werden dedhalb auch in Abschnitt 2.4 diese Einschränkung verwerfen und φ_0 durch europäische Call Optionen ersetzen.

Wir benutzen Handelsstrategien, die im Allgemeinen nicht beschränkt sind, woraus folgt, dass $(\Delta \bullet S)$ nicht integrierbar ist. Mit der folgenden Bemerkung 2.6 können wir dies vorerst umgehen und die Richtung $(ii) \Rightarrow (i)$ von Theorem 2.5 beweisen.
Zuvor möchten wir noch zeigen, wieso es nicht ausreicht beschränkte Handelsstrategien zu verwenden.
Für jede konvexe Funktion $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ und $x_t, x_{t+1} \in \mathbb{R}_+$ haben wir die Ungleichung

$$g(x_t) + g'(x_t)(x_{t+1} - x_t) \leq g(x_{t+1}). \tag{2.3}$$

Die Ungleichheit gibt an, dass die erste Ableitung kleiner oder gleich dem Differenzenquotienten ist. An den Punkten, an denen g keine Ableitung besitzt, wird g' durch seine rechtsseitige Ableitung definiert.
In der Finanzmathematik kann das als *calendar spread* interpretiert werden. Man sichert eine Option ab, indem man die gleiche Option mit anderem Fälligkeitsdatum kauft oder verkauft. Die Optionen unterscheiden sich nur in der Laufzeit.
In unserem Fall heißt das, dass man eine konvexe Option auf S_t superreplizieren kann, in dem man die gleiche Option auf S_{t+1} kauft oder verkauft.
Um diesen Umstand in unsere Überlegungen mit aufnehmen zu können, muss $\Delta_t(x_1, ..., x_t) := g'(x_t)$ in $\mathcal{H}$ liegen und g' ist im Allgemeinen nicht beschränkt auf $\mathbb{R}$.

Bemerkung 2.6. Für jedes $\Delta \in \mathcal{H}$ und jedes $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$ ist der Prozess $M = (M_t)_{t=0}^{T}$, der durch

$$M_0 := 0, \quad M_t := (\Delta \bullet x)_t, \ t = 1, ..., T$$

definiert ist, eine diskrete Martingal Transformation[5]. Daher ist M auch ein lokales Martingal[6].
Gilt weiterhin

$$\int_{\mathbb{R}_+^T} (\Delta \bullet x)_T^+ \, d\mathbb{Q}(x) < \infty \text{ oder } \int_{\mathbb{R}_+^T} (\Delta \bullet x)_T^- \, d\mathbb{Q}(x) < \infty,$$

dann ist M ein echtes Martingal[7].

Für den Beweis von Theorem 2.5 benötigen wir außerdem noch ein Lemma.

Lemma 2.7. *Es seien $X : \mathbb{R}_+^T \to \mathbb{R}$ und $Y : \mathbb{R}_+^T \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen und $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$. Außerdem sei X integrierbar bezüglich $\mathbb{Q}$, d.h. $\int_{\mathbb{R}_+^T} |X| \, d\mathbb{Q}(x) < \infty$ und es gelte $X + Y \geq 0$.
Dann ist auch Y^- intergierbar bezüglich $\mathbb{Q}$, d.h. $\int_{\mathbb{R}_+^T} Y^- \, d\mathbb{Q}(x) < \infty$.*

Beweis. Seien $X, Y : \mathbb{R}_+^T \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen und $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$. Sei $\int_{\mathbb{R}_+^T} |X| \, d\mathbb{Q}(x) < \infty$ und $X + Y \geq 0$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}_+^T} Y^- \, d\mathbb{Q}(x) = \int_{\mathbb{R}_+^T} \left(Y^- \mathbb{1}_{\{Y<0\}} + \underbrace{Y^- \mathbb{1}_{\{Y \geq 0\}}}_{=0} \right) d\mathbb{Q}(x) = \int_{\mathbb{R}_+^T} Y^- \mathbb{1}_{\{Y<0\}} \, d\mathbb{Q}(x).$$

Auf $\{Y < 0\}$ gilt

$$0 \leq X + Y = X + (\underset{=0}{Y^+} - Y^-) = X - Y^-$$

und äquivalent dazu $X \geq Y^-$.
Zusammen folgt somit

$$\int_{\mathbb{R}_+^T} Y^- \, d\mathbb{Q}(x) = \int_{\mathbb{R}_+^T} Y^- \mathbb{1}_{\{Y<0\}} \, d\mathbb{Q}(x) \leq \int_{\mathbb{R}_+^T} X \mathbb{1}_{\{Y<0\}} \, d\mathbb{Q}(x) \leq \int_{\mathbb{R}_+^T} |X| \, d\mathbb{Q}(x) < \infty.$$

□

Beweis Theorem 2.5, (ii) ⇒ (i). Wir beweisen diese Richtung indirekt. Sei $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i \in I}}$. Angenommen es existiere modellunabhängie Arbitrage, d.h. es existieren

[5] vgl. [JS98, Def. 5]
[6] vgl. [JS98, Theorem 1]
[7] vgl. [JS98, Theorem 2]

$a_n \geq 0$ und $\Delta \in \mathcal{H}$, sodass

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_{i_n}(x) + (\Delta \bullet x)_T > 0.$$

Die Funktionen φ_{i_n} sind nach Voraussetzung integrierbar. Deshalb können wir mit $X = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_{i_n}$ und $Y = (\Delta \bullet x)_T$ Lemma 2.7 anwenden und erhalten, dass $(\Delta \bullet x)_T^-$ integrierbar ist. Wegen $\int_{\mathbb{R}_+^T} (\Delta \bullet x)_T^- \, d\mathbb{Q}(x) < \infty$ ist $(\Delta \bullet x)_T$ nach Bemerkung 2.6 somit ein Martingal.
Daraus folgt $\int_{\mathbb{R}_+^T} (\Delta \bullet x)_T \, d\mathbb{Q}(x) = 0$.[8]
Wegen $f > 0$ gilt auch $\int_{\mathbb{R}_+^T} f(x) \, d\mathbb{Q}(x) > 0$.
Daraus folgt, dass

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \left(\int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi_{i_n}(x) \, d\mathbb{Q}(x) \right) > 0. \tag{2.4}$$

Nach Voraussetzung ist aber $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i \in I}}$ und damit gilt:

$$\sum_{n=1}^{N} \underbrace{a_n}_{\geq 0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi_{i_n}(x) \, d\mathbb{Q}(x)}_{\leq 0} \leq 0. \tag{2.5}$$

Die Gleichungen (2.4) und (2.5) führen zum Widerspruch. Somit gibt es keine modellunabhängige Arbitrage.

□

Die Richtung $ii) \Rightarrow i)$ des Beweises von Theorem 2.5 konnte mithilfe Bemerkung 2.6 bewiesen werden, ohne dass $(\Delta \bullet S)$ im Allgemeinen integrierbar ist. Das geht in der Rückrichtung nicht. Dort sind wir auf beschränkte Handelsstrategien angewiesen, so dass $(\Delta \bullet S)$ integrierbar ist.
Daher beweisen wir die Richtung $i) \Rightarrow ii)$, in dem wir uns auf eine Teilmenge $\mathcal{H}_g$ von $\mathcal{H}$ beschränken, die aus Handelsstrategien Δ besteht, so dass $(\Delta \bullet S)$ $\mathbb{Q}$-integrierbar für alle $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i \in I}}$ ist.

Definition 2.8 (g-zulässige Handelsstratgie). *Sei $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine konvexe, superlineare Funktion. Eine Handelsstrategie $\Delta = (\Delta_t)_{t=0}^{T-1}$ heißt g-zulässig, wenn $\Delta_t : \mathbb{R}_+^t \to \mathbb{R}$ für alle $t = 0, ..., T-1$ stetig ist und ein $c \in \mathbb{R}_+$ existiert, so dass*

$$|\Delta_t(x_1, ..., x_t)(x_{t+1} - x_t)| \leq c \left(1 \vee \sum_{s=1}^{t+1} g(x_s) \right).$$

[8] bewiesen wird das in Lemma 3.20

Die Menge aller g-zulässigen Handelsstrategien wird mit $\mathcal{H}_g$ bezeichnet.

Da eine g-zulässige Handelsstrategie beschränkt ist, folgt die Integrierbarkeit durch Lemma 3.20.

Die folgende schwächere Version des FTAP ist die Grundlage für den Beweis von Theorem 2.5.

Proposition 2.9. *Seien $\varphi_i : \mathbb{R}_+^T \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., N$ stetige Funktionen, für die*

$$\lim_{||x|| \to \infty} \frac{\varphi_i(x)^+}{m(x)} < \infty, \tag{2.6}$$

$$\lim_{||x|| \to \infty} \frac{\varphi_i(x)^-}{m(x)} = 0, \tag{2.7}$$

gelten. Setze $\varphi_{N+1} := m$ und $\bar{m} := m \vee 1$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es existiert kein $f = \sum_{n=1}^{N+1} a_n \varphi_n$ für $a_n \geq 0$, so dass

$$f(x) > 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}_+^T,$$

(ii) $\mathcal{P}_{(\varphi_i)_{i=1}^{N+1}} \neq \emptyset$.

Im Beweis zu Proposition 2.9 arbeiten wir mit dem Raum $C_{\bar{m}}^b(\mathbb{R}_+^T)$ der beschränkten, stetigen Fuktionen f auf $\mathbb{R}_+^T$ derart, dass

$$||f||_{C_{\bar{m}}^b} = \sup_{x \in \mathbb{R}_+^T} \frac{|f(x)|}{\bar{m}(x)} < \infty.$$

Daher müssen wir sicherstellen, dass die Funktionen $\varphi_i : \mathbb{R}_+^T \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., N+1$ in $C_{\bar{m}}^b(\mathbb{R}_+^T)$ liegen.

Lemma 2.10. *Ist $h : \mathbb{R}_+^T \to \mathbb{R}$ stetig und $\limsup_{||x|| \to \infty} |h(x)| < \infty$, dann ist $h \in C^b(\mathbb{R}_+^T)$.*

Beweis. Zu zeigen ist, dass h beschränkt ist, also $\sup_{x \in \mathbb{R}_+^T} |h(x)| < \infty$.
Definiere

$$B_n := \left\{ x \in \mathbb{R}_+^T : ||x|| \leq n \right\}.$$

Dann ist B_n kompakt in $\mathbb{R}_+^T$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Sei außerdem

$$a_n := \sup_{x \in B_n} |h(x)|, \; n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $a_n < \infty$ und $a_{n+1} \geq a_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$.
Angenommen $\sup_{x\in\mathbb{R}_+^T} |h(x)| = \infty$, d.h. $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.
Dann existiert eine Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, so dass

$$x_n \in B_n \quad \text{und} \quad |h(x_n)| \nearrow +\infty.$$

Das steht im Widerspruch zur Voraussetzung $\limsup_{|x|\to\infty} |h(x)| < \infty$.
Damit ist h beschränkt.

□

Korollar 2.11. *Sei $h : \mathbb{R}_+^T \to \mathbb{R}$ stetig mit*

$$\lim_{||x||\to\infty} h(x)^+ < \infty, \tag{2.8}$$

$$\lim_{||x||\to\infty} h(x)^- = 0. \tag{2.9}$$

Dann ist $h \in C^b(\mathbb{R}_+^T)$.

Das folgt unmittelbar aus Lemma 2.10, da die Bedingungen (2.8) und (2.9) implizieren, dass $\limsup_{||x||\to\infty} |h(x)| < +\infty$.

Bemerkung 2.12. Mit den Bedingungen (2.6), (2.7) und Korollar 2.11 folgt, dass die φ_i, $i = 1, ..., N$. aus Proposition 2.9 in $C^b_{\bar{m}}(\mathbb{R}_+^T)$ liegen.
φ_{N+1} liegt in $C^b_{\bar{m}}(\mathbb{R}_+^T)$, da

$$||\varphi_{N+1}||_{C^b_{\bar{m}}} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+^T} \frac{|\varphi_{N+1}(x)|}{\bar{m}(x)} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+^T} \frac{|m(x)|}{\bar{m}(x)} \leq 1.$$

Beweis Proposition 2.9. (i) $\Rightarrow$ (ii).
Wir beweisen diese Richtung durch Konstruktion eines Maßes $\pi^* \in \mathcal{P}_{(\varphi_i)_{i=1}^{N+1}}$.
Wir betrachten den Raum $C^b_{\bar{m}}(\mathbb{R}_+^T)$.
Dann kann ein stetiges lineares Funktional F auf $C^b_{\bar{m}}(\mathbb{R}_+^T)^*$, dem Dualraum von $C^b_{\bar{m}}(\mathbb{R}_+^T)$, mit einem geeigneten $\mu = \mu^+ - \mu^- \in M(\beta\mathbb{R}_+^T)$ durch

$$\begin{aligned} F(f) &= \int_{\beta\mathbb{R}_+^T} \frac{f(x)}{\bar{m}(x)}\, d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^T} \frac{f(x)}{\bar{m}(x)}\, d\mu^+(x) - \int_{\beta\mathbb{R}_+^T\setminus\mathbb{R}_+^T} \frac{f(x)}{\bar{m}(x)}\, d\mu^-(x) \end{aligned}$$

dargestellt werden[9]. Dabei bezeichnet $M(\beta\mathbb{R}_+^T)$ die Menge aller siginierten

[9]Wir untersuchen das im Abschnitt A.1

Radonmaße auf der Stone-Čhech Kompkatifizierung[10] $\beta\mathbb{R}_+^T$ von $\mathbb{R}_+^T$. Außerdem sind μ^+ und μ^- gegeben durch[11]

$$\mu^+(A) := \mu\left(A \cap \mathbb{R}_+^T\right), \tag{2.10}$$

$$\mu^-(A) := -\mu\left(A \cap \left(\beta\mathbb{R}_+^T \backslash \mathbb{R}_+^T\right)\right). \tag{2.11}$$

Weiter definieren wir folgende Teilmengen von $C_{\bar{m}}^b$:

$$\left(C_{\bar{m}}^b(\mathbb{R}_+^T)\right)_+ := \left\{f \in C_{\bar{m}}^b(\mathbb{R}_+^T) : f(x) > 0 \;\forall x \in \mathbb{R}_+^T\right\},$$

die Menge aller positiven $f \in C_{\bar{m}}^b(\mathbb{R}_+^T)$ und

$$K := \left\{\sum_{n=1}^{N+1} a_n\varphi_n : a_n \geq 0; \sum_{n=1}^{N+1} a_n = 1\right\},$$

die Menge aller Konvexkombinationen der Optionen $\varphi_n, n = 1, ..., N+1$.
Dabei ist $\left(C_{\bar{m}}^b(\mathbb{R}_+^T)\right)_+$ konvex in $C_{\bar{m}}^b(\mathbb{R}_+^T)$ und K konvex und kompakt in $C_{\bar{m}}^b(\mathbb{R}_+^T)$.
Nach Voraussetzung existiert keine Arbitrage, deshalb sind alle $f \in K$ kleiner oder gleich 0, und somit gilt:

$$\left(C_{\bar{m}}^b(\mathbb{R}_+^T)\right)_+ \cap K = \emptyset.$$

Somit können wir den Trennungssatz[12] anwenden, welches ein Funktional $F \in C_{\bar{m}}^b(\mathbb{R}_+^T)^*$ liefert, das K von $\left(C_{\bar{m}}^b(\mathbb{R}_+^T)\right)_+$ separiert, so dass

$$\int_{\beta\mathbb{R}_+^T} \frac{f(x)}{\bar{m}(x)}\, d\mu(x) > 0 \quad \forall f \in \left(C_{\bar{m}}^b(\mathbb{R}_+^T)\right)_+, \tag{2.12}$$

$$\int_{\beta\mathbb{R}_+^T} \frac{f(x)}{\bar{m}(x)}\, d\mu(x) \leq 0 \quad \forall f \in K, \tag{2.13}$$

für ein bestimmtes $\mu = \mu^+ - \mu^- \in M(\beta\mathbb{R}_+^T)$.
Wir zeigen nun, dass μ^+ ebenfalls (2.12) und (2.13) erfüllt.
Zu (2.12): Angenommen es sei $\mu^+ = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int_{\beta\mathbb{R}_+^T} \frac{\varphi_{N+1}(x)}{\bar{m}(x)}\, d\mu(x) &= \int_{\beta\mathbb{R}_+^T} \frac{m(x)}{\bar{m}(x)}\, d\mu(x) = \int_{\beta\mathbb{R}_+^T} 1\, d\mu(x) = \int_{\beta\mathbb{R}_+^T \backslash \mathbb{R}_+^T} 1\, d\mu^-(x) \\ &= \mu^-\left(\beta\mathbb{R}_+^T \backslash \mathbb{R}_+^T\right) \overset{(2.11)}{=} -\underbrace{\mu\left(\beta\mathbb{R}_+^T \backslash \mathbb{R}_+^T\right)}_{<0} > 0.\end{aligned}$$

[10]vgl. [Que13, Definition 12.17]
[11]vgl. [Els13, S. 270, Positive Variation, negative Variation]
[12][Kab11, Theorem 10.1]

Da $\varphi_{N+1} \in K$, steht das im Widerspruch zu (2.13). Daraus folgt, dass $\mu^+ > 0$ auf $\mathbb{R}_+^T$. Somit gilt

$$\int_{\beta\mathbb{R}_+^T} \underbrace{\frac{f(x)}{\bar{m}(x)}}_{>0} d\mu^+(x) > 0 \quad \forall f \in \left(C_{\bar{m}}^b(\mathbb{R}_+^T)\right)_+,$$

d.h. μ^+ erfüllt (2.12).
Zu (2.13). Es gilt, dass

$$\int_{\beta\mathbb{R}_+^T\setminus\mathbb{R}_+^T} \frac{\varphi_n(x)}{\bar{m}(x)} d\mu^-(x) = \underbrace{\int_{\beta\mathbb{R}_+^T\setminus\mathbb{R}_+^T} \frac{\varphi_n^+(x)}{\bar{m}(x)} d\mu^-(x)}_{\leq 0} - \underbrace{\int_{\beta\mathbb{R}_+^T\setminus\mathbb{R}_+^T} \frac{\varphi_n^-(x)}{\bar{m}(x)} d\mu^-(x)}_{=0,\text{ wegen (2.7)}} \leq 0, \quad \forall n = 1, .., N+1. \tag{2.14}$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} 0 &\overset{(2.13)}{\geq} \int_{\beta\mathbb{R}_+^T} \frac{\varphi_n(x)}{\bar{m}(x)} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}_+^T} \frac{\varphi_n(x)}{\bar{m}(x)} d\mu^+(x) - \int_{\beta\mathbb{R}_+^T\setminus\mathbb{R}_+^T} \frac{\varphi_n(x)}{\bar{m}(x)} d\mu^-(x) \\ &\overset{(2.14)}{\geq} \int_{\mathbb{R}_+^T} \frac{\varphi_n(x)}{\bar{m}(x)} d\mu^+(x) \quad \forall n = 1, 2, ..., N+1. \end{aligned}$$

Da K aus Linearkombinationen der φ_n besteht gilt somit auch

$$\int_{\mathbb{R}_+^T} \frac{f(x)}{\bar{m}(x)} d\mu^+(x) \leq 0 \quad \forall f \in K, \tag{2.15}$$

d.h. μ^+ erfüllt auch (2.13).
Nun konstruieren wir damit unser Wahrscheinlichkeitsmaß $\pi^* \in \mathcal{P}_{(\varphi_i)_{i=1}^{N+1}}$.
Wir definieren das Wahrscheinlichkeitsmaß $\pi := \frac{\mu^+}{\mu^+(\mathbb{R}_+^T)}$. Daraus ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}_+^T} \frac{\varphi_n(x)}{\bar{m}(x)} d\pi(x) = \underbrace{\frac{1}{\mu^+(\mathbb{R}_+^T)}}_{\geq 0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+^T} \frac{\varphi_n(x)}{\bar{m}(x)} d\mu^+(x)}_{\leq 0,\text{ nach (2.15)}} \leq 0, \quad n = 1, ..., N+1.$$

Weiter definieren wir ein Maß $\hat{\pi}$ durch $\frac{d\hat{\pi}(x)}{d\pi(x)} := \frac{1}{\bar{m}(x)}$. Es ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi_n(x)\, d\hat{\pi}(x) = \int_{\mathbb{R}_+^T} \frac{\varphi_n(x)}{\bar{m}(x)} d\pi(x) \leq 0, \quad n = 1, ..., N+1.$$

Das Maß $\hat{\pi}$ ist aber im Allgemeinen kein Wahrscheinlichkeitsmaß. Deshalb führen wir im letzten Schritt das Maß π^* ein, indem wir $\hat{\pi}$ normieren, $\pi^* := \frac{\hat{\pi}}{\hat{\pi}(\mathbb{R}_+^T)}$.

Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi_n(x)\, d\pi^*(x) = \underbrace{\frac{1}{\hat{\pi}(\mathbb{R}_+^T)}}_{\geq 0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi_n(x)\, d\hat{\pi}(x)}_{\leq 0} \leq 0, \quad n = 1, ..., N+1.$$

D.h. $\pi^* \in \mathcal{P}_{(\varphi_i)_{i=1}^{N+1}}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$.
Diese Richtung beweisen wir indirekt.
Angenommen es existiert ein $f = \sum_{n=1}^{N+1} a_n \varphi_n$ mit $a_n \geq 0$, so dass $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_+^T$.
Nach Voraussetzung existiert ein $\pi \in \mathcal{P}_{(\varphi_i)_{i=1}^{N+1}}$.
Daraus folgt, dass

$$\int_{\mathbb{R}_+^T} f(x)\, d\pi(x) = \sum_{n=1}^{N+1} \underbrace{a_n}_{\geq 0} \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi_n(x)\, d\pi(x)}_{\leq 0, \text{ da } \pi \in \mathcal{P}_{(\varphi_i)_{i=1}^{N+1}}} \leq 0.$$

Das steht im Widerspruch zu $f(x) > 0$.

□

Nun können wir die Richtung $(i) \Rightarrow (ii)$ des Theorems 2.5 beweisen. Dabei benutzen wir eine alternative Charakterisierung der Menge der zulässigen Martingalmaße:

$$\mathcal{M} = \left\{ \mathbb{Q} \in \mathcal{P}\left(\mathbb{R}_+^T\right) : \begin{array}{c} S_t \text{ hat endliches erstes Moment bezüglich } \pi,\ t \leq T \\ \int_{\mathbb{R}_+^T} (\Delta \bullet x)_T\, d\mathbb{Q}(x) = 0,\ \Delta \in C_b \end{array} \right\} \tag{2.16}$$

Beweisen werden wir das in Lemma 3.20.
Außerdem benötigen wir im Beweis noch, dass $g'(x_t) \in \mathcal{H}_g$.
Mit (2.3) ergibt sich

$$|g'(x_t)(x_{t+1} - x_t)| \leq |g(x_{t+1}) - g(x_t)| \leq |g(x_t)| + |g(x_{t+1})|.$$

Daher ist $\Delta_t(x_1, ..., x_t) = g'(x_t)$ auch in $\mathcal{H}_g$.

Wir werden auch das Theorem von Prokhorov im Beweis verwenden. Daher werden wir es an dieser Stelle, zusammen mit der Definition der Straffheit, anführen.

Definition 2.13 (Straffheit). *Sei $\mathcal{X}$ ein polnischer Raum und bezeichne $\mathcal{P}(\mathcal{X})$*

die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{X}$. Eine Menge $P \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ heißt straff, genau dann wenn für alle $\epsilon > 0$ eine kompakte Menge K_ϵ existiert, so dass $\mu[\mathcal{X} \setminus K_\epsilon] \leq \epsilon$ für alle $\mu \in P$.

Lemma 2.14 (Theorem von Prokhorov[13]). *Sei $\mathcal{X}$ ein polnischer Raum. Eine Menge $P \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ ist relativ kompakt, genau dann wenn sie straff ist.*

Beweis Theorem 2.5, (i) $\Rightarrow$ (ii). Wir beweisen $(i^*) \Rightarrow (ii)$, wobei (i^*) definiert ist als

(i^*) Es existiert keine modellunabhängige Arbitrage mit Handelsstrategien Δ aus $\mathcal{H}_g$.

Wir definieren eine Option φ_{-1} durch

$$\varphi_{-1}(x_1, ..., x_T) := -\sum_{t=1}^{T-1} g'(x_t)(x_T - x_t) + Tg(x_T).$$

Einerseits ist $\varphi_0(x) = g(x_T)$, wobei mit φ_0 nach Voraussetzung keine Arbitragemöglichkeit konstruiert werden kann. Andererseits haben wir festgestellt, dass $g'(x_t)$, $t < T$ eine g-zulässige Handelsstrategie ist. Zusammen folgt, dass mit φ_{-1} auch keine Arbitragemöglichkeit konstruiert werden kann.
Nach (2.3) gilt

$$g(x_t) \leq -g'(x_t)(x_{t+1} - x_t) + g(x_{t+1}).$$

Deswegen gilt auch

$$\begin{aligned} m(x) = \sum_{t=1}^{T-1} g(x_t) + g(x_T) &\leq -\sum_{t=1}^{T-1} g'(x_t)(x_{t+1} - x_t) + \underbrace{\sum_{t=1}^{T-1} g(x_{t+1})}_{\leq (T-1)g(x_T)} + g(x_T) \\ &\leq -\sum_{t=1}^{T-1} g'(x_t)(x_{t+1} - x_t) + Tg(x_T) = \varphi_{-1}(x), \end{aligned}$$

dabei gilt $\sum_{t=1}^{T-1} g(x_{t+1}) \leq (T-1)g(x_T)$, da g superlinear wächst und deswegen $g_t \leq g_T$, $t = 1, ..., T-1$.
Wir zeigen nun, dass $\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i \in I}} = \mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i \in I}, m}$, wobei $\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i \in I}, m} := \mathcal{M}_{\{\varphi_i : i \in I\} \cup \{m\}}$.
Für jedes $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{(\varphi_i)_{i \in I}, m}$ gilt automatisch $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i \in I}}$.

[13] vgl. [AG13, Theorem 1.3]

Außerdem gilt für jedes zulässige Martingalmaß $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}}$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^T} m(x)\, d\mathbb{Q}(x) &\leq \int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi_{-1}(x)\, d\mathbb{Q}(x) \\ &= -\sum_{t=1}^{T-1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+^T} g'(x_t)(x_T - x_t)\, d\mathbb{Q}(x)}_{=0,\text{ da } \mathbb{Q} \text{ Martingalmaß}} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+^T} T\varphi_0(x)\, d\mathbb{Q}(x)}_{\leq 0,\text{ da } \mathbb{Q}\in\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}}} \leq 0.\end{aligned}$$

Es ist also für jedes $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}}$ auch $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I},m}$. Somit gilt auch $\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}} = \mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I},m}$.

Mit folgendem Argument zeigen wir, dass $\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}}$ nichtleer ist :
Sei $(N_i)_{i=1}^{\infty}$ eine Familie von kompakten Mengen von Maßen, wobei $N_i \supseteq N_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$. Dann ist $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} N_i \neq \emptyset$.

Wir definieren die Familien $(F_m^1)_{m\in\mathbb{N}}$ und $(F_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei die F_m^1 und F_n^2 für alle m, n endlich sind, derart, dass $F_m^1 \subseteq I$, $m \in \mathbb{N}$, und

$$\{\varphi_i\}_{i\in F_n^2} \subseteq \left\{\Delta_t(x_1, ..., x_t)(x_{t+1} - x_t) : t \leq T, \Delta_t \in C_b(\mathbb{R}_+^t)\right\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Außerdem gilt für alle F_n^2 die Bedingung

$$\Delta_t(x_1, ..., x_t)(x_{t+1} - x_t) \in \{\varphi_i\}_{i\in F_n^2} \Leftrightarrow -\Delta_t(x_1, ..., x_t)(x_{t+1} - x_t) \in \{\varphi_i\}_{i\in F_n^2}.$$

F_m^1 kann so gewählt werden, dass $F_m^1 \subseteq F_{m+1}^1$, $m \in \mathbb{N}$, damit folgt
$\mathcal{P}_{(\varphi_i)i\in F_m^1} \supseteq \mathcal{P}_{(\varphi_i)i\in F_{m+1}^1}$, $m \in \mathbb{N}$. Analog kann F_n^2 so gewählt werden, dass
$\mathcal{P}_{(\varphi_i)i\in F_n^2} \supseteq \mathcal{P}_{(\varphi_i)i\in F_{n+1}^2}$, $n \in \mathbb{N}$.
Insgesamt kann das obige Argument benutzt werden, um zu zeigen, dass

$$\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}} = \bigcap_{\substack{F^1\in(F_m^1)_{m\in\mathbb{N}} \\ F^2\in(F_n^2)_{n\in\mathbb{N}}}} \mathcal{P}_{\{\varphi_i\}_{i\in F^1\cup F^2\cup\{0\}},m} \neq \emptyset,$$

falls $\mathcal{P}_{\{\varphi_i\}_{i\in F^1\cup F^2\cup\{0\}},m}$ kompakt ist. Wir begründen noch, dass

$$\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}} = \mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I},m} = \bigcap_{\substack{F^1\in(F_m^1)_{m\in\mathbb{N}} \\ F^2\in(F_n^2)_{n\in\mathbb{N}}}} \mathcal{P}_{\{\varphi_i\}_{i\in F^1\cup F^2\cup\{0\}},m}. \tag{2.17}$$

Nach Konstruktion von $(F_n^2)_{n=1}^\infty$ gilt für jedes $\mathbb{Q} \in \bigcap_{F^1,F^2} \mathcal{P}_{\{\varphi_i\}_{i\in F^1\cup F^2\cup\{0\}},m}$

$$\int_{\mathbb{R}_+^T} \Delta_t(x_1, ..., x_t)(x_{t+1} - x_t)\, d\mathbb{Q}(x) \leq 0,$$
$$\int_{\mathbb{R}_+^T} -\Delta_t(x_1, ..., x_t)(x_{t+1} - x_t)\, d\mathbb{Q}(x) \leq 0,$$

zusammen also

$$\int_{\mathbb{R}_+^T} \Delta_t(x_1, ..., x_t)(x_{t+1} - x_t)\, d\mathbb{Q}(x) = 0.$$

Mit (2.16) ist $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}$ und damit in $\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}}$.
Ist $\mathbb{Q}$ in $\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}} = \mathcal{M}_{(\varphi_i)_{i\in I},m}$, dann ist $\mathbb{Q}$ nach Definition 2.2 auch in $\mathcal{P}_{(\varphi_i)_{i\in I},m}$ und damit auch $\mathbb{Q} \in \bigcap_{F^1,F^2} \mathcal{P}_{\{\varphi_i\}_{i\in F^1\cup F^2\cup\{0\}},m}$.
Somit gilt die Gleichheit in (2.17).

Nun zeigen wir, dass $\mathcal{P}_{\{\varphi_i\}_{i\in F^1\cup F^2\cup\{0\}},m}$ nichtleer ist.
Wir haben gezeigt, dass mit φ_{-1} keine Arbitragemöglichkeit konstruiert werden kann und, dass $m \leq \varphi_{-1}$ ist. Somit kann auch mit m keine Arbitragemöglichkeit konstruiert werden. Nach Voraussetzung können weder mit φ_0 als auch mit $\varphi_i,\ i \in I$ und somit auch nicht mit $\varphi_i,\ i \in F^1$ Arbitragemöglichkeiten konstruiert werden. Außerdem sind die $\varphi_i,\ i \in F^2$ Handelsstrategien aus $\mathcal{H}_g$.
Zusammen kann mit

$$\{\varphi_i\}_{i\in F^1\cup F^2\cup\{0\},m}$$

keine Arbitragemöglichkeit konstruiert werden und wir können Propostition 2.9 anwenden, um zu erhalten, dass $\mathcal{P}_{\{\varphi_i\}_{i\in F^1\cup F^2\cup\{0\}},m} \neq \emptyset$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{P}_{\{\varphi_i\}_{i\in F^1\cup F^2\cup\{0\}},m}$ kompakt ist, um zu zeigen, dass $\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}}$ nichtleer ist. Wir zeigen das in zwei Schritten. Zuerst überprüfen wir die relative Kompaktheit und danach die Abgeschlossenheit von $\mathcal{P}_{\{\varphi_i\}_{i\in F^1\cup F^2\cup\{0\}},m}$.

Zur relativen Kompaktheit.
Mit dem Theorem von Prokhorov, Lemma 2.14, ist es äquivalent zu zeigen, dass $\mathcal{P}_{\{\varphi_i\}_{i\in F^1\cup F^2\cup\{0\}},m}$ straff ist, d.h. für alle $\epsilon > 0$ existiert ein kompaktes K_ϵ, sodass $\mathbb{Q}(K_\epsilon^c) \leq \epsilon$, für alle $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_{\{\varphi_i\}_{i\in F^1\cup F^2\cup\{0\}},m}$.
Es gilt $\lim_{||x||\to\infty} \frac{m(x)}{||x||} = \infty$ und $\int_{\mathbb{R}_+^T} m\, d\mathbb{Q}(x) \leq 0$, für $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_{\{\varphi_i\}_{i\in F^1\cup F^2\cup\{0\}},m}$. Ist nun $m \geq 0$, dann muss $\mathbb{Q}(\{m = 0\}) = 1$ sein für alle $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_{\{\varphi_i\}_{i\in F^1\cup F^2\cup\{0\}},m}$. Da $\{m = 0\}$

kompakt ist, kann $K_\epsilon = \{m = 0\}$ gewählt werden. Dann ist $\mathbb{Q}(\{m = 0\}^c) = 0 < \epsilon$. $\mathcal{P}_{\{\varphi_i\}_{i\in F^1\cup F^2\cup\{0\}},m}$ ist straff und damit relativ kompakt. Wenn andererseits m auch negative Werte annimmt, dann ist $-a := \min m < 0$ und $-a > -\infty$. Außerdem existiert für jedes δ ein k_δ und $K_\delta := [0, k_\delta]^T$, so dass $m > \frac{1}{\delta}$ auf K_δ^c. Daher gilt

$$\int_{K_\delta^c} m(x)\, d\mathbb{Q}(x) \leq \int_{K_\delta^c} \frac{1}{\delta}\, d\mathbb{Q}(x) = \frac{1}{\delta}\mathbb{Q}\left(K_\delta^c\right). \tag{2.18}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_{\mathbb{R}_+^T} m(x)\, d\mathbb{Q}(x) = \int_{K_\delta} m(x)\, d\mathbb{Q}(x) + \int_{K_\delta^c} m(x)\, d\mathbb{Q}(x) \\ &\geq \int_{K_\delta} -a\, d\mathbb{Q}(x) + \int_{K_\delta^c} m(x)\, d\mathbb{Q}(x) = -a\mathbb{Q}(K_\delta) + \int_{K_\delta^c} m(x)\, d\mathbb{Q}(x) \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\int_{K_\delta^c} m(x)\, d\mathbb{Q}(x) \leq a\mathbb{Q}(K_\delta). \tag{2.19}$$

Mit (2.18) und (2.19) folgt

$$\mathbb{Q}\left(K_\delta^c\right) \leq \delta \int_{K_\delta^c} m(x)\, d\mathbb{Q}(x) \leq \delta a \underbrace{\mathbb{Q}(K_\delta)}_{\leq 1} \leq \delta a.$$

Daraus folgt, dass für jedes fixierte $\epsilon > 0$ ein $k = k_\delta$ für $\delta = \epsilon/a$ existiert, so dass $\mathbb{Q}\left(([0,k]^T)^c\right) \leq \delta a = \epsilon$ für alle $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}_{\{\varphi_i\}_{i\in F^1\cup F^2\cup\{0\}},m}$. Damit ist $\mathcal{P}_{\{\varphi_i\}_{i\in F^1\cup F^2\cup\{0\}},m}$ relativ kompakt.

zur Abgeschlossenheit.
Sei $\{\mathbb{Q}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}_{\{\varphi_i\}_{i\in F^1\cup F^2\cup\{0\}},m}$ eine Folge, die schwach gegen ein $\tilde{\mathbb{Q}}$ konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $\tilde{\mathbb{Q}} \in \mathcal{P}_{\{\varphi_i\}_{i\in F^1\cup F^2\cup\{0\}},m}$.
Nach Definition gilt $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^T} f\, d\mathbb{Q}_n(x) = \int_{\mathbb{R}_+^T} f\, d\tilde{\mathbb{Q}}(x)$ für stetige und beschränkte Funktionen $f : \mathbb{R}_+^T \to \mathbb{R}$. Da $\mathbb{Q}_n$ Wahrscheinlichkeitsmaße sind gilt mit $f \equiv 1$

$$\tilde{\mathbb{Q}}\left(\mathbb{R}_+^T\right) = \int_{\mathbb{R}_+^T} 1\, d\tilde{\mathbb{Q}}(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^T} 1\, d\mathbb{Q}_n(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{Q}_n\left(\mathbb{R}_+^T\right) = 1$$

Daher ist auch $\tilde{\mathbb{Q}}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Es bleibt zu zeigen

$$\int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi(x)\, d\tilde{\mathbb{Q}}(x) \leq 0 \quad \varphi \in \left\{m, \varphi_i : i \in F^1 \cup F^2 \cup \{0\}\right\}.$$

Dabei betrachten wir getrennt die beiden Integrale $\int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi^+(x)\, d\tilde{\mathbb{Q}}(x)$ und $\int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi^-(x)\, d\tilde{\mathbb{Q}}(x)$.

Für jedes $\varphi \in \{m, \varphi_i : i \in F^1 \cup F^2 \cup \{0\}\}$ und jedes $u \in [0, \infty)$ gilt die Ungleichheit

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi^+(x)\, d\mathbb{Q}_n(x) \geq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi^+(x) \wedge u\, d\mathbb{Q}_n(x),$$

dabei ist die linke Seite durch die Bedingung (2.1) wohldefiniert und die rechte Seite ist ein Grenzwert bezüglich der schwachen Konvergenz, da $\varphi^+(x) \wedge u$ beschränkt und φ^+ stetig ist, d.h. es existiert $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi^+(x) \wedge u\, d\mathbb{Q}_n(x)$. Für $u \to \infty$ folgt damit

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi^+(x)\, d\mathbb{Q}_n(x) \geq \lim_{u\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi^+(x) \wedge u\, d\mathbb{Q}_n(x) \\ &= \lim_{u\to\infty} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi^+(x) \wedge u\, d\mathbb{Q}_n(x) \stackrel{(1)}{=} \lim_{u\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi^+(x) \wedge u\, d\tilde{\mathbb{Q}}(x) \\ &\stackrel{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi^+(x)\, d\tilde{\mathbb{Q}}(x), \end{aligned} \tag{2.20}$$

wobei (1) mit der schwachen Konvergenz und (2) mit der monotonen Konvergenz gilt. Nun werden wir noch zeigen, dass

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi^-(x)\, d\mathbb{Q}_n(x) \leq \int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi^-(x)\, d\tilde{\mathbb{Q}}(x). \tag{2.21}$$

(2.20) und (2.21) liefern dann zusammen

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi(x)\, d\tilde{\mathbb{Q}}(x) &= \int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi(x)^+\, d\tilde{\mathbb{Q}}(x) - \int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi(x)^-\, d\tilde{\mathbb{Q}}(x) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi^+(x)\, d\mathbb{Q}_n(x) - \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi^-(x)\, d\mathbb{Q}_n(x) \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi(x)\, d\mathbb{Q}_n(x) \leq 0. \end{aligned}$$

Wir benutzen die Resulate, die wir aus dem Beweis der relativen Kompaktheit erhalten haben, um (2.21) zu beweisen. Für jedes fixierte $\epsilon > 0$ existiert ein k_ϵ, so dass $\mathbb{Q}_n(K_\epsilon^c) \leq \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $K_\epsilon := [0, k_\epsilon]^T$. Da K_ϵ beschränkt ist und φ^- stetig, folgt mit der schwachen Konvergenz, dass

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{K_\epsilon} \varphi^-(x)\, d\mathbb{Q}_n(x) \leq \limsup_{n\to\infty} \int_{K_\epsilon} \varphi^-(x)\, d\mathbb{Q}_n(x) \leq \int_{K_\epsilon} \varphi^-(x)\, d\tilde{\mathbb{Q}}(x). \tag{2.22}$$

Sei $k_\epsilon \to \infty$ für $\epsilon \to 0$. Da $\int_{\mathbb{R}_+^T} m\, d\mathbb{Q}_n(x) \le 0$, ergibt sich $\int_{\mathbb{R}_+^T} (m+a+1)\, d\mathbb{Q}_n(x) \le (a+1)$. Nach Definition von a ist $(m+a+1)$ nichtnegativ, somit gilt auch $\int_A (m+a+1)\, d\mathbb{Q}_n(x) \le (a+1)$, für alle $A \subseteq \mathbb{R}_+^T$. Somit folgt für $\varphi \in \{m, \varphi_i : i \in F^1 \cup F^2 \cup \{0\}\}$

$$\begin{aligned}
a+1 &\ge \int_{K_\epsilon^c} (m+a+1)\, d\mathbb{Q}_n(x) \ge \int_{K_\epsilon^c} (m+a+1) \mathbb{1}_{\varphi^- > 0}\, d\mathbb{Q}_n(x) \\
&= \int_{K_\epsilon^c} \varphi^-(x) \frac{(m+a+1)}{\varphi^-(x)} \mathbb{1}_{\varphi^- > 0}\, d\mathbb{Q}_n(x) \ge \int_{K_\epsilon^c} \varphi^-(x) \min_{K_\epsilon^c} \frac{(m+a+1)}{\varphi^-(x)} \mathbb{1}_{\varphi^- > 0}\, d\mathbb{Q}_n(x).
\end{aligned}$$

Und daher folgt

$$\int_{K_\epsilon^c} \varphi^-(x)\, d\mathbb{Q}_n(x) = \int_{K_\epsilon^c} \varphi^-(x) \mathbb{1}_{\varphi^- > 0}\, d\mathbb{Q}_n(x) \le \underbrace{(a+1) \max_{K_\epsilon^c} \frac{\varphi^-(x)}{(m+a+1)}}_{=: c_\epsilon}. \qquad (2.23)$$

Wir erhalten $K_\epsilon \to \mathbb{R}_+^T$ für $\epsilon \to 0$ und mit der Bedingung (2.2) $c_\epsilon \to 0$ für $\epsilon \to 0$. Zusammen mit (2.22) und (2.23) folgt daraus

$$\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi^-(x)\, d\mathbb{Q}_n(x) = \liminf_{n\to\infty} \left(\int_{K_\epsilon} \varphi^-(x)\, d\mathbb{Q}_n(x) + \int_{K_\epsilon^c} \varphi^-(x)\, d\mathbb{Q}_n(x) \right) \\
&\le \liminf_{n\to\infty} \int_{K_\epsilon} \varphi^-(x)\, d\mathbb{Q}_n(x) + c_\epsilon \le \int_{K_\epsilon} \varphi^-(x)\, d\tilde{\mathbb{Q}}(x) + c_\epsilon \overset{\epsilon \to 0}{\to} \int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi^-(x)\, d\tilde{\mathbb{Q}}(x).
\end{aligned}$$

Das beweist (2.21). Damit ist $\tilde{\mathbb{Q}} \in \mathcal{P}_{\{\varphi_i\}_{i \in F^1 \cup F^2 \cup \{0\}}, m}$ und somit ist $\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}}$ nichtleer.

□

2.3 Superreplikation Resultat

Als Folgerung des FTAP werden wir nun ein Superreplikation Resultat angeben. Es gibt eine obere Preisgrenze für eine Option an, die dem kleinsten Anfangswert einer superreplizierenden, semistatischen Strategie entspricht.

Wir stellen an die Familie $(\varphi_i)_{i\in I}$ von Auszahlungsfunktionen von Optionen die gleichen Voraussetzungen, wie in Theorem 2.5.

Im Einzelnen sind die φ_i, $i \in I$ stetige Funktionen auf $\mathbb{R}_+^T$, wobei 0 in I enthalten ist. φ_0 hat die Form $\varphi_0(S) = g(S_T)$, wobei $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine superlineare konvexe

Funktion ist. Außerdem sollen folgende Bedingungen gelten:

$$\lim_{||x||\to\infty} \frac{\varphi_i(x)^+}{m(x)} < \infty,$$
$$\lim_{||x||\to\infty} \frac{\varphi_i(x)^-}{m(x)} = 0,$$

mit $m(x_1, ..., x_T) = \sum_{t=1}^T g(x_t)$.
Die zu bewertende Option Φ ist eine oberhalbstetige Funktion. Daher führen wir folgende Definition an.

Definition 2.15 (oberhalbstetig[14]). *Eine Funktion $f : \mathbb{R}_+^T \to \mathbb{R}$ heißt oberhalbstetig im Punkt ξ, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $x \in U_\delta(\xi) \cap \mathbb{R}_+^T$ stets $f(x) < f(\xi) + \epsilon$ ist.*
Sie heißt oberhalbstetig, wenn sie in jedem Punkt $\xi \in \mathbb{R}_+^T$ oberhalbstetig ist.

Wir schließen im Folgenden den Fall $\sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}}} \int_{\mathbb{R}_+^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x) = \infty$ aus.

Theorem 2.16 (Superreplikation Theorem). *Seien $(\varphi_i)_{i\in I}$ gegeben wie in Theorem 2.5 und $\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}} \neq \emptyset$. Außerdem sei $\Phi : \mathbb{R}_+^T \to \mathbb{R}$ oberhalbstetig und erfülle*

$$\lim_{||x||\to\infty} \frac{\Phi(x)^+}{m(x)} = 0. \tag{2.24}$$

Dann gilt folgende Gleichheit:

$$\begin{aligned} p^P(\Phi) &:= \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}}} \int_{\mathbb{R}_+^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x) \\ &= \inf\left\{ d : \exists a_n \geq 0, \Delta \in \mathcal{H} \text{ s.d. } d + \sum_{n=1}^N a_n \varphi_{i_n}(x) + (\Delta \bullet x)_T \geq \Phi(x) \right\} =: p^D(\Phi). \end{aligned}$$

Außerdem wird das Supremum als Maximum angenommen.

Theorem 2.16 beschreibt eine obere Schranke für den Preis einer Option Φ in einem arbitragefreien Markt.
In der klassischen Finanzmathematik wird zur Bestimmung des Preises ein Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ausgewählt, welches zum jeweiligen Modell passt. Damit wird der Preis durch $\int_{\mathbb{R}_+^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x)$ bestimmt. In unserem modellunabhängigen Ansatz kann es unendlich viele solcher Martingalmaße geben. Es wird dasjenige Martingalmaß ausgesucht, welches den höchsten Preis liefert. Das führt zu $p^P(\Phi)$. P steht dabei für *Primal* und wird aufgrund der Konsistenz zu Abschnitt 4 schon jetzt verwendet.

[14] vgl. [Heu09, Kap. 40, Aufg. 3]

Auf der anderen Seite wird der Preis durch superreplizieren dieser Option Φ bestimmt. Das machen wir mit einer semistatischen Strategie $d+\sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_{i_n}(x)+(\Delta \bullet x)_T$, wie zu Anfang des Kapitels beschrieben. Dabei wird der minimale Anfangswert d gesucht, so dass $d+\sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_{i_n}(x)+(\Delta \bullet x)_T \geq \Phi$. Das führt zu $p^D(\Phi)$. D steht dabei für *Dual*.

Beweis , Richtung $p^D(\Phi) \geq p^P(\Phi)$. Seien $a_n \geq 0$ und $\Delta \in \mathcal{H}$, so dass

$$d+\sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_{i_n}(x)+(\Delta \bullet x)_T \geq \Phi(x). \tag{2.25}$$

Da die Funktionen φ_{i_n} nach Voraussetzung integrierbar sind und $\sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}}} \int_{\mathbb{R}_+^T} \Phi(x)\,d\mathbb{Q}(x) < \infty$, können wir mit $X = d+\sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_{i_n}(x)-\Phi(x)$ und $Y = (\Delta \bullet x)_T$ Lemma 2.7 anwenden und erhalten, dass $(\Delta \bullet x)_T^-$ integrierbar ist.
Mit Bemerkung 2.6 ist $(\Delta \bullet x)_T$ somit ein Martingal. Integrieren wir nun die Ungleichung (2.25), bezüglich $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^T} \Phi(x)\,d\mathbb{Q}(x) &\leq \int_{\mathbb{R}_+^T} \left(d+\sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_{i_n}(x)+(\Delta \bullet x)_T(x)\right) d\mathbb{Q}(x)\\ &= d+\sum_{n=1}^{N} a_n \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi_{i_n}(x)\,d\mathbb{Q}(x)}_{\leq 0} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+^T} (\Delta \bullet x)_T\,d\mathbb{Q}(x)}_{=0}\\ &\leq d.\end{aligned}$$

Die Ungleichung gilt für alle d, für die (2.25) gilt, auch für das minimale d. Also gilt auch

$$\int_{\mathbb{R}_+^T} \Phi(x)\,d\mathbb{Q}(x) \leq \inf\left\{d : \exists a_n \geq 0, \Delta \in \mathcal{H} \text{ s.d. } d+\sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_{i_n}(x)+(\Delta \bullet x)_T \geq \Phi(x)\right\}.$$

Außerdem gilt die Ungleichung für alle $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}}$, somit gilt auch

$$\begin{aligned}&\sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}}} \int_{\mathbb{R}_+^T} \Phi(x)\,d\mathbb{Q}(x)\\ &\leq \inf\left\{d : \exists a_n \geq 0, \Delta \in \mathcal{H} \text{ s.d. } d+\sum_{n=1}^{N} a_n\varphi_{i_n}(x)+(\Delta \bullet x)_T \geq \Phi(x)\right\},\end{aligned}$$

d.h. $p^D(\Phi) \geq p^P(\Phi)$.

$\square$

Für den zweiten Teil des Beweises von Theorem 2.5 haben wir die Menge $\mathcal{H}_g$ der g-zulässigen Handelsstrategien eingeführt. Damit umgingen wir, dass $(\Delta \bullet S)_T$ im Allgemeinen nicht integrierbar ist. Wir möchten auch hier ein stärkeres Resultat beweisen. $p^P(\Phi) \geq p^D(\Phi)$, wobei

$$p^D(\Phi) := \inf \left\{ d : \exists a_n \geq 0, \Delta \in \mathcal{H}_g \text{ s.d. } d + \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_{i_n}(x) + (\Delta \bullet x)_T \geq \Phi(x) \right\}.$$

D.h. es werden nur g-zulässige Handelstrategien zur Superreplikation von Φ benutzt.

Beweis , Richtung $p^P(\Phi) \geq p^D(\Phi)$. Wir betrachten zuerst den Fall, dass Φ stetig ist und

$$\lim_{||x|| \to \infty} \frac{\Phi(x)^-}{m(x)} < \infty \tag{2.26}$$

erfüllt. Wir beweisen die Aussage indirekt. Angenommen es gilt strikte Ungleichheit $p^D(\Phi) > p^P(\Phi)$. Dann existiert ein p, so dass

$$p^P(\Phi) < p < p^D(\Phi). \tag{2.27}$$

Definiere $\varphi = -\Phi + p$. Da Φ stetig ist, ist auch φ stetig. Wir zeigen außerdem, dass φ die Bedingungen (2.1) und (2.2) erfüllt, um Theorem 2.5 auf $\left(\{\varphi\} \cup \{\varphi_i\}_{i \in I}\right)$ anzuwenden. Positiver und negativer Teil von φ lassen sich schreiben als

$$\begin{aligned} \varphi(x)^+ &= (-\Phi(x) + p)^+ = \Phi(x)^- + p, \\ \varphi(x)^- &= (-\Phi(x) + p)^- = \Phi(x)^+ + p. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \lim_{||x|| \to \infty} \frac{\varphi^+(x)}{m(x)} &= \underbrace{\lim_{||x|| \to \infty} \frac{\Phi(x)^-}{m(x)}}_{<\infty \text{ mit } (2.26)} + \underbrace{\lim_{||x|| \to \infty} \frac{p}{m(x)}}_{=0} < \infty, \\ \lim_{||x|| \to \infty} \frac{\varphi^-(x)}{m(x)} &= \underbrace{\lim_{||x|| \to \infty} \frac{\Phi(x)^+}{m(x)}}_{=0 \text{ mit } (2.24)} + \underbrace{\lim_{||x|| \to \infty} \frac{p}{m(x)}}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Somit ist Theorem 2.5 auf $\left(\{\varphi\} \cup \{\varphi_i\}_{i \in I}\right)$ anwendbar. Es impliziert folgende Äquivalenz

(i) $\nexists f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_{i_n}(x) + a_{n+1}\varphi(x) + (\Delta \bullet x)_T > 0,\ a_n \geq 0, \Delta \in \mathcal{H}_g,$

(ii) $\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}} \neq \emptyset.$

Nun gibt es zwei Fälle.
1. Fall.
Es gelten (i) und (ii): Dann ist $\mathcal{M}_{\{\varphi\}\cup\{\varphi_i\}_{i\in I}}$ nichtleer. Für alle $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\{\varphi\}\cup\{\varphi_i\}_{i\in I}}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}_+^T} \varphi(x)\, d\mathbb{Q}(x) \leq 0.$$

Daraus folgt, dass

$$\int_{\mathbb{R}_+^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x) \geq p,\ \forall \mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{\{\varphi\}\cup\{\varphi_i\}_{i\in I}}.$$

Damit ist auch

$$p^P(\Phi) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_{\{\varphi\}\cup\{\varphi_i\}_{i\in I}}} \int_{\mathbb{R}_+^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x) \geq p.$$

Das steht im Widerspruch zu (2.27).
2. Fall.
Es gilt weder (i) noch (ii). Dann existiert $f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_{i_n}(x) + a_{N+1}\varphi(x) + (\Delta \bullet x)_T > 0$, mit $a_n \geq 0$ für $n = 1, ..., N+1$ und $\Delta \in \mathcal{H}_g$. Daraus folgt

$$a_{N+1}p + \sum_{n=1}^{N} a_n \varphi_{i_n}(x) + (\Delta \bullet x)_T > a_{N+1}\Phi(x).$$

Wir definieren $\tilde{a}_n := \frac{a_n}{a_{N+1}}$ und $\tilde{\Delta} := \frac{\Delta}{a_{N+1}}$. Dann ist $\tilde{a}_n \geq 0$ für alle $n = 1, ..., N$ und $\tilde{\Delta} \in \mathcal{H}_g$. Das ergibt

$$p + \sum_{n=1}^{N} \tilde{a}_n \varphi_{i_n}(x) + (\tilde{\Delta} \bullet x)_T > \Phi(x).$$

p ist somit größer oder gleich $p^D(\Phi)$. Das steht im Widerspruch zu (2.27).
Somit kann es kein p mit $p^P(\Phi) < p < p^D(\Phi)$ geben und es ist $p^P(\Phi) \geq p^D(\Phi)$.

Den Beweis, dass das Supremum ein Maximum ist, werden wir in Theorem 3.1 führen. $\square$

2.4 weitere Superreplikation Resultate

Für die bisherigen Resultate benötigten wir die Option $\varphi_0(S) = g(S_T)$, wobei $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine konvexe superlineare Funktion ist. Diese war nötig, um die Kompaktheit der Menge der zulässigen Wahrscheinlichkeitsmaße zu gewährleisten und damit zu zeigen, dass die Menge der zulässigen Martingalmaße nichtleer ist.
Diese Einschränkung werden wir jetzt verwerfen.
Wir nehmen an, dass eine ausreichende Menge von europäischen Call Optionen, nur abhängig von S_T, auf dem Markt gehandelt werden. Dazu benötigen wir eine Folge von Strikes K_n, $n \geq 1$, $K_n \to \infty$ und definieren damit die Auszahlungen unserer Optionen

$$\psi_n(y) := (y - K_n)^+, \; n \geq 1. \tag{2.28}$$

Um unsere vorherigen Resultate anwenden zu können, müssen die Optionen zum Preis 0 gehandelt werden, d.h. wir müssen die Optionen anpassen. Sei p_n der Preis der Option ψ_n, dann definieren wir die Auszahlungsfunktion

$$\tilde{\psi}_n(x) := (\psi_n(x_T) - p_n), \; n \geq 1. \tag{2.29}$$

Die Optionen $\tilde{\psi}_n$ werden zum Preis 0 gehandelt.

Annahme 2.17. Seien $\varphi_i : \mathbb{R}_+^T \to \mathbb{R}$, $i \in I$ stetige Funktionen, die auch $\tilde{\psi}_n, n \geq 1$ enthalten. Sei außerdem $\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}} \neq \emptyset$. Weiter seien $\alpha_n \geq 0$ Koeffizienten, so dass $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n p_n < \infty$. Wir definieren dann

$$g_0(y) := \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(\psi_n(y) - p_n), \qquad m_0(x_1, ..., x_T) := \sum_{t=1}^{T} g_0(x_t).$$

Wir nehmen zudem noch an, dass

$$\lim_{||x|| \to \infty} \frac{\varphi_i(x)^-}{m_0(x)} = 0, \qquad \lim_{||x|| \to \infty} \frac{\varphi_i(x)^+}{m_0(x)} < \infty, \quad \forall i \in I.$$

Wir werden im nachfolgenden Korollar Theorem 2.16 anwenden, indem wir $g = g_0$ setzen. Da $\tilde{\psi}_n, n \geq 1$ schon in den φ_i, $i \in I$ enthalten ist und g_0 eine Linearkombination dieser $\tilde{\psi}_n$ ist, ist es irrelevant ob g_0 in den φ_i, $i \in I$ enthalten ist. Es bleibt zu überprüfen, ob g_0 superlinear wachsend ist, d.h. $\lim_{|y| \to \infty} \frac{g_0(y)}{y} = \infty$.

Für $\alpha_n \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned}\lim_{|y|\to\infty} \frac{g_0(y)}{y} &= \lim_{|y|\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left((y-K_n)^+ - p_n\right)}{y} \\ &= \lim_{|y|\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (y-K_n)^+}{y} - \lim_{|y|\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n p_n}{y}\end{aligned}$$

Nach Annahme 2.17 ist die Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n p_n$ konvergent, somit gilt $\lim_{|y|\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n p_n}{y} = 0$. Für den ersten Summanden gilt mit dem Satz der monotonen Konvergenz[15] und mit der Umformung
$\frac{(y-K_n)^+}{y} = (1 - \frac{K_n}{y})^+$, dass

$$\begin{aligned}\lim_{|y|\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (y-K_n)^+}{y} &= \lim_{|y|\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (1 - \frac{K_n}{y})^+ = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{|y|\to\infty} \alpha_n (1 - \frac{K_n}{y})^+ \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty,\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit nach Annahme 2.17 gilt. Zusammen gilt somit

$$\lim_{|y|\to\infty} \frac{g_0(y)}{y} = \lim_{|y|\to\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (y-K_n)^+}{y} = \infty,$$

d.h. g_0 ist superlinear wachsend. Es bleiben noch die Voraussetzungen des Satzes der monotonen Konvergenz zu überprüfen:

1. für festes y ist $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (1 - \frac{K_n}{y})^+$ endlich,
2. für festes n ist $f(y) := \alpha_n (1 - \frac{K_n}{y})^+$ monoton wachsend und konvergiert für $y \to \infty$ gegen α_n.

Zu 1. Sei y fest. Dann existiert ein n_0, so dass $K_n > y$ ist, für alle $n > n_0$, da $K_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Daraus folgt, dass $(1 - \frac{K_n}{y})^+ = 0$ für alle $n > n_0$ und somit verschwinden alle Summanden für $n > n_0$. Die Summe ist endlich.
Zu 2. $\lim_{|y|\to\infty} f(y) = \alpha_n$ ist klar. f kann umgeschrieben werden zu
$f(y) = \begin{cases} \alpha_n (1 - \frac{K_n}{y}), & \text{falls } y \geq K_n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$
Außerdem ist $f'(y) = \begin{cases} \frac{\alpha_n K_n}{y^2}, & \text{falls } y \geq K_n, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$
Damit ist $f'(y) \geq 0$ und f monoton wachsend.

[15] vgl. [Els13, Kapital IV, Satz 2.7]

Wir können nun ein Korollar zu Theorem 2.16 angeben, dass auf eine superlinear wachsende Auszahlung einer Option verzichtet.

Korollar 2.18. *Seien* $(\varphi_i)_{i\in I}$ *und* $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ *wie in Annahme 2.17. Außerdem sei* $\Phi : \mathbb{R}_+^T \to \mathbb{R}$ *oberhalbstetig und erfülle*

$$\lim_{||x||\to\infty} \frac{\Phi(x)^+}{m_0(x)} = 0.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} p^P(\Phi) &:= \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}}} \int_{\mathbb{R}_+^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x) \\ &= \inf \left\{ d : \begin{array}{c} \exists a_1, ..., a_{N+1} \geq 0, i_1, ..., i_N \in I, \alpha_n \geq 0, \Delta \in \mathcal{H},\ s.d. \\ d + \sum_{k=1}^N a_k \varphi_{i_k}(x) + a_{N+1} \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \tilde{\psi}_n(x) + (\Delta \bullet x)_T \geq \Phi(x) \end{array} \right\} =: p^D(\Phi). \end{aligned}$$

Außerdem wird das Supremum als Maximum angenommen.

Das Korollar ist eine direkte Anwendung von Theorem 2.16, in dem $g = g_0$ gesetzt wird. Daher ist ein Beweis nicht nötig.

Wir möchten dieses Resultat noch weiterführen. Breeden und Litzenberger[16] beobachteten die Äquivalenz zwischen folgenden Aussagen:

i) Die Verteilung μ von S_T, also des Preisprozesses im Endzeitpunkt, ist bekannt,

ii) die Preise p_k der Optionen $(S_T - K)^+$ für alle Strikes $K \geq 0$ sind bekannt.

Der Preis einer europäischen Call Option $\varphi(S_T)$ ist dann gegeben durch

$$\mathbb{E}_\mu[\varphi(S_T)] = \int_{\mathbb{R}^+} \varphi(y)\, d\mu(y).$$

Außerdem bezeichnen wir mit $\mathcal{M}(\mu)$ die Menge aller Martingalmaße mit Randverteilung μ an T und davon ausgehend

$$\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}}(\mu) := \mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}} \cap \mathcal{M}(\mu).$$

Es lässt sich beobachten, dass für jede konvexe superlineare Funktion $\bar{g} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, mit $\int_{\mathbb{R}_+} \bar{g}(y)\, d\mu(y) < \infty$, Konstanten c, $\alpha_n \geq 0$ und $K_n \nearrow$ existieren, so dass

$$\bar{g}(y) \leq c + \sum_{n=1}^\infty \alpha_n (y - K_n)^+, \quad \sum_{n=1}^\infty \alpha_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^\infty \alpha_n p_n < \infty. \tag{2.30}$$

[16] vgl. [BL78]

Dabei ist $p_n := \int_{K_n}^{\infty} (y - K_n)\, d\mu(y)$.

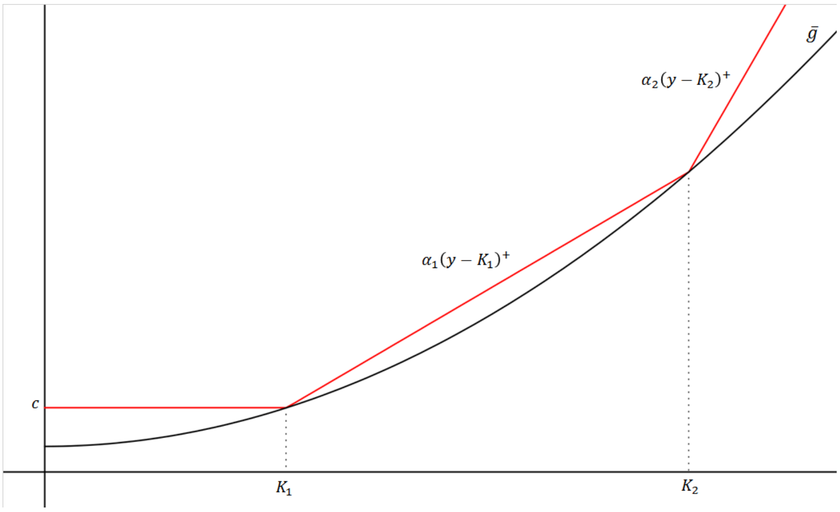

Abbildung 1: mögliche Funktion $\bar{g}$ mit linearer Beschränkung

Mit diesen Vorüberlegungen erweitern wir die Superreplikation Resultate um den Fall, dass die Verteilung von S_T bekannt ist. D.h. es existiert ein Martingalmaß, welches die Zulässigkeit aus Definition 2.2 erfüllt und außerdem die Randverteilung μ an T besitzt.

Korollar 2.19. *Seien $\varphi_i : \mathbb{R}_+^T \to \mathbb{R}$, $i \in I$ stetige Funktionen, die höchstens linear wachsen, und sei außerdem $\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}}(\mu) \neq \emptyset$. Für eine oberhalbstetige und linear von oben beschränkte Funktion $\Phi : \mathbb{R}_+^T \to \mathbb{R}$ gilt*

$$p^P(\Phi) := \sup_{\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}}(\mu)} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x) \right\} \tag{2.31}$$

$$= \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(y)\, d\mu(y) : \begin{array}{l} \varphi \in L^1(\mu), \exists \Delta \in \mathcal{H}, a_1, ..., a_N \geq 0, i_1, ..., i_N \in I, \\ s.d\ \varphi(x_T) + \sum_{n=1}^N a_n \varphi_{i_n}(x) + (\Delta \bullet x)_T \geq \Phi(x) \end{array} \right\} =: p^D(\Phi)$$

Außerdem wird das Supremum als Maximum angenommen.
Allgemeiner gilt Gleichheit, wenn für stetige $\varphi_i, i \in I$ und oberhalbstetige Φ eine konvexe superlineare Funktion $\tilde{g} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ in $L^1(\mu)$ existiert, so dass

$$\lim_{||x||\to\infty} \frac{|\varphi_i(x)|}{\sum_{t=1}^T \tilde{g}(x_t)} < \infty, \quad \lim_{||x||\to\infty} \frac{\Phi(x)^+}{\sum_{t=1}^T \tilde{g}(x_t)} < \infty. \tag{2.32}$$

Für den Beweis dieses Korollars brauchen wir noch ein Lemma.

Lemma 2.20. *Sei μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}_+$ mit endlichem ersten Moment und $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion in $L^1(\mu)$. Dann existiert eine* *konvexe Funktion $\bar{f} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ in $L^1(\mu)$, so dass $\frac{|\bar{f}(x)|}{|f(x)|} \to \infty$ für $x \to \infty$.*

Beweis Korollar 2.19. Zuerst möchten wir die allgemeinere Form beweisen. Wir nehmen an, dass $\varphi_i : \mathbb{R}_+^T \to \mathbb{R}$, $i \in I$ stetige Funktionen sind, dass $\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}}(\mu) \neq \emptyset$ und $\Phi : \mathbb{R}_+^T \to \mathbb{R}$ oberhalb stetig ist. Außerdem sei $\tilde{g} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \in L^1(\mu)$ konvex und superlinear und erfülle (2.32).
Dann können wir Lemma 2.20 auf $f = \tilde{g}$ anweden und erhalten eine konvexe superlineare Funktion $\bar{g}$ in $L^1(\mu)$, so dass $\frac{|\bar{g}(x)|}{|\tilde{g}(x)|} \to \infty$ für $x \to \infty$.
Zusammen mit (2.32) erhalten wir

$$\lim_{||x||\to\infty} \frac{\varphi_i(x)^-}{\sum_{t=1}^T \bar{g}(x_t)} = \underbrace{\lim_{||x||\to\infty} \frac{\varphi_i(x)^-}{\sum_{t=1}^T \tilde{g}(x_t)}}_{<\infty} \cdot \underbrace{\lim_{||x||\to\infty} \frac{\sum_{t=1}^T \tilde{g}(x_t)}{\sum_{t=1}^T \bar{g}(x_t)}}_{=0} = 0$$

und analog

$$\lim_{||x||\to\infty} \frac{\varphi_i(x)^+}{\sum_{t=1}^T \bar{g}(x_t)} = 0, \tag{2.33}$$

$$\lim_{||x||\to\infty} \frac{\Phi(x)^+}{\sum_{t=1}^T \bar{g}(x_t)} = 0. \tag{2.34}$$

Wir betrachten auch Konstanten c, $\alpha_n \geq 0$ und $K_n \nearrow$, wie in (2.30), d.h. die Funktion $\bar{g}$ ist linear beschränkt durch $\bar{g}(y) \leq c + \sum_{n=1}^\infty \alpha_n (y - K_n)^+$. Wir können die Funktionen $\tilde{\psi}_n = ((y - K_n)_+ - p_n)$ in die Familie der φ_i mit aufnehmen, da sie weder die Menge der zulässigen Martingalmaße verändert, noch die Existenz von Arbitrage impliziert. Zusammen mit (2.33) und (2.34) erfüllt die Familie φ_i die Annahme 2.17.
Somit können wir das vorherige Korollar 2.18 anwenden und erhalten

$$\sup_{\mathcal{M}_{\{\varphi_i\}_{i\in I}}(\mu)} \left\{ \int_{\mathbb{R}_+^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x) \right\} \tag{2.35}$$

$$= \inf \left\{ d : \begin{array}{c} \exists a_1, ..., a_{N+1} \geq 0, i_1, ..., i_N \in I, \alpha_n \geq 0 \Delta \in \mathcal{H}, \text{ s.d.} \\ d + \sum_{k=1}^N a_k \varphi_{i_k}(x) + a_{N+1} \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \tilde{\psi}_n(x) + (\Delta \bullet x)_T \geq \Phi(x) \end{array} \right\} \tag{2.36}$$

$$\geq \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(y)\, d\mu(y) : \begin{array}{l} \varphi \in L^1(\mu), \exists \Delta \in \mathcal{H}, a_1, ..., a_N \geq 0, i_1, ..., i_N \in I, \\ \text{s.d } \varphi(x_T) + \sum_{n=1}^N a_n \varphi_{i_n}(x) + (\Delta \bullet x)_T \geq \Phi(x) \end{array} \right\}. \tag{2.37}$$

Wir möchten die Ungleichung von (2.36) nach (2.37) noch erläutern. Wir setzen $\delta(y) := d + a_{N+1} \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \tilde{\psi}_n(y)$. Die Auszahlungen $\tilde{\psi}_n(y)$ sind nach Konstruktion nur vom Endzeitpunkt T abhängig, d.h. $\tilde{\psi}_n(y) = \tilde{\psi}_n(x_T)$, und sie sind normiert, sodass sie zum Preis 0 gehandelt werden, $\int_{\mathbb{R}_+} \tilde{\psi}_n(y)\, d\mu(y) = 0$. Daraus folgt, dass $\delta(y) \in L^1(\mu)$ mit $\int_{\mathbb{R}_+} \delta(y)\, d\mu(y) = d$. Damit erhalten wir folgende Gleichheit

$$\inf \left\{ d : \begin{array}{c} \exists a_1, ..., a_{N+1} \geq 0, i_1, ..., i_N \in I, \alpha_n \geq 0 \Delta \in \mathcal{H}, \text{ s.d.} \\ d + \sum_{k=1}^N a_k \varphi_{i_k}(x) + a_{N+1} \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \tilde{\psi}_n(x) + (\Delta \bullet x)_T \geq \Phi(x) \end{array} \right\} \tag{2.38}$$

$$= \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}_+} \delta(y)\, d\mu(y) : \begin{array}{l} \exists a_1, ..., a_{N+1} \geq 0, i_1, ..., i_N \in I, \alpha_n \geq 0 \Delta \in \mathcal{H}, \\ \delta(y) := d + a_{N+1} \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \tilde{\psi}_n(y), \text{ s.d.} \\ \delta(x_T) + \sum_{n=1}^N a_n \varphi_{i_n}(x) + (\Delta \bullet x)_T \geq \Phi(x) \end{array} \right\}. \tag{2.39}$$

$\delta(y)$ ist nun eine spezielle Funktion aus $L^1(\mu)$. In (2.37) wird das Infimum auf alle $\varphi \in L^1(\mu)$ erweitert. Das erweitert die Menge. Dies führt dazu, dass das Infimum kleiner oder gleich ist. Wir erhalten die Ungleichung von (2.36) nach (2.37).

Das ergibt $p^P(\Phi) \geq p^D(\Phi)$. Der Beweis der anderen Richtung ist analog zum ersten Teil des Beweises von Theorem 2.16. Zusammen ergibt sich $p^P(\Phi) = p^D(\Phi)$.

Nun zum ersten Teil des Korollars. Seien dazu $\varphi_i : \mathbb{R}_+^T \to \mathbb{R}, i \in I$ stetige Funktionen, die höchstens linear wachsen und $\Phi : \mathbb{R}_+^T \to \mathbb{R}$ oberhalbstetig und linear von oben beschränkt.
Wir wenden Lemma 2.20 auf die Funktion $f(x) = |x|$ an und erhalten somit eine konvexe Funktion $\bar{f}$ in $L^1(\mu)$, die $\frac{|\bar{f}(x)|}{|x|} \to \infty$, für $x \to \infty$ erfüllt. D.h. $\bar{f}$ ist superlinear wachsend. Da die Funktionen φ_i, $i \in I$ höchstens linear wachsen und Φ linear von oben beschränkt ist, erfüllt $\bar{f}$ die Bedingungen (2.32). Wir können somit die schon bewiesene allgemeinere Fassung des Korollar anwenden und erhalten $p^P(\Phi) \geq p^D(\Phi)$.

□

In Abschnitt 4 werden wir mithilfe des optimalen Transports den Fall untersuchen, dass der Markt nicht nur Informationen über den Endzeitpunkt bereitstellt, sondern über alle Zeitpunkte. Genauer gesagt, alle Randverteilungen $S_t \sim \mu_t$, $t = 1, ..., T$ sind bekannt.

3 optimaler Transport

In diesem Abschnitt werden wir eine Einführung in den optimalen Massentransport geben. Ziel dieses Kapitels ist das Dualitätstheorem nach Kantorovich, welches wir im nächsten Kapitel verwenden, um das zuvor angesprochene Superreplikation Resultat zu beweisen. Als Hauptquelle dient dabei [Vil09]. Wir werden auf gleicher Weise das Dualitätstheorem herleiten. Außerdem werden wir [AG13] als Quelle benutzen.

3.1 Kopplungen

Definition 3.1 (Kopplung). *Seien $(\mathcal{X}, \mu)$ und $(\mathcal{Y}, \nu)$ zwei Wahrscheinlichkeitsräume. μ mit ν zu koppeln bedeutet zwei Zufallsvariablen X und Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{P})$ zu konstruieren, so dass $X \sim \mu$ und $Y \sim \nu$. Das Paar (X, Y) heißt dann Kopplung von (μ, ν).*

Die Verteilung von (X, Y) bezeichen wir als Kopplungsmaß von (μ, ν).
Sind μ und ν die einzigen Verteilungen in einem Problem, kann o.B.d.A $\Omega = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ gewählt werden. D.h. um μ mit ν zu koppeln, muss ein Maß π auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ gefunden werden, so dass μ bzw. ν die Randverteilungen von π auf $\mathcal{X}$ bzw. $\mathcal{Y}$ sind.
Das kann durch folgende Aussagen äquivalent ausgedrückt werden:

(i) $(proj_{\mathcal{X}})_{\#}\pi = \mu$, $(proj_{\mathcal{Y}})_{\#}\pi = \nu$,
wobei $proj_{\mathcal{X}}$ bzw. $proj_{\mathcal{Y}}$ für die Projektionsabbildungen $(x, y) \mapsto x$ bzw. $(x, y) \mapsto y$ steht,

(ii) für alle messbaren Mengen $A \subset \mathcal{X},\ B \subset \mathcal{Y}$ gilt
$\pi[A \times \mathcal{Y}] = \mu[A]$, $\pi[\mathcal{X} \times B] = \nu[B]$,

(iii) für alle integrierbaren (bzw. nichtnegativen, messbaren) Funktionen φ, ψ auf $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ gilt

$$\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} (\varphi(x) + \psi(y))\, d\pi(x, y) = \int_{\mathcal{X}} \varphi(x)\, d\mu(x) + \int_{\mathcal{Y}} \psi(y)\, d\nu(y).$$

Definition 3.2 (Transportplan). *Die Menge $\Pi(\mu, \nu)$ aller Kopplungsmaße von μ und ν bezeichnen wir als Menge aller Transportpläne. Das π in $\Pi(\mu, \nu)$ liegt ist dabei äquivalent dazu, dass π (i),(ii) oder (iii) erfüllt.*

Es gibt zwei Extremfälle einer Kopplung. Einerseits die triviale Kopplung, d.h. X und Y sind unabhängig. Dann wird $\pi = \mu \otimes \nu$ gesetzt. Da die triviale Kopplung

immer existiert folgt daraus, dass $\Pi(\mu, \nu)$ nichtleer ist.
Andererseits gibt es den Fall, dass alle Informationen über den Wert von Y in dem Wert von X enthalten sind, d.h. Y ist eine Funktion von X. Das führt zur Definition der deterministischen Kopplung.

Definition 3.3 (Deterministische Kopplung). *Eine Kopplung nach Definition 3.1 heißt deterministisch, wenn eine messbare Funktion $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ existiert, so dass $Y = T(X)$.*

Auch hier wollen wir einige äquivalente Formulierungen angeben:

(i) (X, Y) ist eine Kopplung von μ und ν, deren Verteilung π auf dem Graph einer messbaren Funktion $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ konzentriert ist,

(ii) X hat die Verteilung μ und es gilt $Y = T(X)$, wobei $T_\# \mu = \nu$,

(iii) X hat die Verteilung μ und es gilt $Y = T(X)$, wobei T eine Veränderung der Variablen von μ nach ν ist: Für alle ν-integrierbaren (bzw. nichtnegativen messbaren) Funktionen φ ist

$$\int_{\mathcal{Y}} \varphi(y)\, d\nu(y) = \int_{\mathcal{X}} \varphi(T(X))\, d\mu(x).$$

$T_\# \mu \in P(\mathcal{Y})$ wird als Pushforward von μ durch T bezeichnet und ist definiert durch

$$T_\# \mu(E) := \mu\left(T^{-1}(E)\right),\ \forall E \subset \mathcal{Y}.$$

3.2 optimale Transporttheorie

Mithilfe der Definitionen der Kopplung, können wir die optimalen Transportprobleme von Monge bzw. Kantorovich einführen.
Wir betrachten dazu zwei polnische, d.h. vollständige, separable, metrische, Wahrscheinlichkeitsräume $(\mathcal{X}, \mu)$ und $(\mathcal{Y}, \nu)$ und eine Kostenfunktion $c : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, welche die Kosten angibt, die anfallen, wenn Masse von x nach y transportiert werden. Das Problem besteht darin, die Gesamtkosten über alle Transportabbildungen T zu minimieren. T muss dabei die Eigenschaft $T_\# \mu = \nu$ für $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ und $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ erfüllen. Betrachtet werden also deterministische Kopplungen.

Problem 3.4 (Monges optimales Transportproblem). *Seien $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ und $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$. Minimiere*

$$T \mapsto \int_{\mathcal{X}} c(x, T(x))\, d\mu(x)$$

über alle Transportabbildungen T von μ nach ν, d.h. alle Abbildungen T mit $T_{\#}\mu = \nu$.

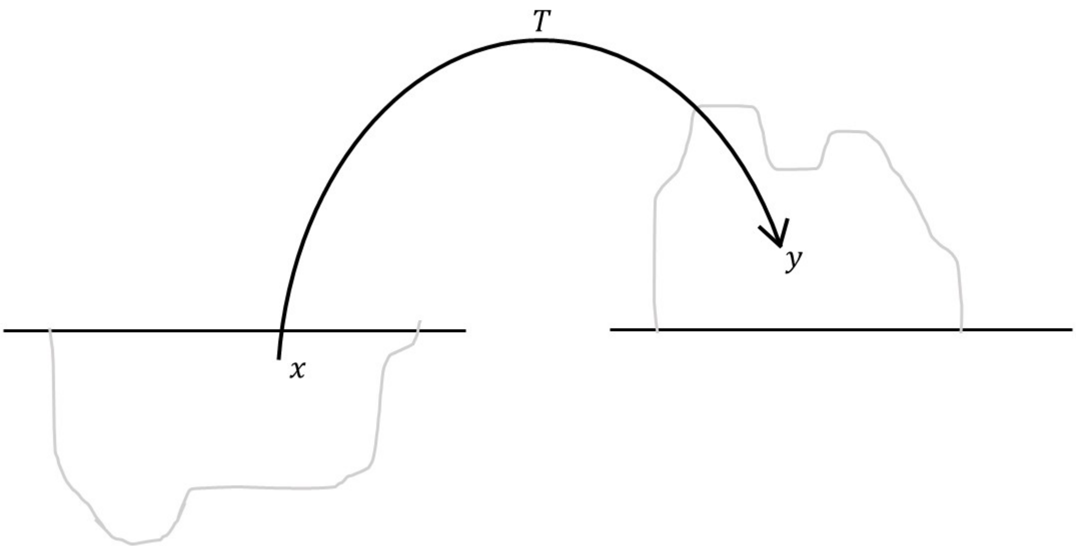

Abbildung 2: Monges optimales Transportproblem mit Abbau und Aufschüttung

Für das Monge Problem gibt es nicht immer eine Lösung. Ein möglicher Grund dafür ist, dass kein geeignetes T existiert. Das wäre z.B. der Fall, falls μ das Dirac-Maß ist, ν aber nicht.

Das folgende Kantorovich Problem hat diese Schwierigkeit nicht.
Das Problem besteht darin, die Gesamtkosten über alle Transportpläne $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ von $\mu \in \mathcal{P}(\mathcal{X})$ nach $\nu \in \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ zu minimieren.

Problem 3.5 (Kantorovichs optimales Transportproblem). *Minimiere*

$$\pi \mapsto \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x, y)\, d\pi(x, y)$$

über alle Transportpläne $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$.

Das Kantorovich Problem hat unter relativ milden Einschränkungen immer eine Lösung, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 3.6. *Seien $(\mathcal{X}, \mu)$ und $(\mathcal{Y}, \nu)$ zwei polnische Wahrscheinlichkeitsräume und seien $a : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $b : \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ zwei oberhalbstetige Funktionen, so dass $a \in L^1(\mu)$ und $b \in L^1(\nu)$. Außerdem sei $c : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine* *unterhalbstetige Kostenfunktion, so dass* $c(x,y) \geq a(x)+b(y)$ *für alle* $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$. *Dann existiert ein Kopplungsmaß* π *von* (μ,ν)*, welches die totalen Kosten* $\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\,d\pi(x,y)$ *über alle Transportpläne aus* $\Pi(\mu,\nu)$ *minimiert.*

Für den Beweis dieses Satzes brauchen wir noch zwei Lemmata, die zeigen, dass das Kostenfunktional unterhalbstetig ist und die Menge der Transportpläne straff ist.

Lemma 3.7. *Seien* $\mathcal{X}$ *und* $\mathcal{Y}$ *zwei polnische Wahrscheinlichkeitsräume und* $c : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *eine unterhalbstetige Kostenfunktion. Sei* $h : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *eine oberhalbstetige Funktion, so dass* $c \geq h$. *Außerdem sei* $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf* $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$*, die schwach gegen ein* $\pi \in \mathcal{P}(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$ *konvergieren, so dass* $h \in L^1(\pi_k)$, $h \in L^1(\pi)$ *und*

$$\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} h(x,y)\,d\pi_k(x,y) \underset{k\to\infty}{\to} \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} h(x,y)\,d\pi(x,y).$$

Dann gilt

$$\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\,d\pi(x,y) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\,d\pi_k(x,y).$$

Ist c *nichtnegativ, dann ist* $\pi \to \int c\,d\pi$ *unterhalbstetig auf* $\mathcal{P}(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$*, ausgestattet mit der Topologie der schwachen Konvergenz.*

Beweis. Wir können o.B.d.A annehmen, dass $c \geq 0$ ist. Ansonsten könnten wir c durch $c - h$ ersetzen und erhalten eine nichtnegative, unterhalbstetige Funktion.
c kann dann umgeschrieben als Grenzwert einer punktweise konvergierenden, monoton wachsenden Folge $(c_l)_{l\in\mathbb{N}}$, wobei die Folgeglieder stetige reelle Funktionen sind. Daher gilt

$$\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\,d\pi(x,y) = \lim_{l\to\infty} \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c_l(x,y)\,d\pi(x,y) = \lim_{l\to\infty}\lim_{k\to\infty} \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c_l(x,y)\,d\pi_k(x,y). \tag{3.1}$$

Die erste Gleichheit gilt mit dem Satz der monotonen Konvergenz und die zweite Gleichheit mit der schwachen Konvergenz nach Voraussetzung.
Außerdem gilt nach Voraussetzung für jedes l, dass $c_l \leq c$ und damit $\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c_l(x,y)\,d\pi_k(x,y) \leq \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\,d\pi_k(x,y)$. Somit gilt für jedes l, dass

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c_l(x,y)\,d\pi_k(x,y) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\,d\pi_k(x,y).$$

Die die Folgeglieder c_l stetig sind gilt

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c_l(x,y)\,d\pi_k(x,y) = \liminf_{k\to\infty}\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c_l(x,y)\,d\pi_k(x,y) \leq \liminf_{k\to\infty}\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\,d\pi_k(x,y). \tag{3.2}$$

(3.1) und (3.2) ergeben zusammen

$$\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\,d\pi(x,y) \leq \lim_{l\to\infty}\liminf_{k\to\infty}\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\,d\pi_k(x,y) = \liminf_{k\to\infty}\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\,d\pi_k(x,y).$$

□

Lemma 3.8. *Seien $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ zwei polnische Wahrscheinlichkeitsräume. Seien $P \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ und $Q \subset \mathcal{P}(\mathcal{Y})$ straffe Mengen. Dann ist die Menge $\Pi(P,Q)$ aller Transportpläne, deren Randverteilungen in P bzw. Q liegen, selbst auch straff in $\mathcal{P}(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$.*

Beweis. Seien $\mu \in P$, $\nu \in Q$ und $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$. Nach Voraussetzung existiert für jedes $\epsilon > 0$ eine kompakte Menge $K_\epsilon \subset \mathcal{X}$, unabhängig von der Wahl von μ, so dass $\mu(\mathcal{X}\setminus K_\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2}$, und analog eine kompakte Menge $L_\epsilon \subset \mathcal{Y}$,so dass $\nu(\mathcal{Y}\setminus L_\epsilon) \leq \frac{\epsilon}{2}$.
Da die Aussagen unabhängig von der Wahl der Maßes aus P bzw. Q sind, können sie umgeschrieben werden zu

$$\mathbb{P}[X \notin K_\epsilon] \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ bzw. } \mathbb{P}[Y \notin L_\epsilon] \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Damit gilt

$$\mathbb{P}\left[(X,Y) \notin K_\epsilon \times L_\epsilon\right] \leq \mathbb{P}[X \notin K_\epsilon] + \mathbb{P}[Y \notin L_\epsilon] \leq \epsilon. \tag{3.3}$$

Da sowohl K_ϵ als auch L_ϵ kompakt sind, ist auch $K_\epsilon \times L_\epsilon$ kompakt und aufgrund der Unabhängigkeit der Wahl der Kopplung folgt mit (3.3), dass

$$\pi\left[(X,Y) \notin K_\epsilon \times L_\epsilon\right] \leq \epsilon.$$

Somit ist $\Pi(\mu,\nu)$ straff.

□

Beweis Satz 3.6. Zuerst zeigen wir, dass $\Pi(\mu,\nu)$ kompakt ist.
Wir betrachten die Mengen $\{\mu\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{X})$ und $\{\nu\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{Y})$. Da $\mathcal{X}$ ein polnischer Wahrscheinlichkeitsraum ist, ist $\{\mu\}$ straff in $\mathcal{P}(\mathcal{X})$ und analog ist $\{\nu\}$ straff in $\mathcal{P}(\mathcal{Y})$. Mit Lemma 3.8 ist $\Pi(\mu,\nu)$ straff in $\mathcal{P}(\mathcal{X}\times\mathcal{Y})$ und mit dem Theorem von Prokhorov, Lemma 2.14, ist $\Pi(\mu,\nu)$ relativ kompakt.

Bleibt noch die Abgeschlossenheit zu zeigen. Sei π_k eine Folge aus $\Pi(\mu,\nu)$. Da $\Pi(\mu,\nu)$ relativ kompkakt ist existiert eine Teilfolge $\pi_{k_m} \in \Pi(\mu,\nu)$, die schwach gegen ein π konvergiert, d.h.

$$\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} f(x,y)\, d\pi_{k_m}(x,y) \overset{m\to\infty}{\to} \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} f(x,y)\, d\pi(x,y),\ \forall f \in \mathcal{X}\times\mathcal{Y}. \tag{3.4}$$

Wir müssen zeigen, dass $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ und wählen dazu nun $f(x,y) = f(x)$. f hängt nur von x ab. (3.4) vereinfacht sich zu

$$\int_{\mathcal{X}} f(x)\, dLaw_{\mathcal{X}}(\pi_{k_m})(x) \overset{m\to\infty}{\to} \int_{\mathcal{X}} f(x)\, dLaw_{\mathcal{X}}(\pi)(x),\ \forall f \in \mathcal{X}, \tag{3.5}$$

wobei wir mit $Law_{\mathcal{X}}(\pi_{k_m})$ die Randverteilung von π_{k_m} bezüglich $\mathcal{X}$ bezeichnen und mit $Law_{\mathcal{X}}(\pi)$ diejenige von π. Da die Folgenglieder π_{k_m} in $\Pi(\mu,\nu)$ sind, ist $Law_{\mathcal{X}}(\pi_{k_m}) = \mu$. Das heißt, dass die Folgenglieder in (3.5) gleich sind und somit auch identisch zu dem Grenzwert. Es folgt, dass auch $Law_{\mathcal{X}}(\pi) = \mu$ ist. Das heißt, dass π die Randverteilung μ bezüglich $\mathcal{X}$ hat.
Analog wird gezeigt, dass π die Randverteilung ν bezüglich $\mathcal{Y}$ hat.
Damit ist $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ und $\Pi(\mu,\nu)$ ist abgeschlossen.

Nun zur Optimalität. Sei $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\Pi(\mu,\nu)$, so dass $\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\, d\pi_k(x,y)$ schwach gegen das Infimum der Transportkosten konvergiert. Da $\Pi(\mu,\nu)$ kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge gegen ein $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$.
Sei außerdem $h : (x,y) \to a(x) + b(y)$. Nach Voraussetzung ist $a \in L^1(\mu)$ und $b \in L^1(\nu)$, damit liegt h in $L^1(\pi_k)$ und in $L^1(\pi)$. Außerdem ist nach Voraussetzung $c \geq h$ und es gilt $\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} h(x,y)\, d\pi_k(x,y) = \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} h(x,y)\, d\pi(x,y) = \int_{\mathcal{X}} a(x)\, d\mu(x) + \int_{\mathcal{Y}} b(y)\, d\nu(y)$. Damit ist Lemma 3.7 anwendbar, welches

$$\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\, d\pi(x,y) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\, d\pi_k(x,y)$$

ergibt. Da $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen das Infimum konvergiert, ist π gesuchte Minimierer.

□

Satz 3.9 (Vererbung der Optimalität bzgl. Restriktion). *Seien $(\mathcal{X},\mu)$ und $(\mathcal{Y},\nu)$ zwei polnische Wahrscheinlichkeitsräume und $a \in L^1(\mu), b \in L^1(\nu)$. Außerdem sei $c : \mathcal{X}\times\mathcal{Y} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ eine messbare Kostenfunktion mit $c(x,y) \geq a(x) + b(y)$, für alle x und y. Seien $C(\mu,\nu)$ die optimalen Gesamtkosten von μ nach ν mit $C(\mu,\nu) < \infty$ und $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ ein optimaler Transportplan.*
Sei $\tilde{\pi}$ ein nichtnegatives Maß auf $\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$, so dass $\tilde{\pi} \leq \pi$ und $\tilde{\pi}[\mathcal{X}\times\mathcal{Y}] > 0$. Dann

ist das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\pi' := \frac{\tilde{\pi}}{\tilde{\pi}[\mathcal{X} \times \mathcal{Y}]}$$

ein optimaler Transportplan mit Randverteilungen μ' und ν'.
Ist außerdem π der eindeutige optimale Transportplan zwischen μ und ν, dann ist auch π' der eindeutige optimale Transportplan zwischen μ' und ν'.

Beweis. Wir beweisen den Satz indirekt. Angenommen π' sei nicht optimal. Dann existiert ein Wahrscheinlichkeitsmaß π'' mit gleichen Randverteilungen, aber geringeren Gesamtkosten. D.h.

$$Law_{\mathcal{X}}(\pi'') = Law_{\mathcal{X}}(\pi') = \mu', \quad Law_{\mathcal{Y}}(\pi'') = Law_{\mathcal{Y}}(\pi') = \nu' \quad \text{und} \tag{3.6}$$
$$\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\, d\pi''(x,y) < \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\, d\pi'(x,y). \tag{3.7}$$

Wir betrachten

$$\hat{\pi} := (\pi - \tilde{\pi}) + \tilde{Z}\pi'', \tag{3.8}$$

wobei $\tilde{Z} := \tilde{\pi}[\mathcal{X} \times \mathcal{Y}] > 0$ ist. $\hat{\pi}$ ist wegen $\tilde{\pi} \leq \pi$ ein nichtnegatives Maß und kann mit der Voraussetzung $\tilde{\pi} = \pi'\tilde{\pi}[\mathcal{X} \times \mathcal{Y}] = \pi'\tilde{Z}$ umgeschrieben werden zu

$$\hat{\pi} := (\pi - (\pi'\tilde{Z})) + \tilde{Z}\pi'' = \pi + \tilde{Z}(\pi'' - \pi').$$

Mit (3.6) folgt

$$Law_{\mathcal{X}}(\hat{\pi}) = \underbrace{Law_{\mathcal{X}}(\pi)}_{=\mu} + \tilde{Z}\underbrace{(Law_{\mathcal{X}}(\pi'') - Law_{\mathcal{X}}(\pi'))}_{=0} = \mu \ \text{ und } \ Law_{\mathcal{Y}}(\hat{\pi}) = Law_{\mathcal{Y}}(\pi) = \nu.$$

Und mit (3.7) folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\, d\hat{\pi}(x,y) &= \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\, d\pi(x,y) + \tilde{Z}\left(\underbrace{\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\, d\pi''(x,y) - \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\, d\pi'(x,y)}_{<0}\right)\\ &< \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\, d\pi(x,y).\end{aligned}$$

Die Gesamtkosten unter $\hat{\pi}$ sind also niedriger als die Gesamtkosten von π, was im Widerspruch dazu steht, dass die Gesamtkosten unter π optimal sind.
Daraus folgt, dass (3.7) nicht erfüllt werden kann. Somit ist π' optimal.

Nun zur zweiten Behauptung.
Sei π der eindeutige optimale Transportplan zwischen μ und ν. Sei außerdem π'' ein beliebiger optimaler Transportplan zwischen μ' und ν'. Wir definieren wieder $\hat{\pi}$ wie in (3.8). Mit der Darstellung $\hat{\pi} = \pi + \tilde{Z}(\pi'' - \pi')$ sieht man, dass $\hat{\pi}$ dieselben Gesamtkosten liefert wie π, da

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\, d\hat{\pi}(x,y) &= \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\, d\pi(x,y) + \tilde{Z}\left(\underbrace{\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\, d\pi''(x,y) - \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\, d\pi'(x,y)}_{=0}\right)\\ &= \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\, d\pi(x,y).\end{aligned}$$

Dabei ist die Klammer gleich 0, da sowohl π' als auch π'' optimal sind, und dadurch die gleichen Gesamtkosten liefern.
Da aber π eindeutig ist, folgt $\pi = \hat{\pi}$ und mit (3.8) somit auch $\tilde{\pi} = \tilde{Z}\pi''$. Das wiederum ergibt mit $\tilde{\pi} = \tilde{Z}\pi'$, dass $\pi' = \pi''$. Somit ist π' auch eindeutig.

$\square$

Im Folgenden möchten wir den Begriff der c-zyklischen Monotonie einführen.
Um den Sinn und die Notwendigkeit der c-zyklischen Monotonie zu verstehen werden wir diesen Begriff zuerst informell einführen.
Angenommen es gibt N Produktionsstätten x_i, $i = 1, ..., N$ und Verkaufsstellen y_j, $j = 1, ..., N$. Es gibt einen Transportplan, der beschreibt wie viel Einheiten an Gütern von x_i nach y_j gehen.
Möchte man nun die entstandenen Kosten reduzieren, kann man versuchen Teile der Güter, die von x_1 nach y_1 gehen, umzuleiten zu einem y_2, welches näher an x_1 liegt. Der Gewinn oder auch Verlust beträgt dabei $c(x_1, y_2) - c(x_1, y_1)$. Nun sind in y_2 aber zu viele Einheiten an Gütern, so dass Teile der Güter von x_2 umgeleitet werden zu einem y_3, mit Gewinn oder Verlust $c(x_2, y_3) - c(x_2, y_2)$. Dieser Prozess setzt sich fort bis Teile der Güter von x_N zu y_1 umgeleitet werden. Dort kann er gestoppt werden, da ein neuer zulässiger Transportplan erreicht wurde.

Dieser Transportplan ist strikt besser, wenn er strikt geringere Gesamtkosten liefert, d.h.

$$\begin{aligned}&c(x_1, y_2) + c(x_2, y_3) + ... + c(x_{N-1}, y_N) + c(x_N, y_1)\\ &< c(x_1, y_1) + c(x_2, y_2) + ... + c(x_{N-1}, y_{N-1}) + c(x_N, y_N).\end{aligned}$$

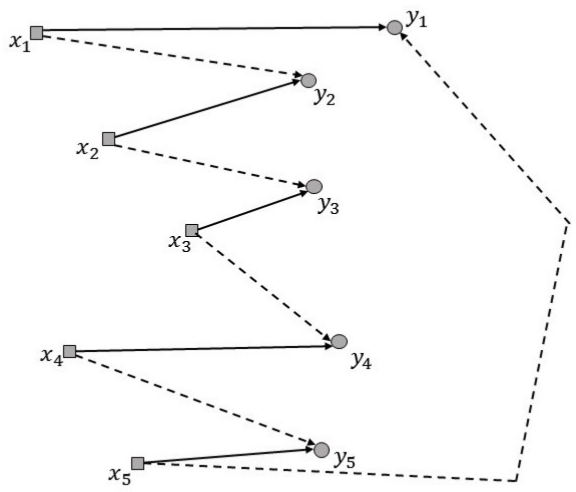

Abbildung 3: Beispiel einer zyklischen Verbesserung mit N=5

Kann man also solche Zyklen finden, dann kann der Transportplan verbessert werden, er ist nicht optimal. Existieren hingegen keine solche Zyklen, dann kann er zumindest nicht mit dieser Methode verbessert werden.

Diese Herleitung motviert die folgende Motivation.

Definition 3.10 (c-zyklisch monoton). *Seien $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ beliebige Mengen und $c : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to (-\infty, +\infty]$ eine Funktion. Eine Teilmenge $\Gamma \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ heißt c-zyklisch monoton, wenn für alle $N \in \mathbb{N}$ und jede Familie $(x_1, y_1), ..., (x_N, y_N)$ von Punkten aus Γ die Ungleichheit*

$$\sum_{i=1}^{N} c(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^{N} c(x_i, y_{i+1}) \tag{3.9}$$

gilt, wobei $y_{N+1} = y_1$ gesetzt wird.
Ein Transportplan heißt c-zyklisch monoton, falls er auf einer c-zyklisch monotonen Menge konzentriert ist.

Wie wir in Satz 3.15 sehen werden ist ein Transportplan optimal, genau dann wenn er auf einer c-zyklisch monotonen Menge konzentriert ist.

Die folgenden Definitionen sind wichtig um einen Satz, der äquivalente Optimalitätskriterien zu Verfügung stellt, und das Dualitätstheorem aufzustellen.

Definition 3.11 (c-Transformation). *Seien $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ beliebige Mengen und $c : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to (-\infty, +\infty]$ eine Funktion. Sei außerdem $\psi : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine beliebige*

Funktion. Ihre c_+-Transformation $\psi^{c_+} : \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ist definiert durch

$$\psi^{c_+}(y) := \inf_{x \in \mathcal{X}} \left(c(x,y) - \psi(x)\right).$$

Die c_--Transformation von ψ ist die Funktion $\psi^{c_-} : \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, die definiert ist durch

$$\psi^{c_-} := \sup_{x \in \mathcal{X}} \left(-c(x,y) - \psi(x)\right).$$

Analog sind die c_+-Transformation bzw. c_--Transformation einer Funktion ϕ auf $\mathcal{Y}$ definiert.

Definition 3.12 (c-konvex und c-konkav). *Seien $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ beliebige Mengen und $c : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to (-\infty, +\infty]$ eine Funktion. Eine Funktion $\psi : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ heißt c-konvex, falls sie nicht identisch $+\infty$ ist und ein $\phi : \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert, so dass $\psi = \phi^{c_-}$.*
Eine Funktion $\phi : \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ heißt c-konkav, falls sie nicht identisch $-\infty$ ist und ein $\psi : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert, so dass $\phi = \psi^{c_-}$.

Definition 3.13 (c-Superdifferential und c-Subdifferential). *Sei $\psi : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine c-konvexe Funktion. Das c-Subdifferential $\partial^{c_-}\psi$ ist definiert durch*

$$\partial^{c_-}\psi := \{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : \psi^{c_-}(y) - \psi(x) = c(x,y)\}.$$

Das c-Subdifferential von ψ im Punkt x ist

$$\partial^{c_-}\psi(x) = \{y \in \mathcal{Y} : (x,y) \in \partial^{c_-}\psi\},$$

oder äquivalent dazu

$$\psi(x) + c(x,y) \leq \psi(z) + c(z,y); \ \forall z \in \mathcal{X}. \tag{3.10}$$

Das c-Superdifferential einer c-konkaven Funktion $\phi(y) : \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ist definiert durch

$$\partial^{c_+}\phi := \{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : \phi(y) - \phi^{c_+}(x) = -c(x,y)\}.$$

Das c-Superdifferential von ϕ in y ist

$$\partial^{c_+}\phi(y) = \{x \in \mathcal{X} : (x,y) \in \partial^{c_+}\phi\}.$$

Die folgende Proposition liefert eine andere Charakterisierung der c-Konvexität.

Proposition 3.14. *Eine Funktion $\psi : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ist genau dann c-konvex, wenn $\psi^{c_-c_-} = \psi$.*
Analog ist eine Funktion $\phi : \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ genau dann c-konkav, wenn $\phi^{c_+c_+} = \phi$.

Beweis. Wir werden die Behauptung beweisen, in dem wir zuerst zeigen, dass für eine beliebige Funktion $\phi : \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ die Gleichung $\phi^{c_-c_-c_-} = \phi^{c_-}$ gilt.

$$
\begin{aligned}
\phi^{c_-c_-c_-} &= (\phi^{c_-c_-})^{c_-}(x) = \sup_{y \in \mathcal{Y}} \Big(- c(x,y) - \phi^{c_-c_-}(y) \Big) \\
&= \sup_{y \in \mathcal{Y}} \Big(- c(x,y) - \sup_{\tilde{x} \in \mathcal{X}} \big(- c(\tilde{x},y) - \phi^{c_-}(\tilde{x}) \big) \Big) \\
&= \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{\tilde{x} \in \mathcal{X}} \Big(- c(x,y) + c(\tilde{x},y) + \phi^{c_-}(\tilde{x}) \Big) \\
&= \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{\tilde{x} \in \mathcal{X}} \Big(- c(x,y) + c(\tilde{x},y) + \sup_{\tilde{y} \in \mathcal{Y}} \big(- c(\tilde{x},\tilde{y}) - \phi(\tilde{y}) \big) \Big) \\
&= \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{\tilde{x} \in \mathcal{X}} \sup_{\tilde{y} \in \mathcal{Y}} \Big(- c(x,y) + c(\tilde{x},y) + -c(\tilde{x},\tilde{y}) - \phi(\tilde{y}) \Big)
\end{aligned}
$$

Wählen wir nun einerseits $\tilde{x} = x$, dann ist

$$
\begin{aligned}
\phi^{c_-c_-c_-}(x) &\leq \sup_{y \in \mathcal{Y}} \sup_{\tilde{y} \in \mathcal{Y}} \Big(- c(x,y) + c(x,y) + -c(x,\tilde{y}) - \phi(\tilde{y}) \Big) \\
&= \sup_{y \in \mathcal{Y}} \sup_{\tilde{y} \in \mathcal{Y}} \Big(- c(x,\tilde{y}) - \phi(\tilde{y}) \Big) = \sup_{\tilde{y} \in \mathcal{Y}} \Big(- c(x,\tilde{y}) - \phi(\tilde{y}) \Big) = \phi^{c_-}(x).
\end{aligned}
$$

Wählen wir andererseits $\tilde{y} = y$, dann ist

$$
\begin{aligned}
\phi^{c_-c_-c_-}(x) &\geq \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{\tilde{x} \in \mathcal{X}} \Big(- c(x,y) + c(\tilde{x},y) + -c(\tilde{x},y) - \phi(y) \Big) \\
&= \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{\tilde{x} \in \mathcal{X}} \Big(- c(x,y) - \phi(y) \Big) = \sup_{y \in \mathcal{Y}} \Big(- c(x,y) - \phi(y) \Big) = \phi^{c_-}(x).
\end{aligned}
$$

Zusammen ist $\phi^{c_-c_-c_-} = \phi^{c_-}$.

Nun zur Behauptung. Ist ψ c-konvex, dann existiert ein ϕ, so dass $\psi = \phi^{c_-}$. Damit erhalten wir

$$\psi^{c_-c_-} = (\phi^{c_-c_-})^{c_-} = \phi^{c_-c_-c_-} = \phi^{c_-} = \psi.$$

Gilt andererseits $\psi^{c_-c_-} = \psi$. Dann gilt mit $\phi := \psi^{c_-}$

$$\phi^{c_-} = \psi^{c_-c_-} = \psi.$$

Da somit zu ψ ein ϕ existiert mit $\phi^{c-} = \psi$, ist ψ nach Definition c-konvex.

Der Beweis zur Konkavität erfolgt analog.

□

Nun werden wir noch einen Satz angeben, der Äquivalenzen zur Optimalität für das Primalproblem bereit stellt.

Satz 3.15. *Seien $(\mathcal{X}, \mu)$ und $(\mathcal{Y}, \nu)$ polnische Wahrscheinlichkeitsräume und sei $c : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R}$ eine stetige Kostenfunktion, so dass*

$$c(x, y) \leq a(x) + b(y), \ \forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y},$$

für zwei Funktionen $a \in L^1(\mu), b \in L^1(\nu)$. Außerdem seien die optimalen Kosten $C(\mu, \nu) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \int c \, d\pi$ endlich. Dann sind für alle $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ folgende Aussagen äquivalent:

(a) π ist optimal,

(b) π ist c-zyklisch monoton,

(c) es existiert ein c-konvexes ψ, so dass $\operatorname{supp}(\pi) \subset \partial^{c-}\psi$.

Der Träger oder auch Support $\operatorname{supp}(\pi)$ eines Maßes π beschreibt die kleinste abgeschlossene Menge, auf der π konzentriert ist.

Dieser Beweis und der Beweis des Dualitätstheorem 3.16 haben einige Überschneidungen. Da das Dualitätstheorem in dieser Arbeit wichtiger ist, werden wir es zuerst ausführen und den Beweis von Satz 3.15 danach behandeln.

Duales Problem Nun führen wir das duale Problem ein. Im primalen Problem werden die Kosten betrachtet. Im dualen Problem hingegen wird der Fokus auf den Preis gesetzt.
Informell gesagt: Würde man eine Firma beauftragen, die die Lieferung übernimmt. Dann würde diese für $\psi(x)$ Güter am Produktionsstandort x kaufen und für $\phi(y)$ an der Verkaufsstelle y verkaufen. Unser Preis ist dann $\phi(y) - \psi(x)$, anstatt den Kosten $c(x, y)$, für jede Einheit.
Damit es sich lohnt eine externe Firma zu beauftragen, müssen diese Preise geringer als die Kosten sein, d.h.

$$\phi(y) - \psi(x) \leq c(x, y), \ \forall (x, y). \tag{3.11}$$

Aus Sicht der externen Firma ist das Problem jetzt ihren Gewinn zu maximieren. Das führt zum dualen Problem:

$$\sup \left\{ \int_{\mathcal{Y}} \phi(y)\, d\nu(y) - \int_{\mathcal{X}} \psi(x)\, d\mu(x) : \phi(y) - \psi(x) \leq c(x,y) \right\}.$$

Mathematisch gesehen müssen (ψ, ϕ) integrierbar sein.
Mit der Ungleichung (3.11) ist klar, dass

$$\sup_{\phi - \psi \leq c} \left\{ \int_{\mathcal{Y}} \phi(y)\, d\nu(y) - \int_{\mathcal{X}} \psi(x)\, d\mu(x) \right\} \leq \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \left\{ \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\, d\pi(x,y) \right\}.$$

Jetzt kommen wir zu einem Hauptresultat in der Arbeit, dem Dualitätstheorem nach Kantorovich .

Theorem 3.16 (Kantorovich Dualitätstheorem). *Seien* $(\mathcal{X}, \mu)$ *und* $(\mathcal{Y}, \nu)$ *polnische Wahrscheinlichkeitsräume und sei* $c : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *eine unterhalbstetige Kostenfunktion, so dass*

$$c(x,y) \leq a(x) + b(y),\ \forall (x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y},$$

für zwei reellwertige, oberhalbstetige Funktionen $a \in L^1(\mu), b \in L^1(\nu)$. *Dann besteht Dualität:*

$$\begin{aligned}
\inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\, d\pi(x,y) &= \sup_{(\psi,\phi)\in C_b(\mathcal{X})\times C_b(\mathcal{Y}); \phi-\psi\leq c} \left(\int_{\mathcal{Y}} \phi(y)\, d\nu(y) - \int_{\mathcal{X}} \psi(x)\, d\mu(x) \right) \\
&= \sup_{(\psi,\phi)\in L^1(\mu)\times L^1(\nu); \phi-\psi\leq c} \left(\int_{\mathcal{Y}} \phi(y)\, d\nu(y) - \int_{\mathcal{X}} \psi(x)\, d\mu(x) \right) \\
&= \sup_{\psi \in L^1(\mu)} \left(\int_{\mathcal{Y}} \psi^{c-}(y)\, d\nu(y) - \int_{\mathcal{X}} \psi(x)\, d\mu(x) \right) \\
&= \sup_{\phi \in L^1(\mu)} \left(\int_{\mathcal{Y}} \phi(y)\, d\nu(y) - \int_{\mathcal{X}} \phi^{c+}(x)\, d\mu(x) \right).
\end{aligned}$$

Außerdem wird das Infimum als Minimum angenommen.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass o.B.d.A. $c \geq 0$ angenommen werden kann.
Wir definieren

$$\begin{aligned}
\tilde{c}(x,y) &:= c(x,y) - a(x) - b(y) \geq 0, \\
\Lambda &:= \int_{\mathcal{X}} a(x)\, d\mu(x) + \int_{\mathcal{Y}} b(y)\, d\nu(y) \in \mathbb{R}, \\
\tilde{\psi}(x) &:= \psi(x) + a(x), \\
\tilde{\phi}(y) &:= \phi(y) - b(y).
\end{aligned}$$

Diese Anpassungen verändern die Voraussetzung nicht. Ist c reell und unterhalbstetig, dann auch $\tilde{c}$. Sind $\psi \in L^1(\mu)$, $\phi \in L^1(\nu)$, dann sind auch $\tilde{\psi} \in L^1(\mu)$, $\tilde{\phi} \in L^1(\nu)$.
Sei $\Gamma \subset \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ c-zyklisch monoton. Dann gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^N \tilde{c}(x_i, y_i) &= \sum_{i=1}^N c(x_i, y_i) - \sum_{i=1}^N a(x_i) - \sum_{i=1}^N b(y_i)\\ &\leq \sum_{i=1}^N c(x_i, y_{i+1}) - \sum_{i=1}^N a(x_i) - \sum_{i=1}^N b(y_i)\\ &= \sum_{i=1}^N c(x_i, y_{i+1}) - \sum_{i=1}^N a(x_i) - \sum_{i=1}^N b(y_{i+1}) = \sum_{i=1}^N \tilde{c}(x_i, y_{i+1}).\end{aligned}$$

Dabei gilt $\sum_{i=1}^N b(y_i) = \sum_{i=1}^N b(y_{i+1})$ mit der Konvention $y_{N+1} = y_1$. Daher ist Γ auch $\tilde{c}$-zyklisch monoton.
Existiert Dualität bezüglich c, d.h. es existieren π, ψ, ϕ, so dass $\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x, y)\, d\pi(x, y) = \int_{\dagger} \phi(y)\, d\nu(y) - \int_{\mathcal{X}} \psi(x)\, d\mu(x)$ gilt, dann gilt auch

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \tilde{c}(x, y)\, d\pi(x, y) &= \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x, y)\, d\pi(x, y) - \Lambda\\ &= \int_{\mathcal{Y}} \phi(y)\, d\nu(y) - \int_{\mathcal{X}} \psi(x)\, d\mu(x) - \Lambda = \int_{\mathcal{Y}} \tilde{\phi}(y)\, d\nu(y) - \int_{\mathcal{X}} \tilde{\psi}(x)\, d\mu(x).\end{aligned}$$

D.h. es existiert auch Dualität bezüglich $\tilde{c}$.
Daher nehmen wir o.B.d.A. an, dass $c \geq 0$ ist.

Den Beweis teilen wir in fünf Schritte auf.

Schritt 1: *Sind $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{x_i}$, $\nu = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \delta_{y_j}$ und die Kosten $c(x_i, y_j)$ endlich. Dann existiert mindestens ein c-zyklisch monotoner Transportplan.*

In diesem Spezialfall, in dem die Randverteilungen durch Dirac-Maße von n Punkten dargestellt sind, kann sich der Transportplan von μ nach ν als eine stochastische $n \times n$-Matrix, mit Einträgen $a_{i,j} \in [0, 1]$, darstellen lassen. Dabei entspricht $a_{i,j}$ dem Anteil der Masse $\frac{1}{n}$, der von x_i nach y_i transportiert wird.
Das Kantorovich Problem wird zu

$$\inf_{(a_{i,j})} \sum_{i,j} a_{i,j} c(x_i, y_j),$$

wobei das Infimum über alle Matrizen $(a_{i,j})$ genommen wird, die

$$\sum_i a_{i,j} = 1, \quad \sum_j a_{i,j} = 1$$

erfüllen. Dabei minimieren wir eine lineare Funktion auf der kompakten Menge $[0,1]^{n\times n}$. Es existiert also ein Minimierer. π, der dazugehörige optimale Transportplan entspricht dann

$$\pi = \frac{1}{n}\sum_{i,j} a_{i,j}\delta_{(x_i,y_j)}.$$

$S = \operatorname{supp}(\pi)$ ist dann die Menge aller (x_i, y_j), so dass $a_{i,j} > 0$.
Angenommen S sei nicht c-zyklisch monoton. Dann existieren $(x_{i_1}, y_{j_1}), ..., (x_{i_N}, y_{j_N})$ in S, so dass

$$c(x_{i_1}, y_{j_2}) + c(x_{i_2}, y_{j_3}) + ... + c(x_{i_N}, y_{j_1}) < c(x_{i_1}, y_{j_1}) + c(x_{i_2}, y_{j_2}) + ... + c(x_{i_N}, y_{j_N}), \tag{3.12}$$

mit der Konvention $y_{j_{N+1}} = y_{j_1}$.
Sei $a := \min(a_{i_1,j_1}, ..., a_{i_n,j_n})$. Wir definieren einen neuen Transportplan $\tilde{\pi}$ durch

$$\tilde{\pi} := \pi + \frac{a}{n}\sum_{l=1}^{N}\left(\delta_{(x_{i_l},y_{j_{l+1}})} - \delta_{(x_{i_l},y_{j_l})}\right).$$

Die Randverteilungen $\tilde{\mu}$, $\tilde{\nu}$ sind gegeben durch

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i} + a\sum_{l=1}^{N}\underbrace{\left(\delta_{x_{i_l}} - \delta_{x_{i_l}}\right)}_{=0}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i} = \mu,$$

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\delta_{y_j} + a\underbrace{\sum_{l=1}^{N}\left(\delta_{y_{j_{l+1}}} - \delta_{y_{j_l}}\right)}_{=0}\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{y_j} = \nu.$$

$\sum_{l=1}^{N}\left(\delta_{y_{j_{l+1}}} - \delta_{y_{j_l}}\right) = 0$ gilt dabei, da

$$\sum_{l=1}^{N}\delta_{y_{j_{l+1}}} = \sum_{l=1}^{N-1}\delta_{y_{j_{l+1}}} + \underbrace{\delta_{y_{j_{N+1}}}}_{=\delta_{y_{j_1}}} = \sum_{l=2}^{N}\delta_{y_{j_l}} + \delta_{y_{j_1}} = \sum_{l=1}^{N}\delta_{y_{j_l}}.$$

$\tilde{\pi}$ hat somit die korrekten Randverteilungen.

Außerdem gilt mit (3.12)

$$\sum_{i,j} a_{i,j} c(x_i, y_j) + a \underbrace{\sum_{l=1}^{N} \big(c(x_{i,l}, y_{j_{l+1}}) - c(x_{i,l}, y_{j_l}) \big)}_{<0} < \sum_{i,j} a_{i,j} c(x_i, y_j).$$

Das heißt, dass Kosten mit $\tilde{\pi}$ strikt kleiner sind, also die Kosten mit π. Das ist ein Widerspruch, da π der optimale Transportplan ist. Daraus folgt, dass S c-zyklisch monoton ist.

Schritt 2: *Ist c stetig, dann existiert ein c-zyklisch monotoner Transportplan.*

Wir betrachten Folgen von unabhängigen Zufallsvariablen $x_i \in \mathcal{X}$, $y_j \in \mathcal{Y}$ mit Verteilungen μ bzw. ν. Mit dem Gesetz der großen Zahlen[17] gilt mit Wahrscheinlichkeit 1, dass

$$\mu_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i} \to \mu, \quad \nu_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \delta_{y_j} \to \nu,$$

für $n \to \infty$ im Sinne der schwachen Konvergenz. Aus der Kompaktheit der Folgenglieder aus $\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ folgt mit Lemma 2.14 (Theorem von Prokhorov), dass sie straff sind.
Sei π_n für jedes n ein c-zyklisch monotoner Transportplan zwischen μ_n und ν_n. Die Existenz wird durch Schritt 1 sicher gestellt. Mit Lemma 3.8 folgt, dass $\{\pi\}_{n\in\mathbb{N}}$ straff ist. Mit Lemma 2.14 folgt wiederum, dass es auch kompakt ist, d.h. es existiert eine Teilfolge, die schwach gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß π konvergiert,

$$\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} h(x,y)\, d\pi_n(x,y) \to \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} h(x,y)\, d\pi(x,y), \tag{3.13}$$

für alle beschränkten stetigen Funktionen h auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.
Wählen wir nun $h(x,y) = f(x)$, dann folgt

$$\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} f(x)\, d\pi_n(x,y) = \int_{\mathcal{X}} f(x)\, d\mu_n(x) \to \int_{\mathcal{X}} f(x)\, d\mu(x).$$

Mit (3.13) gilt dann $\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} f(x)\, d\pi(x,y) = \int_{\mathcal{X}} f(x)\, d\mu(x)$. Somit hat π die Randverteilung μ bezüglich $\mathcal{X}$. Wählt man analog $h(x,y) = g(y)$, dann folgt, dass π die Randverteilung ν bezüglich $\mathcal{Y}$ hat. Somit ist π ein zulässiger Transportplan zwischen μ und ν.

[17] vgl. [Hen13, Theorem 26.1]

Nun zur c-zyklischen Monotonie.
Für jedes n impliziert die c-zyklische Monotonie von π_n, dass für alle N und $\pi_n^{\otimes N} = \pi_n \otimes ... \otimes \pi_n$ fast alle $(x_1, y_1), ..., (x_N, y_N)$ die Ungleichung (3.9) erfüllt ist. D.h. $\pi_n^{\otimes N}$ ist konzentriert auf einer Menge $C(N)$ aller N-Tupel $((x_1, y_1), ..., (x_N, y_N)) \in (\mathcal{X} \times \mathcal{Y})^N$, die (3.9) erfüllen. Da c stetig ist, ist $C(N)$ abgeschlossen. Daraus folgt, dass die Grenze $\pi^{\otimes N}$ der schwach konvergenten Folge $\{\pi_n^{\otimes N}\}_{n \in \mathbb{N}}$ auch auf $C(N)$ konzentriert ist. Es folgt

$$(\mathrm{supp}(\pi))^N = \mathrm{supp}(\pi^{\otimes N}) \subset C(N).$$

Da diese Gleichung für alle N gilt, ist $\mathrm{supp}(\pi)$ c-zyklisch monoton und damit auch π.

Schritt 3: *Ist c stetig reellwertig und π c-zyklisch monoton, dann existiert ein c-konvexes ψ, so dass $\partial^{c-}\psi$ den Support von π enthält.*

Wir möchten ψ so konstruieren, dass es c-konvex ist und $\mathrm{supp}(\pi) \subseteq \partial^{c-}$. Bezeichne wie zuvor Γ den Support von π.
Nach (3.10) ist $y \in \partial^{c-}\psi(x)$ äquivalent zu

$$\psi(x) \leq -c(x, y) + c(z, y) + \psi(z), \ \forall z \in \mathcal{X}. \tag{3.14}$$

Wählen wir nun ein festes $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Gamma$. Dann gilt für $(x_i, y_i) \in \Gamma$, $i = 1, ..., m$

$$\begin{aligned}
\psi(x) &\leq -c(x, y_1) + c(x_1, y_1) + \psi(x_1) \\
&\leq (-c(x, y_1) + c(x_1, y_1)) + (-c(x_1, y_2) + c(x_2, y_2) + \psi(x_2) \\
&\leq ... \\
&\leq (-c(x, y_1) + c(x_1, y_1)) + (-c(x_1, y_2) + c(x_2, y_2) + ... + (-c(x_m, \bar{y}) + c(\bar{x}, \bar{y})) + \psi(\bar{x}).
\end{aligned}$$

Es ist daher nützlich ψ als Supremum über alle $(x_1, y_1), ..., (x_m, y_m) \in \Gamma$ und alle $m \in \mathbb{N}$ zu definieren. Außerdem können wir die Konstante $\psi(\bar{x})$ verwerfen, so dass ψ wie folgt aussieht

$$\begin{aligned}
\psi(x) := \sup_{m \in \mathbb{N}} \sup \Big\{ &(-c(x, y_1) + c(x_1, y_1)) + (-c(x_1, y_2) + c(x_2, y_2) \\
&+ ... + (-c(x_m, \bar{y}) + c(\bar{x}, \bar{y})) \, ; (x_1, y_1), ..., (x_m, y_m) \in \Gamma \Big\}.
\end{aligned}$$

Wählen wir $m = 1$ und $(x_1, y_1) = (\bar{x}, \bar{y})$, dann folgt

$$\psi(\bar{x}) \geq c(\bar{x}, \bar{y}) - c(\bar{x}, \bar{y}) + c(\bar{x}, y_1) - c(\bar{x}, \bar{y}) = 0.$$

Andererseits gilt mit c-zyklischen Monotonie, dass $\psi(\bar{x}) \leq 0$. Zusammen ist somit $\psi(\bar{x}) = 0$.
Nun können wir y_1 durch y umbenennen und erhalten

$$\begin{aligned}\psi(x) = \sup_{y} \sup_{m\in\mathbb{N}} \sup \Big\{ & (-c(x, y) + c(x_1, y)) + (-c(x_1, y_2) + c(x_2, y_2) \\ & + ... + (-c(x_m, \bar{y}) + c(\bar{x}, \bar{y}))\,; (x_1, y), ..., (x_m, y_m) \in \Gamma \Big\}.\end{aligned}$$

Definieren wir nun eine Funktion ϕ, so dass

$$\begin{aligned}-\phi = \sup_{m\in\mathbb{N}} \sup \Big\{ & c(x_1, y) + (-c(x_1, y_2) + c(x_2, y_2) \\ & + ... + (-c(x_m, \bar{y}) + c(\bar{x}, \bar{y}))\,; (x_1, y), ..., (x_m, y_m) \in \Gamma \Big\},\end{aligned}$$

dann gilt

$$\psi(x) = \sup_{y} \left(-c(x, y) - \phi(y)\right).$$

ψ ist somit eine c-konvexe Funktion.
Nun zu $\Gamma \subseteq \partial^{c-}\psi$. Sei $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Gamma$. Wählen wir $(x_1, y_1) = (\tilde{x}, \tilde{y})$, dann erhalten wir

$$\begin{aligned}\psi(x) \geq \sup_{m\in\mathbb{N}} \sup \Big\{ & (-c(x, \tilde{y}) + c(\tilde{x}, \tilde{y})) + (-c(\tilde{x}, y_2) + c(x_2, y_2) \\ & + ... + (-c(x_m, \bar{y}) + c(\bar{x}, \bar{y}))\,; (\tilde{x}, \tilde{y}), ..., (x_m, y_m) \in \Gamma \Big\} \\ \geq & (-c(x, \tilde{y}) + c(\tilde{x}, \tilde{y})) + \sup_{m\in\mathbb{N}} \sup \Big\{ (-c(\tilde{x}, y_2) + c(x_2, y_2) \\ & + ... + (-c(x_m, \bar{y}) + c(\bar{x}, \bar{y}))\,; (x_2, y_2), ..., (x_m, y_m) \in \Gamma \Big\}.\end{aligned}$$

Dabei entspricht der letzte Summand $\psi(\tilde{x})$.
Daraus ergibt sich

$$\psi(x) \geq -c(x, \tilde{y}) + c(\tilde{x}, \tilde{y}) + \psi(\tilde{x}),$$

bzw. $\psi(\tilde{x}) \leq -c(\tilde{x}, \tilde{y}) + c(x, \tilde{y}) + \psi(x)$. Das entspricht nach (3.14), dass $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \partial^{c-}\psi$.
Daraus folgt $\Gamma \subseteq \partial^{c-}\psi$.

Schritt 4: *Ist c stetig und beschränkt, dann existiert Dualität.*

Sei $||c|| := \sup c(x,y)$. Nach Schritt 2 existiert ein c-zyklisch monotoner Transportplan π und nach Schritt 3 existiert ein c-konvexes ψ, welches wir explizit konstruiert haben, so dass $\operatorname{supp}(\pi) \subseteq \partial^{c-}\psi$.
Sei $\phi = \psi^{c-}$.
Aus Schritt 3 ist bekannt, dass $\psi = \sup \psi_m$, wobei ψ_m ein Supremum von stetigen Funktionen ist und daher selbst unterhalbstetig. Deswegen ist ψ auch messbar. Dasselbe gilt auch für ϕ. Wir müssen noch zeigen, ψ und ϕ beschränkt sind, dann haben wir die Integrierbarkeit.
Sei $(x_0, y_0) \in \partial^{c-}\psi$, so dass $\psi(x_0) > -\infty$ und damit $\phi(y_0) < \infty$, dann gilt für alle $x \in \mathcal{X}$

$$\psi(x) = \phi^{c-}(x) = \sup_y(-c(x,y) - \phi(y)) = \inf_y(c(x,y) + \phi(y)) \leq c(x,y_0) + \phi(y_0) \leq ||c|| + \phi(y_0),$$
$$\phi(y) = \psi^{c+}(y) = \inf_x(c(x,y) - \psi(x)) = \sup_x(-c(x,y) + \psi(x)) \geq -c(x_0,y) + \psi(x_0) \geq -||c|| + \psi(x_0).$$

Andererseits gilt wenn man die Grenzen einsetzt

$$\psi(x) = \inf_y(c(x,y) + \phi(y)) \geq \inf_y \phi(y) \geq -||c|| + \psi(x_0),$$
$$\phi(y) = \sup_x(-c(x,y) + \psi(x)) \leq \sup_x \psi(x) \leq ||c|| + \phi(y_0).$$

Daher sind sowohl ψ als auch ϕ von oben und unten beschränkt und damit auch integrierbar. Da μ und ν die Randverteilungen von π sind, ergibt sich

$$\int_{\mathcal{Y}} \phi(y)\, d\nu(y) - \int_{\mathcal{X}} \psi(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} (\phi(y) - \psi(x))\; d\pi(x,y).$$

Außerdem gilt im Support von π die Gleichheit $\phi(y) - \psi(x) = c(x,y)$. Deshalb folgt

$$\int_{\mathcal{Y}} \phi(y)\, d\nu(y) - \int_{\mathcal{X}} \psi(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} (\phi(y) - \psi(x))\; d\pi(x,y) = \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\, d\pi(x,y).$$

Daher existiert Dualtität

Schritt 5: *Ist c unterhalbstetig, dann existiert Dualität.*
Da c nichtnegativ und unterhalbstetig ist, können wir c als Grenzwert einer monoton steigenden Folge ausdrücken:

$$c(x,y) = \lim_{k\to\infty} c_k(x,y),$$

wobei die c_k, $k \in \mathbb{N}$ beschränkt und gleichmäßig stetig sind.
Mit Schritt 4 existieren für jedes k π_k, ϕ_k, ψ_k, so dass ψ_k beschränkt und c-konvex ist und $\phi_k = \psi_k^{c-}$ gilt. Damit gilt mit Schritt 4

$$\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c_k(x,y)\,d\pi_k(x,y) = \int_{\mathcal{Y}} \phi_k(y)\,d\nu(y) - \int_{\mathcal{X}} \psi_k(x)\,d\mu(x). \tag{3.15}$$

Außerdem gilt $c_k \leq c$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Daher folgt $\phi_k(y) - \psi_k(x) \leq c_k(x,y) \leq c(x,y)$, d.h. alle (ϕ_k, ψ_k) sind zulässig in dem dualen Problem mit Kosten c.
In dem Beweis von Satz 3.6 haben wir gezeigt, dass $\Pi(\mu,\nu)$ kompakt ist. Daher existiert eine Teilfolge von π_k, die schwach gegen ein $\tilde{\pi} \in \Pi(\mu,\nu)$ konvergiert. Der Einfachheit halber bezeichnen wir diese Teilfolge auch mit $\{\pi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Für $l \leq k$ haben wir $c_l \leq c_k$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c_l(x,y)\,d\tilde{\pi}(x,y) &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c_l(x,y)\,d\pi_k(x,y) \\
&\leq \limsup_{k\to\infty} \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c_k(x,y)\,d\pi_k(x,y) \\
&= \limsup_{k\to\infty} \left(\int_{\mathcal{Y}} \phi_k(y)\,d\nu(y) - \int_{\mathcal{X}} \psi_k(x)\,d\mu(x) \right)
\end{aligned}$$

Dabei gilt die erste Gleichheit mit schwacher Konvergenz, die Ungleichheit wegen $c_l \leq c_k$ und die letzte Gleichheit mit (3.15). Außerdem gilt mit monotoner Konvergenz

$$\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\,d\tilde{\pi}(x,y) = \lim_{l\to\infty} \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c_l(x,y)\,d\tilde{\pi}(x,y).$$

Das liefert zusammen

$$\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\,d\tilde{\pi}(x,y) \leq \limsup_{k\to\infty} \left(\int_{\mathcal{Y}} \phi_k(y)\,d\nu(y) - \int_{\mathcal{X}} \psi_k(x)\,d\mu(x) \right). \tag{3.16}$$

Außerdem haben wir einerseits

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\,d\pi(x,y) \leq \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\,d\tilde{\pi}(x,y) \tag{3.17}$$

und andererseits $\phi_k(y) - \psi_k(x) \leq c(x,y)$ und damit

$$\limsup_{k\to\infty} \left(\int_{\mathcal{Y}} \phi_k(y)\,d\nu(y) - \int_{\mathcal{X}} \psi_k(x)\,d\mu(x) \right) \leq \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\,d\pi(x,y). \tag{3.18}$$

Schlussendlich führen (3.16), (3.17) und (3.18) zu

$$\begin{aligned}\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\,d\pi(x,y) &\leq \limsup_{k\to\infty}\left(\int_{\mathcal{Y}}\phi_k(y)\,d\nu(y)-\int_{\mathcal{X}}\psi_k(x)\,d\mu(x)\right)\\ &\leq \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\,d\pi(x,y)\end{aligned}$$

und äquivalent dazu

$$\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\,d\pi(x,y) = \limsup_{k\to\infty}\left(\int_{\mathcal{Y}}\phi_k(y)\,d\nu(y)-\int_{\mathcal{X}}\psi_k(x)\,d\mu(x)\right).$$

Daher haben wir

$$\int_{\mathcal{Y}}\phi_k(y)\,d\nu(y)-\int_{\mathcal{X}}\psi_k(x)\,d\mu(x) \underset{k\to\infty}{\to} \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\,d\pi(x,y). \tag{3.19}$$

D.h. wir haben Dualität für $k\to\infty$.

□

Beweis Satz 3.15. $(a)\Rightarrow(b)$: Sei π ein optimaler Transportplan. Wir betrachten $(\phi_k,\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie in Schritt 5 des Beweises von Theorem 3.16. Die optimalen Gesamtkosten sind nach Voraussetzung endlich, daher ist $c\in L^1(\pi)$. Mit (3.19) ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}}\phi_k(y)-\psi_k(x)\,d\pi(x,y) &= \int_{\mathcal{Y}}\phi_k(y)\,d\nu(y)-\int_{\mathcal{X}}\psi_k(x)\,d\mu(x)\\ &\underset{k\to\infty}{\to} \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)}\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)\,d\pi(x,y)\end{aligned}$$

und daher auch

$$\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x,y)-\phi_k(y)+\psi_k(x)\,d\pi(x,y) \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Das heißt $c(x,y)-\phi_k(y)+\psi_k(x)$ konvergiert schwach in $L^1(\pi)$ für $k\to\infty$. Gehen wir zu einer Teilfolge über konvergiert es π-fast sicher. Damit konvergiert $\phi_k(y_i)-\psi_k(x_i)$ gegen $c(x_i,y_i)$, $\pi(dx_i,dy_i)$-fast sicher, für $k\to\infty$.
Da nach Voraussetzung $c(x_i,y_{i+1})\geq\phi_k(y_{i+1})-\psi_k(x_i)$ gilt, folgt mit der Konvention $y_{N+1}=y_1$

$$\sum_{i=1}^{N} c(x_i,y_{i+1}) \geq \sum_{i=1}^{N}\phi_k(y_{i+1})-\psi_k(x_i) = \sum_{i=1}^{N}\phi_k(y_i)-\psi_k(x_i).$$

Nun können wir auf der rechten Seite zum Grenzübergang $k\to\infty$ gehen und erhalten $\pi^{\otimes N}$-fast sicher

$$\sum_{i=1}^{N} c(x_i, y_{i+1}) \geq \sum_{i=1}^{N} c(x_i, y_i). \tag{3.20}$$

Daher ist $\pi^{\otimes N}$ konzentriert auf der Menge $\Gamma_N \subset (\mathcal{X} \times \mathcal{Y})^N$, die aus allen N-Tupeln $((x_1, y_1), ..., (x_N, y_N))$ besteht, die (3.20) erfüllen.
Sei $proj_k((x_i, y_i)_{1\leq i\leq N}) := (x_k, y_k)$. Dann ist $\Gamma := \cap_{1\leq k\leq N} proj_k(\Gamma_N)$ c-zyklisch monoton. Da π auf Γ konzentriert ist, ist somit auch π c-zyklisch monoton.
$(b) \Rightarrow (c)$: Das entspricht Schritt 3 des Beweises von Theorem 3.16.
$(c) \Rightarrow (a)$: Sei $\tilde{\pi} \in \Pi(\mu, \nu)$ ein beliebiger Transportplan. Um zu zeigen, dass π optimal ist, müssen wir zeigen, dass $\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x, y)\, d\pi(x, y) \leq \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x, y)\, d\tilde{\pi}(x, y)$. Nach (c) haben wir $\psi(y)^{c-} - \psi(x) = c(x, y)$, für alle $(x, y) \in \operatorname{supp}(\pi)$ und $\psi(y)^{c-} - \psi(x) \leq c(x, y)$, für alle $(x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x, y)\, d\pi(x, y) &= \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \psi(y)^{c-} - \psi(x)\, d\pi(x, y) = \int_{\mathcal{Y}} \psi^{c-}(y)\, d\nu(y) - \int_{\mathcal{X}} \psi(x)\, d\mu(x)\\ &= \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \psi(y)^{c-} - \psi(x)\, d\tilde{\pi}(x, y) \leq \int_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} c(x, y)\, d\tilde{\pi}(x, y).\end{aligned}$$

□

3.3 Verbindung zur Bewertung von Optionen

Die vorangegangen Ausführungen bezogen sich auf die allgemeine optimale Transporttheorie. Um die Theorie für die Optionsbewertung verwenden zu können, müssen wir einige Voraussetzungen abändern.

Anstatt zwei polnische Wahrscheinlichkeitsräume $(\mathcal{X}, \mu)$ und $(\mathcal{Y}, \nu)$ zu betrachten, benötigen wir hier den Raum $\mathbb{R}^T$ und Wahrscheinlichkeitsmaße $\mu_1, ..., \mu_T$ auf $\mathbb{R}$.
Die Menge der Transportpläne $\Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$ besteht aus allen Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\mathbb{R}^T$ mit Randverteilungen $\mu_1, ..., \mu_T$.
Die Kostenfunktion ist eine messbare Funktion $\Phi : \mathbb{R}^T \to (-\infty, \infty]$, die von unten beschränkt ist, derart dass μ_i-integrierbare Funktionen u_i, $i = 1, ..., T$ existieren, so dass

$$\Phi(x) \geq u_1(x_1) \oplus ... \oplus u_T(x_T). \tag{3.21}$$

Dabei ist $u_1 \oplus ... \oplus u_T(x) := u_1(x_1) + ... + u_T(x_T)$. Mit gegebener Kostenfunktion Φ

und Transportplan π sind die Gesamtkosten gegeben durch

$$\int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\pi(x). \tag{3.22}$$

Das primale Problem besteht darin $\int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\pi(x)$ über alle Transportpläne $\pi \in \Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$ zu minimieren.

Betrachten wir nun μ_i-integrierbare Funktionen u_i, $i = 1, ..., T$, die (3.21) erfüllen, dann erhalten wir für jeden Transportplan π

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\pi(x) &\geq \int_{\mathbb{R}^T} u_1(x_1) \oplus ... \oplus u_T(x_T)\, d\pi(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} u_1(x_1)\, d\mu_1(x_1) + ... + \int_{\mathbb{R}} u_T(x_T)\, d\mu_T(x_T). \end{aligned} \tag{3.23}$$

Das duale Problem besteht darin (3.23) über μ_i-integrierbare Funktionen u_i, $i = 1, ..., T$ zu maximieren, die (3.21) erfüllen.
Zum Replizieren unserer Option möchten wir ebenfalls nur Optionen nutzen. Außerdem werden wir lineare Funktionen verwenden, daher grenzen wir diese Funktionen weiter ein. Es werden nur Funktionen folgender Form berücksichtigt.

$$\mathcal{S} = \left\{ u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : u(x) = a + bx + \sum_{i=1}^{m} c_i (x - k_i)_+, a, b, c_i, k_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Damit können wir nun einen Satz über Dualtität angeben, welcher unsere Anforderungen bezüglich der Optionspreisbewertung erfüllt. Es dient als Grundlage für Theorem 4.1, das Superreplikation Resultat im nächsten Abschnitt, welches eine untere Schranke für den Preis einer Option angibt.

Satz 3.17. *Sei $\Phi : \mathbb{R}^T \to (-\infty, \infty]$ eine unterhalbstetige Funktion, die*

$$\Phi(x_1, ..., x_T) \geq -K \cdot (1 + |x_1| + ... + |x_T|)$$

erfüllt für alle $(x_1, ..., x_T) \in \mathbb{R}^T$, wobei K eine Konstante ist. Seien $\mu_1, ..., \mu_T$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$ mit endlichen ersten Momenten. Dann gilt

$$\begin{aligned} p^P(\Phi) &= \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\pi(x) : \pi \in \Pi(\mu_1, ..., \mu_T) \right\} \\ &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^{T} \int_{\mathbb{R}} u_i(x_i)\, d\mu_i(x_i) : u_1 \oplus ... \oplus u_T \leq \Phi, u_i \in \mathcal{S} \right\} = p^D(\Phi). \end{aligned}$$

Angewandt auf die Optionspreisbewertung sagt der vorherige Satz Folgendes aus.

Man betrachtet europäische Optionen mit Auszahlung u_i und Auszahlungsdatum t_i, die die Option Φ subreplizieren, d.h. $\Phi \geq \sum_{i=1}^{T} u_i$. Der größte Preis $\sum_{i=1}^{T} \int_{\mathbb{R}} u_i(x_i)\, d\mu_i(x_i)$ unter allen Optionen aus $\mathcal{S}$ ist eine untere Grenze für den Preis von Φ unter allen Modellen, d.h. unter allen Transportplänen π.
Das ist allerdings nur eine Interpretation. $\mathcal{S}$ besteht nicht nur aus europäischen Optionen, auch andere Optionen oder auch Linearkombinationen von Optionen sind denkbar.

Bevor wir diesen Satz beweisen, benötigen wir zuvor noch ein Lemma.

Lemma 3.18. *Seien $\pi \in P(\mathbb{R}^T)$ und $h : \mathbb{R}^T \to (-\infty, +\infty]$ aus $C_c(\mathbb{R}^T)$. Außerdem sei $f : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$ π-integrierbar und es gelte $f \leq h$.*
Dann existiert eine Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$ aus $C_b(\mathbb{R}^T)$, so dass

1. *$\tilde{f} \leq h$,*
2. *$\int_{\mathbb{R}^T} f(x)\, d\pi(x) = \int_{\mathbb{R}^T} \tilde{f}(x)\, d\pi(x)$.*

Beweis. Wir betrachten die Funktion

$$g_c(x) := h(x) - c,\ c \in \mathbb{R}_+^T.$$

Damit bilden wir das Funktional

$$G(c) := \int_{\mathbb{R}^T} g_c(x)\, d\pi(x) = \int_{\mathbb{R}^T} h(x)\, d\pi(x) - c\,\underbrace{\pi(\mathbb{R}^T)}_{=1} = \int_{\mathbb{R}^T} h(x)\, d\pi(x) - c.$$

$G(\cdot)$ ist dann ein stetiges lineares Funktional mit

$$\begin{aligned} G(0) &= \int_{\mathbb{R}^T} h(x)\, d\pi(x) - 0 = \int_{\mathbb{R}^T} h(x)\, d\pi(x), \\ G(+\infty) &= \int_{\mathbb{R}^T} h(x)\, d\pi(x) - \infty = -\infty. \end{aligned}$$

Da G stetig ist, nimmt es somit jeden Wert zwischen $-\infty$ und $\int_{\mathbb{R}^T} h(x)\, d\pi(x)$ an. Außerdem gilt

$$-\infty < \int_{\mathbb{R}^T} f(x)\, d\pi(x) \leq \int_{\mathbb{R}^T} h(x)\, d\pi(x),$$

da f einerseits integrierbar ist, und andererseits, da $f \leq h$.
Es existiert somit ein $c_0 \in [0, +\infty)^T$, so dass

$$G(c_0) = \int_{\mathbb{R}^T} f(x)\, d\pi(x).$$

Definieren wir nun die Funktion $\tilde{f}(x) = g_{c_0}(x)$.
Da h nach Voraussetzung stetig ist, ist auch g_{c_0} stetig und somit auch $\tilde{f}$.
Da h auch einen kompakten Träger hat, ist g_{c_0} beschränkt und somit auch $\tilde{f}$.
Zusammen ist $\tilde{f} \in C_b(\mathbb{R}^T)$. Außerdem folgt

1. $\tilde{f}(x) = g_{c_0}(x) = h(x) - c_0 \leq h(x)$,
2. $\int_{\mathbb{R}^T} \tilde{f}(x)\, d\pi(x) = \int_{\mathbb{R}^T} g_{c_0}(x)\, d\pi(x) = G(c_0) = \int_{\mathbb{R}^T} f(x)\, d\pi(x)$.

□

In [Kel84, Theorem 2.6] wird

$$\inf\left\{\int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\pi(x) : \pi \in \Pi(\mu_1, ..., \mu_T)\right\} =$$
$$\sup\left\{\sum_{i=1}^{T} \int_{\mathbb{R}} u_i(x_i)\, d\mu_i(x_i) : u_1 \oplus ... \oplus u_T \leq \Phi, u_i \text{ ist } \mu_i - \text{integrierbar}\right\} \tag{3.24}$$

für unterhalbstetige Kostenfunktionen $\Phi : \mathbb{R}^T \to [-\infty, \infty]$ bewiesen.
Wir werden diese Aussage für den folgenden Beweis nutzen.

Beweis Satz 3.17. Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $\Phi \geq 0$, denn falls Satz 3.17 für ein Φ und Funktionen $u_1, ..., u_T \in \mathcal{S}$ gilt, dann kann die neue Funktion $\Phi' = \Phi - (u_1 \oplus ... \oplus u_T) \geq 0$ betrachtet werden.
Außerdem werden wir die Behauptung zuerst für $\Phi \in C_c(\mathbb{R}^T)$ zeigen.
Mit (3.24) gilt $p^P(\Phi) = p^D(\Phi)$ für μ_i-integrierbare Funktionen u_i, $i = 1, ..., T$.
Wenden wir nun Lemma 3.18 auf

$$h = \Phi$$
$$f = u_1 \oplus ... \oplus u_T$$

an, erhalten wir ein stetig beschränktes $\tilde{f} := \tilde{u}_1 \oplus ... \oplus \tilde{u}_T$, welches

$$\tilde{u}_1 \oplus ... \oplus \tilde{u}_T \leq \Phi,$$
$$\sum_{i=1}^{T} \int_{\mathbb{R}} u_i(x_i)\, d\mu_i(x_i) = \sum_{i=1}^{T} \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}_i(x_i)\, d\mu_i(x_i)$$

erfüllt. Es gilt somit $p^P(\Phi) = p^D(\Phi)$ für $\tilde{u}_i \in C_b(\Phi)$, $i = 1, ..., T$.
Für den Übergang zu $u_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, ..., T$ benutzen wir ein ähnliches Argument. Jede Funktion $\hat{u} \in \mathcal{S}$ kann durch eine beschränkte Funktion $\tilde{u}$ approximiert werden, so dass $\int_{\mathbb{R}} \tilde{u}(x) - \hat{u}(x)\, d\mu_i(x) < \epsilon$, für ein $\epsilon > 0$. Es gilt somit $p^P(\Phi) = p^D(\Phi)$ für $\hat{u}_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, ..., T$.

Die Erweiterung zur unterhalbstetigen Kostenfunktion beweisen wir in Theorem 4.1. □

In dem Beweis zu Satz 3.6 haben wir gezeigt, dass $\Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$ kompakt ist. Im Folgenden möchten wir allerdings Transportpläne betrachten, die auch Martingalmaße sind. Dazu nehmen wir an, dass die Maße $\mu_1, ..., \mu_T$ konvex geordnet sind und $\mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$ eine nichtleere Teilmenge von $\Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$ ist.
$\mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$ besteht also aus Martingalmaßen auf $\mathbb{R}^T$ mit Randverteilungen $\mu_1, ..., \mu_T$.
Wir werden später die Kompaktheit von $\mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$ benötigen. Daher werden wir sie mithilfe zweier Lemmata herleiten.

Lemma 3.19. *Sei $c : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Außerdem existiere eine Konstante K, so dass*

$$|c(x_1, ..., x_T)| \leq K(1 + |x_1| + ... + |x_T|)$$

für alle $x = (x_1, ..., x_T) \in \mathbb{R}^T$. Dann ist die Abbildung

$$\pi \mapsto \int_{\mathbb{R}^T} c(x)\, d\pi(x)$$

stetig auf $\Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$.

Beweis. Sei $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$ eine Folge, die schwach gegen ein $\pi \in \Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$ konvergiert. Zu zeigen ist, dass

$$\alpha_k := \left| \int_{\mathbb{R}^T} c(x)\, d\pi(x) - \int_{\mathbb{R}^T} c(x)\, d\pi_k(x) \right|$$

für $k \to \infty$ gegen 0 konvergiert.
Sei $a > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \left| \int_{[-a,a]^T} c(x)\, d\pi(x) + \int_{\mathbb{R}^T \setminus [-a,a]^T} c(x)\, d\pi(x) - \int_{[-a,a]^T} c(x)\, d\pi_k(x) - \int_{\mathbb{R}^T \setminus [-a,a]^T} c(x)\, d\pi_k(x) \right| \\
&\leq \left| \int_{[-a,a]^T} c(x)\, d\pi(x) - \int_{[-a,a]^T} c(x)\, d\pi_k(x) \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^T \setminus [-a,a]^T} c(x)\, d\pi(x) - \int_{\mathbb{R}^T \setminus [-a,a]^T} c(x)\, d\pi_k(x) \right| \\
&=: \beta(a,k) + \epsilon_a.
\end{aligned}$$

Da $[-a, a]^T$ kompakt ist und c stetig und beschränkt auf $[-a, a]^T$ ist, folgt mit der schwachen Konvergenz von $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$, dass $\beta(a, k) \overset{k\to\infty}{\to} 0$, für alle $a > 0$.

Für alle $a > 0$ gilt außerdem

$$\begin{aligned}
\epsilon_a &= \Big| \int_{\mathbb{R}^T \setminus [-a,a]^T} c(x)\, d \underbrace{(\pi(x) - \pi_k(x))}_{\in \Pi(\mu_1,\dots,\mu_T)} \Big| \leq \int_{\mathbb{R}^T \setminus [-a,a]^T} |c(x)|\, d\,(\pi(x) - \pi_k(x)) \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^T \setminus [-a,a]^T} K(1 + |x_1| + \dots + |x_T|)\, d\,(\pi(x) - \pi_k(x)) \\
&\leq \underbrace{K\,(\pi - \pi_k)\left(\mathbb{R}^T \setminus [-a,a]^T\right)}_{(i)} + \underbrace{K \int_{|x_1|>a} |x_1|\, d\mu_1(x_1) + \dots + \int_{|x_T|>a} |x_T|\, d\mu_T(x_T)}_{(ii)}.
\end{aligned}$$

Wenn nun a gegen unendlich geht, dann geht die Menge $\mathbb{R}^T \setminus [-a,a]^T$ gegen 0. Somit geht auch (i) gegen 0. Außerdem wird für $a \to \infty$ die Menge $|x_j| > a$, $j = 1, \dots, n$ über die integriert wird immer kleiner. Also gehen auch die Integrale $\int_{|x_j|>a} |x_j|\, d\mu_j(x_j)$ $j = 1, \dots, n$ gegen 0 und damit auch (ii).

Daraus folgt, dass ϵ_a gleichmäßig gegen 0 konvergiert, d.h. für alle $\epsilon > 0$ ein $a > 0$ existiert, so dass $\epsilon_a < \epsilon$.
Und außerdem existiert für alle $\epsilon > 0$ ein $a > 0$, so dass

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_k \leq \underbrace{\lim_{k\to\infty} \beta(a,k)}_{=0} + \epsilon_a < \epsilon.$$

Damit folgt, dass $\lim_{k\to\infty} \alpha_k \to 0$ für $\epsilon \to 0$.

□

Lemma 3.20. *Sei $\pi \in \Pi(\mu_1, \dots, \mu_T)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

i) $\pi \in \mathcal{M}(\mu_1, \dots, \mu_T)$,

ii) Für $1 \leq j \leq T-1$ und jede stetige beschränkte Funktion $\Delta : \mathbb{R}^j \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^T} \Delta(x_1, \dots, x_j)(x_{j+1} - x_j)\, d\pi(x) = 0.$$

Beweis. Nach Definition eines Martingalmaßes gilt für alle Borel-messbare Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^j$, $j = 1, \dots, T-1$ folgende Äquivalenz:

$$\pi \in \mathcal{M}(\mu_1, \dots, \mu_T) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^T} \mathbb{1}_A(x_1, \dots, x_j)(x_{j+1} - x_j)\, d\pi(x) = 0.$$

$\Delta(x_1, \dots, x_j)$ kann durch Treppenfunktionen approximiert werden. Es existieren $c_k \in \mathbb{R}$ und $A_k \in \mathbb{R}^j$, so dass $\sum_{k=1}^{K} c_k \mathbb{1}_{A_k} \underset{K}{\nearrow} \Delta$.

Daraus folgt

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^T} \sum_{k=1}^{K} c_k \mathbb{1}_{A_k}(x_{j+1} - x_j)\, d\pi(x)}_{=0} \underset{K\to\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}^T} \Delta(x_1, ..., x_j)(x_{j+1} - x_j)\, d\pi(x) = 0.$$

□

Proposition 3.21. *Die Menge $\mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$ aller Martingalmaße mit Randverteilungen $\mu_1, .., \mu_T$ ist kompakt in der schwachen Topologie.*

Beweis. Die Kompaktheit von $\Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$ zeigten wir im Beweis von Satz 3.6. Da $\mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$ eine Teilmenge von $\Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$ ist, bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$ abgeschlossen ist.
Nach Lemma 3.20 kann $\mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$ folgerndermaßen geschrieben werden:

$$\mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T) = \bigcap_{f\in C_b(\mathbb{R}^j)} \left\{\pi \in \Pi(\mu_1, ..., \mu_T) : \int_{\mathbb{R}^T} f(x_1, ..., x_j)(x_{j+1} - x_j)\, d\pi(x) = 0\right\}.$$

Wir fixieren nun f und zeigen, dass
$B := \left\{\pi \in \Pi(\mu_1, ..., \mu_T) : \int_{\mathbb{R}^T} f(x_1, ..., x_j)(x_{j+1} - x_j)\, d\pi(x) = 0\right\}$ abgeschlossen ist. Sei $\pi_k \in B$ eine konvergente Folge, die schwach gegen ein $\pi^* \in \Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$ konvergiert. Da $f \in C_b(\mathbb{R}^j)$ kann Lemma 3.19 angewendet werden. Daraus folgt, dass $\pi_k \mapsto \int_{\mathbb{R}^T} f(x_1, ..., x_j)(x_{j+1} - x_j)\, d\pi_k(x)$ auf $\Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$ stetig ist.
Damit folgt, dass

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^T} f(x_1, ..., x_j)(x_{j+1} - x_j)\, d\pi_k(x)}_{=0} \overset{k\to\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}^T} f(x_1, ..., x_j)(x_{j+1} - x_j)\, d\pi^*(x) = 0$$

Das heißt π^* liegt auch in B.
Damit ist B abgeschlossen und somit auch der Durchschnitt $\mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$.

□

4 Superreplikation mit optimalem Transport

4.1 Rahmenbedingung

Wir betrachten, wie in Abschnitt 2, einen diskreten Zeitrahmen mit T Zeitpunkten und ein riskantes Asset $S = (S_t)_{t=0}^T$, wobei $S_0 \in \mathbb{R}$ den Preis in $t = 0$ bezeichnet. $S : \mathbb{R}^T \to \mathbb{R}$ wird dabei durch $S_t(x_1, ..., x_T) = x_t$ gebildet.
Außerdem ist $\Phi(x_1, ..., x_T)$ eine zu bewertende Option, die von S abhängt. Dabei ist Φ eine messbare Funktion.

In der klassischen Finanzmathematik, unter einem bestimmten Modell bzw. Martingalmaß $\mathbb{Q}$ ist der faire Preis von Φ gegeben durch

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\Phi] = \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x).$$

Dieses Modell soll auch passend zu einer Familie von Call Optionen mit Auzahlungen $\Phi_{i,K}(S_i) = (S_i - K)^+$, $K \in \mathbb{R}$ und Fälligkeit $i = 1, ..., T$ sein. Der Preis ist dann gegeben durch

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\Phi_{i.K}] = \int_{\mathbb{R}^+} (x - K)^+\, dLaw_{S_i}(\mathbb{Q})(x).$$

Als Erweiterung zu Abschnitt 2.4 ist das Kennen aller Preise äquivalent dazu, alle Randverteilungen von $\mathbb{Q}$ zu kennen:

$$Law_{S_i}(\mathbb{Q}) = \mu_i,\ i = 1, ..., T. \tag{4.1}$$

Genauer heißt das: Anstatt Martingalmaße $\mathbb{Q}$ zu suchen, die als Modell passend zu unserer Familie von Optionen sind, nehmen wir Martingalmaße, welche die Bedingung (4.1) erfüllen.

Sei dazu $\mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$ die Menge aller Martingalmaße auf $\mathbb{R}^T$ mit Randverteilungen $Law_{S_i}(\mathbb{Q}) = \mu_i$, $i = 1, ..., T$.
Eine äquivalente Bedingung dazu, dass $\mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$ nichtleer ist, ist dass die $\mu_1, ..., \mu_T$ endliche erste Momente haben und in konvexer Reihenfolge wachsen[18], d.h. $\int_{\mathbb{R}} \Phi(x)\, d\mu_1(x) \leq ... \leq \int_{\mathbb{R}} \Phi(x)\, d\mu_T(x)$, für ein konvexes $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

[18]vgl. [Str65]

Primales Problem In Anlehnung zum optimalen Transport geben wir das primale Problem als Infimum an.

$$p^P(\Phi) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T) \right\}. \tag{4.2}$$

Duales Problem Analog zum Superreplikation Resultat in Abschnitt 2.3 benutzen wir semistatische Strategien zum replizieren der Option Φ. Wir betrachten somit Auszahlungen der Form

$$\Psi_{(u_i),(\Delta_j)}(x_1, ..., x_T) = \sum_{i=1}^{T} u_i(x_i) + \sum_{j=1}^{T-1} \Delta_j(x_1, ..., x_j)(x_{j+1} - x_j),\ x_1, ..., x_T \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Die Funktionen $u_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind μ_i-integrierbar, für alle $i = 1, ..., T$ und die Funktionen $\Delta_j : \mathbb{R}^j \to \mathbb{R}$ sind beschränkt und messbar, für alle $j = 1, ..., T-1$.
Außerdem wollen wir nur duale Strategien verwenden, die aus Linearkombinationen von Call Optionen bestehen. Daher werden wir analog zu Abschnitt 3.3 nur u_i, $i = 1, ..., n$ aus $\mathcal{S}$ benutzen, wobei

$$\mathcal{S} = \left\{ u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : u(x) = a + bx + \sum_{i=1}^{m} c_i(x - k_i)_+, a, b, c_i, k_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Somit kann die erste Summe von $\Psi_{(u_i),(\Delta_j)}$ analog zu Abschnitt 2.3 als Auszahlung von Optionen interpretiert werden und die zweite Summe entspricht dem Handelsgewinn $(\Delta \bullet x)_T$.
Mit diesen Funktionen möchten wir die Option Φ subreplizieren, d.h.

$$\Phi \geq \Psi_{(u_i),(\Delta_j)}.$$

Damit gilt mit jedem $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$

$$\int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x) \geq \int_{\mathbb{R}^T} \Psi_{(u_i),(\Delta_j)}(x)\, d\mathbb{Q}(x) \overset{(1)}{=} \int_{\mathbb{R}^T} \sum_{i=1}^{T} u_i(x_i)\, d\mathbb{Q}(x) \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{T} \int_{\mathbb{R}} u_i(x_i)\, d\mu_i(x_i).$$

(1) gilt mit Lemma 3.20 und (2) gilt, da $\mathbb{Q}$ in $\mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$ liegt.

Diese Überlegungen führen zu folgendem dualen Problem.

$$p^D(\Phi) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{T} \int_{\mathbb{R}} u_i(x_i)\, d\mu_i(x_i) : \exists \Delta_1, ..., \Delta_{T-1},\ \text{s.d. } \Psi_{(u_i),(\Delta_j)} \leq \Phi \right\}. \tag{4.4}$$

4.2 Sub- und Superreplikation Resultate

Mit der Definitionen des primalen Problems $p^P(\Phi)$ und dualen Problems $p^D(\Phi)$ können wir nun ein Subreplikation Resultat in Form von Theorem 4.1 angeben. Es ist eine Abwandlung des Dualitätstheorems und liefert eine untere Preisschranke für die zu bewertende Option Φ.

Da wir allerdings an einer oberen Preisgrenze von Φ interessiert sind, werden wir als Korollar ein Superreplikation Resultat angeben.

Theorem 4.1. *Seien $\mu_1, ..., \mu_T$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$, so dass $\mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$ nichtleer ist. Sei außerdem $\Phi : \mathbb{R}^T \to (-\infty, \infty]$ eine unterhalbstetige Funktion, die*

$$\Phi(x_1, ..., x_T) \geq -K \cdot (1 + |x_1| + ... + |x_T|) \tag{4.5}$$

für eine Konstante K erfüllt. Dann gilt

$$\begin{aligned} p^P(\Phi) &= \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)\right\} \\ &= \sup\left\{\sum_{i=1}^{T} \int_{\mathbb{R}} u_i(x_i)\, d\mu_i(x_i) : \exists \Delta_1, ..., \Delta_{T-1},\ s.d.\ \Psi_{(u_i),(\Delta_j)} \leq \Phi\right\} = p^D(\Phi). \end{aligned}$$

Außerdem wird der Primalwert als Minimum angenommen, d.h. es existiert ein Martingalmaß $\mathbb{Q}^* \in \mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$, so dass $p^P(\Phi) = \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}^*(x)$.

Wir möchten noch eine finanzmathematische Bemerkung zum kleinsten fairen Preis $p^P(\Phi)$ von Φ anfügen.

Angenommen jemand verkauft die Option Φ zu einem Preis p, der kleiner als $p^P(\Phi) = p^D(\Phi)$ ist. Dann existieren nach Theorem 4.1 (u_i) und (Δ_j), so dass $\Psi_{(u_i),(\Delta_j)} \leq \Phi$. Der Preis von $\Psi_{(u_i),(\Delta_j)}$ ist $\sum_{i=1}^T \int_{\mathbb{R}} u_i(x_i)\, d\mu_i(x_i)$ und es gilt

$$p < p^D(\Phi) \leq \sum_{i=1}^{T} \int_{\mathbb{R}} u_i(x_i)\, d\mu_i(x_i).$$

Kauft man nun Φ und verkauft[19] $\Psi_{(u_i),(\Delta_j)}$ kann Arbitrage realisiert werden, da die Anfangskosten $p - \sum_{i=1}^T \int_{\mathbb{R}} u_i(x_i)\, d\mu_i(x_i)$ strikt negativ sind bzw. eine strikt positive Auszahlung liefern und die Auszahlung am Ende $\Phi - \Psi_{(u_i),(\Delta_j)}$ größer oder gleich Null ist.

Theorem 4.1 haben wir in Anlehnung an den optimalen Transport angegeben. Es

[19]kann realisiert werden, indem eine Short-Position eingegangen wird.

liefert daher eine untere Preisgrenze der Option Φ durch subreplizieren. Wir möchten allerdings analog zum Superreplikation Theorem 2.16 eine obere Preisgrenze angeben. Deshalb wenden wir im folgenden Korollar Theorem 4.1 auf die Option $-\Phi$ an.

Korollar 4.2. *Seien $\mu_1, ..., \mu_T$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$, so dass $\mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$ nichtleer ist. Sei außerdem $\Phi : \mathbb{R}^T \to (-\infty, \infty]$ eine oberhalbstetige Funktion, die*

$$\Phi(x_1, ..., x_T) \leq K \cdot (1 + |x_1| + ... + |x_T|) \tag{4.6}$$

für eine Konstante K erfüllt. Dann gilt

$$\begin{aligned} p^P(\Phi) &= \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T) \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{T} \int_{\mathbb{R}} u_i(x_i)\, d\mu_i(x_i) : \exists \Delta_1, ..., \Delta_{T-1},\ s.d.\ \Psi_{(u_i),(\Delta_j)} \geq \Phi \right\} = p^D(\Phi). \end{aligned}$$

Außerdem wird der Primalwert als Maximum angenommen, d.h. es existiert ein Martingalmaß $\mathbb{Q}^* \in \mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$, so dass $p^P(\Phi) = \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}^*(x)$.

Im folgenden Beweis verwenden wir das Min-Max Theorem, welches wir zuvor angeben.

Theorem 4.3 (Min-Max Theorem[20]). *Seien K, T konvexe Teilmengen von Vektorräumen V_1 bzw. V_2, wobei V_1 lokal konvex ist. Sei $f : K \times T \to \mathbb{R}$. Wenn*

1. *K kompakt ist,*
2. *$f(., y)$ stetig und konvex auf K ist, für alle $y \in T$,*
3. *$f(x, .)$ konkav auf T ist, für alle $x \in K$,*

dann ist

$$\sup_{y \in T} \inf_{x \in K} f(x, y) = \inf_{x \in K} \sup_{y \in T} f(x, y).$$

Beweis Theorem 4.1. Wir beweisen zuerst die Richtung $p^D(\Phi) \geq p^P(\Phi)$.
Wir nehmen o.B.d.A. an, dass $\Phi \geq 0$, denn falls Theorem 4.1 für ein Φ und Funktionen $u_1, ..., u_T \in \mathcal{S}$ gilt, dann kann die neue Funktion $\Phi' = \Phi - (u_1 \oplus ... \oplus u_T) \geq 0$ betrachtet werden.
Außerdem nehmen wir noch an, dass $\Phi \in C_b(\mathbb{R}^T)$. Wir werden uns dieser

[20] vgl. [Str85, Theorem 45.8]

Einschränkung später entledigen.

Wir werden im Folgenden Theorem 4.3 auf $K = \Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$, $T = C_b(\mathbb{R}) \times ... \times C_b(\mathbb{R}^{T-1})$ und auf

$$f(\pi, (\Delta_j)_{j=1}^{T-1}) = \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x) - \sum_{j=1}^{T-1} \Delta_j(x_1, ..., x_j)(x_{j+1} - x_j)\, d\pi(x) \tag{4.7}$$

anwenden. Zuvor müssen wir noch die Voraussetzungen überprüfen:

1. $\Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$ ist kompakt und konvex und $C_b(\mathbb{R}) \times ... \times C_b(\mathbb{R}^{T-1})$ ist konvex,
2. $f(., (\Delta_j)_{j=1}^{T-1})$ ist stetig und konvex auf $\Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$, für alle $(\Delta_j)_{j=1}^{T-1}) \in T$,
3. $f(\pi, .)$ ist konkav auf $C_b(\mathbb{R}) \times ... \times C_b(\mathbb{R}^{T-1})$, für alle $\pi \in \Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$.

Zu 1. Die Konvexität von $C_b(\mathbb{R}) \times ... \times C_b(\mathbb{R}^{T-1})$ folgt daraus, dass Konvexkombinationen von stetigen, beschränkten Funktionen auch stetig und beschränkt sind.
Zur Konvexität von $\Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$. Seien $\delta_1,\ \delta_2 \in \Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$ und $\alpha \in [0, 1]$. Für die Konvexität von $\Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$ ist zu zeigen, dass $\alpha\delta_1 + (1 - \alpha)\delta_2 \in \Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$. Für $A \subset \mathbb{R}^T$ gilt

$$\alpha \underbrace{\delta_1(A)}_{\geq 0} + (1 - \alpha) \underbrace{\delta_2(A)}_{\geq 0} \geq 0.$$

Außerdem gilt

$$\alpha \underbrace{\delta_1(\mathbb{R}^T)}_{=1} + (1 - \alpha) \underbrace{\delta_2(\mathbb{R}^T)}_{=1} = 1.$$

Damit ist $\alpha\delta_1 + (1 - \alpha)\delta_2$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Bleibt zu zeigen, dass die i. Randverteilung $Law_{S_i}(\alpha\delta_1 + (1 - \alpha)\delta_2)$ gleich μ_i ist. Für $A \subset \mathbb{R}^T$ gilt

$$Law_{S_i}(\alpha\delta_1 + (1 - \alpha)\delta_2)(A) = \alpha \underbrace{Law_{S_i}(\delta_1)(A)}_{\mu_i(A)} + (1 - \alpha) \underbrace{Law_{S_i}(\delta_2)(A)}_{\mu_i(A)} = \mu_i(A).$$

Das zeigt die Konvexität von $\Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$.
Die Kompaktheit von $\Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$ haben wir bereits in Satz 3.6 bewiesen.

Zu 2. Die Stetgikeit folgt mit Lemma 3.19.
Zur Konvexität von $f(., (\Delta_j)_{j=1}^{T-1})$ auf $\Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$. Seien $\delta_1,\ \delta_2 \in \Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$ und

$\alpha \in [0,1]$. Dann gilt mit $g(x_1, ..., x_T) := \Phi(x_1, ..., x_T) - \sum_{j=1}^{T-1} \Delta_j(x_1, ..., x_j)(x_{j+1} - x_j)$

$$\begin{aligned} f(\alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_2, (\Delta_j)_{j=1}^{T-1}) &= \int_{\mathbb{R}^T} g(x)\, d(\alpha\delta_1 + (1-\alpha)\delta_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^T} g(x)\, d(\alpha\delta_1) + \int_{\mathbb{R}^T} g(x)\, d((1-\alpha)\delta_2) \\ &= \alpha \int_{\mathbb{R}^T} g(x)\, d(\delta_1) + (1-\alpha) \int_{\mathbb{R}^T} g(x)\, d(\delta_2) \\ &= \alpha f(\delta_1, (\Delta_j)_{j=1}^{T-1}) + (1-\alpha) f(\delta_2, (\Delta_j)_{j=1}^{T-1}). \end{aligned}$$

Zu 3. $f(\pi, .)$ ist konkav auf $C_b(\mathbb{R}) \times ... \times C_b(\mathbb{R}^{T-1})$.
Seien $(\Delta_j)_1, (\Delta_j)_2 \in C_b(\mathbb{R}) \times ... \times C_b(\mathbb{R}^{T-1})$ und $\alpha \in [0,1]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & f(\pi, t(\Delta_j)_1 + (1-t)(\Delta_j)_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\pi(x) - \int_{\mathbb{R}^T} \sum \left(t(\Delta_j)_1 + (1-t)(\Delta_j)_2\right)(x_{j+1} - x_j)\, d\pi(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\pi(x) - t \int_{\mathbb{R}^T} \sum (\Delta_j)_1 (x_{j+1} - x_j)\, d\pi(x) - (1-t) \int_{\mathbb{R}^T} \sum (\Delta_j)_2 (x_{j+1} - x_j)\, d\pi(x) \\ &= t \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\pi(x) + (1-t) \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\pi(x) - t \int_{\mathbb{R}^T} \sum (\Delta_j)_1 (x_{j+1} - x_j)\, d\pi(x) \\ &- (1-t) \int_{\mathbb{R}^T} \sum (\Delta_j)_2 (x_{j+1} - x_j)\, d\pi(x) \\ &= t f(\pi, (\Delta_j)_1) + (1-t) f(\pi, (\Delta_j)_2). \end{aligned}$$

Wir erhalten folgende Gleichungskette, die wir erst angeben werden und anschließend analysieren.

$$D \geq \sup_{u_i \in \mathcal{S}, \Delta_j \in C_b(\mathbb{R}^j), \Psi_{(u_i),(\Delta_j)} \leq \Phi} \sum_{i=1}^{T} \int_{\mathbb{R}} u_i(x_i)\, d\mu_i(x_i) \tag{4.8}$$

$$= \sup_{\Delta_j \in C_b(\mathbb{R}^j)} \sup_{u_i \in \mathcal{S}, \sum_{i=1}^{T} u_i(x_i) \leq \Phi(x_1,...,x_T) - \sum_{j=1}^{T-1} \Delta_j(x_1,...,x_j)(x_{j+1} - x_j)} \sum_{i=1}^{T} \int_{\mathbb{R}} u_i(x_i)\, d\mu_i(x_i) \tag{4.9}$$

$$= \sup_{\Delta_j \in C_b(\mathbb{R}^j)} \inf_{\pi \in \Pi(\mu_1,...,\mu_T)} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x) - \sum_{j=1}^{T-1} \Delta_j(x_1, ..., x_j)(x_{j+1} - x_j)\, d\pi(x) \tag{4.10}$$

$$= \inf_{\pi \in \Pi(\mu_1,...,\mu_T)} \sup_{\Delta_j \in C_b(\mathbb{R}^j)} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x) - \sum_{j=1}^{T-1} \Delta_j(x_1, ..., x_j)(x_{j+1} - x_j)\, d\pi(x) \tag{4.11}$$

$$\geq \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu_1,...,\mu_T)} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x) = P. \tag{4.12}$$

Das Supremum in (4.8) wird nur über $u_i \in \mathcal{S}$ genommen. Das schränkt die Menge

ein und erklärt die Ungleichung in (4.8).
Von (4.8) nach (4.9) wird das Supremum in zwei Suprema aufgeteilt. Außerdem wird in (4.9) $\Psi_{(u_i),(\Delta_j)} \leq \Phi$ mit $\Psi_{(u_i),(\Delta_j)} = \sum_{i=1}^{T} u_i(x_i) + \sum_{j=1}^{T-1} \Delta_j(x_1, ..., x_j)(x_{j+1} - x_j)$ umgeschrieben.
Die Gleichheit zwischen (4.9) und (4.10) ergibt sich durch Proposition 2.1 (noch aufschreiben) angewandt auf die Kostenfunktion $\Phi'(x_1, ..., x_T) = \Phi(x_1, ..., x_T) - \sum_{j=1}^{T-1} \Delta_j(x_1, ..., x_j)(x_{j+1} - x_j)$.
Die Gleichheit zwischen (4.10) und (4.11) ist die Anwendung von Theorem 4.3 mit K, T und f wie oben dargestellt.
In (4.11) muss unterschieden werden, ob das minimale π ein Martingalmaß ist oder nicht.
1. Fall: $\pi \in \mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$. Dann ist $\int_{\mathbb{R}^T} \Delta_j(x_1, ..., x_j)(x_{j+1} - x_j)\, d\pi(x) = 0$ und der Ausdruck (4.11) vereinfacht sich zu

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu_1, ..., \mu_T)} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\pi(x).$$

Da $\pi \in \mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$ entspricht das (4.12).
2. Fall: $\pi \in \Pi(\mu_1, ..., \mu_T) \setminus \mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$. Nach Lemma 3.20 existiert ein Δ_j, so dass

$$\int_{\mathbb{R}^T} \Delta_j(x_1, ..., x_j)(x_{j+1} - x_j)\, d\pi(x) \neq 0.$$

Nun kann Δ_j beliebig gewählt werden, so dass

$$\sup_{\Delta_j \in C_b(\mathbb{R}^j)} \left(\int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\pi(x) - \int_{\mathbb{R}^T} \sum_{j=1}^{T-1} \Delta_j(x_1, ..., x_j)(x_{j+1} - x_j)\, d\pi(x) \right) \geq \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x).$$

Damit folgt

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu_1, ..., \mu_T)} \sup_{\Delta_j \in C_b(\mathbb{R}^j)} \left(\int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\pi(x) - \int_{\mathbb{R}^T} \sum_{j=1}^{T-1} \Delta_j(x_1, ..., x_j)(x_{j+1} - x_j)\, d\pi(x) \right) \geq \inf_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x).$$

Nun verwerfen wir die Voraussetzung, dass Φ stetig und beschränkt ist. Sei also $\Phi : \mathbb{R}^T \to (-\infty, \infty]$ eine unterhalbstetige Funktion.
Wir betrachten die Folge $\Phi_1 \geq \Phi_2 \geq ...$ stetiger Funktionen, so dass $\Phi = \sup_{k \geq 0} \Phi_k$.
Es gilt somit

$$\int_{\mathbb{R}^T} \Phi_k(x)\, d\mathbb{Q}(x) \overset{k \to \infty}{\to} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x), \quad \text{für } \mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$$

und damit auch

$$\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,...,\mu_T)} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi_k(x)\, d\mathbb{Q}(x) \overset{k\to\infty}{\to} \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,...,\mu_T)} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x). \tag{4.13}$$

Nach Definition des Infimums existiert eine Folge $(\mathbb{Q}_m)_{m\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$, so dass

$$\int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}_m(x) \overset{m\to\infty}{\to} \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,...,\mu_T)} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x). \tag{4.14}$$

Aus (4.13) und (4.14) folgt zusammen, dass sich $\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,...,\mu_T)} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi_k(x)\, d\mathbb{Q}(x)$ und $\int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}_m(x)$ beliebig annähern lassen. Es existiert also ein $\mathbb{Q}_m$, so dass

$$\frac{1}{k} \geq \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}_m(x) - \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,...,\mu_T)} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi_k(x)\, d\mathbb{Q}(x).$$

Durch Umbenennung erhalten wir, dass für jedes k ein $\mathbb{Q}_k \in \mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$ gewählt werden kann, so dass

$$P(\Phi_k) \geq \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}_k(x) - \frac{1}{k}.$$

Im ersten Schritt werden wir zeigen, dass $p^P(\Phi) \leq \lim_{k\to\infty} P(\Phi_k)$, um im zweiten Schritt daraus zu folgern, dass $p^D(\Phi) \geq p^P(\Phi)$.

Wir können o.B.d.A. annehmen, dass die Folge $(\mathbb{Q}_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ schwach gegen ein $\mathbb{Q}^* \in \mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$ konvergiert, ansonsten kann zu einer konvergenten Teilfolge übergegangen werden.

$$\begin{aligned} p^P(\Phi) &= \inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,...,\mu_T)} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x) \leq \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}^*(x) \overset{(1)}{=} \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi_m(x)\, d\mathbb{Q}^*(x) \\ &\overset{(2)}{=} \lim_{m\to\infty} \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi_m(x)\, d\mathbb{Q}_k(x) \overset{(3)}{\leq} \lim_{m\to\infty} \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi_k(x)\, d\mathbb{Q}_k(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi_k(x)\, d\mathbb{Q}_k(x) \\ &\overset{(4)}{\leq} \lim_{k\to\infty} \left(\inf_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,...,\mu_T)} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}_k(x) + \frac{1}{k} \right) = \lim_{k\to\infty} P(\Phi_k) + \underbrace{\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}}_{=0}. \end{aligned}$$

Die Gleichheit bei (1) gilt mit monotoner Konvergenz und (2) mit schwacher Konvergenz.
Sei m fest. Für $k \geq m$ ist nach Voraussetztung $\Phi_k \geq \Phi_m$. Und damit ist $\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi_k(x)\, d\mathbb{Q}_k(x) \geq \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi_m(x)\, d\mathbb{Q}_k(x)$. Da $k \to \infty$ wird k stets größer als ein festes m. Das erklärt die Gleichheit in (3).

Zum zweiten Schritt. Nach Voraussetzung ist $\Phi_k \leq \Phi$. Damit ist auch $D(\Phi_k) \leq$

$p^D(\Phi)$, da $\Psi_{(u_i),(\Delta_j)}$ in $D(\Phi_k)$ kleiner oder gleich sein muss und damit auch $\sum_{i=1}^T \mathbb{E}_{\mu_i}[u_i]$.
Da Φ_k stetig ist, kann der erste Teil des Beweises angewendet werden, um $D(\Phi_k) = P(\Phi_k)$ zu erhalten.
Wir haben gezeigt, dass $p^P(\Phi) \leq \lim_{k\to\infty} P(\Phi_k)$. Weiter gilt $P(\Phi_k) \leq p^P(\Phi)$. Damit folgt, dass $P(\Phi_k) \uparrow p^P(\Phi)$.
Zusammen gilt also

$$p^D(\Phi) \geq D(\Phi_k) = P(\Phi_k) \uparrow p^P(\Phi).$$

Nun zur Richtung $p^P(\Phi) \geq p^D(\Phi)$.

Nach Konstruktion von $p^D(\Phi)$ gilt $\Phi \geq \Psi_{(u_i),(\Delta_j)}$. Sei $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$, dann folgt damit

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x) \geq \int_{\mathbb{R}^T} \Psi_{(u_i),(\Delta_j)}(x)\, d\mathbb{Q}(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^T} \left(\sum_{i=1}^T u_i(x_i) + \sum^{T-1} \Delta_j(x_1, ..., x_j)(x_{j+1} - x_j) \right) d\mathbb{Q}(x) \\
&= \sum_{i=1}^T \int_{\mathbb{R}} u_i(x_i)\, d\mu_i(x_i) + \sum_{j=1}^{T-1} \underbrace{\int_{\mathbb{R}^T} \Delta_j(x_1, ..., x_j)(x_{j+1} - x_j)\, d\mathbb{Q}(x)}_{=0, \text{ nach Lemma 3.20}}.
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung gilt für alle $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$, auch für dasjenige, dass $p^P(\Phi)$ ergibt. Damit ist

$$p^P(\Phi) \geq \sum_{i=1}^T \int_{\mathbb{R}} u_i(x_i)\, d\mu_i(x_i).$$

Ebenso gilt sie auch für alle $u_1, ..., u_T \in \mathcal{S}$, für die $\Phi \geq \Psi_{(u_i),(\Delta_j)}$ gilt, auch für diejenigen, die $p^D(\Phi)$ ergeben. Somit folgt $p^P(\Phi) \geq p^D(\Phi)$.

Es bleibt noch zu zeigen, dass der Wert Primalwert als Minimum angenommen wird. Dazu benutzen wir die Unterhalbstetigkeit von $\int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x)$ auf $\Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$, die wir in Lemma 3.7 bewiesen haben: Sei $(\mathbb{Q}_k)$ eine Folge aus $\Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$, die schwach gegen ein $\mathbb{Q} \in \Pi(\mu_1, ..., \mu_T)$ konvergiert, dann ist

$$\liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}_k(x) \geq \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}(x). \tag{4.15}$$

Sei $(\mathbb{Q}_k)$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$, die gegen $p^P(\Phi)$konvergiert, $p^P(\Phi) =$

$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}_k(x)$. Da $\mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$ kompakt ist, konvergiert eine Teilfolge gegen ein $\mathbb{Q}^* \in \mathcal{M}(\mu_1, ..., \mu_T)$.
Mit (4.15) ist

$$\int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}^*(x) \leq \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}_k(x) = p^P(\Phi).$$

Da $p^P(\Phi)$ schon das Infimum ist, folgt $p^P(\Phi) = \int_{\mathbb{R}^T} \Phi(x)\, d\mathbb{Q}^*(x)$ und $\mathbb{Q}^*$ ist der gesuchte Minimierer.

$\square$

5 Beispiele

In den folgenden Beispielen betrachten wir zwei zukünftige Zeitpunkte $t = 1, 2$ und ein riskantes Asset $S = (S_t)_{t=0}^2$ mit heutigem Preis S_0. Dabei wird S durch $S_t(x_1, x_2) = x_t,\ t = 1, 2$ gebildet.

5.1 Analytisches Beispiel

Wie möchten unsere erarbeitete Theorie anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Wir betrachten einen sogenannten Long Straddle mit Auszahlung $\Phi(S_1, S_2) = |S_2 - S_1|$. Dabei ist die Auszahlung der Option der Unterschied der Werte des Assets zu den zukünftigen Zeitpunkten.
Außerdem setzen wir in dem konkreten Beispiel Randverteilungen μ_1 und μ_2 fest und geben sie als Dichte mithilfe des Lebesgue Maß λ an.

$$\frac{d\mu_1}{d\lambda}(x_1) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}, \quad \frac{d\mu_2}{d\lambda}(x_2) = \frac{2 + x_2}{3}\mathbb{1}_{[-2,-1]} + \frac{1}{3}\mathbb{1}_{[-1,1]} + \frac{2 - x_2}{3}\mathbb{1}_{[1,2]}.$$

Vergleiche dazu Abbildung 4.

Aufgabe. Wit stellen folgendes Primales und Duales Problem auf:

$$\begin{aligned} p^P(\Phi) &= \inf\Big\{\int_{\mathbb{R}^2} |x_2 - x_1|\, d\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu_1, \mu_2)\Big\}, \\ p^D(\Phi) &= \sup\Big\{\int_{\mathbb{R}} u_1(x_1)\, d\mu_1(x_1) + \int_{\mathbb{R}} u_2(x_2)\, d\mu_2(x_2) : \\ &\qquad \exists\Delta \text{ s.d. } u_1(x_1) + u_2(x_2) + \Delta(x_1)(x_2 - x_1) \le |x_2 - x_1|\Big\}. \end{aligned}$$

Mit Theorem 4.1 gilt $p^P(\Phi) = p^D(\Phi)$. Unsere Aufgabe besteht darin einen primalen Minimierer $\mathbb{Q}$ und duale Maximierer u_1, u_2, und Δ zu finden.

Lösung. Wir konstruieren zuerst $\mathbb{Q}$, u_1, u_2, und Δ und werden anschließend mit diesen Kandidaten überprüfen, ob für sie $p^P(\Phi) = p^D(\Phi)$ gilt.

Zuerst zum primalen Problem. Wir konstruieren ein Martingalmaß $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu_1, \mu_2)$. Dazu bezeichnen wir mit $(\mathbb{Q}_{x_1})_{x1\in[-1,1]}$ die bedingte Verteilung von S_2 unter $\mathbb{Q}$, so dass $S_1 = x_1$:

$$\mathbb{Q}_{x_1}(A) = \mathbb{Q}\left(S_2 \in A | S_1 = x_1\right), \ \forall A \in \mathbb{R}.$$

Dabei ist jedes Maß $\mathbb{Q}$ auf den drei Punkten $f(x_1)$, x_1 und $g(x_1)$ konzentriert, wobei $f : [-1, 1] \to [-2, -1]$, $g : [-1, 1] \to [1, 2]$ monoton fallende Funktionen sind.
Folgende Abbildung 4 zeigt die Maße μ_1 und μ_2 und außerdem zu jedem Punkt $x_1 \in [-1, 1]$ in $t = 1$ die möglichen Positionen $f(x_1)$, x_1 und $g(x_1)$ in $t = 2$.

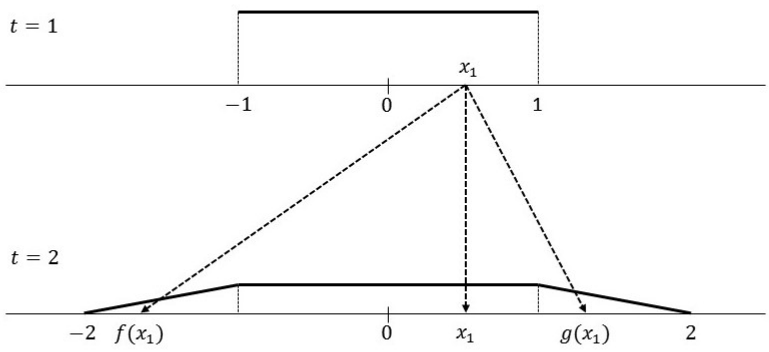

Abbildung 4: nach [BHLP13, Abb. 3]

In Worten heißt das, dass soviel Masse wie möglich an ihrem Platz verbleibt und der Rest über f nach links oder über g nach rechts verteilt wird.
Beschreiben nun $a(x_1)$, $b(x_1)$ bzw. $c(x_1)$ die Wahrscheinlichkeit, dass in $t = 2$ $f(x_1)$, x_1 bzw. $g(x_1)$ angenommen wird, unter der Bedingung $S_1 = x_1$, dann lässt sich $\mathbb{Q}_{x_1}$ darstellen als

$$\mathbb{Q}_{x_1} = a(x_1)\delta_{f(x_1)} + b(x_1)\delta_{x_1} + c(x_1)\delta_{g(x_1)}, \text{ mit } a(x_1) + b(x_1) + c(x_1) = 1.$$

Für $(\alpha, \beta) \in [-2, -1] = [f(1), f(-1)]$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}\left(S_2 \in (\alpha, \beta)\right) = \int_\alpha^\beta \frac{d\mu_2}{d\lambda}(x_2)\, dx_2 &= \int_{f^{-1}(\alpha)}^{f^{-1}(\beta)} \frac{d\mu_2}{d\lambda}(f(x_1))f'(x_1)\, dx_1 \\ &= -\int_{f^{-1}(\beta)}^{f^{-1}(\alpha)} \frac{d\mu_2}{d\lambda}(f(x_1))f'(x_1)\, dx_1.\end{aligned}$$

Die erste Gleichheit erhalten wir da die Wahrscheinlichkeit mithilfe der Dichte dargestellt werden kann. Die Zweite folgt mit Substitution $x_2 = f(x_1)$.
Andererseits gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}\left(S_2 \in (\alpha, \beta)\right) &= \mathbb{Q}(S_1 \in (f^{-1}(\beta), f^{-1}(\alpha)) \cdot \mathbb{Q}(S_2 \in (\alpha, \beta)|S_1 = x_1) \\ &= \mathbb{Q}(S_1 \in (f^{-1}(\beta), f^{-1}(\alpha)) \cdot a(x_1) \\ &= \int_{f^{-1}(\beta)}^{f^{-1}(\alpha)} \frac{d\mu_1}{d\lambda}(x_1)a(x_1)\, d(x_1).\end{aligned}$$

Zusammen folgt daraus

$$-\frac{d\mu_2}{d\lambda}(f(x_1))f'(x_1) = \frac{d\mu_1}{d\lambda}(x_1)a(x_1).$$

Analog erhalten wir für $(\alpha, \beta) \in [1, 2] = [g(-1), g(1)]$

$$-\frac{d\mu_2}{d\lambda}(g(x_1))g'(x_1) = \frac{d\mu_1}{d\lambda}(x_1)c(x_1),$$

und für $(\alpha, \beta) \in [-1, 1]$

$$\frac{d\mu_2}{d\lambda}(x_1) = \frac{d\mu_2}{d\lambda}(x_1)b(x_1).$$

Daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} a(x_1) &= \frac{-f'(x_1)\frac{d\mu_2}{d\lambda}(f(x_1))}{\frac{d\mu_1}{d\lambda}(x_1)}, \\ b(x_1) &= \frac{1}{3}/\frac{1}{2} = \frac{2}{3}, \\ c(x_1) &= \frac{-g'(x_1)\frac{d\mu_2}{d\lambda}(g(x_1))}{\frac{d\mu_1}{d\lambda}(x_1)}. \end{aligned}$$

Mit $a(x_1) + b(x_1) + c(x_1) = 1$ erhalten wir nun für $x_1 \in [-1, 1]$

$$\frac{-f'(x_1)\frac{d\mu_2}{d\lambda}(f(x_1))}{\frac{d\mu_1}{d\lambda}(x_1)} + \frac{2}{3} + \frac{-g'(x_1)\frac{d\mu_2}{d\lambda}(g(x_1))}{\frac{d\mu_1}{d\lambda}(x_1)} = 1,$$

und dazu äquivalent

$$\left(-f'(x_1)\frac{d\mu_2}{d\lambda}(f(x_1))\right) + \left(-g'(x_1)\frac{d\mu_2}{d\lambda}(g(x_1))\right) = \frac{1}{3}\frac{d\mu_1}{d\lambda}(x_1) = \frac{1}{6}. \tag{5.1}$$

Außerdem soll $\mathbb{Q}$ ein Martingalmaß sein. Ausgedrückt wird das durch

$$x_1 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(S_2|S_1 = x_1) = f(x_1)a(x_1) + x_1 b(x_1) + g(x_1)c(x_1).$$

Wir ersetzen wieder $a(x_1)$, $b(x_1)$ und $c(x_1)$ und erhalten

$$\left(-f'(x_1)f(x_1)\frac{d\mu_2}{d\lambda}(f(x_1))\right) + \left(-g'(x_1)g(x_1)\frac{d\mu_2}{d\lambda}(g(x_1))\right) = \frac{x_1}{3}\frac{d\mu_1}{d\lambda}(x_1) = \frac{x_1}{6}. \tag{5.2}$$

(5.1) und (5.2) ergeben zusammen Differentialgleichungen. Aus Abbildung 4 ersichtlich haben wir die Anfangsbedingungen $f(1) = -2$ und $g(1) = 1$.

Wir erhalten die Lösung[21]

$$f(x_1) = \frac{-3 - x_1}{2}, \ g(x_1) = \frac{3 - x_1}{2}. \tag{5.3}$$

Diese Funktionen bestimmen unser Martingalmaß $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu_1, \mu_2)$.

Wir wenden uns nun dem dualen Problem zu, indem wir die Funktionen u_1, u_2, und Δ bestimmen. Die Funktionen u_1, u_2, $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllen

$$u_1(x_1) + \Delta(x_1)(x_2 - x_1) \leq |x_2 - x_1| - u_2(x_2). \tag{5.4}$$

Für alle $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
Außerdem gilt Gleichheit in (5.4), für alle (x_1, x_2) aus dem Support des primalen Minimierers. Da wir annehmen, dass $\mathbb{Q}$ dieser Minimierer ist, erwarten wir Gleichheit für $x_2 \in \{f(x_1), x_1, g(x_1)\}$, $x_1 \in [-1, 1]$.
Wir definieren die Funktionen $u_{2,l} := u_2\big|_{(-\infty,-1]}$, $u_{2,m} := u_2\big|_{[-1,1]}$ und $u_{2,r} := u_2\big|_{[1,\infty)}$ und können so (5.4) umschreiben in

$$\begin{aligned} u_1(x_1) + \Delta(x_1)(f(x_1) - x_1) &= |f(x_1) - x_1| - u_{2,l}(f(x_1)), \\ u_1(x_1) + \Delta(x_1)(x_1 - x_1) &= |x_1 - x_1| - u_{2,m}(x_1) \quad \Leftrightarrow u_1(x_1) = -u_{2,m}(x_1), \\ u_1(x_1) + \Delta(x_1)(g(x_1) - x_1) &= |g(x_1) - x_1| - u_{2,r}(g(x_1)), \end{aligned} \tag{5.5}$$

für $x_1 \in [-1, 1]$.
Setzen wir nun ein $x_1 \in [-1, 1]$ fest. Dann haben die linearen Funktionen $x_2 \mapsto u_1(x_1) + \Delta(x_1)(x_2 - x_1)$ und $x_2 \mapsto |x_2 - x_1| - u_2(x_2)$ wegen den Gleichungen (5.5) den gleichen Wert an den Stellen $x_2 = f(x_1)$ bzw. $x_2 = g(x_1)$. Daher ist es möglich die Steigung $\Delta(x_1)$ der ersten Funktion mit der Ableitung der zweiten Funktion an den Stellen $x_2 = f(x_1)$ bzw. $x_2 = g(x_1)$ zu identifizieren.

$$\begin{aligned} \Delta(x_1) &= \frac{\partial}{\partial x_2}\Big((x_1 - x_2) - u_{2,l}(x_2)\Big)\Big|_{x_2=f(x_1)} = -1 - u'_{2,l}(f(x_1)), \\ \Delta(x_1) &= \frac{\partial}{\partial x_2}\Big((x_2 - x_1) - u_{2,r}(x_2)\Big)\Big|_{x_2=g(x_1)} = 1 - u'_{2,r}(g(x_1)). \end{aligned} \tag{5.6}$$

Dabei wird $|x_2 - x_1|$ zu $(x_1 - x_2)$ in der ersten Gleichung, da $x_2 = f(x_1) \in [-2, -1]$ und $x_1 \in [-1, 1]$ ist. Analog wird es zu $(x_2 - x_1)$ in der zweiten Gleichung, da $x_2 = g(x_1) \in [1, 2]$ ist.

[21] Wird im Anhang A.2 ausgearbeitet.

Die Gleichungen (5.5) und (5.6) definieren Differentialgleichungen mit Lösungen[22]

$$u_1(x_1) = -u_{2,m}(x_1) = \frac{9-5x_1^2}{6}, \quad \Delta(x_1) = -\frac{2}{3}x_1,$$
$$u_{2,l}(x_1) = -3 - 3x_2 - \frac{2}{3}x_2^2, \quad u_{2,r}(x_1) = -3 + 3x_2 - \frac{2}{3}x_2^2.$$

Außerdem setzen wir $u_2 = u_{2,l}\mathbb{1}_{(-\infty,-1]} + u_{2,m}\mathbb{1}_{[-1,1]} + u_{2,r}\mathbb{1}_{[1,\infty)}$.

Wir haben nun potentielle Kandidaten $\mathbb{Q}$, u_1, u_2, und Δ gefunden und können nun überprüfen, ob sie auch die gesuchten Minimierer bzw Maximierer sind. Dazu berechnen wir die Erwartungswerte

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[|S_1 - S_1|] = \int_{-1}^{1}\int_{-\infty}^{\infty} |x_2 - x_1|\, d\mathbb{Q}_{x_1}(x_2) d\mu_1(x_1), \tag{5.7}$$
$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[u_1 + u_2] = \mathbb{E}_{\mu_1}[u_1] + \mathbb{E}_{\mu_2}[u_2] = \int_{-1}^{1} u_1(x_1)\, d\mu_1(x_1) + \int_{-2}^{2} u_2(x_2)\, d\mu_2(x_2). \tag{5.8}$$

Haben sie die gleichen Werte, haben wir unsere Lösung gefunden.

Zuerst zu (5.7). Für das innere Integral erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |x_2 - x_1|\, d\mathbb{Q}_{x_1}(x_2) &= |f(x_1) - x_1| a(x_1) + \underbrace{|x_1 - x_1| b(x_1)}_{=0} + |g(x_1) - x_1| c(x_1) \\ &= \left|\frac{-3-x_1}{2} - x_1\right| \left(\frac{1-x_1}{6}\right) + \left|\frac{3-x_1}{2} - x_1\right| \left(\frac{1+x_1}{6}\right) \\ &= \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_1\right)\left(\frac{1-x_1}{6}\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x_1\right)\left(\frac{1+x_1}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - x_1^2\right).\end{aligned}$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[|S_1 - S_1|] = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(1 - x_1^2\right)\, d\mu_1(x_1) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left(1 - x_1^2\right)\, dx_1 = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3} = \frac{1}{3}.$$

Nun zu (5.8). Für das erste Integral erhalten wir

$$\int_{-1}^{1} u_1(x_1)\, d\mu_1(x_1) = \int_{-1}^{1} \frac{9-5x_1^2}{6}\, d\mu_1(x_1) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{9-5x_1^2}{6}\, dx_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{22}{9} = \frac{22}{18}.$$

[22] Wird im Anhang A.2 ausgearbeitet.

Für das zweite Integral folgt

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{2} u_2(x_2)\, d\mu_2(x_2) &= \int_{-2}^{-1} (-3 - 3x_2 - \frac{2}{3}x_2^2)\frac{d\mu_2}{d\lambda}(x_2)\, dx_2 \\
&+ \int_{-1}^{1} (\frac{-9+5x_2^2}{6})\frac{d\mu_2}{d\lambda}(x_2)\, dx_2 + \int_{1}^{2} (-3 + 3x_2 - \frac{2}{3}x_2^2)\frac{d\mu_2}{d\lambda}(x_2)\, dx_2 \\
&= \int_{-2}^{-1} (-3 - 3x_2 - \frac{2}{3}x_2^2)\left(\frac{2+x_2}{3}\right) dx_2 \\
&+ \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} (\frac{-9+5x_2^2}{6})\, dx_2 + \int_{1}^{2} (-3 + 3x_2 - \frac{2}{3}x_2^2)\left(\frac{2-x_2}{3}\right) dx_2 \\
&= -\frac{1}{27} - \frac{22}{9}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{27} = -\frac{8}{9}.
\end{aligned}
$$

Zusammen ergibt das

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[u_1 + u_2] = \frac{22}{18} - \frac{8}{9} = \frac{1}{3}.$$

Daraus folgt

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[|S_1 - S_1|] = \frac{1}{3} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[u_1 + u_2],$$

daher haben wir in der Tat $p^P(\Phi) = p^D(\Phi)$ und $\mathbb{Q}$ bzw. u_1, u_2, und Δ sind die gesuchten Minimierer bzw. Maximierer.

5.2 Nichtexistenz des dualen Maximimierers

Hier geben wir ein konstruiertes Gegenbeispiel an, welches verdeutlicht, dass der duale Wert im Allgemeinen nicht angenommen wird. Das Supremum ist kein Maximum.

Satz 5.1. *Seien $\mu_2 = \frac{1}{2}\lambda\big|_{[0,2]}$ die Gleichverteilung auf $[0,2]$ und $\Phi(x_1,x_2) = -|x_2 - x_1|$. Dann existiert ein Maß μ_1, konzentriert auf einer abzählbaren Menge, so dass der duale Wert nicht angenommen wird..*

Um Satz 5.1 zu beweisen benötigen wir noch die folgenden zwei Lemmata.

Lemma 5.2. *Seien μ_1 und μ_2 Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathbb{R}$ mit endlichen ersten Momenten. Sei $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}(\mu_1,\mu_2)$ und sei $x \in \mathbb{R}$ fest. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

1. *Die Preise $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_1 - x)^+] = \int_{\mathbb{R}}(x_1 - x)^+\, d\mu_1(x_1)$ und $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_2 - x)^+] = \int_{\mathbb{R}}(x_2 - x)^+\, d\mu_2(x_2)$ sind gleich.*

2. *Ist $S_1 \leq x$, dann ist $S_2 \leq x$ und ist $S_1 > x$, dann ist $S_2 > x$, $\mathbb{Q}$-fast sicher.*

Außerdem gilt: Wenn (ii) für ein Maß aus $\mathcal{M}(\mu_1, \mu_2)$ gilt, dann auch für alle Maße aus $\mathcal{M}(\mu_1, \mu_2)$.

Beweis. Mit der Monotonie des Integrals und da sowohl $(x_2 - x)^+ \geq (x_2 - x)$ als auch $(x_2 - x)^+ \geq 0$ gilt, erhalten wir folgende Ungleichungen:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_2 - x)^+ \mathbb{1}_{\{S_1 > x\}}] \geq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_2 - x) \mathbb{1}_{\{S_1 > x\}}], \tag{5.9}$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_2 - x)^+ \mathbb{1}_{\{S_1 \leq x\}}] \geq 0. \tag{5.10}$$

Wir zeigen nun, dass Gleichheit in (5.9) und (5.10), genau dann gilt, wenn (ii) gilt. Sei (ii) wahr. Ist nun $S_1 > x$, dann auch $S_2 > x$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} &\underbrace{(x_2 - x)^+}_{>0} \mathbb{1}_{\{x_1 > x\}} = (x_2 - x) \mathbb{1}_{\{x_1 > x\}}, \\ &(x_2 - x)^+ \underbrace{\mathbb{1}_{\{x_1 \leq x\}}}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

Es gilt Gleichheit in (5.9), (5.10). Ist hingegen $S_1 \leq x$, dann auch $S_2 \leq x$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} &(x_2 - x)^+ \underbrace{\mathbb{1}_{\{x_1 > x\}}}_{=0} = 0 = (x_2 - x) \underbrace{\mathbb{1}_{\{x_1 > x\}}}_{=0}, \\ &\underbrace{(x_2 - x)^+}_{=0} \mathbb{1}_{\{x_1 \leq x\}} = 0. \end{aligned}$$

Auch in diesem Fall gilt Gleichheit in (5.9), (5.10).
Nun zur Rückrichtung. Es gelte Gleichheit in (5.9), (5.10).
Sei $S_1 > x$. Dann gilt wegen (5.9) $(x_2 - x)^+ = (x_2 - x)$. Daraus folgt, dass $S_2 > x$.
Sei andererseits $S_1 \leq x$. Dann gilt wegen (5.10) $(x_2 - x)^+ = 0$. Es folgt $S_2 \leq x$.
Es gilt somit (ii). Zusammen ist die Gleichheit in (5.9) und (5.10) äquivalent zu (ii).

Wir erhalten mit (5.9) und (5.10) folgende Ungleichung

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_2 - x)^+] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_2 - x)^+ \mathbb{1}_{\{S_1 > x\}}] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_2 - x)^+ \mathbb{1}_{\{S_1 \leq x\}}] \\ &\geq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_2 - x) \mathbb{1}_{\{S_1 > x\}}] + 0. \end{aligned}$$

Außerdem gilt einerseits

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\underbrace{(S_1 - x)^+ \mathbb{1}_{\{S_1 \leq x\}}}_{=0}] = 0,$$

und andererseits mit der natürlichen Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t=1,2}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_2 - x)\mathbb{1}_{\{S_1>x\}}] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_2 - x)\mathbb{1}_{\{S_1>x\}}|\mathcal{F}_1]\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{S_1>x\}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_2 - x)|\mathcal{F}_1]\right] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_1 - x)\mathbb{1}_{\{S_1>x\}}].\end{aligned}$$

Die erste Gleichheit gilt, da S ein Martingal ist. Die zweite Gleichheit gilt, da $\{S_1 > x\}$ als $\mathcal{F}_1$-messbare Menge aus dem Erwartungswert herausgezogen werden kann. Und die dritte Gleichheit gilt wieder, da S ein Martingal ist und damit $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_2 - x)|\mathcal{F}_1] = (S_1 - x)$ gilt.
Zusammen erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_2 - x)^+] &\geq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_2 - x)\mathbb{1}_{S_1>x}] + 0 \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_1 - x)\mathbb{1}_{S_1>x}] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_1 - x)^+\mathbb{1}_{S_1\leq x}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_1 - x)^+].\end{aligned}$$

Wie gezeigt gilt dabei genau dann Gleichheit, wenn (ii) gilt.

□

Lemma 5.3. *Seien $c, d, x \in \mathbb{R}$, so dass $c < x \leq d$. Außerdem sei γ ein Maß auf $(c, d]$ und setze $\alpha = \gamma((c, d])$. Dann ist das Produktmaß $\delta_x \otimes m$ das eindeutige Maß auf $(c, d]^2$ mit Randverteilungen $\alpha\delta_x$ und m.*

Nach Satz (3.15) ist es äquivalent Satz 5.1 folgenderweise zu beweisen: Es existieren keine Funktionen u_1, u_2, $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{aligned}&u_1(x_1) + u_2(x_2) + \Delta(x_1)(x_2 - x_1) \leq -|x_2 - x_1|, \quad \text{für alle } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \\ &u_1(x_1) + u_2(x_2) + \Delta(x_1)(x_2 - x_1) = -|x_2 - x_1|, \ \text{für } \mathbb{Q} - \text{fast alle } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\end{aligned} \tag{5.11}$$

wobei $\mathbb{Q}$ der Minimierer des primalen Problems ist.

Beweis Satz 5.1. Wir beweisen den Satz durch direkte Konstruktion eines Maßes und zeigen damit durch Widerspruch, dass es keine Funktionen u_1, u_2, Δ gibt, die

(5.11) erfüllen. Sei $\mu_2 = \frac{1}{2}\lambda\big|_{[0,2]}$. Wir definieren

$$a_n := \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2} + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right),\ n \geq 1, \tag{5.12}$$

$$\bar{a} := \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} + 2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} + 2\right) = \frac{\pi^2}{12} + 1, \tag{5.13}$$

$$\mu_1 := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}\delta_{a_i} + \frac{1}{2}(2 - \frac{\pi^2}{6})\delta_{\bar{a}}. \tag{5.14}$$

Dabei ist die Zahl π gemeint. Wir zeigen jetzt, dass $\mathcal{M}(\mu_1, \mu_2)$ aus dem einzigen Element

$$\mathbb{Q} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\delta_{a_n} \otimes \lambda\big|_{\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}, \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right]} + \frac{1}{2}\delta_{\bar{a}} \otimes \lambda\big|_{\left(\frac{\pi^2}{6}, 2\right]}. \tag{5.15}$$

besteht. Es ist klar, dass $\mathbb{Q}$ ein Maß ist. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}([0,2]^2) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\delta_{a_n}([0,2]) \otimes \lambda\big|_{\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}, \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right]}([0,2]) + \frac{1}{2}\delta_{\bar{a}}([0,2]) \otimes \lambda\big|_{\left(\frac{\pi^2}{6}, 2\right]}([0,2]) \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2} - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}\right) + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(2 - \frac{\pi^2}{6}\right) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \left(1 - \frac{\pi^2}{12}\right) = \frac{\pi^2}{12} + 1 - \frac{\pi^2}{12} = 1.
\end{aligned}$$

Somit ist $\mathbb{Q}$ auch ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Es bleibt die Martingaleigenschaft zu überprüfen, d.h. zu zeigen ist:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_2 | S_1 = a_n\right] &= a_n,\ n \geq 1 \\
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_2 | S_1 = \bar{a}\right] &= \bar{a}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_2|S_1=a_n\right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_2\cdot \mathbb{1}_{\{S_1=a_n\}}\right]\Big/\mathbb{P}\left(S_1=a_n\right)\\
&= \int_{\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}}^{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}} x_2\, d\mu_2(x_2)\Big/\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\int_{\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}}^{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}} x_2\, dx_2\Big/\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x_2^2\Big|_{\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}}^{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}}\Big/\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}\right)^2\right)\Big/\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}\right)\Big/\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2}\right) = a_n.
\end{aligned}$$

Die Rechnung erfolgt völlig analog bei $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_2|S_1=\bar{a}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[S_2\cdot \mathbb{1}_{\{S_1=\bar{a}\}}\right]/\mathbb{P}\left(S_1=\bar{a}\right)=\bar{a}$.
Daraus folgt, dass $\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\mu_2)$.
Nun dazu, dass $\mathbb{Q}$ das einzige Element in $\mathbb{Q}\in\mathcal{M}(\mu_1,\mu_2)$ ist.
Für $s\in S:=\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}:n\geq 0\right\}\cup\left\{\frac{\pi^2}{6},2\right\}$ gilt

$$\mathbb{Q}\left([0,s]^2\cup(s,2]^2\right)=\mathbb{Q}\left([0,2]^2\right)=1.$$

Die Darstellung von $\mathbb{Q}$ zeigt, dass Eigenschaft (ii) von Lemma 5.2 erfüllt ist. Daher gilt (ii) auch für ein beliebiges $\tilde{\mathbb{Q}}\in\mathcal{M}(\mu_1,\mu_2)$, d.h.

$$\tilde{\mathbb{Q}}\left([0,s]^2\cup(s,2]^2\right)=1. \tag{5.16}$$

Außerdem gilt

$$[0,s]^2\cup(s,2]^2=[0,2]^2=\bigcup_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2},\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right]^2\cup\left(\frac{\pi^2}{6},2\right]^2.$$

Wir wenden nun Lemma 5.3 an. Für $(c,d]=\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2},\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right]$, $n\in\mathbb{N}$ und $m=\frac{1}{2}\lambda\big|_{(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2},\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}]}$ erhalten wir, dass das Produktmaß $\delta_x\otimes\frac{1}{2}\lambda\big|_{(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2},\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}]}$ das einzige Maß auf $\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2},\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\right]^2$ mit Randverteilungen $\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\delta_x$ bzw. $\frac{1}{2}\lambda\big|_{(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i^2},\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}]}$ ist. Analog gilt für $(c,d]=(\frac{\pi^2}{6},2]$, dass $\delta_x\otimes\frac{1}{2}\lambda\big|_{(\frac{\pi^2}{6},2]}$ das einzige

Maß auf $(\frac{\pi^2}{6}, 2]^2$ mit Randverteilungen $\left(2 - \frac{\pi^2}{6}\right) \delta_x$ bzw. $\frac{1}{2}\lambda\big|_{\left(\frac{\pi^2}{6},2\right]}$ ist. Nehmen wir alle Intervalle zusammen, ergibt sich, dass $\mathbb{Q}$ das einzige Maß auf $[0,2]^2$ ist, d.h. auf $[0,2]^2$ konzentriert, welches Randverteilungen μ_1 bzw. μ_2 hat. Nun gilt aber mit (5.16), dass auch $\tilde{\mathbb{Q}}([0,2]^2) = 1$. $\tilde{\mathbb{Q}}$ ist also auch auf $[0,2]^2$ konzentriert und damit folgt $\tilde{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}$.
Daher haben wir $\mathcal{M}(\mu_1, \mu_2) = \{\mathbb{Q}\}$.

Angenommen es existieren nun u_1, u_2, $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass (5.11) bezüglich $\mathbb{Q}$ gilt. Wir setzen $x_1 = a_n$, $n \in \mathbb{N}$ und damit $d_n := u_1(a_n)$ und $k_n := \Delta(a_n)$. Wir erhalten

$$d_n + u_2(x_2) + k_n(x_2 - a_n) \leq -|x_2 - a_n|$$

beziehungsweise

$$d_n + k_n(x_2 - a_n) + |x_2 - a_n| \leq -u_2(x_2), \tag{5.17}$$

mit $x_2 \in \mathbb{R}$. Dabei gilt Gleichheit für λ-fast alle $x_2 \in \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2}, \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right]$.
Wenden wir das nun auf n bzw. $n+1$ an, erhalten wir

$$\begin{aligned} &d_n + k_n(x_2 - a_n) + |x_2 - a_n| \leq -u_2(x_2) = d_{n+1} + k_{n+1}(x_2 - a_{n+1}) + |x_2 - a_{n+1}|, \\ &\quad \text{für } x_2 \in \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}, \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2}\right], \\ &d_n + k_n(x_2 - a_n) + |x_2 - a_n| = -u_2(x_2) \geq d_{n+1} + k_{n+1}(x_2 - a_{n+1}) + |x_2 - a_{n+1}|, \\ &\quad \text{für } x_2 \in \left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2}, \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right]. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Für $y_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$ erhalten wir mit (5.18)

$$d_n + k_n(y_0 - a_n) + |y_0 - a_n| = -u_2(y_0) = d_{n+1} + k_{n+1}(y_0 - a_{n+1}) + |y_0 - a_{n+1}|.$$

Wir betrachten nun die linearen Funktionen $f_1(x_2) =: d_n + k_n(x_2 - a_n) + |x_2 - a_n|$ und $f_2(x_2) := d_{n+1} + k_{n+1}(x_2 - a_{n+1}) + |x_2 - a_{n+1}|$. Da a_n der Mittelpunkt von $\left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2}, \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right]$ ist, ist $|y_0 - a_n| = (y_0 - a_n)$ und analog ist $|y_0 - a_{n+1}| = (a_{n+1} - y_0)$. Daher haben die Funktionen in y_0 die Form

$$\begin{aligned} f_1(x_2) &= d_n + (k_n + 1)y_0 - (k_n + 1)a_n \quad \text{bzw.} \\ f_2(x_2) &= d_{n+1} + (k_{n+1} - 1)y_0 - (k_{n+1} - 1)a_{n+1} \end{aligned}$$

und haben damit die Steigung $k_n + 1$ bzw. $k_{n+1} - 1$. Mit (5.18) sieht man, dass $f_1(x_2) \geq f_2(x_2)$ für $x_2 < y_0$ und $f_1(x_2) \leq f_2(x_2)$ für $x_2 > y_0$. Daraus folgt, dass

$$k_n + 1 \leq k_{n+1} - 1.$$

Induktiv erhalten wir

$$k_n \geq (k_1 - 2) + 2n. \tag{5.19}$$

Setzen wir in der ersten Gleichung von (5.18) $x_2 = a_{n+1}$, so erhalten wir

$$d_n + k_n(a_{n+1} - a_n) + |a_{n+1} - a_n| \leq d_{n+1} + k_{n+1}(a_{n+1} - a_{n+1}) + |a_{n+1} - a_{n+1}| = d_{n+1}.$$

Da

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2} + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2}\right) - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) \end{aligned}$$

gilt, folgt

$$\begin{aligned} d_{n+1} &\geq d_n + k_n \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right) + \frac{1}{2}\left|\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right| \\ &\geq d_n + k_n \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right). \end{aligned}$$

Induktiv erhalten wir daraus

$$d_{n+1} \geq d_1 + \sum_{i=1}^{n} ((k_1 - 2) + 2i)\, \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i^2} + \frac{1}{(i+1)^2}\right).$$

Das schätzen wir weiter ab und erhalten

$$\begin{aligned} d_{n+1} &\geq d_1 + (k_1 - 2) \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i^2} + \frac{1}{(i+1)^2}\right) + \sum_{i=1}^{n} 2i \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i^2} + \frac{1}{(i+1)^2}\right) \\ &= d_1 + (k_1 - 2)\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{6}\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i} + \frac{i}{(i+1)^2}\right) \\ &\geq d_1 + (k_1 - 2)\frac{\pi^2}{6} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

Mit den Abschätzungen (5.19) und (5.20) folgt, dass $\{d_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{k_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen unendlich gehen, für n gegen unendlich. Damit folgt, dass für $x_2 \geq \frac{\pi^2}{6}$ und n gegen unendlich mit (5.17) $-u_2(x_2) = \infty$ ist. Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. Daher kann es keine u_1, u_2, $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass (5.11) gilt.

$\square$

6 Zusammenfassung

In dieser Arbeit untersuchten wir zwei Ansätze zum Bewerten einer Option ohne vorherige Festlegung eines Modells.

Zuerst haben wir eine modellunabhängige Version des Fundamentalen Theorems der Optionspreistheorie aufgestellt. Darin zeigten wir die Äquivalenz zwischen der Existenz eines Martingalmaßes und der Abwesenheit einer Arbitragemöglichkeit. Darauf aufbauend stellten wir das Superreplikation Theorem auf. Hier stellten wir fest, dass der Preis einer Option, die oberhalbstetig ist und eine gewisse Wachstumsbedingung erfüllt, eine obere Schranke hat. Diese wird durch den Preis von semistatischen Strategien, die die Option superreplizieren, bestimmt.
Dieses Ergebnis wurde noch weitergeführt, indem eine zuvor benötigte superlinear wachsende Option durch eine Familie ersetzt wurde. Eine weitere Erweiterung war die Annahme, dass die Verteilung des Assets im Endzeitpunkt bekannt ist.

Im nächsten Kapitel gaben wir eine Einführung in den optimalen Transport. Das Hauptresultat war das Dualitätstheorem nach Kantorovich. Die Aussage des Theorems ist: Anstatt ein primales Problem, die Minimierung von Gesamtkosten, zu betrachten, kann man ein duales Problem, die Maximierung eines korrespondierenden Preises, betrachten. Die Werte der Probleme sind gleich.

Danach stellten wir eine Form des Dualitätstheorems auf, welches ein Superreplikation ist. Dabei untersuchten wir eine untere Preisgrenze einer exotischen Option, eine unterhalbstetige Option, die von unten linear beschränkt ist. Das primale Problem war dabei der kleinste Preis dieser Option über alle Martingalmaße mit bestimmte Randverteilungen. Das duale Problem bestand darin den größten Preis einer subreplizierenden semistatischen Strategie zu finden. Wir stellten fest, dass das primale und das duale Problem die gleichen Werte haben.
Da wir an der oberen Preisgrenze dieser Option interessiert waren, gaben wir ein Korollar an, welches diese mithilfe des letzten Theorems bestimmte.

Die Verbindung zwischen dem Dualitätstheorem, und der Bewertung von Optionen ist relativ neu. Bislang gibt es einige Untersuchungen, die Preisgrenzen für bestimmte Arten von Optionen mithilfe des Dualitätstheorems aufstellen. Weiteres Potential läge darin eine allgemeinere Theorie des Optionsbewertung mit des optimalen Transports zu erklären, oder es eventuell auf Verbindungen zu anderen Gebieten der Finanzmathematik zu untersuchen.

A Anhang

A.1 Zusatz zu Proposition 2.9

Wir betrachten den Raum $C^b_{\bar{m}}(\mathbb{R}^T_+)$ aller stetigen beschränkten Funktionen f auf $\mathbb{R}^T_+$, sodass die Supremumsnorm, normiert durch $\bar{m}$, endlich ist,

$$||f||_{C^b_{\bar{m}}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^T_+} \frac{|f(x)|}{\bar{m}(x)} < \infty.$$

Dabei ist $\bar{m} := m \vee 1$ und $m(x_1, ..., x_T) := \sum_{t=1}^T g(x_t)$, wobei $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ konvex und superlinear ist.
Außerdem bezeichne $M(\beta\mathbb{R}^T_+)$ die Menge aller signierten Radonmaße auf der Stone-Čhech Kompaktifizierung von $\mathbb{R}^T_+$.
In dem Beweis von Proposition 2.9 benutzen wir die Tatsache, dass ein stetiges lineares Funktional F auf $C^b_{\bar{m}}(\mathbb{R}^T_+)^*$, dem Dualraum von $C^b_{\bar{m}}(\mathbb{R}^T_+)$, mit einem geeigneten $\mu = \mu^+ - \mu^- \in M(\beta\mathbb{R}^T_+)$ durch

$$\begin{aligned} F(f) &= \int_{\beta\mathbb{R}^T_+} \frac{f(x)}{\bar{m}(x)} \, d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^T_+} \frac{f(x)}{\bar{m}(x)} \, d\mu^+(x) - \int_{\beta\mathbb{R}^T_+ \setminus \mathbb{R}^T_+} \frac{f(x)}{\bar{m}(x)} \, d\mu^-(x) \end{aligned}$$

dargestellt werden kann.
Diesen Umstand wollen wir hier nun verdeutlichen. Da dies nicht Teil des behandelten Themas ist, wollen wir uns hier darauf beschränken Ergebnisse aus [Que13], [Kab11] und [Els13] zusammentragen.

Wir betrachten den Multiplikationsoperator $T_{\bar{m}} : C^b_{\bar{m}}(\mathbb{R}^T_+) \to C^b(\mathbb{R}^T_+)$

$$T_{\bar{m}}(f) = \frac{f}{\bar{m}}. \tag{A.1}$$

Dabei ist der Raum der stetigen beschränkten Funktionen $C^b(\mathbb{R}^T_+)$ mit der Supremumsnorm

$$||h||_{C^b} = \sup_{x \in \mathbb{R}^T_+} |h(x)| < \infty$$

ausgestattet.

$T_{\bar{m}}$ ist offensichtlich bijektiv und es gilt außerdem für alle $f \in C^b_{\bar{m}}(\mathbb{R}^T_+)$

$$||T_{\bar{m}}(f)||_{C^b} = \left|\left|\frac{f}{\bar{m}}\right|\right|_{C^b} = \sup_{x\in\mathbb{R}^T_+}\left|\frac{f(x)}{\bar{m}(x)}\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}^T_+}\frac{|f(x)|}{\bar{m}(x)} = ||f||_{C^b_{\bar{m}}}.$$

$T_{\bar{m}}$ ist somit eine Isometrie[23] und $C^b_{\bar{m}}$ und C^b sind isometrisch zueiander.
In dem Abschnitt *Kompaktifizierung vollständig regulärer Räume*[24] aus [Que13] wird gezeigt, dass es zu jeder Funktion $f \in C^b_{\bar{m}}(\mathbb{R}^T_+)$ eindeutig bestimmte Funktionen $f' \in C(\beta\mathbb{R}^T_+)$ und $\beta : \mathbb{R}^T_+ \to \beta\mathbb{R}^T_+$ gibt, sodass

$$f' \circ \beta = f. \tag{A.2}$$

Zusammen kann man jede Funktion $C^b_{\bar{m}}(\mathbb{R}^T_+)$ mit (A.1) durch eine Funktion aus $C^b(\mathbb{R}^T_+)$ darstellen, welche man wiederum mit (A.2) durch eine Funktion aus $C(\beta\mathbb{R}^T_+)$ darstellen kann.

Auf kompakten topologischen Räumen X gilt $C(X) = C^0(X)$, wobei C^0 der Raum der stetigen Funktionen ist, die im Unendlichen verschwinden. Da $\beta\mathbb{R}^T_+$ kompakt ist, können wir den *Riesz'schen Darstellungssatz*[25] anwenden, welcher ein eindeutig bestimmtes $\mu \in M(\beta\mathbb{R}^T_+)$ liefert, sodass

$$F(f') = \int_{\beta\mathbb{R}^T_+} f'(x)\, d\mu(x),\ \forall f' \in C(\beta\mathbb{R}^T_+)$$

und damit auch

$$F(f) = \int_{\beta\mathbb{R}^T_+} \frac{f(x)}{\bar{m}(x)}\, d\mu(x),\ \forall f \in C^b_{\bar{m}}(\mathbb{R}^T_+).$$

Nun zur Zerlegung des Maßes $\mu \in M(\beta\mathbb{R}^T_+)$.
Nach dem *Hahnschen Zerlegungssatz*[26] lässt sich $\beta\mathbb{R}^T_+$ bezüglich μ, bis auf Nullmengen, eindeutig bestimmt zerlegen in

$$\beta\mathbb{R}^T_+ = \mathbb{R}^T_+ \cup \beta\mathbb{R}^T_+\backslash\mathbb{R}^T_+.$$

Zu dieser Zerlegung lassen sich die *positive Variation* μ^+ durch

$$\mu^+(A) := \mu\left(A \cap \mathbb{R}^T_+\right),$$

[23] s. [Kab11, S. 45, Isometrien a)]
[24] s. [Que13, S. 160ff]
[25] s. [Que13, Satz 17.35]
[26] s. [Els13, Satz 1.8]

und die *negative Variation* μ^- durch

$$\mu^-(A) := -\mu\left(A \cap \left(\beta\mathbb{R}_+^T \backslash \mathbb{R}_+^T\right)\right)$$

definieren[27].
Der *Jordansche Zerlegungssatz*[28] zeigt, dass das Maß $\mu \in M(\mathbb{R}_+^T)$ die eindeutig bestimmte Jordanzerlegung

$$\mu = \mu^+ - \mu^-$$

hat.

Daraus folgt

$$\begin{aligned} F(f) &= \int_{\beta\mathbb{R}_+^T} \frac{f(x)}{\bar{m}(x)}\, d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}_+^T} \frac{f(x)}{\bar{m}(x)}\, d\mu^+(x) - \int_{\beta\mathbb{R}_+^T \backslash \mathbb{R}_+^T} \frac{f(x)}{\bar{m}(x)}\, d\mu^-(x). \end{aligned}$$

A.2 Zu Beispiel 5.1

Wir suchen nach Funktionen f und g, die (5.1) und (5.2), d.h.

$$\begin{aligned} \left(-f'(x_1)\frac{d\mu_2}{d\lambda}(f(x_1))\right) + \left(-g'(x_1)\frac{d\mu_2}{d\lambda}(g(x_1))\right) &= \frac{1}{3}\frac{d\mu_1}{d\lambda}(x_1) = \frac{1}{6}, \\ \left(-f'(x_1)f(x_1)\frac{d\mu_2}{d\lambda}(f(x_1))\right) + \left(-g'(x_1)g(x_1)\frac{d\mu_2}{d\lambda}(g(x_1))\right) &= \frac{x_1}{3}\frac{d\mu_1}{d\lambda}(x_1) = \frac{x_1}{6}, \end{aligned}$$

erfüllen mit Anfangsbedingungen $f(1) = -2$ und $g(1) = 1$.
Schreiben wir die Dichte $\frac{d\mu_2}{d\lambda}$ aus erhalten wir

$$\begin{aligned} -f'(x_1)\frac{2+f(x_1)}{3} - g'(x_1)\frac{2-g(x_1)}{3} &= \frac{1}{6}, \\ -f'(x_1)f(x_1)\frac{2+f(x_1)}{3} - g'(x_1)g(x_1)\frac{2-g(x_1)}{3} &= \frac{x_1}{6}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Wir suchen f, g in den linearen Funktionen. Daher definieren wir

$$\begin{aligned} f(x_1) &:= ax_1 + b,\ a, b \in \mathbb{R} \\ g(x_1) &:= cx_1 + d,\ c, d \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

---

[27] s. [Els13, S. 270, Positive Variation, negative Variation]
[28] s. [Els13, Satz 1.12]

Für die erste Ableitung erhalten wir $f'(x_1) = a$ bzw. $g'(x_1) = c$. Setzen wir noch die Anfangsbedingungen ein, so folgt

$$\begin{aligned} -2 &= a + b \ \Leftrightarrow b = -a - 2, \\ 1 &= c + d \ \Leftrightarrow d = -c + 1. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für (A.3)

$$\begin{aligned} &(I) & (-a)\frac{ax_1 - a}{3} + (-c)\frac{-cx_1 + c + 1}{3} &= \frac{1}{6}, \\ &(II) & (-a)(ax_1 - a - 2)\frac{ax_1 - a}{3} + (-c)(cx_1 - c + 1)\frac{-cx_1 + c + 1}{3} &= \frac{x_1}{6}. \end{aligned}$$

Anstatt diese Gleichungen nun für alle $x_1 \in [-1, 1]$ zu lösen, werden sie für $x_1 = 0$ und $x_1 = 1$ lösen und danach überprüfen, ob die erhaltenen Funktionen f und g (A.3) erfüllen.

$$\begin{aligned} &(I_{x_1=1}) & -c\frac{1}{3} = \frac{1}{6} &\Leftrightarrow \quad c = -\frac{1}{2}, \\ &(II_{x_1=1}) & -c\frac{1}{3} = \frac{1}{6} &\Leftrightarrow \quad c = -\frac{1}{2}, \\ &(I_{x_1=0}) & (-a)\frac{-a}{3}(-c)\frac{c+1}{3} = 0 &\Leftrightarrow \quad a^2 - c^2 - c = 0, \\ &(II_{x_1=0}) & (-a)(-a-2)\frac{-a}{3} + (-c)(-c+1)\frac{c+1}{3} = 0 &\Leftrightarrow \quad -a^3 - 2a^2 - +c^3 - c = 0. \end{aligned}$$

Setzt man nun $c = -\frac{1}{2}$ in die Gleichungen $(I_{x_1=0}), (II_{x_1=0})$ ein, erhält man

$$\begin{aligned} &(I_{x_1=0}) & a^2 = \frac{1}{4} &\Leftrightarrow & a &= \pm\frac{1}{2}, \\ &(II_{x_1=0}) & -a^3 - 2a^2 = -\frac{3}{8} &\Leftrightarrow & a &\in \{-\frac{1}{2}, \frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{21}}{4}\}. \end{aligned}$$

Da $-\frac{1}{2}$ als einzige Lösung in beiden Gleichungen existiert, folgt $a = -\frac{1}{2}$.
Daher sind f und g gegeben durch

$$\begin{aligned} f(x_1) &= -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}, \\ g(x_1) &= -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Um nachzuprüfen, ob die Funktionen (A.3) für alle $x_1 \in [-1,1]$ erfüllen, werden wir sie in (A.3) einsetzen.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{6} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2-\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{2}}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2+\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{2}}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4-\frac{6}{2}}{3}=\frac{1}{6},\\
\frac{x_1}{6} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{2}\right)\frac{2-\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{2}}{3}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x_1+\frac{3}{2}\right)\frac{2+\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{2}}{3}\\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x_1\right)\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}x_1\right)=-\frac{1}{12}x_1+\frac{3}{12}x_1=\frac{x_1}{6}.
\end{aligned}$$

Somit sind $f(x_1) = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}$ und $g(x_1) = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}$ die gesuchten Funktionen.

Bei den Funktionen u_1, $u_{2,l}$, $u_{2,m}$, $u_{2,r}$ und Δ beschränken wir uns daraus nachzuweisen, dass sie die Gleichungen

$$\Delta(x_1) = -1 - u'_{2,l}(f(x_1)) \tag{A.4}$$

$$\Delta(x_1) = 1 - u'_{2,r}(g(x_1)) \tag{A.5}$$

$$u_1(x_1) + \Delta(x_1)(f(x_1) - x_1) = |f(x_1) - x_1| - u_{2,l}(f(x_1)), \tag{A.6}$$

$$u_1(x_1) + \Delta(x_1)(g(x_1) - x_1) = |g(x_1) - x_1| - u_{2,r}(g(x_1)) \tag{A.7}$$

erfüllen.
Seien dazu

$$\begin{aligned}
u_1(x_1) = -u_{2,m}(x_1) = \frac{9-5x_1^2}{6}, &\quad \Delta(x_1) = -\frac{2}{3}x_1,\\
u_{2,l}(x_1) = -3-3x_2-\frac{2}{3}x_2^2, &\quad u_{2,r}(x_1) = -3+3x_2-\frac{2}{3}x_2^2.
\end{aligned}$$

Zu (A.4):

$$\begin{aligned}
-1-u'_{2,l}(f(x_1)) &= -1+3+\frac{4}{3}f(x_1) = 2+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}x_1-\frac{3}{2}\right)\\
&= 2-\frac{2}{3}x_1-2 = \Delta(x_1).
\end{aligned}$$

Zu (A.5):

$$\begin{aligned}
1-u'_{2,r}(g(x_1)) &= 1-3+\frac{4}{3}g(x_1) = -2+\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}x_1+\frac{3}{2}\right)\\
&= -2-\frac{2}{3}x_1+2 = \Delta(x_1).
\end{aligned}$$

Zu (A.6): Die linke Seite vereinfacht sich zu:

$$\begin{aligned} u_1(x_1) + \Delta(x_1)(f(x_1) - x_1) &= \frac{9 - 5x_1^2}{6} - \frac{2}{3}x_1\left(-\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2} - x_1\right) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{5}{6}x_1^2 + \frac{1}{3}x_1^2 + x_1 + \frac{2}{3}x_1^2 = \frac{1}{6}x_1^2 + x_1 + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Und dementsprechend vereinfacht sich die rechte Seite zu:

$$\begin{aligned} |f(x_1) - x_1| - u_{2,l}(f(x_1)) &= |-\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2} - x_1| + 3 + 3\left(-\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}\right) + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2} + 3 - \frac{3}{2}x_1 - \frac{9}{2} + \frac{1}{6}x_1^2 + x_1 + \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{6}x_1^2 + x_1 + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $u_1(x_1) + \Delta(x_1)(f(x_1) - x_1) = |f(x_1) - x_1| - u_{2,l}(f(x_1))$.
Zu (A.7): Wiederum vereinfacht sich die linke Seite zu:

$$\begin{aligned} u_1(x_1) + \Delta(x_1)(g(x_1) - x_1) &= \frac{9 - 5x_1^2}{6} - \frac{2}{3}x_1\left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2} - x_1\right) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{5}{6}x_1^2 + \frac{1}{3}x_1^2 - x_1 + \frac{2}{3}x_1^2 = \frac{1}{6}x_1^2 - x_1 + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Und dementsprechend vereinfacht sich die rechte Seite zu:

$$\begin{aligned} |g(x_1) - x_1| - u_{2,r}(g(x_1)) &= |-\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2} - x_1| + 3 - 3\left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}\right) + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{3}{2}x_1 + \frac{3}{2} + 3 + \frac{3}{2}x_1 - \frac{9}{2} + \frac{1}{6}x_1^2 - x_1 + \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{6}x_1^2 - x_1 + \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $u_1(x_1) + \Delta(x_1)(g(x_1) - x_1) = |g(x_1) - x_1| - u_{2,r}(g(x_1))$.
Unsere angegebenen Funktionen erfüllen die Gleichungen (A.4)-(A.7).

Literatur

[ABPS13] B. Acciaio, M. Beiglböck, F. Penkner und W. Schachermayer. “A model-free version of the fundamental theorem of asset pricing and the super-replication theorem”. In: *Mathematical Finance* (2013), n/a.

[AG13] Luigi Ambrosio und Nicola Gigli. “A user’s guide to optimal transport”. In: *Modelling and optimisation of flows on networks*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013, S. 1–155.

[BHLP13] Mathias Beiglböck, Pierre Henry-Labordère und Friedrich Penkner. “Model-independent bounds for option prices: a mass transport approach”. In: *Finance and Stochastics* 17.3 (2013), S. 477–501.

[BL78] Douglas T Breeden und Robert H Litzenberger. “Prices of state-contingent claims implicit in option prices”. In: *Journal of business* (1978), S. 621–651.

[DH07] Davis, Mark H. A. und David G. Hobson. “The range of traded option prices”. In: *Mathematical Finance* 17.1 (2007), S. 1–14.

[Els13] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

[Hen13] N. Henze. *Stochastik für Einsteiger: Eine Einführung in die faszinierende Welt des Zufalls*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2013.

[Heu09] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis*. Mathematische Leitfäden. Vieweg+Teubner Verlag, 2009.

[JS98] J. Jacod und A. N. Shiryaev. “Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case”. In: *Finance and Stochastics* 2.3 (1998), S. 259–273.

[Kab11] W. Kaballo. *Grundkurs Funktionalanalysis*. Spektrum Akademischer Verlag, 2011.

[Kel84] HansG. Kellerer. “Duality theorems for marginal problems”. In: *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* 67.4 (1984), S. 399–432.

[Que13] B. von Querenburg. *Mengentheoretische Topologie*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2013.

[Str65] V. Strassen. “The existence of probability measures with given marginals”. In: *Ann. Math. Statist.* 36.2 (1965), S. 423–439.

[Str85] H. Strasser. *Mathematical theory of statistics: statistical experiments and asymptotic decision theory*. De Gruyter studies in mathematics. W. de Gruyter, 1985.

[Vil09] Cédric Villani. *Optimal transport: old and new*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.

Selbstständigkeitserklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe, insbesondere sind wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet. Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandlung auch nachträglich zur Aberkennung des Abschlusses führen kann.

Ort	Datum	Unterschrift