Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

Optimierung eines Mean-Variance Portfolios

Diplomarbeit

Leipzig, 23. Januar 2012

vorgelegt von: **Oliver Janke, B.Sc.**
Studiengang Diplom-Wirtschaftsmathematik

Betreuender Hochschullehrer: **Junprof. Dr. Michał Barski**
Fakultät für Mathematik und Informatik,
Mathematisches Institut

Zusammenfassung

Diese Diplomarbeit untersucht die Optimierung eines Mean-Variance Portfolios auf einem vollständigen Markt unter der Bedingung, dass die Insolvenz des Investors ausgeschlossen ist. Hierbei wird die duale Methode (auch Martingalmethode genannt) angewandt, bei der zuerst das optimale Endvermögen und in einem zweiten Schritt das dazugehörige optimale replizierende Portfolio bestimmt wird. Die Untersuchung liefert Bedingungen für die Existenz und Eindeutig einer solchen Lösung. Allerdings lässt sich eine explizite Form der Lösung in der Regel nicht angeben. Für deterministische Marktkoeffizenten ist dies allerdings möglich und wird in dieser Arbeit dargestellt. Zwei Beispiele sollen dabei die praktische Anwendung verdeutlichen.
Die mathematischen Grundlagen basieren hauptsächlich auf denen der zeitstetigen Finanzmathematik. Die Arbeit setzt diese überwiegend als bekannt voraus, untersucht aber die rückwärts stochastischen Differentialgleichungen genauer.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Die Fragestellung

Wie muss ein Agent[1] ein Portfolio zusammenstellen, damit es nicht nur maximalen Ertrag generiert, sondern auch den möglichen Verlust minimiert? Unter welchen Bedingungen ist ein solches Problem lösbar? Wie sieht ein entsprechendes Portfolio aus und wie lässt es sich mit mathematischen Methoden beschreiben?

Gegenstand dieser Diplomarbeit sind die genannten Fragen. Wir betrachten ein Mean-Variance Portfolio mit einer endlichen Anzahl von Wertpapieren auf einem vollständigen, arbitragefreien Markt, auf dem zeitstetig gehandelt wird. Die entsprechenden Marktparameter sind dabei stochatisch. Unser Portfolio ist selbstfinanzierend und soll optimal zusammengesetzt werden. Dies bedeutet, dass zu einem erwarteten Ertrag am Ende der Handelszeit die Varianz des Ertrages möglichst gering ist. Intuitiv ist vorstellbar, dass bei steigendem erwarteten Ertrag die Varianz ebenfalls steigt. Ziel ist somit, am Ende eine optimale Menge aus Punkten mit zwei Koordinaten zu erhalten, die uns zu jedem möglichen Ertrag die geringste quadratische Standardabweichung liefert. Portfolios, die diese Ergebnisse liefern, werden als *effiziente Portfolios* bezeichnet. Zudem fordern wir, dass das Vermögen des Investors zu jedem Zeitpunkt nichtnegativ sein darf. Auch dieses ist aus praktischen Gesichtspunkten gerechtfertigt.

1.2 Historische Grundlagen und relevante Literatur

Schon viele Autoren haben sich mit dem Problem der Portfoliozusammenstellung mit dem Ziel seiner Optimierung beschäftigt. Markowitz hat dies 1952 in seinem Aufsatz *Portfolio Selections* [13] behandelt. In seinem Modell wählt der Investor eine Handelsstrategie aus der Menge der Portfolios, die ihm maximalen Ertrag und minimale Varianz versprechen. Markowitz betrachtet dabei einen Markt mit einer endlichen Zahl an Anleihen, die in einer Periode

[1] Im Folgenden wird ausschließlich aus Gründen der besseren Lesbarkeit nur die männliche Form verwendet. Dass stets Vertreterinnen und Vertreter beider Geschlechter gemeint sind, ist selbstverständlich.

gehandelt werden. Er stellt die Menge aller für den Investor effizienten Portfolios grafisch in einem zweidimensionalen Koordinatensystem dar, an dessen unterem Ende sich die Portfolios mit minimaler Varianz und an seinem oberen Ende sich die Strategien mit maximalen Ertrag befinden.[2] Die Idee von Markowitz wurde in den folgenden Jahren weiterentwickelt. So wurde das Modell erweitert, indem zeitstetig über mehrere Perioden gehandelt wird, so wie wir es auch in hier betrachten wollen.

Diese Arbeit baut auf dem Artikel *Time-Continuous Mean-Variance Portfolio Selection With Bankruptcy Prohibition* von Bielecki et al. [3] auf. Der Artikel *Continuous-time mean-risk portfolio selection* von Jin et al. [9] behandelt die Optimierung von gewichteten Mean-Variance Porfolios. Die Optimierung von Mean-Variance Portfolios mit nichtlinearer Vermögensgleichung wurde von Ji untersucht [8]. Diesen Aufsätzen ist gemein, dass sie stets die duale Metheode (auch Martingalmethode genannt) anwenden. Hierbei wird im ersten Schritt das optimale Endvermögen und im zweiten Schritt das zugehörige replizierende Portfolio bestimmt.[3] Eine weitere Methode der Portfoliooptimierung, bei der das Problem als stochastisches optimales linear-quadratisches (LQ-) Kontrollproblem formuliert wird, wird als primale Methode bezeichnet und findet sich u.a. bei Li et al. [12].
Die mathematischen Grundlagen sind überwiegend aus dem Buch *Stochastic Calculus in Finance II* von Shreve [16] und dem Skript *Financial Mathematics in Contiuous Time* von Frey [6] entnommen. Zudem basiert der Teil über stochastische Differentialgleichungen auf dem Artikel *Backward Stochastic Differential Equations in Finance* von El Karoui et al. [5].

1.3 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Im zweiten Kapitel werden die mathematischen Grundlagen erklärt. Speziell wird hierbei auch das Thema der stochastischen Differentialgleichungen behandelt. Im dritten Kapitel werden wir uns dem Hauptproblem dieser Arbeit durch die Optimierung von *varianzminimierenden Portfolios* nähern und Kriterien für seine Lösbarkeit herausarbeiten. Im vierten Kapitel werden wir zeigen, dass die optimale Lösung für unser Problem eine spezielle Form mit zwei Lagrange-Multiplikatoren hat. Diese werden wir durch ein Gleichungssystem bestimmen und zudem zeigen, dass sie eindeutig sind. Im fünften Kapitel werden wir herausarbeiten, wie ein effizientes Portfolio zusammengesetzt werden soll und welchen Ertrag bzw. welche Varianz es liefert. Zudem werden wir hier auch die Optimierung eines Benchmark-Portfolios kurz behandeln. Im sechsten Kapitel betrachten wir schließlich den Sonderfall, dass die Marktkoeffizienten nicht stochastisch, sondern deterministisch sind. Nur so ist es möglich, die Lagrange-Multiplikatoren explizit auszurechnen und so die effizienten Portfolios zu bestimmen. Dies werden wir an zwei Beispielen zeigen, wobei nur eine numerische Berechnung der Multiplikatoren möglich ist. Das siebte Kapitel enthält eine Zusammenfassung und abschließende Bemerkungen.

[2] vgl. [13], S. 87.
[3] vgl. [8], S. 90.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel werden wir die wichtigsten Notationen und Grundlagen aus der Finanzmathematik sammeln, die für das Verständnis dieser Arbeit wichtig sind. Allerdings werden wir hierbei die meisten Aussagen, wie die Fundamentalsätze des Asset-Pricing oder die Itô-Formel, nicht beweisen. Auf die entsprechenden Stellen wird aber verwiesen.
Im dritten Abschnitt werden wir das grundlegende finanzmathematische Modell einführen und uns speziell mit rückwärts stochastischen Differentialgleichungen auseinander setzen. Sie bilden ein wichtiges Fundament dieser Arbeit, so dass die hierzu benötigten Eigenschaften erklärt und bewiesen werden sollen.

2.1 Notationen

Die folgenden Notationen werden häufig in der Arbeit verwendet:

$$
\begin{array}{rcl}
M \in \mathbb{R}^{m\times n} & : & \text{eine } m \times n\text{-Matrix } M; \\
M' & : & \text{die Transponierte zu einem Vektor oder einer Matrix } M; \\
|M| & := & \sqrt{\sum_{i,j} m_{ij}^2} \quad \text{für jeden Vektor oder jede Matrix } M = (m_{ij}); \\
|x| & : & \text{die euklidische Norm für jedes } x \in \mathbb{R}^n; \\
\langle x, y\rangle & : & \text{das innere Produkt für jedes } x, y \in \mathbb{R}^n; \\
|M| := \sqrt{Spur(MM')} & : & \text{Die euklidische Norm einer Matrix } M; \\
\langle M, N\rangle := Spur(MN') & : & \text{das innere Produkt von zwei Matrizen } M \text{ und } N; \\
\alpha^+ & := & \max\{\alpha, 0\} \quad \text{für jede reelle Zahl } \alpha; \\
\mathbf{1}_A & : & \text{die Indikatorfunktion für eine beliebige Menge } A; \\
L^2(0,T;\mathbb{R}^d) & := & \left\{ f : [0,T] \to \mathbb{R}^d \ : \ \int_0^T |f(t)|^2 dt < +\infty \right\}; \\
L^2(\Omega;\mathbb{R}^d) & := & \left\{ \eta \in \mathbb{R}^d \ : \ |\eta|^2 < +\infty \right\}.
\end{array}
$$

Weitere Notationen werden an den entsprechenden Stellen eingeführt.

2.2 Grundlegende Definitionen

Definition 2.1 (Adaptierter stochastischer Prozess) *Sei Ω eine nichtleere Ereignismenge und sei $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ eine Filtration über Ω. Eine Familie von Zufallsvariablen $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ heißt* **adaptierter stochastischer Prozess**, *wenn für alle $t \in [0,T]$ gilt: X_t ist $\mathcal{F}_t$-messbar.*[1]

Definition 2.2 (Brownsche Bewegung) *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für jedes $\omega \in \Omega$ sei $W(t)$ eine stetige Funktion für $t \geq 0$ mit $W(0) = 0$, die von ω abhängt. Dann heißt $W(t)$* **Brownsche Bewegung**, *wenn für alle $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_m$ die Inkremente*

$$W(t_1) = W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \ldots, W(t_m) - W(t_{m-1})$$

unabhängig sind und jedes dieser Inkremente normalverteilt mit

$$\begin{aligned} E[W(t_{i+1}) - W(t_i)] &= 0, \\ Var[W(t_{i+1}) - W(t_i)] &= t_{i+1} - t_i \end{aligned}$$

ist.[2]
Eine m**-dimensionale Brownsche Bewegung** *ist ein Prozess*

$$W(t) \equiv (W^1(t), \ldots, W^m(t))',$$

für den gilt:

(i) für jedes $i \in \{1, \ldots, m\}$ ist $W^i(t)$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung wie oben definiert;

(ii) für jedes $i, j \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq j$, sind die Prozesse $W^i(t)$ und $W^j(t)$ unabhängig.[3]

Definition 2.3 *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, auf dem eine (ein- oder mehrdimensionale) Brownsche Bewegung $W(t)$, $t \geq 0$, definiert ist. Eine* **Filtration für eine Brownsche Bewegung** *ist eine Familie von σ-Algebren $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$, die folgende Bedingungen erfüllt:*

(i) **Informationszuwachs:** *Für $0 \leq s < t$ gilt: Jede Menge in $\mathcal{F}_s$ ist auch in $\mathcal{F}_t$ enthalten. Dies bedeutet, dass zu jedem späteren Zeitpunkt t mindestens genauso viele Informationen wie zum früheren Zeitpunkt s verfügbar sind;*

(ii) **Adaptivität:** *Für jedes $t \geq 0$ ist die Brownsche Bewegung $W(t)$ zum Zeitpunkt t $\mathcal{F}_t$-messbar. Dies bedeutet, dass die verfügbaren Informationen zum Zeitpunkt t hinreichend sind, um die Brownsche Bewegung $W(t)$ zu diesem Zeitpunkt zu bestimmen;*

[1] nach [16], S. 53.
[2] nach [16], S. 94.
[3] nach [16], S. 164.

(iii) **Unabhängigkeit von zukünftigen Inkrementen:** *Für $0 \leq t < u$ gilt: Das Inkrement $W(u) - W(t)$ ist unabhängig von $\mathcal{F}_t$. Dies bedeutet, dass jedes Inkrement einer Brownschen Bewegung nach einem Zeitpunkt t unabhängig vom Informationsstand zum Zeitpunkt t ist.*

Sei $x(t)$, $t \geq 0$, ein stochastischer Prozess. $x(t)$ heißt an die Filtration $\mathcal{F}_t$ **adaptiert**, *wenn für jedes $t \geq 0$ die Zufallsvariable $x(t)$ $\mathcal{F}_t$-messbar ist. Einen filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum bezeichnen wir mit $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$.*[4]

Definition 2.4 (Martingal) *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $T > 0$ fest und sei $\mathcal{F}_t$, $0 \leq t \leq T$, eine Filtration von Sub-Algebren von $\mathcal{F}$. Sei $M(t)$, $0 \leq t \leq T$, ein adaptierter stochastischer Prozess. $M(t)$ ist ein* **Martingal**, *wenn gilt:*

$$E[M(t) \mid \mathcal{F}_s] = M(s), \ \forall \ 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Dies bedeutet, dass der Prozess keine Neigung zum Fallen oder Steigen hat.[5]

Definition 2.5 (Lokales Martingal) *Ein stochastischer Prozess M heißt* **lokales Martingal**, *wenn es Stoppzeiten*[6] *$T_1 \leq \ldots \leq T_n \leq \ldots$ gibt, so dass gilt:*

(i) $\lim_{n\to+\infty} T_n(\omega) = +\infty$, *f.s.*

(ii) $\left(M_{\min\{T_n,t\}}\right)_{t\geq 0}$ *ist ein Martingal für alle n.*[7]

Definition 2.6 *(i) Ein* bedingter Anspruch *oder* contingent claim *X ist eine $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable X. Ein contingent claim heißt* **erreichbar**, *wenn es mindestens ein akzeptables Portfolio $\pi(\cdot) \equiv (\pi_1(\cdot), \ldots, \pi_m(\cdot))'$ gibt, dessen Endwert $x(T) = \pi_0(T) + \pi_1(T) + \cdots + \pi_m(T) = X$, f.s., ist. Ein solches Portfolio heißt* **replizierendes Portfolio** *für X.*

(ii) Ein Finanzmarktmodell heißt **vollständig**, *wenn jeder contingent claim $X \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathcal{F}, P)$ erreichbar ist.*[8]

Theorem 2.7 (Erster Fundamentalsatz des Asset-Pricing) *Ein Markt ist genau dann arbitragefrei, wenn es auf ihm ein risikofreies Maß gibt.*[9]

---

[4]nach [16], S. 97.
[5]nach [16], S. 74.
[6]Stoppzeiten geben den Zeitpunkt des ersten Auftretens eines bestimmten Ereignisses an (vgl. [6], S. 14).
[7]nach [6], S. 27.
[8]nach [6], S. 62.
[9]vgl. [16], S. 231.

Theorem 2.8 (Zweiter Fundamentalsatz des Asset-Pricing) *Sei ein Markt mit mindestens einem Martingalmaß Q gegeben. Dann gilt: Ein Markt ist genau dann vollständig, wenn das Martingalmaß eindeutig ist.*[10]

Definition 2.9 (Risikoneutrales Maß) *Sei $\mathcal{M} := (\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum und sei $D(\cdot)$ ein Diskontierungsprozess. Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf $(\Omega, \mathcal{F})$ heißt äquivalentes Martingalmaß oder* **risikoneutrales Maß** *für $\mathcal{M}$, wenn gilt:*

(i) Q ist äquivalent zu P ($Q \sim P$), d.h. für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt: $Q(A) = 0 \Leftrightarrow P(A) = 0$;

(ii) der diskontierte Aktienpreis $\tilde{S}_i(t) := D(t)S_i(t)$ ist ein Martingal für jedes $i = 1, \ldots, m$.[11]

Definition 2.10 (Radon-Nikodym-Derivat) *Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei Q ein anderes Wahrscheinlichkeitsmaß, das äquivalent zu P ist. Sei Z eine Zufallsvariable mit $Z \leq 0$, f.s., und $E[Z] = 1$, für die gilt:*

$$Q(A) = \int_A Z(\omega)\ dP(\omega), \quad \forall\ A \in \mathcal{F}.$$

Dann heißt

$$Z = \frac{dQ}{dP}$$

Radon-Nykodym-Derviat *von Q zum Wahrscheinlichkeitsmaß P.*
Für alle nichtnegativen Zufallsvariablen X gilt: $E_Q[X] = E[XZ]$ oder äquivalent für ein f.s. positives Z: $E_Q[XZ^{-1}] = E[X]$.[12]

Definition 2.11 (Europäische Put- und Call-Option) *Sei S ein Wertpapier (eine Aktie oder eine ausländische Währung) und sei S_t der Wert von S zum Zeitpunkt $t \geq 0$. Eine* **europäische Put-Option** *ist das Recht, das Wertpapier S in einem zukünftigem festen Zeitpunkt T zu einem heute fixierten Preis K zu verkaufen. K heißt* **Ausübungspreis** *(oder* strike*), $T - t$ für $0 \leq t \leq T$ heißt Restlaufzeit. Die Auszahlung P_T einer Put-Option im Zeitpunkt T ist gegeben durch:*

$$P_T = \max\{K - S_T, 0\} =: (K - S_T)^+.$$

Eine **europäische Call-Option** *ist das Recht, das Wertpapier S in einem zukünftigen festen Zeitpunkt T zu einem heute fixierten Preis K zu kaufen. Die Auszahlung C_T einer Call-Option im Zeitpunkt T ist gegeben durch:*

$$C_T = \max\{S_T - K, 0\} =: (S_T - K)^+.$$

[10] vgl. [16], S. 232.
[11] nach [16], S. 228.
[12] nach [16], S. 33 ff.

Analog dazu ist eine amerikanische Put- bzw. Call-Option *das Recht, das Wertpapier zu einem beliebigen zukünftigen Zeitpunkt $t \leq T$ zu einem heute festgelegten Preis K zu verkaufen bzw. zu kaufen.*[13]

Theorem 2.12 (Itô-Formel) *Sei $f(t,x)$ eine Funktion, bei der die partiellen Ableitungen $f_t(t,x)$, $f_x(t,x)$ und $f_{xx}(t,x)$ wohldefiniert und stetig sind. Sei $W(t)$ eine Brownsche Bewegung. Dann gilt für jedes $T \geq 0$:*

$$\begin{aligned} f(T, W(T)) &= f(0, W(0)) + \int_0^T f_t(t, W(t))\ dt \\ &\quad + \int_0^T f_x(t, W(t))\ dW(t) + \frac{1}{2}\int_0^T f_{xx}(t, W(t))\ dt. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die Aussage dieses Theorems wird als Itô- oder als Itô-Doeblin-Formel bezeichnet.[14]

2.3 Rückwärts stochastistische Differentialgleichungen

Unser Modell bestehe nun aus einem Markt, auf dem $m+1$ Wertpapiere in stetiger Zeit gehandelt werden. Sei T ein festgelegter Zeitpunkt, der das Ende des Handels beschreibt. $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ sei ein fester filtrierter, vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum, wobei der Informationsstand durch eine rechtsstetige Filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ gegeben ist. Auf diesem werde eine m-dimensionale Brownsche Bewegung $W(t) \equiv (W^1(t), \ldots, W^m(t))'$ mit $W(0) = 0$ definiert. Sei $r(t)$ die *Zinsrate*, die wir als einen $\mathcal{F}_t$-adaptierten, gleichmäßg beschränkten stochastischen Prozess mit Werten in $\mathbb{R}$ beschreiben wollen. I.d.R. gilt $r(t) \geq 0$, was wir aber nicht als zwingende Voraussetzung an die folgenden analytische Betrachtung annehmen wollen. Die *Preisprozesse* zum Zeitpunkt $t \geq 0$ von jenen $m+1$ Anleihen bezeichnen wir mit $S_i(t)$, $i \in \{0, \ldots, m\}$, wobei der Preisprozess des Bankkontos mit $S_0(\cdot)$ bezeichnet wird. Dieser erfüllt folgende gewöhnliche stochastische Differentialgleichung:

$$\begin{cases} dS_0(t) &= r(t)S_0(t)dt, \quad t \in [0,T], \\ S_0(0) &= s_0 > 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Nun betrachten wir die restlichen m Wertpapiere. Dazu seien $b_i(t)$ die *Wertsteigerungsrate* und $\sigma_{ij}(t)$ die *Volatilität* der i-ten Aktie zum Zeitpunkt $t \geq 0$. $b_i(\cdot)$ und $\sigma_{ij}(\cdot)$ sind dabei wieder $\mathcal{F}_t$-adaptierte, gleichmäßig beschränkte stochastische Prozesse mit Werten in $\mathbb{R}$. Damit gilt für alle anderen Preisprozesse $S_i(t)$ der Anleihen $i = 1, 2, \ldots, m$, gilt folgende stochastische Differentialgleichung:

$$\begin{cases} dS_i(t) &= S_i(t)\left[b_i(t)dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(t)dW^j(t)\right], \quad t \in [0,T], \\ S_i(0) &= s_i > 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

[13] nach [15], S. 9 f.
[14] nach [16], S. 138.

In diesem Zusammenhang definieren wir mit $\sigma(t) := (\sigma_{ij}(t))_{m\times m}$ die *Volatiltätsmatrix*. Wir nehmen an, dass auch die Inverse σ^{-1} ein beschränkter Prozess ist. Generell nehmen wir an, dass für die Kovarianzmatrix gilt:

$$\sigma(t)\sigma(t)' \geq \delta \cdot I_m, \qquad \forall\, t \in [0,T], \quad f.s.,$$

für einige $\delta > 0$, wobei I_m die $m \times m$-Einheitsmatrix ist. Somit haben wir ein vollständiges Modell für den Markt geschaffen.
Nun beschreibe $x(t)$ das komplette *Vermögen* des Agenten zum Zeitpunkt $t \geq 0$, dessen Transaktionen keinen Einfluss auf das Marktgeschehen haben und dessen Entscheidungen auf seinen Informationsstand $\mathcal{F}_t$ beruhen. Weiter sei $\pi(\cdot) \equiv (\pi_1(\cdot), \ldots, \pi_m(\cdot))'$ das *Portfolio* oder die *Handelsstrategie* des Agenten, wobei gilt: $x(t) = \pi_0(t) + \pi_1(t) + \cdots + \pi_m(t)$. $\pi_i(t)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, m$, beschreibt somit den Marktwert der i-ten Anleihe für den Agenten zum Zeitpunkt t, wobei $\pi_0(\cdot)$ der Wert des Bankkontos ist.[15]
Wir werden als mögliche Handelsstrategien nur die selbstfinanzierenden betrachten, die im Folgenden definiert sind:

Definition 2.13 (Selbstfinanzierende Strategie) *Eine Strategie $\pi(\cdot) \equiv (\pi_1(\cdot), \ldots, \pi_m(\cdot))'$ heißt* **selbstfinanzierend**, *wenn der Vermögensprozess $x(t) = \pi_0(t) + \pi_1(t) + \cdots + \pi_m(t)$ folgende Gleichung erfüllt:*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \sum_{i=0}^m \pi_i(s) \frac{dS_i(s)}{S_i(s)}. \tag{2.4}$$

Dies bedeutet, dass dem Portfolio zu keiner Zeit $t > 0$ Geld hinzugefügt oder abgezogen wird.[16]

Diese Eigenschaft der Handelsstrategien wollen wir in Form einer stochastischen Differentialgleichung ausdrücken:

Lemma 2.14 *Sei eine Strategie $\pi(\cdot) \equiv (\pi_1(\cdot), \ldots, \pi_m(\cdot))'$ selbstfinanzierend und sei $\pi_0(\cdot) = x(\cdot) - \sum_{i=1}^m \pi_i(\cdot)$ der Wert des Bankkontos, so gilt:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dx(t) & = & \left[r(t)x(t) + \sum\limits_{i=1}^m (b_i(t) - r(t))\, \pi_i(t) \right] dt \\ & & + \sum\limits_{j=1}^m \sum\limits_{i=1}^m \sigma_{ij}(t)\pi_i(t)\; dW^j(t), \\ x(0) & = & x_0 > 0. \end{array} \right. \tag{2.5}$$

[15] Das Verhältnis π_i/S_i, $i \in \{0, \ldots, m\}$, gibt Anzahl der i-ten Anleihenanteile, die vom Agenten gehalten werden, an.
[16] vgl. [5], S. 5.

Beweis:
Nach Gleichung (2.4) gilt:

$$\begin{aligned}
x(t) &= x(0) + \int_0^t \sum_{i=0}^m \pi_i(s) \frac{dS_i(s)}{S_i(s)} \\
&= x(0) + \int_0^t \pi_0(s) \frac{dS_0(s)}{S_0(s)} + \int_0^t \sum_{i=1}^m \pi_i(t) \frac{dS_i(s)}{S_i(s)} \\
&\overset{(2.2),(2.3)}{=} x(0) + \int_0^t \pi_0(s) \frac{r(s)S_0(s)ds}{S_0(s)} + \int_0^t \sum_{i=1}^m \pi_i(s) \frac{S_i(s)\left[b_i(s)ds + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(s)dW^j(s)\right]}{S_i(s)} \\
&= x(0) + \int_0^t \pi_0(s)r(s)ds + \int_0^t \sum_{i=1}^m \pi_i(s) \left[b_i(s)ds + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(s)dW^j(s)\right].
\end{aligned}$$

Setzen wir nun $x(t) = x(0) + f(Y(t))$ mit $f(y) = y$ und

$$Y(t) := \int_0^t \pi_0(s)r(s)ds + \int_0^t \sum_{i=1}^m \pi_i(t) \left[b_i(s)ds + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(s)dW^j(s)\right],$$

so gilt nach der Itô-Formel (Theorem 2.1):

$$\begin{aligned}
dx(t) &= df(Y(t)) \\
&= \underbrace{f'(Y(t))}_{\equiv 1} dY(t) + \frac{1}{2}\underbrace{f''(Y(t))}_{\equiv 0} dY(t)dY(t) \\
&= \pi_0(t)r(t)dt + \sum_{i=1}^m \pi_i(t) \left[b_i(t)dt + \sum_{j=1}^m \sigma_{ij}(t)dW^j(t)\right] \\
&= \left[x(t) - \sum_{i=1}^m \pi_i(t)\right] r(t)dt + \sum_{i=1}^m \pi_i(t)b_i(t)dt + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \pi_i(t)\sigma_{ij}(t)dW^j(t) \\
&= r(t)x(t)dt + \sum_{i=1}^m (b_i(t) - r(t))\pi_i(t)dt + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \sigma_{ij}(t)\pi_i(t)\ dW^j(t),
\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

□

x_0 beschreibt somit das *Anfangskapital* des Agenten. Weiter definieren wir

$$B(t) := (b_1(t) - r(t), \dots, b_m(t) - r(t))$$

als *Risikoprämie* für den Agenten und der *Risikoprämienprozess* ist gegeben durch

$$\theta(t) \equiv (\theta_1(t), \dots, \theta_m(t)) := B(t)(\sigma(t)')^{-1}. \tag{2.6}$$

Somit können wir die Gleichung (2.5) wie folgt schreiben:

$$\begin{cases} dx(t) &= [r(t)x(t) + B(t)\pi(t)]dt + \pi(t)'\sigma(t)dW(t), \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Im Folgenden werden wir nun eine bestimmte Handelsstrategie zur Kursabsicherung definieren.

Definition 2.15 (Hedgingstrategie) *Sei ξ ein nichtnegativer contingent claim.*

(i) Eine **Hedgingstrategie** *gegen ξ ist eine mögliche selbstfinanzierende Handelsstrategie $(x(\cdot), \pi(\cdot))$, so dass gilt: $x(T) = \xi$. $\mathcal{H}(\xi)$ bezeichnet die Menge aller Hedgingstrategien gegen ξ.*

(ii) Sei $\mathcal{H}(\xi)$ nichtleer. Ein **fairer Preis** *$x(0)$ zur Zeit $t = 0$ ist das geringste Anfangskapital, das benötigt wird, um mit der Hedgingstrategie ξ zu erreichen:*

$$x(0) = \inf \{x \geq 0 : \exists (x(\cdot), \pi(\cdot)) \in \mathcal{H}(\xi) \text{ } mit \text{ } x(0) = x\}.$$ [17]

Nun wollen wir formulieren, unter welchen Umständen es eine Hedgingstrategie gegen einen contingent claim gibt und welche Form in diesem Fall der Vermögensprozess hat.

Theorem 2.16 (Gleichung für den Vermögensprozess) *Sei ξ ein positiver, quadratisch integrierbarer contingent claim. Dann gibt es eine Hedgingstrategie $(x(\cdot), \pi(\cdot))$ gegen ξ, so dass gilt:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dx(t) &=& [r(t)x(t) + B(t)\pi(t)]dt + \pi(t)'\sigma(t)dW(t), \\ x(T) &=& \xi, \end{array} \right. \tag{2.8}$$

wobei der Anfangswert $x(0)$ ein fairer Preis und der obere Preis von ξ ist.
Sei $(H_t(s))_{s \geq t}$ der Deflationsprozess, der zum Zeitpunkt $t \geq 0$ startet, d.h. es gilt:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dH_t(s) &=& -H_t(s)[r(s)ds + \theta(s)'dW(s)], \\ H_t(t) &=& 1. \end{array} \right. \tag{2.9}$$

Dann gilt: $x(t) = E[H_t(T)\xi \mid \mathcal{F}_t]$, f.s.

Beweis:
Nach der Itô-Fomel (vgl. Theorem 2.1) hat der Deflationsprozess $H(\cdot) := H_0(\cdot)$ folgende Form:

$$H(t) := H_0(s) = -\exp\left\{ \int_0^s r(u) + \frac{1}{2}|\theta(u)|^2 du + \int_0^s \theta(u)'dW(u) \right\}.$$

Da $r(\cdot)$ und $\theta(\cdot)$ beschränkte Prozesse sind und ξ quadratisch integrierbar ist, gilt: $E[H_0(T)] < +\infty$ und $E[H_0(T)\xi] < +\infty$. Sei nun $x(\cdot)$ ein adaptierter Prozess und sei $H(\cdot)x(\cdot)$ ein Martingal, dann gilt nach Definition 2.4:

$$H(t)x(t) = E[H(T)\xi|\mathcal{F}_t] =: M(t).$$

[17] vgl. [5], S. 6.

Nun kann nach dem Martingaldarstellungstheorem[18] $M(\cdot)$ als stochastisches Integral dargestellt werden, wobei $M(0) = E[H_0(T)\xi]$ ist. Dies bedeutet, es existiert ein vorhersehbarer Prozess $U(\cdot)$ mit $\int_0^T |U(s)|^2 ds < +\infty$, f.s., so dass gilt:

$$H(t)x(t) = E[H(T)\xi] + \int_0^t U(s)' dW(s).$$

Setze nun $\pi(t) := (\sigma(t)')^{-1}[H(t)U(t) + x(t)\theta(t)]$; somit gilt: $U(t) = H(t)[\sigma(t)'\pi(t) - x(t)\theta(t)]$ und damit:

$$H(t)x(t) = E[(T)\xi] + \int_0^t H(s)[\pi(s)'\sigma(s) - \theta(s)'x(s)]dW(s).$$

Nach gewöhnlicher Differentialrechnung gilt:

$$\begin{aligned}
H(t)[\pi(t)'\sigma(t) - \theta(t)'x(t)]dW(t) &= dH(t)x(t) + H(t)dx(t) \\
&= -H(t)[r(t)dt + \theta(t)'dW(t)]x(t) + H(t)dx(t) \\
&= H(t)[-r(t)x(t)dt - \theta(t)'x(t)dW(t) + dx(t)] \\
\Leftrightarrow\ dx(t) &= r(t)x(t)dt + \pi(t)'\sigma(t)dW(t), \\
H(T)x(T) &= E[H(T)\xi|\mathcal{F}_T] \ = \ H(T)\xi \\
\Leftrightarrow\ x(T) &= \xi.
\end{aligned}$$

Da $H_0(\cdot)$ und $x(\cdot)$ stetig sind und $\theta(\cdot)$ beschränkt ist, gilt mit $\int_0^T |U(s)|^2 ds < +\infty$, f.s., ebenfalls: $\int_0^T |\sigma(s)'\pi(s)|^2 ds = \int_0^T |H_0(s)U(s) + x(s)\theta(s)|^2 ds < +\infty$, f.s.

□

Für das Verständnis der Arbeit ist ein Blick auf die rückwärts stochastischen Differentialgleichungen oder *backward stochastic differential equations*, im Folgenden abgekürzt mit *BSDE*, in der Finanzmathematik notwendig. Dieser baut auf dem Artikel von El Karoui et al. ([5], S. 1-24) auf. Im Allgemeinen ist die BSDE von der Form:

$$\begin{cases} -dY(t) &= f(t, Y(t), Z(t))\ dt - Z(t)'\ dW(t), \\ \quad Y(T) &= \xi, \end{cases} \tag{2.10}$$

wobei f als Generator oder Nutzen und ξ als Endbedingung bezeichnet werden.
Im Folgenden werden wir nun einige Eigenschaften für die Lösung von BSDEs sammeln, insb. werden wir auf die Existenz und Eindeutigkeit eingehen.
Nun sei ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine n-dimensionale Brownsche Bewegung $W(t)$ gegeben. Weiter sei

- $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$: Die Filtration für eine Brownsche Bewegung W;
- $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R}^d)$: die Menge aller $\mathbb{R}^d$-wertigen, $\mathcal{F}_T$-messbaren Zufallsvariablen $X : \Omega \to \mathbb{R}^d$ mit $||X||^2 = E[|X|^2] < +\infty$;
- $H^2_T(\mathbb{R}^d)$: die Menge aller vorhersehbaren[19] Prozesse $\psi : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$, so dass $||\psi||^2 := E\left[\int_0^T |\psi(t)|^2 dt\right] < +\infty$;

[18] nach [16], S. 221.
[19] Ein linksstetiger $\mathcal{F}_t$-adaptierter Prozess heißt *vorhersehbar* (vgl. [16], S. 477).

- $H_T^1(\mathbb{R}^d)$: die Menge aller vorhersehbaren Prozesse $\psi : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}^d$, so dass $E\left[\sqrt{\int_0^T |\psi(t)|^2 dt}\right] < +\infty$;

- Für $\beta > 0$ und $\psi \in H_T^2(\mathbb{R}^d)$ definieren wir $||\psi||_\beta^2 := E\left[\int_0^T e^{\beta t}|\psi(t)|^2 dt\right]$. $H_{T,\beta}^2(\mathbb{R}^d)$ ist der normierte Raum $(H_T^2(\mathbb{R}^d), ||\cdot||_\beta)$. Analog ist $L^2_{\mathcal{F}_T,\beta}(\mathbb{R}^d)$ definiert.

Nun sei eine BSDE in der Form von (2.10) gegeben.
Äquivalent umgeformt erhält man:

$$Y(t) = \xi + \int_t^T f(s, Y(s), Z(s))\, ds - \int_t^T Z(s)'\, dW(s), \tag{2.11}$$

wobei

- der Endwert eine $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^d$ ist;
- die Funktion $f : \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n\times d} \to \mathbb{R}^d$ $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}^d \otimes \mathcal{B}^{n\times d}$-messbar ist.

Die Lösung dieser Gleichung ist ein Paar (Y, Z), so dass $\{Y(t) : t \in [0,T]\}$ ein stetiger $\mathbb{R}^d$-wertiger, adaptierter Prozess und $\{Z(t) : t \in [0,T]\}$ ein $\mathbb{R}^{n\times d}$-wertiger veraussagbarer Prozess ist, der $\int_0^T |Z(s)|^2 ds < +\infty$, f.s., erfüllt.
Seien $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ sowie $f(\cdot, 0, 0) \in \mathbb{H}_T^2(\mathbb{R}^d)$ und f gleichmäßig Lipschitz-stetig[20]. Dann heißen (f, ξ) *Standardparameter* für die BSDE.

Proposition 2.17 *Seien (Y^1, Z^1) und (Y^2, Z^2) sowie (f^1, ξ^1) und (f^2, ξ^2) mit den oben beschriebenen Eigenschaften, so dass gilt: $Y^i(t) = \xi^i + \int_t^T f^i(s, y^i(s), z^i(s))\, ds - \int_t^T Z^i(s)'\, dW(s)$, $i = 1, 2$, für gewisse Paare (y^1, z^1) und (y^2, z^2). Sei C Lipschitz-Konstante für f^1 und setze $\delta_1 Y(t) := Y^1(t) - Y^2(t)$ sowie $\delta_2 f(t) := f^1(t, y^2(t), z^2(t)) - f^2(t, y^2(t), z^2(t))$. Für beliebiges (λ, μ, β) mit $\mu > 0$, $\lambda^2 > C$ und $\beta \geq C(2 + \lambda^2) + \mu^2$ gilt:*

$$||\delta_1 Y||_\beta^2 \leq T\left[e^{\beta T} E[|\delta_1 Y(T)|^2] + \frac{1}{\mu^2}||\delta_2 f||_\beta^2\right], \tag{2.12}$$

$$||\delta_1 Z||_\beta^2 \leq \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - C}\left[e^{\beta T} E[|\delta_1 Y(T)|^2] + \frac{1}{\mu^2}||\delta_2 f||_\beta^2\right]. \tag{2.13}$$

Beweis:
Sei $(Y, Z) \in H_T^2(\mathbb{R}^d) \times H_T^2(\mathbb{R}^{n\times d})$. Es gilt:

$$|Y^i(t)| \leq |\xi^i| + \int_0^T |f^i(s, y^i(s), z^i(s))| ds + \sup_t \left| \int_0^T \int_t^T Z^i(s)' dW(s) \right|, \quad i = 1, 2.$$

[20] D.h. es gibt ein $C > 0$ so dass gilt: $|f(\omega, t, y_1, z_1) - f(\omega, t, y_2, z_2)| \leq C(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|), \forall (y_1, z_1), (y_2, z_2)$.

Nun folgt mit der Ungleichung von Burkholder-Davis-Gundy[21]:

$$\begin{aligned}E\left[\sup_t\left|\int_0^T Z^i(s)'dW(s)\right|^2\right] &\leq 2E\left[\left|\int_0^T Z^i(s)'dW(s)\right|^2\right]+2E\left[\sup_t\left|\int_0^t Z^i(s)'dW(s)\right|^2\right]\\ &\leq 4E\left[\int_0^T |Z^i(s)|^2ds\right], \quad i=1,2.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Da $\xi^i \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ sowie $f^i(\cdot,0,0)\in\mathbb{H}^2_T(\mathbb{R}^d)$ und f^i gleichmäßig Lipschitz-stetig, gilt:

$$\underbrace{|\xi^i|}_{\in L^2_{\mathcal{F}_T}(\mathbb{R})}+\int_0^T|\underbrace{f^i(s,y(s),z(s))}_{\in H^2_T(\mathbb{R}^d)}|ds\in L^2_{\mathcal{F}_T}(\mathbb{R}),\quad i=1,2,$$

und damit sowie (2.14): $\sup_{s\leq T}|Y(s)|\in L^2_{\mathcal{F}_T}(\mathbb{R})$.
Sei nun $f(s,X(s)) := e^{\beta s}|\delta_1 Y(s)|^2$ mit $X(s) := |\delta_1 Y(s)|$. Es gilt: $f'(x) = 2e^{\beta s}x$ und $f''(x) = 2e^{\beta s}$ sowie $dX(s) = [f^1(s,y(s),z(s)) - f^2(s,y(s),z(s))]\,ds+\delta_1 Z(s)dW(s)$ und $dX(s)dX(s) = |\delta_1 Z|^2 ds$. Wenden wir nun die Itô-Formel (vgl. Theorem 2.1) auf die Funktion $f(s,X(s))$ auf dem Intervall $[t,T]$ an, so gilt:

$$\begin{aligned}e^{\beta T}|\delta_1 Y(T)|^2 &= e^{\beta t}|\delta_1 Y(t)|^2+\beta\int_t^T e^{\beta s}|\delta_1 Y(s)|^2ds\\ &-2\int_t^T e^{\beta s}\langle\delta_1 Y(s), f^1(s,y^1(s),z^1(s))-f^2(s,y^2(s),z^2(s))\rangle ds\\ &+2\int_t^T e^{\beta s}\langle\delta_1 Y(s),\delta_1 Z(s)'dW(s)\rangle+\int_t^T e^{\beta s}|\delta_1 Z(s)|^2ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\ & e^{\beta t}|\delta_1 Y(t)|^2+\beta\int_t^T e^{\beta s}|\delta_1 Y(s)|^2ds+\int_t^T e^{\beta s}|\delta_1 Z(s)|^2ds\\ =\ & e^{\beta T}|\delta_1 Y(T)|^2+2\int_t^T e^{\beta s}\langle\delta_1 Y(s), f^1(s,y^1(s),z^1(s))-f^2(s,y^2(s),z^2(s))\rangle ds\\ & -2\int_t^T e^{\beta s}\langle\delta_1 Y(s),\delta_1 Z(s)'dW(s)\rangle.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Aus $\sup_{s\leq T}|Y(s)|\in L^2_{\mathcal{F}_T}(\mathbb{R})$ folgt: $e^{\beta s}\delta_1 Z(s)\delta_1 Y(s)\in H^1_T(\mathbb{R}^n)$.
Damit ist das Integral $\int_t^T e^{\beta s}\langle\delta_1 Y(s),\delta_1 Z(s)'dW(s)\rangle$ P-integrierbar und wegen des Wiener Prozesses $W(\cdot)$ mit:

$$E\left[\int_t^T e^{\beta s}\langle\delta_1 Y(s),\delta_1 Z(s)'dW(s)\rangle\right]=0. \tag{2.16}$$

Weiterhin folgt mit der Lipschitz-Stetigkeit von f^1:

$$\begin{aligned}&|f^1(s,y^1(s),z^1(s))-f^2(s,y^2(s),z^2(s))|\\ &\quad= |f^1(s,y^1(s),z^1(s))-f^1(s,y^2(s),z^2(s))+f^1(s,y^2(s),z^2(s))-f^2(s,y^2(s),z^2(s))|\\ &\quad\overset{\triangle-Ugl.}{\leq} |f^1(s,y^1(s),z^1(s))-f^1(s,y^2(s),z^2(s))|+|f^1(s,y^2(s),z^2(s))-f^2(s,y^2(s),z^2(s))|\\ &\quad\overset{Lips.}{\leq} C[|\delta_1 Y(s)|+|\delta_1 Z(s)|]+|\delta_2 f(s)|.\end{aligned} \tag{2.17}$$

[21]vgl. [11], S. 166.

Es gilt folgende Ungleichung für $\lambda, \mu > 0$:

$$\begin{aligned} 2y(Cz+t) &= 2y\sqrt{C}\lambda\sqrt{C}\frac{z}{\lambda} + 2y\mu\frac{t}{\mu} \\ &\leq y^2C\lambda^2 + \frac{Cz^2}{\lambda^2} + y^2\mu^2 + \frac{t^2}{\mu^2} \;=\; \frac{Cz^2}{\lambda^2} + \frac{t^2}{\mu^2} + y^2(\mu^2 + C\lambda^2). \end{aligned} \tag{2.18}$$

Betrachten wir von Gleichung (2.15) auf beiden Seiten den Erwartungswert und setzen $y = |\delta_1 Y|$, $z = |\delta_1 Z|$ und $t = |\delta_2 f|$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & E\left[e^{\beta t}|\delta_1 Y(t)|^2\right] + E\left[\beta\int_t^T e^{\beta s}|\delta_1 Y(s)|^2 ds + \int_t^T e^{\beta s}|\delta_1 Z(s)|^2 ds\right] \\ \overset{(2.15)}{=}\;& E\left[e^{\beta T}|\delta_1 Y(T)|^2\right] + 2E\left[\int_t^T e^{\beta s}\langle\delta_1 Y(s), \underbrace{f^1(s,y^1(s),z^1(s)) - f^2(s,y^2(s),z^2(s))}_{\overset{(2.17)}{\leq} C[|\delta_1 Y(s)|+|\delta_1 Z(s)|]+|\delta_2 f(s)|}\rangle ds\right] \\ & -2\underbrace{E\left[\int_t^T e^{\beta s}\langle\delta_1 Y(s), \delta_1 Z(s)' dW(s)\rangle\right]}_{\overset{(2.16)}{=}\;0} \\ \leq\;& E\left[e^{\beta T}|\delta_1 Y(T)|^2\right] + E\left[\int_t^T e^{\beta s}\left(2|\delta_1 Y|(C|\delta_1 Z| + |\delta_2 f|)\right) ds\right] \\ \overset{(2.18)}{\leq}\;& E\left[e^{\beta T}|\delta_1 Y(T)|^2\right] + E\left[\int_t^T e^{\beta s}\left(C\frac{|\delta_1 Z(s)|^2}{\lambda^2} + \frac{|\delta_2 f(s)|^2}{\mu^2} + |\delta_1 Y(s)|^2(\mu^2 + C(2+\lambda^2))\right) ds\right] \\ =\;& E\left[e^{\beta T}|\delta_1 Y(T)|^2\right] + \left[C(2+\lambda^2)+\mu^2\right] E\left[\int_t^T e^{\beta s}|\delta_1 Y(s)|^2 ds\right] \\ & + \frac{C}{\lambda^2}E\left[\int_t^T e^{\beta s}|\delta_1 Z(s)|^2 ds\right] + \frac{1}{\mu^2}E\left[\int_t^T e^{\beta s}|\delta_2 f(s)|^2 ds\right]. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Wähle $\beta \geq C(2+\lambda^2) + \mu^2$ und $C < \lambda^2$, so erhalten wir aus den Ungleichungen:

$$\begin{aligned} E\left[e^{\beta t}|\delta_1 Y(t)|^2\right] \overset{(2.19)}{\leq}\;& E\left[e^{\beta T}|\delta_1 Y(T)|^2\right] + E\left[\int_t^T e^{\beta s}|\delta_2 f(s)|^2 \frac{1}{\mu^2} ds\right] \\ & + \underbrace{\left[C(2+\lambda^2)+\mu^2\right] E\left[\int_t^T e^{\beta s}|\delta_1 Y(s)|^2 ds\right] - \beta E\left[\int_t^T e^{\beta s}|\delta_1 Y(s)|^2 ds\right]}_{\leq\, 0} \\ & + \underbrace{\frac{C}{\lambda^2}E\left[\int_t^T e^{\beta s}|\delta_1 Z(s)|^2 ds\right] - E\left[\int_t^T e^{\beta s}|\delta_1 Z(s)|^2 ds\right]}_{\leq\, 0} \\ \leq\;& E\left[e^{\beta T}|\delta_1 Y(T)|^2\right] + E\left[\int_t^T e^{\beta s}|\delta_2 f(s)|^2 \frac{1}{\mu^2} ds\right]. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Mit Integration über das Intervall $[0,T]$ erhalten wir somit:

$$\begin{aligned}
||\delta_1 Y||_\beta^2 &= E\left[\int_0^T e^{\beta t}|\delta_1 Y(t)|^2 dt\right] = \int_0^T E\left[e^{\beta t}|\delta_1 Y(t)|^2\right] dt \\
&\overset{(2.20)}{\leq} \int_0^T E\left[e^{\beta t}|\delta_1 Y(t)|^2\right] + E\left[\int_t^T e^{\beta s}|\delta_2 f(s)|^2 \frac{1}{\mu^2} ds\right] dt \\
&= T\left[e^{\beta T} E\left[|\delta_1 Y(T)|^2\right] + \frac{1}{\mu^2}||\delta_2 f||_\beta^2\right].
\end{aligned}$$

Mit (2.19) folgt ebenfalls:

$$\underbrace{\left(\beta - \frac{C}{\lambda^2}\right)}_{\geq \frac{\lambda^2 - C}{\lambda^2}} E\left[\int_t^T e^{\beta s}|\delta Z(s)|^2 ds\right] \overset{(2.19)}{\leq} E\left[e^{\beta T}|\delta_1 Y(T)|^2\right] + E\left[\int_t^T e^{\beta s}|\delta_2 f(s)|^2 \frac{1}{\mu^2} ds\right]$$

$$\Rightarrow \ ||\delta_1 Z||_\beta^2 \leq \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - C}\left[e^{\beta T} E[|\delta_1 Y(T)|^2] + \frac{1}{\mu^2}||\delta_2 f||_\beta^2\right].$$

□

Theorem 2.18 (Existenz und Eindeutigkeit) *Sei der Standardparameter (f,ξ) für eine BSDE gegeben. Dann existiert ein eindeutiges Paar $(Y,Z) \in \mathbb{H}_T^2(\mathbb{R}^d) \times \mathbb{H}_T^2(\mathbb{R}^{n\times d})$, das die Gleichung (2.10) löst.*

Beweis:
Wir wollen die Existenz und Eindeutigkeit beweisen, indem wir den Banachschen Fixpunktsatz[22] auf die Funktion $k : B \to B$ anwenden, wobei $B := L^2_{\mathcal{F}_T,\beta}(\mathbb{R}^d) \times L^2_{\mathcal{F}_T,\beta}(\mathbb{R}^d)$ ein Banachraum ist. k bildet das Paar (y,z) auf die Lösung (Y,Z) der BSDE mit Generator $f(t,y(t),z(t))$ ab, also auf (2.11).
Dazu müssen wir zeigen, dass k eine Kontraktion ist, d.h. dass gilt:

$$||k(x) - k(y)||_B \leq c \cdot ||x-y||_B,$$

wobei $c \in (0,1)$ ist.[23]
Wir führen einen neuen Raum $H^2_{T,\beta}$ ein, wobei gilt: $\varphi \in H^2_{T,\beta} \Leftrightarrow E\left[\int_0^T e^{\beta s}\varphi^2(s)ds\right] < +\infty$. Da gilt: $\varphi \in H^2_{T,\beta} \Leftrightarrow \varphi \in L^2_T$, genügt es zu zeigen, dass k auf $H^2_{T,\beta}(\mathbb{R}^d) \times H^2_{T,\beta}(\mathbb{R}^{n\times d})$ eine Kontraktion ist.
Da (f,ξ) die Standardparameter der BSDE sind, gilt: $(f(t,y(t),z(t)); t \in [0,T]) \in Y(t) = \xi + H_T^2(\mathbb{R}^d)$. Sei nun M ein quadratisch integrierbares Martingal, das zu $\mathcal{F}_T$ adaptiert ist, für das gilt:

$$M(t) = E[M(t)|\mathcal{F}_t] = E\left[\int_0^T f(s,y(s),z(s))ds + \xi|\mathcal{F}_t\right]. \tag{2.21}$$

[22] vgl. [2], S. 370.
[23] vgl. [2], S. 269.

Nach dem Martingaldarstellungstheorem für eine Brownsche Bewegung[24] existiert ein eindeutig integrierbarer Prozess $Z \in H_T^2(\mathbb{R}^{n\times d})$, so dass gilt: $M(t) = M(0) + \int_0^t Z(s)'dW(s)$. Nun definieren wir einen adaptierten und stetigen Prozess Y mit $Y(t) = M(t) - \int_0^t f(s, y(s), z(s))ds$. Insb. gilt damit für Y:

$$\begin{aligned}
M(t) - \int_0^t f(s,y(s),z(s))ds &\overset{(2.21)}{=} E\left[M(t)|\mathcal{F}_t\right] - E\left[\int_0^t f(s,y(s),z(s))ds|\mathcal{F}_t\right] \\
&= E\left[M(t) - \int_0^t f(s,y(s),z(s))ds|\mathcal{F}_t\right] \\
\Rightarrow\ Y(t) &= E[Y(t)|\mathcal{F}_t]. \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

Dieses Y erfüllt Gleichung (2.11), denn es gilt:

$$\begin{aligned}
Y(t) &= M(t) - \int_0^t f(s,y(s),z(s))ds \\
&= E\left[\int_0^T f(s,y(s),z(s))ds + \xi|\mathcal{F}_t\right] - \int_0^t f(s,y(s),z(s))ds \\
&= E\left[\int_0^T f(s,y(s),z(s))ds + \xi|\mathcal{F}_t\right] + \underbrace{E\left[-\int_t^T Z(s)'dW(s)|\mathcal{F}_t\right]}_{=0} - \int_0^t f(s,y(s),z(s))ds \\
&= E\left[\int_0^T f(s,y(s),z(s))ds + \xi - \int_t^T Z(s)'dW(s) - \int_0^t f(s,y(s),z(s))ds \mid \mathcal{F}_t\right] \\
&\overset{(2.22)}{=} \xi + \int_t^T f(s,y(s),z(s))ds - \int_t^T Z(s)'dW(s).
\end{aligned}$$

Da M quadratisch integrierbar ist, ist es auch Y.
Seien (y^1, z^1) und (y^2, z^2) Elemente aus $H_{T,\beta}^2(\mathbb{R}^d) \times H_{T,\beta}^2(\mathbb{R}^{n\times d})$ sowie $(Y^1, Z^1) = k(y^1, z^1)$ bzw. $(Y^2, Z^2) = k(y^2, z^2)$ die dazugehörigen Lösungen. Nach Präposition 2.17 gilt für $C = 0$ und $\beta = \mu^2$:

$$||\delta_1 Y||_\beta^2 \leq \frac{T}{\beta} E\left[\int_0^T e^{\beta s}|f(s,y^1(s),z^1(s)) - f(s,y^2(s),z^2(s))|^2 ds\right]$$

und

$$||\delta_1 Z||_\beta^2 \leq \frac{1}{\beta} E\left[\int_0^T e^{\beta s}|f(s,y^1(s),z^1(s)) - f(s,y^2(s),z^2(s))|^2 ds\right].$$

Da f Lipschitz-stetig mit der Konstante C ist, gilt:

$$|f(s,y^1(s),z^1(s)) - f(s,y^2(s),z^2(s))|^2 \leq C^2(|y^1(s) - y^2(s)| + |z^1(s) - z^2(s)|)^2.$$

Daraus folgt:

$$E\left[\int_0^T e^{\beta s}|f(s,y^1(s),z^1(s)) - f(s,y^2(s),z^2(s))|^2 ds\right] \leq C^2(||y^1 - y^2||_\beta^2 + ||z^1 - z^2||_\beta^2).$$

[24] vgl. [16], S. 225.

Insgesamt erhalten wir damit:

$$||\delta_1 Y||_\beta^2 + ||\delta_1 Z||_\beta^2 \leq \frac{2(1+T)C}{\beta} \left[||\delta_1 y||_\beta^2 + ||\delta_1 z||_\beta^2 \right].$$

Wähle $\beta > 2(1+T)C$, dann ist die Abbildung k eine Kontraktion von $H^2_{T,\beta}(\mathbb{R}^d) \times H^2_{T,\beta}(\mathbb{R}^{n\times d})$ in sich selbst. Damit existiert eine eindeutige Lösung der BSDE (2.10).

□

Wir wenden uns nun einer Aussage über die Lösbarkeit von linearen BSDE zu. Sie ergibt sich aus dem vorherigen Theorem.

Proposition 2.19 *Sei (β, γ) ein beschränkter $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$-wertiger vorhersehbarer Prozess, sei $\varphi \in H^2_T(\mathbb{R})$ und sei $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\mathbb{R})$. Dann hat die lineare BSDE*

$$\begin{cases} -dY(t) &= [\varphi(t) + Y(t)\beta(t) + Z(t)'\gamma(t)]\ dt - Z(t)'\ dW(t), \\ Y(T) &= \xi \end{cases} \tag{2.23}$$

eine eindeutige Lösung $(Y, Z) \in H^2_{T,\beta}(\mathbb{R}) \times H^2_{T,\beta}(\mathbb{R}^n)$ und für $Y(t)$ gilt folgende Gleichung:

$$Y(t) = E\left[\xi\Gamma(T) + \int_t^T \Gamma(s)\varphi(s)ds \mid \mathcal{F}_t\right] \quad , f.s., \tag{2.24}$$

wobei der adjungierte Prozess $\Gamma(t)$, der für $t \geq 0$ definiert ist, gegeben ist durch die lineare stochastische Differentialgleichung:

$$\begin{cases} d\Gamma(t) &= \Gamma(t)[\beta(t)dt + \gamma(t)'dW(t)], \\ \Gamma(0) &= 1. \end{cases} \tag{2.25}$$

Im Besonderen gilt für $\xi \geq 0$ und $\varphi \geq 0$, dass auch der Prozess Y nichtnegativ ist. Wenn weiterhin gilt, dass $Y(0) = 0$, dann ist $Y(t) = 0$, f.s., und $\varphi(t) = 0$ $dP \otimes dt$, f.s, für beliebiges $t \geq 0$.

Beweis:
Für die beschränkten Prozesse β und γ ist der lineare Generator $f(t, y, z) = \varphi(t) + \beta(t)y + \gamma(t)'z$ gleichmäßig Lipschitz-stetig und das Paar (f, ξ) sind Standardparameter der BSDE. Nach Theorem 2.18 exisitiert eine eindeutige quadratisch integrierbare Lösung (Y, Z) der linearen BSDE, die zu (f, ξ) gehört. $A(t) := \Gamma(t)Y(t) + \int_0^t \Gamma(s)\varphi(s)ds$ ist ein lokales Martingal, denn es gilt:[25]

$$\begin{aligned} dA(t) &= d(\Gamma(t)Y(t)) + \Gamma(t)\varphi(t)dt \\ &= \Gamma(t)dY(t) + Y(t)d\Gamma(t) + \langle \Gamma, Y\rangle_t + \Gamma(t)\varphi(t)dt \\ &= \Gamma(t)\left(-[\varphi(t) + Y(t)\beta(t) + Z(t)'\gamma(t)]\ dt + Z(t)'\ dW(t)\right) \\ &\quad +Y(t)\left(\Gamma(t)[\beta(t)dt + \gamma(t)'dW(t)]\right) + \Gamma(t)\gamma(t)'Z(t)dt + \Gamma(t)\varphi(t)dt \\ &= \Gamma(t)\left[-\varphi(t) - Y(t)\beta(t) - Z(t)'\gamma(t) + Y(t)\beta(t) + \gamma(t)'Z(t) + \varphi(t)\right] dt \\ &\quad + [\Gamma(t)Z(t)' + Y(t)\gamma(t)']\ dW(t) \\ &= [\Gamma(t)Z(t)' + Y(t)\gamma(t)']\ dW(t). \end{aligned}$$

[25] vgl. [6], S. 27.

Nun gilt: $\sup_{s\leq T}|Y(s)|$ und $\sup_{s\leq T}|\Gamma(s)|$ gehören zu $L^2_{\mathcal{F}_T}(\mathbb{R})$ und $\sup_{s\leq T}|Y(s)|\times\sup_{s\leq T}|\Gamma(s)|$ gehört zu $L^1_{\mathcal{F}_T}(\mathbb{R})$. Deshalb ist das lokale Martingal $\Gamma(t)Y(t)+\int_0^t\Gamma(s)\varphi(s)ds$ gleichmäßig integrierbar mit

$$E\left[\Gamma(T)Y(T)+\int_t^T\Gamma(s)\varphi(s)ds|\mathcal{F}_s\right]=E\left[\xi\Gamma(T)+\int_t^T\Gamma(s)\varphi(s)ds|\mathcal{F}_s\right]=Y(t).$$

Im besonderen gilt: Sind ξ und φ nichtnegativ, so ist auch $Y(t)$ nichtnegativ. Weiterhin gilt: Für $Y(0)=0$ gilt auch:

$$Y(0)=E\left[\Gamma(T)Y(T)+\int_t^T\Gamma(s)\varphi(s)ds|\mathcal{F}_0\right]=E\left[\xi\Gamma(T)+\int_t^T\Gamma(s)\varphi(s)ds\right]=0$$

und damit auch $\xi=0$, f.s., $\varphi(t)=0$, f.s. und $Y(\cdot)=0$, f.s.

$\square$

Kapitel 3

Problemformulierung und Lösbarkeitskriterien

In diesem Kapitel werden wir das zu Grunde liegende mathematische Modell formulieren, das hauptsächlich auf den Annahmen des zweiten Kapitels aufbaut. Allerdings werden wir hier die Bedingung des Insolvenzausschlusses für den Investor und deren mathematische Umsetzung formulieren.
Im zweiten Abschnitt werden wir dann das grundlegende Problem der Optimierung eines varianzminimierenden Portfolios aufstellen und dieses in zwei Unterprobleme teilen.
Im dritten Abschnitt stellen wir schließlich Kriterien für die Lösbarkeit unseres Problems auf, indem wir zeigen, unter welchen Bedingungen das Optimierungsproblem eine Lösung hat und dass diese dann eindeutig ist.

3.1 Das Modell

T ist ein festgelegter Zeitpunkt, der das Ende des Handels beschreibt. $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0})$ ist ein fester filtrierter, vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum. Auf diesem wird eine m-dimensionale Brownsche Bewegung $W(t) \equiv (W^1(t), \ldots, W^m(t))'$ mit $W(0) = 0$ definiert. Wir nehmen an, dass für jedes $t \geq 0$ gilt: $\mathcal{F}_t = \sigma(\{W(s) : s \leq t\})$. $L^2_{\mathcal{F}_T}(0, T; \mathbb{R}^d)$ bezeichnet die Menge aller $\mathbb{R}^d$-wertigen, abschnittsweise messbaren stochastischen Prozesse $f(\cdot) = \{f(t) : 0 \leq t \leq T\}$, die so zu $\mathcal{F}_t$ adaptiert ist, dass gilt: $E\left[\int_0^T |f(t)|^2 dt\right] < +\infty$. Weiter bezeichne $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ die Menge aller $\mathbb{R}^d$-wertigen, $\mathcal{F}_T$-messbaren Zufallsvariablen η mit $E[|\eta|^2] < +\infty$.

Wir nehmen nun generell an, dass wir uns auf einem vollständigen Market befinden, auf dem $m + 1$ Wertpapiere in stetiger Zeit gehandelt werden. Weiter seien alle Handelsstrategien selbstfinanzierend. Alle Annahmen, die wir im Abschnitt 2.3 getroffen haben, gelten fort.

Obwohl der Vermögensprozess $x(\cdot)$ in Gleichung (2.7) auch negativ sein kann, macht dies aus praktischer Sicht keinen Sinn, da Agenten bei einem negativen Vermögen keine Aktien kaufen können. Deshalb werden wir in dieser Arbeit davon ausgehen, dass die Insolvenz des Agenten ausgeschlossen ist. Deshalb sind bei der Erfüllung der Gleichung (2.7) nur Portfolios $\pi(\cdot)$ zugelassen, bei denen für alle $t \in [0,T]$ gilt, dass der dazugehörige Vermögensprozess $x(t) \geq 0$, f.s., ist. Dass es mindestens eine solche Strategie ergibt, ist insofern offensichtlich, da es dem Agenten freigestellt ist, sein komplettes Vermögen auf das Bankkonto zu legen. Denn somit ist $\pi(\cdot) \equiv 0$ und damit

$$\begin{cases} dx(t) &= r(t)x(t)\ dt, \\ x(0) &= x_0 > 0, \end{cases}$$

damit ist $x(t) = x_0 e^{\int_0^t r(s)ds} \geq 0$ für alle $t \in [0,T]$.
Für alle möglichen Portfolios, die wir als Handelsstrategien erlauben, stellen wir folgende Definition auf.

Definition 3.1 (Akzeptables Portfolio) *Ein Portfolio heißt* **akzeptabel**, *wenn gilt:*

$$\pi(\cdot) \quad \in \quad L^2_{\mathcal{F}}(0;T;\mathbb{R}^m).$$

Nach Theorem 2.18 gibt es für jedes akzeptables Portfolio $\pi(\cdot)$ eine eindeutige Lösung $x(\cdot)$ für die Gleichung (2.7). Nun wollen wir die Eigenschaften der möglichen Handelsstrategien etwas näher untersuchen. Wir betrachten nun den Vektor der Vermögensanteile in einzelnen Aktien und definieren ihn entsprechend als $u(t) := \frac{\pi(t)}{x(t)},\ \forall\ t \in [0,T]$. $u(\cdot)$ erfüllt somit die Eigenschaft $u(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0;T;\mathbb{R}^m)$, so dass sich die Einschränkung $\int_0^T |u(t)|^2 dt < +\infty$, f.s, ergibt. Durch diese Eigenschaft und durch die Bedingung des selbstfinanzierenden Portfolios können wir zeigen, dass das Vermögen $x(t)$ zu jedem Zeitpunkt $t \in [0,T]$ proportional zum Anfangsvermögen x_0 ist, d.h. es gilt: $x(t) = x_0\tilde{x}(t)$, wobei $\tilde{x}(\cdot)$ ein f.s. streng positiver Prozess ist. Für eine proportionale, selbstfinanzierende Handelsstrategie $u(\cdot)$ suchen wir nun den Vermögensprozess $x(\cdot)$, der die eindeutige Lösung zur folgenden Gleichung ist:

$$\begin{cases} dx(t) &= x(t)[r(t) + B(t)u(t)]dt + x(t)u(t)'\sigma(t)dW(t), \\ x(0) &= x_0. \end{cases}$$

Mit $x(t) = x_0\tilde{x}(t)$ und $dx(t) = x_0 d\tilde{x}(t)$ ergibt sich damit:

$$d\tilde{x}(t) \quad = \quad \tilde{x}(t)\left\{[r(t) + B(t)u(t)]dt + u(t)'\sigma(t)dW(t)\right\}.$$

Durch die Itô-Formel (vgl Theorem 2.1) ermitteln wir folgende Lösung:

$$\tilde{x}(t) = \exp\left\{\int_0^t \left([r(s) + B(s)u(s)] - \frac{1}{2}|u(s)'\sigma(s)|^2\right) ds + \int_0^t u(s)'\sigma(s)\ dW(s)\right\}.$$

Hieran sieht man deutlich, dass der Vermögensprozess $x(\cdot)$ größer als Null ist, wenn das Anfangskapital x_0 größer als Null ist.
Somit lässt sich unsere zusätzliche Forderung nach dem Verbot der Insolvenz des Agenten auch anders formulieren: Die Menge der akzeptablen, selbstfinanziereden, proportionalen

Portfolios ist eine echte Teilmenge der akzeptablen, selbstfinanzierenden Portfolios. Somit haben wir gezeigt, dass ein akzeptables Portfolio $\pi(\cdot)$, das zu einem positiven Vermögensprozess $x(\cdot)$ führt, eine proportionale Handelsstrategie $u(t) := \frac{\pi(t)}{x(t)}$, $t \geq 0$, liefert. Andererseits können wir von jeder proportionalen Handelsstrategie $u(\cdot)$ auf eine gewöhnlichen Strategie $\pi(\cdot)$ über $\pi(t) = u(t)x(t)$, $t \geq 0$, zurückschließen.
Zuerst werden wir die Eigenschaft betrachten, dass unser Vermögensprozess $x(\cdot)$ genau dann nichtnegativ ist, wenn das Endvermögen $x(T)$ nichtnegativ ist.

Proposition 3.2 (Nichtnegativität des Vermögensprozesses) *Sei $x(\cdot)$ ein Vermägensprozess unter einem akzeptablen Portfolio $\pi(\cdot)$. Dann gilt: Wenn $x(T) \geq 0$, f.s., ist, dann ist auch $x(t) \geq 0$, f.s., für alle $t \in [0, T]$.*

Beweis:
Sei $\pi(\cdot)$ eine akzeptable Handelsstrategie und sei $x(\cdot)$ der zugehörige Vermögensprozess, also die eindeutige Lösung des Gleichungssystems (2.7). Für diesen gilt: $x(T) \geq 0$, f.s. Nach Definition 2.3 ist damit $\xi := x(T)$ eine $\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable mit $E[|\xi|^2] < +\infty$. Setze $z(\cdot) := \sigma'(\cdot)\pi(\cdot)$, dann erfüllt das Paar $(x(\cdot), z(\cdot))$ ebenfalls nach (2.7) und mit (2.6) die folgende BSDE:

$$\begin{cases} dx(t) &= [r(t)x(t) + \theta(t)z(t)]dt + z'(t)dW(t), \\ x(T) &= \xi. \end{cases}$$

Auf dieses Gleichungsystem wenden wir nun Theorem 2.19 an und erhalten folgende Lösung für $x(\cdot)$:

$$x(t) = \rho(t)^{-1}E[\rho(T)x(T) \mid \mathcal{F}_t], \quad \text{f.s.} \quad \forall\, t \in [0, T]. \tag{3.1}$$

Hierbei ist $\rho(\cdot)$ der Deflationsprozess, der zum Zeitpunkt 0 startet und der folgendes Gleichungssystem erfüllt:

$$\begin{cases} d\rho(t) &= \rho(t)[-r(t)\; dt - \theta(t)\; dW(t)], \\ \rho(0) &= 1. \end{cases}$$

Durch die Itô-Formel erhalten wir folgende Lösung:

$$\rho(t) = \exp\left\{-\int_0^t \left[r(s) + \frac{1}{2}|\theta(s)|^2\right] ds - \int_0^t \theta(s)\; dW(s)\right\} \tag{3.2}$$

Somit ist $\rho(t) > 0$, f.s., $\forall\, t \in [0, T]$, und damit gilt: $\rho(t)^{-1} > 0$ und mit $x(T) \geq 0$ auch $E[\rho(T)x(T) \mid \mathcal{F}_t] \geq 0$, f.s., $\forall\, t \in [0, T]$. Somit ist nach (3.1) auch gezeigt: $x(t) \geq 0$, f.s., $\forall\, t \in [0, T]$.

□

Der Vorteil der Eigenschaft der Nichtnegativität des stochastischen Prozesses aus Proposition 3.2 liegt darin, dass wir unsere Voraussetzung, dass wir die Insolvenz des Agenten verbieten, anders ausdrücken können: statt zu fordern, dass $x(t)$ für alle $t \in [0, T]$ nichtnegativ ist, reicht es zu fordern, dass das Endvermögen $x(T)$ nichtnegativ sein muss.

Bemerkung 3.3 (Deflationsprozess) Formen wir die Gleichung (3.1) um, so ergibt sich:

$$\rho(t)x(t) = E[\rho(T)x(T) \mid \mathcal{F}_t], \quad \text{f.s.} \quad \forall\, t \in [0,T].$$

Nach Definition 2.4 ist damit $\rho(t)x(t)$ ein Martingal und wir können den Prozess $\rho(\cdot)$ als Deflationsprozess interpretieren. Da unser Markt nach Voraussetzung vollständig ist, existiert ein eindeutiges risikoneutrales Martingalmaß Q mit folgender Eigenschaft:

$$\frac{dP}{dQ} = \exp\left[-\int_0^T |\theta(s)|^2 ds - \int_0^T \theta(s)dW(s)\right] =: \eta(T).[1]$$

Betrachten wir den Preisprozess $S_0(\cdot)$ unseres Bankkontos mit Anfangswert s_0 (vgl. (2.2)). Durch Umformung ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\eta(t) &= \exp\left[-\int_0^t |\theta(s)|^2 ds - \int_0^t \theta(s)dW(s)\right] \\
&= \exp\left[\int_0^t r(s)ds - \int_0^t r(s)ds - \int_0^t |\theta(s)|^2 ds - \int_0^t \theta(s)dW(s)\right] \\
&= \exp\left[\int_0^t r(s)ds\right] \cdot \exp\left[-\int_0^t r(s)ds - \int_0^t |\theta(s)|^2 ds - \int_0^t \theta(s)dW(s)\right] \\
&= \frac{S_0(t)}{s_0}\rho(t).
\end{aligned}$$

Nach Definition 2.10 und der Bayes-Formel[2] können wir nun $x(t)$ aus Gleichung (3.1) mithilfe des risikoneutralen Ansatzes ausdrücken:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \rho(t)^{-1}E[\rho(T)x(T) \mid \mathcal{F}_t], \quad \text{f.s.} \quad \forall\, t \in [0,T] \\
&= \rho(t)^{-1}\eta(t)E_Q[\rho(T)x(T)\eta(T)^{-1} \mid \mathcal{F}_t], \quad \text{f.s.} \quad \forall\, t \in [0,T] \\
&= \rho(t)^{-1}\eta(t)E_Q[\rho(T)x(T)\rho(T)^{-1}s_0S_0(T)^{-1} \mid \mathcal{F}_t], \quad \text{f.s.} \quad \forall\, t \in [0,T] \\
&= S_0(t)E_Q[S_0(T)^{-1}x(T) \mid \mathcal{F}_t], \quad \text{f.s.} \quad \forall\, t \in [0,T]. \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

3.2 Das Problem

Nun werden wir unser erstes Optimierungsproblem formulieren. Hierbei wird davon ausgegangen, dass das erwartete Vermögen zum Zeitpunkt T gegeben ist. Ziel ist es, einen optimalen Vermögensprozess und ein dazugehöriges Portfolio aus den möglichen Handelsstrategien zu finden, das die Varianz des Endvermögens minimiert. Dieses Portfolio ist wie folgt definiert:

[1] vgl. [5], S. 8.
[2] vgl. [6], S. 55.

Definition 3.4 (Varianzminimierendes Portfolio) *Wir betrachten das folgende Optimierungsproblem:*

$$Var[x(T)] = E[x(T)^2] - z^2 \to \min, \quad z \in \mathbb{R}$$

$$\textit{unter den Bedinungen} \begin{cases} E[x(T)] = z, \\ x(T) \geq 0, \quad \textit{f.s.}, \\ \pi(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0;T;\mathbb{R}^m), \\ (x(\cdot),\pi(\cdot)) \text{ \textit{erfüllt Gleichung} } (2.7). \end{cases} \tag{3.4}$$

Das optimale Portfolio $\pi^*(T)$ zu diesem Problem in Abhängigkeit von einem festen z heißt **varianzminimierendes Portfolio**. *Das dazugehörige optimale Vermögen des Agenten zum Zeitpunkt T wird mit $x^*(T)$ bezeichnet. Die Menge der Punkte $(Var[x^*(T)], z)$ für $z \in \mathbb{R}$ wird* **varianzminimierende Grenze** *genannt.*

Das eigentliche Problem der Optimierung eines Mean-Variance Portfolios, bei dem das Paar $(Var[x(T)], -E[x(T)])$ unter Nebenbedingungen minimiert werden soll, werden wir im fünften Kapitel behandeln. Man kann aber schon jetzt sehen, dass die *effiziente Grenze*, also die Menge aller effizienten Punkte dieses Problems, eine Teilmenge der varainzminimierenden Grenze ist. Deshalb werden wir uns zuerst dem Optimierungsproblem, wie es in Definition 3.4 aufgestellt ist, widmen.
Am Anfang stellt sich die Frage, ob x_0 und z frei wählbar sind, oder ob wir unter bestimmte Annahmen triviale Fälle ausschließen können. Aus der Eigenschaft des proportionalen Vermögens wird ersichtlich, dass für $x_0 = 0$ auch $x(t) \equiv 0$ unter allen akzeptablen Portfolios gilt. Wenn andererseits gilt, dass $E[x(T)] = z = 0$ ist, so folgt aus den Bedingungen von (3.4), dass $x(T) = 0$, f.s., gelten muss. Nach (3.1) gilt aber somit wieder $x(t) \equiv 0$. Somit macht es Sinn, ohne Beschränkung der Allgemeinheit folgende grundlegende Annahme zu treffen:

$$x_0 \;>\; 0, \qquad z \;>\; 0. \tag{3.5}$$

Um das Problem (3.4) zu lösen, wird es in zwei Unterprobleme geteilt: das erste Unterproblem ist, ein optimalen contingent claim X^* zu finden, so dass X^* gleich dem optimalen Wert von allen möglichen Vermögen $x(T)$ ist, die von akzeptablen Portfolios erreicht werden können. Wir formulieren das erste Unterproblem ebenfalls als ein Optimierungsproblem:

$$Var[X] = E[X^2] - z^2 \to \min, \quad z \in \mathbb{R}$$

$$\text{unter den Bedinungen} \begin{cases} E[X] = z, \\ E[\rho(T)X] = x_0, \\ X \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R}), \; X \geq 0, \quad \text{f.s.} \end{cases} \tag{3.6}$$

Nach Theorem 2.16 existiert eine Hedgingstrategie $(x(\cdot),\pi(\cdot))$ gegen den contingent claim $X^* := \xi$ und es gilt die stochastische Differentialgleichung (2.8).
Im zweiten Unterproblem geht es dann darum, eine Handelsstrategie $\pi(\cdot)$ zu finden, die X^* erzeugt. Dies werden wir später behandeln.
Zuerst wollen wir allerdings zeigen, dass die Optimierungsprobleme (3.4) und (3.6) die gleiche Lösung liefern.

Theorem 3.5 (Äquivalenz der Optimierungsprobleme) *Wenn* $(\hat{x}(\cdot), \hat{\pi}(\cdot))$ *eine Lösung des Problems* (3.4) *ist, dann ist* $\hat{x}(T)$ *eine optimale Lösung des Problems* (3.6).
Andererseits gilt: Ist X^* *eine optimale Lösung des Problems* (3.6)*, dann gibt es für die stochastische Differentialgleichung* (2.8) *eine Lösung* $(x^*(\cdot), \pi^*(\cdot))$*, die das Problem* (3.4) *minimiert.*

Beweis:
Wir zeigen zuerst die Hinrichtung: Sei $\hat{x}(\cdot)$ eine Lösung von (3.4) und sei $\hat{\pi}(\cdot)$ das zu $\hat{x}$ gehörende Portfolio. Wir müssen zeigen, dass $Var[\hat{x}(T)] \leq Var[X]$ gilt. Dies tun wir, indem wir zeigen, dass $\hat{x}(T)$ die Bedingungen von (3.6) erfüllt.
$\hat{x}(T) \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R})$ gilt definitionsgemäß.
Aus (3.4) folgt, dass $E[\hat{x}(T)] = z$ and $\hat{x}(T) \geq 0$ gilt.
Mit Gleichung (3.1) erhalten wir die folgende Darstellung von $x(t)$:

$$x(t) \;=\; \rho(t)^{-1} E(\rho(T)x(T)|\mathcal{F}_t), \quad \forall\, t \in [0,T],\; f.s., \tag{3.7}$$

und deshalb ergibt sich für $\hat{x}(0)$ (benutze ebenfalls (2.7)) und mithilfe von (3.7), dass $\rho(0) = 1$:

$$\hat{x}(0) \;=\; \rho(0)^{-1} E(\rho(T)\hat{x}(T)|\mathcal{F}_0) \;=\; E(\rho(T)\hat{x}(T)) = x_0, \qquad \text{f.s.} \tag{3.8}$$

Nun zeigen wir die Rückrichtung: Sei X^* optimal für das Problem (3.6). Zu X^* mit es nach Voraussetzung einen Vermögensprozess $x^*(\cdot)$ zu einem bestimmten akzeptablen Portfolio π^*, für den gilt: $x^*(T) = X^*$. Das Paar $(x^*(\cdot), \pi^*(\cdot))$ erfüllt nach Voraussetzung die stochastische Differentialgleichung (2.7) und damit auch (2.8). Nun müssen wir noch zeigen, dass $(x^*(\cdot), \pi^*(\cdot))$ zusätzlich die ersten drei Bedingungen unter (3.4) erfüllt. Trivialerweise gilt: $E[x^*(T)] = E[X^*] = z$ und $x^*(T) = X^* \geq 0$, f.s., nach den Bedingungen von (3.6). Und nach Definition 3.1 gilt: $\pi(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0; T; \mathbb{R}^m)$. Gebe es eine andere mögliche Lösung $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{\pi}(\cdot))$ für (3.4) mit $Var[\tilde{x}(T)] < Var[x^*] = Var[X^*]$, dann wäre X^* nicht optimal für das Problem (3.6) - ein Widerspruch!

□

Nun wollen wir noch kurz zwei weitere interessante Optimierungsprobleme erwähnen, die zu unserem beschriebenen Problem verwandt sind. Allerdings werden sie in dieser Arbeit nur kurz angerissen, für eine intensivere Beschäftigung wird daher auf entsprechende Literatur verwiesen.

Bemerkung 3.6 (Mean-Semivariance Problem) Die Optimierung des Mean-Variance Problems (3.4) ist aus ökonomischer Sicht nur begrenzt sinnvoll, da die Abweichung des tatsächlichen vom erwarteten Endvermögen nach oben für einen Investor in der Regel vorteilhaft ist. Daher ist eher folgendes Problem zu minimieren:

$$(z - x(T))^+ \to \min, \quad z \in \mathbb{R}$$

$$\text{unter den Bedinungen} \begin{cases} E[x(T)] = z, \\ x(T) \geq 0, \quad \text{f.s.}, \\ \pi(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0; T; \mathbb{R}^m), \\ (x(\cdot), \pi(\cdot)) \text{ erfüllt Gleichung (2.7).} \end{cases} \tag{3.9}$$

Ein solches Problem wird *Mean-Semivariance Problem* genannt. Es ist allerdings für $z \neq \frac{x_0}{E[\rho]}$ nicht lösbar.[3] Für $z = \frac{x_0}{E[\rho]}$ zeigen wir in Theorem 5.4, dass die optimale Lösung $x^*(T) = z$ ist und wir eine risikofreies Portfolio als optimale Handelsstrategie erhalten.
Für genauere Untersuchung über gewichtete Mean-Variance Portfolios, zu denen das Problem (3.9) gehört, sei auf [9] verwiesen.

Bemerkung 3.7 (Optimierung der Nutzenfunktion) Eine weitere interessante Frage ist, in welchem Zusammenhang das optimale varianzminimierende Portfolio zum optimalen Nutzen des Investors steht. Sei dazu Θ die Menge aller Handelsstrategien und sei das Endvermögen zu einer Handelsstrategie $\theta \in \Theta$ definiert durch: $W(\theta) = kS(T) + \int_0^T \theta(s)dF(s)$, wobei S und F die Lösungen der folgenden stochastischen Differentialgleichungen sind:

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t), \\ dF(t) &= mF(t)dt + v(t)F(t)dB(t), \end{aligned}$$

wobei μ, σ, m und v konstant sowie $W(\cdot)$ und $B(\cdot)$ Wiener Prozesse mit der Korrelation $\rho = const.$ sind. Sei die Nutzenfunktion $u(\cdot)$ quadratisch und gegeben durch: $u(w) = w - cw^2$ für eine Konstante c. Dann gilt folgende Aussage[4]:
Wenn φ das Problem

$$E\left[u(W(\theta))\right] \to \max, \qquad \theta \in \Theta,$$

löst, dann löst φ für ein erwartetes Endvermögen $L = E[W(\varphi)]$ auch das Problem

$$Var\left[W(\theta)\right] \to \min, \qquad \theta \in \Theta.$$

Genauere Betrachtungen dazu liefert der Artikel von Duffie & Richardson [4].

3.3 Kriterien zur Lösbarkeit

In diesem Abschnitt soll es darum gehen, die Kriterien zu erarbeiten, unter denen das Optimierungsproblem (3.4) eine Lösung hat und dass diese dann eindeutig ist. Da nach Theorem 3.5 die Probleme (3.4) und (3.6) äquivalent sind, reicht es aus, die Lösbarkeit des zweiten Problems zu untersuchen.

Proposition 3.8 (Eindeutigkeit) *Das Optimierungsproblem* (3.4) *hat entweder keine Lösung oder es gibt eine eindeutige Lösung.*

Beweis:
Nach Theorem 3.5 reicht es zu untersuchen, ob das Optimierungsproblem (3.6) lösbar ist. Betrachten wir dieses Problem also auf $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$ mit der beschränkten Menge

$$D := \left\{Y \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R}) : E[Y] = z,\ E[\rho(T)Y] = x_0,\ Y \geq 0\right\}.$$

[3] vgl. [9], S. 565.
[4] vgl. [4], S. 7

Wir nehmen an, D sei nichtleer, und sagen: $Y_0 \in D$ mit $E[Y_0^2] =: c$. Dann gilt für eine optimale Lösung x von (3.6): $x \in D' := D \cap \{E[Y^2] \leq E[Y_0^2]\}$. In diesem Fall gilt für D': D' ist nichtleer, da $Y_0 \in D'$ ist. Weiter ist D' konvex, denn es gilt: Seien $Y_1, Y_2 \in D'$. So gilt für jedes $k \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} E[(kY_1 + (1-k)Y_2)^2] &= k^2 E[\underbrace{Y_1^2}_{\leq Y_0^2}] + 2k(1-k)E[\underbrace{Y_1 Y_2}_{\leq Y_0^2}] + (1-k)^2 E[\underbrace{Y_2^2}_{\leq Y_0^2}] \\ &\leq k^2 E[Y_0^2] + 2kE[Y_0^2] - 2k^2 E[Y_0^2] + E[Y_0^2] - 2kE[Y_0^2] + k^2 E[Y_0^2] \\ &= E[Y_0^2]. \end{aligned}$$

Somit gilt: $kY_1 + (1-k)Y_2 \in \{E[Y^2] \leq E[Y_0^2]\}$. Offensichtlich ist $kY_1 + (1-k)Y_2 \geq 0$. Weiter gilt:

$$E[kY_1 + (1-k)Y_2] = kE[Y_1] + (1-k)E[Y_2] = kz + (1-k)z = z$$

und

$$E[\rho(T)(kY_1 + (1-k)Y_2)] = kE[\rho(T)Y_1] + (1-k)E[\rho(T)Y_2] = kx_0 + (1-k)x_0 = x_0.$$

Da $Y_1, Y_2 \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R})$, ist auch $kY_1 + (1-k)Y_2 \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R})$ und damit ist $kY_1 + (1-k)Y_2 \in D'$, $\forall k \in [0, 1]$, also ist D' konvex.
Ebenso ist D' auf $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R})$ beschränkt, denn für alle $Y \in D'$ gilt:

$$||Y||_{L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})} = E[Y^2] \leq E[Y_0^2] = c.$$

Schließlich ist D' abgeschlossen, denn für eine f.s. monoton wachsende Folge $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D'$ mit $\lim_{n\to+\infty} Y_n = Y^*$ gilt: $Y^* \in D'$, da aufgrund des Satzes über die monotone Konvergenz[5] stets gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} E[Y_n] &= E\left[\lim_{n\to+\infty} Y_n\right] &= E[Y^*] &= z, \\ \lim_{n\to+\infty} E[\rho(T)Y_n] &= E\left[\rho(T)\lim_{n\to+\infty} Y_n\right] &= E[\rho(T)Y^*] &= x_0, \\ \lim_{n\to+\infty} E[Y_n^2] &= E\left[\lim_{n\to+\infty} Y_n^2\right] &= E[(Y^*)^2] &\leq E[Y_0^2] \end{aligned}$$

sowie $Y^* \leq 0$ gilt. Dies bedeutet ebenfalls, dass jede Folge in D' einen Häufungspunkt in D' besitzt, also ist D' kompakt.[6]
Mit dem gleichen Argument zeigen wir, dass die Funktion $f(X) = E[X^2] - z^2$ stetig ist: Für eine beliebige Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to+\infty} X_n = X^*$ gilt:

$$\lim_{n\to+\infty} f(X_n) = \lim_{n\to+\infty} (E[X_n^2] - z^2) = E\left[\left(\lim_{n\to+\infty} X_n\right)^2\right] - z^2 = E[(X^*)^2] - z^2 = f(X^*).$$

[5] vgl. [7], S. 116.
[6] vgl. [2], S. 265.

Damit nimmt die stetige Funktion f, die nach unten durch $-z^2$ beschränkt ist, auf der kompakten Menge D' das Minimum an.[7] Offensichtlich ist $f(X) = E[X^2] - z^2 = E[(X-z)^2]$ streng monoton wachsend. Somit ist das angenommene Minimum auf D' auch eindeutig.

$\square$

Falls es eine Lösung für das Optimierungsproblem (3.4) gibt, wissen wir nun, dass diese eindeutig ist. Allerdings fehlt noch ein Kriterium, unter welchen Umständen es eine Lösung gibt. Um dahin zu kommen, werden wir zuerst einige Hilfsaussagen formulieren.

Wir definieren

$$\begin{aligned} a &:= \inf_{Y \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R}), Y \geq 0, E[Y]>0} \tfrac{E[\rho(T)Y]}{E[Y]}, \\ b &:= \sup_{Y \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R}), Y \geq 0, E[Y]>0} \tfrac{E[\rho(T)Y]}{E[Y]}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Proposition 3.9 *Für a und b gilt:*

$$\begin{aligned} a &= \inf\{\eta \in \mathbb{R} : \ P(\rho(T) < \eta) > 0\}, \\ b &= \sup\{\eta \in \mathbb{R} : \ P(\rho(T) > \eta) > 0\}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Beweis:
Wir definieren $\hat{a} := \inf\{\eta \in \mathbb{R} : \ P(\rho(T) < \eta) > 0\}$ und zeigen, dass $a = \hat{a}$ gilt.
Für alle η mit $P(\rho(T) < \eta) > 0$ setzen wir $Y := \mathbf{1}_{\{\rho(T)<\eta\}}$. Da die Indikatorfunktion quadratisch integrierbar ist, gilt: $Y \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$. Ebenso ist $Y \geq 0$ und $E[Y] > 0$. Damit sind alle Bedingungen, die zur Bestimmung des Infinums benötigt werden, für Y erfüllt. Nun gilt:

$$\begin{aligned} \frac{E[\rho(T)Y]}{E[Y]} &= \frac{E[\rho(T)\mathbf{1}_{\{\rho(T)<\eta\}}]}{E[\mathbf{1}_{\{\rho(T)<\eta\}}]} \\ &< \frac{E[\eta\mathbf{1}_{\{\rho(T)<\eta\}}]}{E[\mathbf{1}_{\{\rho(T)<\eta\}}]} = \frac{\eta E[\mathbf{1}_{\{\rho(T)<\eta\}}]}{E[\mathbf{1}_{\{\rho(T)<\eta\}}]} = \eta. \end{aligned}$$

Nach der Definition von a ergibt sich somit:

$$a \leq \frac{E[\rho(T)Y]}{E[Y]} < \eta$$

für alle η mit $P(\rho(T) < \eta) > 0$ und somit gilt auch: $a \leq \hat{a}$.
Aus $\hat{a} := \inf\{\eta \in \mathbb{R} : \ P(\rho(T) < \eta) > 0\}$ folgt: $P(\rho(T) < \hat{a} - \varepsilon) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$. Daraus ergibt sich: $P(\rho(T) \geq \hat{a} - \varepsilon) = 1$ und damit gilt: $\rho(T) \geq \hat{a} - \varepsilon$, f.s. Damit gilt für jedes $Y \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$ mit $Y \geq 0$ und $E[Y] > 0$ nun:

$$\frac{E[\rho(T)Y]}{E[Y]} \geq \frac{E[(\hat{a}-\varepsilon)Y]}{E[Y]} = \frac{(\hat{a}-\varepsilon)E[Y]}{E[Y]} = \hat{a} - \varepsilon.$$

[7] vgl. [2], S. 267.

Nach der Definition von a gilt somit: $a \geq \hat{a} - \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ und damit: $a \geq \hat{a}$.
Insgesamt gilt also nun: $a = \hat{a} = \inf\{\eta \in \mathbb{R} : \; P(\rho(T) < \eta) > 0\}$.

Analog zeigen wir das gleiche für b: Wir definieren $\hat{b} := \sup\{\eta \in \mathbb{R} : \; P(\rho(T) > \eta) > 0\}$ und zeigen, dass $b = \hat{b}$ gilt.
Für alle η mit $P(\rho(T) > \eta) > 0$ setzen wir $Y := \mathbf{1}_{\{\rho(T)>\eta\}}$. Da die Indikatorfunktion quadratisch integrierbar ist, gilt: $Y \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$. Ebenso ist $Y \geq 0$ und $E[Y] > 0$. Damit sind alle Bedingungen, die zur Bestimmung des Supremums benötigt werden, für Y erfüllt. Nun gilt:

$$\begin{aligned} \frac{E[\rho(T)Y]}{E[Y]} &= \frac{E[\rho(T)\mathbf{1}_{\{\rho(T)>\eta\}}]}{E[\mathbf{1}_{\{\rho(T)>\eta\}}]} \\ &> \frac{E[\eta\mathbf{1}_{\{\rho(T)>\eta\}}]}{E[\mathbf{1}_{\{\rho(T)>\eta\}}]} = \frac{\eta E[\mathbf{1}_{\{\rho(T)>\eta\}}]}{E[\mathbf{1}_{\{\rho(T)>\eta\}}]} = \eta. \end{aligned}$$

Nach der Definition von b ergibt sich somit:

$$b \geq \frac{E[\rho(T)Y]}{E[Y]} > \eta$$

für alle η mit $P(\rho(T) > \eta) > 0$ und somit gilt auch: $b \geq \hat{b}$.
Aus $\hat{b} := \sup\{\eta \in \mathbb{R} : \; P(\rho(T) > \eta) > 0\}$ folgt: $P(\rho(T) > \hat{b} + \varepsilon) = 0$ für alle $\varepsilon > 0$. Daraus ergibt sich: $P(\rho(T) \leq \hat{b} + \varepsilon) = 1$ und damit gilt: $\rho(T) \leq \hat{b} + \varepsilon$ f.s. Damit gilt für jedes $Y \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$ mit $Y \geq 0$ und $E[Y] > 0$ nun:

$$\frac{E[\rho(T)Y]}{E[Y]} \leq \frac{E[(\hat{b}+\varepsilon)Y]}{E[Y]} = \frac{(\hat{b}+\varepsilon)E[Y]}{E[Y]} = \hat{b} + \varepsilon.$$

Nach der Definition von b gilt somit: $b \leq \hat{b} + \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$ und damit: $b \leq \hat{b}$.
Insgesamt gilt also nun: $b = \hat{b} = \sup\{\eta \in \mathbb{R} : \; P(\rho(T) > \eta) > 0\}$.

$\square$

Ein Sonderfall, den wir für die weitere Untersuchung, insb. im sechsten Kapitel benötigen, ist der Fall, wenn der Risikoprämienprozess $\theta(\cdot)$ deterministisch ist. Denn dann nehmen a und b stets die gleichen Werte an, wie das folgende Lemma zeigt.

Lemma 3.10 (Deterministischer Risikoprämienprozess) *Sei die Funktion $\theta(\cdot)$ deterministisch und sei $\int_0^T |\theta(s)|^2 ds > 0$. Dann gilt: $a = 0$ und $b = +\infty$.*

Beweis:
Für $t = T$ gilt nach (3.2): $\rho(T) = \exp\left\{-\int_0^T \left[r(s) + \frac{1}{2}|\theta(s)|^2\right] ds - \int_0^T \theta(s)\, dW(s)\right\}$. Da $\theta(\cdot)$ deterministisch ist, gilt[8], dass $\int_0^T \theta(s)dW(s)$ normalverteilt ist mit $E[\int_0^T \theta(s)dW(s)] = 0$ und $Var[\int_0^T \theta(s)dW(s)] = \int_0^T |\theta(s)|^2 ds$, die nach Voraussetzung positiv ist.

[8]vgl. [16], S. 149.

Nach Proposition 3.9 gilt: $a = \inf\{\eta \in \mathbb{R}: \ P(\rho(T) < \eta) > 0\}$. Trivialer Weise ist $a \geq 0$. Sei $\hat{a} = \inf\{\eta \in \mathbb{R}: \ P(\rho(T) < \eta) > 0\} > 0$. Damit gilt für beliebiges $\eta < \hat{a}$:

$$\begin{aligned}
P(\rho(T) < \eta) &= P\left(\exp\left\{-\int_0^T \left[r(s) + \frac{1}{2}|\theta(s)|^2\right] ds - \int_0^T \theta(s) \ dW(s)\right\} < \eta\right) \\
&= P\left(\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^T \theta(s)ds\right\} \cdot \exp\left\{-\int_0^T r(s)ds - \int_0^T \theta(s)dW(s)\right\} < \eta\right) \\
&= P\left(\exp\left\{-\int_0^T r(s)ds - \int_0^T \theta(s)dW(s)\right\} < \eta \cdot \underbrace{\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^T \theta(s)ds\right\}}_{>1}\right) \\
&= P\left(-\int_0^T r(s)ds - \int_0^T \theta(s)dW(s) < \ln(\eta) + \frac{1}{2}\int_0^T \theta(s)ds\right) \ = \ 0. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $r(\cdot)$ eine beschränkte Zufallsvariable ist und $\int_0^T \theta(s)dW(s)$ normalverteilt mit positiver Varianz ist, gilt für beliebiges $x > -\infty$:

$$P\left(-\int_0^T r(s)ds - \int_0^T \theta(s)dW(s) < x\right) > 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zu (3.12)! Damit gilt: $a = \inf\{\eta \in \mathbb{R}: \ P(\rho(T) < \eta) > 0\} = 0$.
Ähnlich gilt für $b = \sup\{\eta \in \mathbb{R}: \ P(\rho(T) > \eta) > 0\}$, dass $b \leq +\infty$. Sei $\hat{b} = \sup\{\eta \in \mathbb{R}: P(\rho(T) > \eta) > 0\} < +\infty$. Für beliebiges $\eta > \hat{b}$ würde analog zu (3.12) gelten:

$$P(\rho(T) > \eta) = P\left(-\int_0^T r(s)ds - \int_0^T \theta(s)dW(s) > \ln(\eta) + \frac{1}{2}\int_0^T \theta(s)ds\right) = 0. \quad (3.13)$$

Da nach Voraussetzung $r(\cdot)$ eine beschränkte Zufallsvariable ist und $\int_0^T \theta(s)dW(s)$ normalverteilt mit positiver Varianz ist, gilt für beliebiges $x < +\infty$:

$$P\left(-\int_0^T r(s)ds - \int_0^T \theta(s)dW(s) > x\right) > 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zu (3.13)! Damit gilt: $b = \sup\{\eta \in \mathbb{R}: \ P(\rho(T) > \eta) > 0\} = +\infty$.
□

Aus diesen Vorüberlegungen können wir nun ein Kriterium für die Lösbarkeit des Optimierungsproblems (3.4) aufstellen.

Proposition 3.11 (Existenz) *Wenn gilt, dass $a < \frac{x_0}{z} < b$, dann hat hat Optimierungsproblem* (3.4) *eine Lösung. Wenn andererseits das Optimierungsproblem* (3.4) *eine Lösung hat, dann gilt: $a \leq \frac{x_0}{z} \leq b$.*

Beweis:
Hinrichtung: Sei $a < \frac{x_0}{z} < b$. Wir untersuchen wieder nur die Lösbarkeit des Optimierungsproblems (3.6). Nach der Definition von a und b nach (3.10) gibt es für jedes $x_0 > 0$ und $z > 0$ $Y_1, Y_2 \in \{Y \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R}) : Y \geq 0,\ E[Y] > 0\}$, so dass gilt:

$$\frac{E[\rho(T)Y_1]}{E[Y_1]} < \frac{x_0}{z} < \frac{E[\rho(T)Y_2]}{E[Y_2]}.$$

Nun definieren wir folgende Funktion:

$$f(\lambda) := \frac{E[\rho(T)(\lambda Y_1 + (1-\lambda)Y_2)]}{E[\lambda Y_1 + (1-\lambda)Y_2]} = \frac{\lambda E[\rho(T)Y_1] + (1-\lambda)E[Y_2]}{\lambda E[Y_1] + (1-\lambda)E[Y_2]}, \quad \lambda \in [0,1].$$

Offensichtlich ist f stetig auf dem Intervall $[0,1]$, da $E[Y_1], E[Y_2] > 0$ gilt. Weiter gilt: $f(0) = \frac{E[\rho(T)Y_2]}{E[Y_2]}$ und $f(1) = \frac{E[\rho(T)Y_1]}{E[Y_1]}$ und damit: $f(1) < \frac{x_0}{z} < f(0)$. Somit gibt es ein $\lambda_0 \in (0,1)$ mit $f(\lambda_0) = \frac{x_0}{z}$. Setze $Y_0 := \lambda_0 Y_1 + (1-\lambda_0)Y_2$. Es gilt: $Y_0 \geq 0$ und $E[Y_0] = \lambda_0 E[Y_1] + (1-\lambda_0)E[Y_2] > 0$. Setze nun $Y^* := \frac{zY_0}{E[Y_0]}$, dann gilt: $Y^* \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R})$, $Y^* \geq 0$ und $E[Y^*] = z\frac{E[Y_0]}{E[Y_0]} = z > 0$. Damit gilt:

$$E[\rho(T)Y^*] = zf(\lambda_0) = x_0.$$

Damit erfüllt Y^* die Bedingungen des Optimierungsproblems (3.6) und ist damit eine mögliche Lösung von diesem.

Rückrichtung: Hat das Optimierungsproblem (3.4) eine Lösung, so hat nach Theorem 3.5 auch das Problem (3.6) eine Lösung. Sei Y^* eine solche mögliche Lösung. Dann gilt: $Y^* \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R})$, $Y^* \geq 0$, $E[Y^*] = z > 0$ und $E[\rho(T)Y^*] = x_0$. Somit folgt nach (3.10):

$$a \leq \frac{E[\rho(T)Y^*]}{E[Y^*]} = \frac{x_0}{z} \leq b.$$

Damit ist gezeigt: Hat das Optimierungsproblem (3.4) eine mögliche Lösung, so gilt: $a \leq \frac{x_0}{z} \leq b$.

$\square$

Nun stellt sich die Frage, ob a und b auch bei einem stochastischen Risikoprämienprozess die Werte 0 bzw. $+\infty$ annehmen. Sollte dem nämlich so sein, so würde dies bedeuten, dass unser Optimierungsproblem stets eine Lösung hätte. Dazu betrachten wir ein Beispiel für einen nichtdeterministischen Risikoprämienprozess $\theta(\cdot)$.

Beispiel 3.12 (Stochastischer Risikoprämienprozess) Sei nun $\theta(\cdot)$ ein stochastischer Prozess mit $\int_0^T |\theta(t)|^2 dt > 0$, f.s. Wir konstruieren ein Beispiel, bei dem $\int_0^T \theta(t)dW(t)$ gleichmäßig beschränkt ist. Dazu betrachten wir einen Markt mit einem Bankkonto und einer Aktie und der dazugehörigen Brownschen Bewegung $W(t)$. Für eine reelle Zahl $K > 0$ definieren wir:

$$\tau := \begin{cases} \inf\{t \geq 0 : |W(t)| > K\}, & \text{für } \sup_{0 \leq t \leq T} |W(t)| > K, \\ T, & \text{für } \sup_{0 \leq t \leq T} |W(t)| \leq K. \end{cases}$$

Für $r(t) = 0,1$, $b(t) = 0,1 + \mathbf{1}_{\{t\leq\tau\}}$ und $\sigma(t) = 1$ gilt: $\theta(t) = \mathbf{1}_{\{t\leq\tau\}}$. Daraus folgt: $\int_0^T \theta(t)dW(t) = \int_0^T \mathbf{1}_{\{t\leq\tau\}}dW(t) = \int_0^\tau dW(t) = W(\tau)$. Dies ist durch K gleichmäßig beschränkt.
Nach (3.2) gilt damit für $\rho(T)$:

$$\begin{aligned}\rho(T) &= \exp\left\{-\int_0^T \left[0,1+\frac{1}{2}|\mathbf{1}_{\{t\leq\tau\}}|^2\right] dt - \int_0^T \mathbf{1}_{\{t\leq\tau\}}\, dW(t)\right\} \\ &= \exp\left\{-\int_0^T 0,1\, dt - \int_0^\tau \frac{1}{2}\, dt - W(\tau)\right\} \\ &= \exp\left\{-0,1\cdot T - \frac{1}{2}\cdot\tau - W(\tau)\right\}.\end{aligned}$$

Nun wollen wir mit diesen Ergebnisssen a und b bestimmen. Es gilt:

$$\begin{aligned} a &= \inf\{\eta\in\mathbb{R} : P(\rho(T)<\eta)>0\} \\ &= \inf\left\{\eta\in\mathbb{R} : P\left(e^{-0,1\cdot T-\frac{1}{2}\cdot\tau-W(\tau)}<\eta\right)>0\right\} \;=\; e^{-0,6\cdot T-K}, \\ b &= \sup\{\eta\in\mathbb{R} : P(\rho(T)>\eta)>0\} \\ &= \sup\left\{\eta\in\mathbb{R} : P\left(e^{-0,1\cdot T-\frac{1}{2}\cdot\tau-W(\tau)}>\eta\right)>0\right\} \;=\; e^{K-0,1\cdot T}.\end{aligned}$$

Damit können a und b auch Werte im Intervall $(0,+\infty)$ bei stochastischen Prozessen $\theta(\cdot)$ annehmen. Somit kann es bei entsprechender Wahl von z keine mögliche Lösung für unser Optimierungsproblem (3.6) geben.

Die Ergebnisse dieses Kapitels über die Lösbarkeit unseres Optimierungsproblems fassen wir im folgenden Korollar zusammen.

Korollar 3.13 (Lösbarkeit des Optimierungsproblems) *Wenn gilt, dass $a < \frac{x_0}{z} < b$, dann hat das Optimierungsproblem (3.4) eine eindeutige Lösung. Gilt insbesondere, dass der Prozess $\theta(\cdot)$ deterministisch ist mit $\int_0^T |\theta(t)|^2 dt$, dann hat das Optimierungsproblem (3.4) eine eindeutige Lösung für jedes $x_0 > 0$ und $z > 0$.*

Beweis:
Die Lösbarkeit des Optimierungsproblems (3.4) für $a < \frac{x_0}{z} < b$ folgt aus der Proposition 3.11, die Eindeutigkeit der Lösung aus Proposition 3.8. Nach Lemma 3.10 gilt für einen deterministischen Prozess $\theta(\cdot)$ mit $\int_0^T |\theta(t)|^2 dt$: $a = 0$ und $b = +\infty$. Somit gilt für jedes $x_0 > 0$ und $z > 0$: $a < \frac{x_0}{z} < b$ und wir erhalten damit wieder die eindeutige Lösbarkeit des Optimierungsproblems (3.4).

□

Kapitel 4

Optimale Lösung für das varianzminimierende Portfolio

In diesem Kapitel geht es darum, die optimale Lsöung des Optimierungsproblems (3.6) näher zu bestimmen. Im vorherigen Kapitel haben wir schon gesehen, dass eine solche Lösung eindeutig ist. Wir werden in Lösung in einer speziellen Form mit zwei Lagrange-Multiplikatoren darstellen können, die zwei Gleichungen erfüllen müssen. Zudem werden wir zeigen, dass diese Multiplikatoren existieren und wieder eindeutig sind.

4.1 Die Form der Lösung

Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass das unter (3.6) formulierte Problem eine spezielle Lösung besitzt. Dazu werden wir zuerst noch ein Hilfsresultat formulieren und beweisen, das ein Optimierungsproblem in ein anderes überführt werden kann.

Proposition 4.1 *Sei $D \subset L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$ eine konvexe Menge. Seien $a_i \in \mathbb{R}$ und $\xi_i \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$ für $i = 1,\dots,l$ gegeben. Weiter sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Dann gilt:*
Wenn das Optimierungproblem

$$\begin{aligned} &E[f(Y)] \to \min, \\ &\textit{unter den Bedingungen} \left\{ \begin{array}{l} E[\xi_i Y] = a_i, \quad i = 1,\dots,l, \\ Y \in D \end{array} \right. \end{aligned} \tag{4.1}$$

eine Lösung Y^* besitzt, dann existiert ein l-dimensionaler Vektor $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_l)$, so dass Y^* auch das Optimierungsproblem

$$\begin{aligned} &E\left[f(Y) - Y \cdot \sum_{i=1}^{l} \lambda_i \xi_i\right] \to \min, \\ &\textit{unter der Bedingung } Y \in D \end{aligned} \tag{4.2}$$

löst. Andererseits, wenn Y^* die optimale Lösung für (5.7) *für ein geeignetes λ ist, dann ist Y^* auch die Lösung von* (5.6) *für $a_i = E[\xi_i Y^*]$.*

Beweis:
Wir zeigen zuerst die Hinrichtung: Sei Y^* die optimale Lösung von (5.6). Wir definieren eine Menge $\Delta := \{(E[\xi_1 Y], \ldots, E[\xi_l Y]) : Y \in D\} \subseteq \mathbb{R}^l$. Diese Menge ist konvex: Seien $a := (E[\xi_1 Y^a], \ldots, E[\xi_l Y^a])$ und $b := (E[\xi_1 Y^b], \ldots, E[\xi_l Y^b])$ Elemente aus Δ für entsprechende $Y^a, Y^b \in D$. Dann gilt für jedes $\gamma \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
\gamma a + (1-\gamma) b &= \gamma \cdot (E[\xi_1 Y^a], \ldots, E[\xi_l Y^a]) + (1-\gamma) \cdot (E[\xi_1 Y^b], \ldots, E[\xi_l Y^b]) \\
&= (\gamma E[\xi_1 Y^a] + (1-\gamma) E[\xi_1 Y^b], \ldots, \gamma E[\xi_l Y^a] + (1-\gamma) E[\xi_l Y^b]) \\
&= (E[\xi_1(\gamma Y^a + (1-\gamma) Y^b)], \ldots, E[\xi_l(\gamma Y^a + (1-\gamma) Y^b)]).
\end{aligned}$$

Da nun Y^a, Y^b Elemente einer konvexen Menge D sind, gilt: $\gamma Y^a + (1-\gamma) Y^b \in D$ und damit: $(E[\xi_1(\gamma Y^a + (1-\gamma) Y^b)], \ldots, E[\xi_l(\gamma Y^a + (1-\gamma) Y^b)]) \in \Delta$.
Nun definieren wir die Funktion

$$g(x) \equiv g(x_1, \ldots, x_l) := \inf_{E[\xi_i Y] = x_i, i=1,\ldots,l, Y \in D} E[f(Y)], \quad x \in \Delta.$$

g ist eine konvexe Funktion: Seien $x^{(1)}, x^{(2)} \in \Delta$ und sei $\gamma \in [0,1]$. Nun gilt:

$$\gamma g(x^{(1)}) + (1-\gamma) g(x^{(2)}) =$$

$$\gamma \cdot \inf_{E[\xi_i \hat{Y}] = x_i^{(1)}, i=1,\ldots,l, \hat{Y} \in D} E[f(\hat{Y})] + (1-\gamma) \cdot \inf_{E[\xi_i \tilde{Y}] = x_i^{(2)}, i=1,\ldots,l, \tilde{Y} \in D} E[f(\tilde{Y})].$$

Wähle nun $Y := \gamma \hat{Y} + (1-\gamma) \tilde{Y}$. Da D konvex ist, gilt: $Y \in D$. Damit ergibt sich ebenfalls:

$$E[\xi_i Y] = E[\xi_i(\gamma \hat{Y} + (1-\gamma) \tilde{Y})] = \gamma \cdot E[\xi_i \hat{Y}] + (1-\gamma) \cdot E[\xi_i \tilde{Y}] = \gamma x_i^{(1)} + (1-\gamma) x_i^{(2)}, \quad \forall\, i = 1, \ldots, l.$$

Nun gilt folgendes:

$$\begin{aligned}
E[f(Y)] &= E[f(\gamma \hat{Y} + (1-\gamma) \tilde{Y})] \\
&\leq E[\gamma f(\hat{Y})] + E[(1-\gamma) f(\tilde{Y})], \quad \text{da } f \text{ konvex ist} \\
&= \gamma \cdot E[f(\hat{Y})] + (1-\gamma) \cdot E[f(\tilde{Y})].
\end{aligned}$$

Wir bilden nun auf beiden Seiten

$$\inf_{E[\xi_i \hat{Y}] = x_i^{(1)}, i=1,\ldots,l, \hat{Y} \in D}, \quad \inf_{E[\xi_i \tilde{Y}] = x_i^{(2)}, i=1,\ldots,l, \tilde{Y} \in D}.$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned}
\inf_{E[\xi_i Y] = \gamma x_i^{(1)} + (1-\gamma) x_i^{(2)}, i=1,\ldots,l, Y \in D} E[f(Y)] &\leq \gamma \cdot \inf_{E[\xi_i \hat{Y}] = x_i^{(1)}, i=1,\ldots,l, \hat{Y} \in D} E[f(\hat{Y})] \\
&\quad + (1-\gamma) \cdot \inf_{E[\xi_i \tilde{Y}] = x_i^{(2)}, i=1,\ldots,l, \tilde{Y} \in D} E[f(\tilde{Y})] \\
\Rightarrow\ g(\gamma x_1 + (1-\gamma) x_2) &\leq \gamma g(x^{(1)}) + (1-\gamma) g(x^{(2)}).
\end{aligned}$$

Damit können wir das Theorem für konvexe Funktionen anwenden: Für einen gegebenen Vektor $a = (a_1, \ldots, a_l) \in \mathbb{R}^l$ gibt es einen Vektor $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l) \in \mathbb{R}^l$, so dass gilt: $g(x) \geq g(a) + \lambda'(x-a), \ \forall \ x \in \Delta$. Daraus ergibt sich umgeformt: $g(x) - \lambda' x \geq g(a) - \lambda' a$. Nun können wir mit diesen Zwischenergebnissen unsere anfängliche Ungleichung beweisen. Für ein beliebiges $Y \in D$ gilt folgendes:

$$\begin{aligned} E\left[f(Y) - Y\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\xi_i\right] &= E[f(Y)] - E\left[\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\xi_i Y\right] \\ &= E[f(Y)] - \sum_{i=1}^{l}\lambda_i E\left[\xi_i Y\right]. \end{aligned}$$

Wir wissen nun, dass $g(x)$ die Funktion f für $x = (E[\xi_1 Y], \ldots, E[\xi_l Y])$ nach unten begrenzt und damit gilt:

$$E\left[f(Y) - Y\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\xi_i\right] \geq g((E[\xi_1 Y], \ldots, E[\xi_l Y])) - \sum_{i=1}^{l}\lambda_i E\left[\xi_i Y\right].$$

Da nun $E[\xi_1 Y] = a_i$ für alle $i = 1, \ldots, l$ ist, gilt:

$$E\left[f(Y) - Y\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\xi_i\right] \geq g(a) - \lambda' a$$

Schreiben wir nun

$$g(a) = \inf_{E[\xi_i Y]=a_i, i=1,\ldots,l, Y\in D} E[f(Y)],$$

so gilt nach der Voraussetzung, dass Y^* das Problem (5.6) minimiert: $g(a) = E[f(Y^*)]$ und $a_i = E[\xi_i Y^*] \ \forall i$, und damit folgt:

$$\begin{aligned} E\left[f(Y) - Y\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\xi_i\right] &\geq E[f(Y^*)] - \sum_{i=1}^{l}\lambda_i E\left[\xi_i Y^*\right] \\ &= E\left[f(Y^*) - Y^*\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\xi_i\right]. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass Y^* auch das Problem (5.7) minimiert.

Nun folgt die Rückrichtung: Sei Y^* eine Lösung des Optimierungsproblems (5.7), so gilt für jedes $Y \in D$, das $E[\xi_i Y] = a_i = E[\xi_i Y^*] \ \forall i$ erfüllt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} E\left[f(Y^*)\right] - Y^* E\left[\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\xi_i\right] &= E\left[f(Y^*) - Y^*\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\xi_i\right] \\ \leq E\left[f(Y) - Y\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\xi_i\right] &= E\left[f(Y) - Y^*\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\xi_i\right] \\ = E\left[f(Y)\right] - Y^* E\left[\sum_{i=1}^{l}\lambda_i\xi_i\right] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad E\left[f(Y^*)\right] \;\leq\; E\left[f(Y)\right].$$

Damit ist gezeigt, dass Y^* auch das Optimierungsproblem (5.6) löst.

$\square$

Die Ergebnisse dieser Proposition wollen wir nun nutzen, um zu zeigen, von welcher Form die Lösung des Optimierungsproblems (3.6) ist. Dazu formulieren wir folgendes Theorem:

Theorem 4.2 (Form der optimalen Lösung) *Hat das Optimierungsproblem* (3.6) *eine Lösung X^*, dann ist sie von der Form $X^* = (\lambda - \mu\rho(T))^+$, wobei für das Paar $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ folgendes Gleichungssystem erfüllt:*

$$\begin{cases} E[(\lambda - \mu\rho(T))^+] &= z, \\ E[\rho(T)(\lambda - \mu\rho(T))^+] &= x_0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Andererseits ist $X^* := (\lambda - \mu\rho(T))^+$ eine optimale Lösung von (3.6)*, wenn das Paar (λ, μ) das Gleichungssystem* (4.3) *erfüllt.*

Beweis:
Wir zeigen zuerst die Hinrichtung: Sei X^* eine Lösung des Optimierungsproblems (3.6), d.h. X^* minimiert:

$$E[(X)^2] - z^2 \to \min$$

$$\text{unter den Bedingungen} \begin{cases} EX = z, \\ E[\rho(T)X] = x_0, \\ X \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R}), \;\; X \geq 0, \quad \text{f.s.} \end{cases}$$

Setzen wir nun $f(X) := X^2$, $\xi_1 := 1$, $\xi_2 := \rho(T) \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R})$ und $D := \{X : \;\; X \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R}), \;\; X \geq 0, \quad \text{f.s.,}\}$, so lässt sich das Problem folgendermaßen formulieren:

$$E[f(X)] - z^2 \to \min$$

$$\text{unter den Bedingungen} \begin{cases} E[\xi_1 X] = z, \\ E[\xi_2 X] = x_0, \\ X \in D. \end{cases}$$

Wenden wir nun die Proposition 4.1 an, so gilt, dass es einen Vektor $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ gibt, so dass X^* Lösung des folgenden Optimierungsproblems ist:

$$E\left[f(X) - X \cdot \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \xi_i\right] - z^2 \to \min,$$

$$\text{unter der Bedingung } X \in D$$

Nun formen wir dieses Problem um, indem wir die entsprechenden Werte für f, ξ_1, ξ_2 und D einsetzen:

$$\begin{cases} E\left[X^2 - X(\lambda_1 + \lambda_2\rho(T))\right] - z^2 \to \min, \\ \\ \text{unter der Bedingung } X \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R}), \;\; X \geq 0, \quad \text{f.s.} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} E\left[\left(X - \frac{\lambda_1+\lambda_2\rho(T)}{2}\right)^2 - \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2\rho(T)}{2}\right)^2\right] - z^2 \to \min, \\ \\ \text{unter der Bedingung } X \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R}),\ X \geq 0, \quad \text{f.s.} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} E\left[\left(X - \frac{\lambda_1+\lambda_2\rho(T)}{2}\right)^2\right] - E\left[\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2\rho(T)}{2}\right)^2\right] - z^2 \to \min, \\ \\ \text{unter der Bedingung } X \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R}),\ X \geq 0, \quad \text{f.s.} \end{cases}$$

Nun wissen wir, dass der Ausdruck $E\left[\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2\rho(T)}{2}\right)^2\right] - z^2$ nicht von X abhängt. D.h. die optimale Lösung X^* muss nur den Ausdruck $E\left[\left(X - \frac{\lambda_1+\lambda_2\rho(T)}{2}\right)^2\right]$ minimieren. Die minimale Lösung wäre also $\frac{\lambda_1+\lambda_2\rho(T)}{2}$, wobei die Bedingung greifen muss, dass $X \geq 0$, f.s., so dass sich als einzige optimale Lösung

$$X^* = \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2\rho(T)}{2}\right)^+$$

ergibt. Wählen wir nun $\lambda := \frac{\lambda_1}{2}$ und $\mu := -\frac{\lambda_2}{2}$, so ist X^* in der gewünschten Form.

Nun zeigen wir die Rückrichtung: Wenn das Paar (λ, μ) die Bedingungen (4.3) erfüllen, dann ist $X^* := (\lambda - \mu\rho(T))^+$ eine optimale Lösung von (3.6).
Die unter (3.6) formulierten Bedingungen werden von X^* erfüllt:

$$\begin{cases} E[(\lambda - \mu\rho(T))^+] & = & E[X^*] & = & z, \\ E[\rho(T)(\lambda - \mu\rho(T))^+] & = & E[\rho(T)X^*] & = & x_0. \end{cases}$$

Trivialerweise ist $X^* \geq 0$, f.s., und definitionsgemäß ist $X^* \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$.
Unter der Bedingung $X \geq 0$, f.s., gilt nun: X^* minimiert

$$\begin{aligned} & E[(X - (\lambda - \mu\rho(T)))^2] - z^2 - E[(\lambda - \mu\rho(T))^2] = \\ & = E[(X - (\lambda - \mu\rho(T)))^2 - (\lambda - \mu\rho(T))^2] - z^2 \\ & = E[X^2 - 2(\lambda - \mu\rho(T))X + (\lambda - \mu\rho(T))^2 - (\lambda - \mu\rho(T))^2] - z^2 \\ & = E[X^2 - (2\lambda - 2\mu\rho(T))X] - z^2. \end{aligned}$$

Setze $f(X) := X^2$, $\lambda_1 := 2\lambda$, $\lambda_2 := -2\mu$, $\xi_1 := 1$ und $\xi_2 := \rho(T)$, dann gilt:

$$E[(X - (\lambda - \mu\rho(T)))^2] - z^2 - E[(\lambda - \mu\rho(T))^2] \;=\; E[f(X) - X(\lambda_1\xi_1 + \lambda_2\xi_2)] - z^2$$

$$\text{unter der Bedingung } X \in D := \{X :\ X \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R}),\ X \geq 0, \quad \text{f.s.}\}.$$

Nun können wir wieder unsere Proposition 4.1 (Rückrichtung) anwenden: Danach ist $X^* = (\lambda - \mu\rho(T))^+$ auch optimale Lösung des folgenden Problems:

$$E[f(X)] - z^2 = EX^2 - z^2 \to \min$$

$$\text{unter den Bedinungen} \begin{cases} E[\xi_1 X] = EX = z, \\ E[\xi_2 X] = E[\rho(T)X] = x_0, \\ X \in D \Leftrightarrow X \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R}),\ X \geq 0, \quad \text{f.s.,} \end{cases}$$

was dem Problem (3.6) entspricht. also ist $X^* = (\lambda - \mu\rho(T))^+$ auch optimale Lösung für (3.6).

$\square$

Betrachten wir nun noch den Fall, dass wir die Insolvenz des Agenten in der Periode $[0, T]$ zulassen. Nach Proposition 3.2 bedeutet dies, dass wir nicht mehr fordern, dass $X \geq 0$ gilt. Damit ergibt sich folgende optimale Lösung für X:

Satz 4.3 *Lassen wir die Bedingung $X \geq 0$ im Problem (3.6) fallen, dann ist die optimale Lösung $X^* = \lambda - \mu\rho(T)$, wobei das Paar $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ folgende Bedingungen erfüllt:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} E[\lambda - \mu\rho(T)] &=& z, \\ E[\rho(T)(\lambda - \mu\rho(T))] &=& x_0. \end{array} \right. \tag{4.4}$$

Für (λ, μ) gilt dann:

$$\lambda = \frac{zE[\rho^2(T)] - E[\rho(T)]x_0}{Var[\rho(T)]}, \qquad \mu = \frac{zE[\rho(T)] - x_0}{Var[\rho(T)]}.$$

Beweis:
Da die Gleichungen (4.4) linear sind, können wir sie einfach umformen:

$$\begin{array}{lrcl}
 & \lambda - \mu E[\rho(T)] &=& z \\
\Rightarrow & \lambda &=& z + \mu E[\rho(T)] \\
 & \lambda E[\rho(T)] - \mu E[\rho^2(T)] &=& x_0 \\
\Rightarrow & (z + \mu E[\rho(T)])E[\rho(T)] - \mu E[\rho^2(T)] &=& x_0 \\
\Leftrightarrow & zE[\rho(T)] + \mu(E[\rho(T)])^2 - \mu E[\rho^2(T)] &=& x_0 \\
\Leftrightarrow & zE[\rho(T)] + \mu((E[\rho(T)])^2 - E[\rho^2(T)]) &=& x_0 \\
\Leftrightarrow & -\mu Var[\rho(T)] &=& x_0 - zE[\rho(T)] \\
\Leftrightarrow & \mu &=& \dfrac{zE[\rho(T)] - x_0}{Var[\rho(T)]} \\
 & & & \\
\Rightarrow & \lambda &=& z + \dfrac{zE[\rho(T)] - x_0}{Var[\rho(T)]} \cdot E[\rho(T)] \\
 & & & \\
 & &=& z + \dfrac{z(E[\rho(T)])^2 - E[\rho(T)]x_0}{Var[\rho(T)]} \\
 & & & \\
 & &=& \dfrac{z(Var[\rho(T)] + (E[\rho(T)])^2) - E[\rho(T)]x_0}{Var[\rho(T)]} \\
 & & & \\
 & &=& \dfrac{zE[\rho^2(T)] - E[\rho(T)]x_0}{Var[\rho(T)]}.
\end{array}$$

$\square$

4.2 Einige Hilfsresultate

Um die Existenz und Eindeutigkeit der Lagrange-Multiplikatoren zu beweisen, benötigen wir zuerst einige Hilfsaussagen, die wir in diesem Abschnitt aufstellen.
Wegen der Einfachheit setzen wir $Z := \rho(T)$ und schreiben das Gleichungssystem (4.3) in der Form

$$\left\{ \begin{array}{rcl} E[(\lambda - \mu Z)^+] & = & z, \\ E[(\lambda - \mu Z)^+ Z] & = & x_0. \end{array} \right. \tag{4.5}$$

Wir beginnen mit einigen Hilfsaussagen.

Lemma 4.4 *(i) Für eine beliebige Zufallsvariable X und ein reelles $c \in \mathbb{R}$ gilt:*

$$E[X(c - X)] - E[X]E[c - X] \leq 0, \quad E[X(X - c)] - E[X]E[X - c] \geq 0.$$

(ii) Für eine beliebe Zufallsvariable X mit $E[X] > 0$ gilt:

$$E[X] \leq \frac{E[X^2]}{E[X]},$$

wobei Gleichheit nur für $Var[X] = 0$ erfüllt ist.

(iii) Für reelle Zahlen x_1, x_2, y_1 und y_2 mit $y_1, y_2 > 0$ gilt:

$$\frac{x_2}{y_2} > \frac{x_1}{y_1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_2}{y_2} > \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} > \frac{x_1}{y_1}.$$

Beweis:

(i) Es gilt nach den Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz von Zufallsvariablen:

$$\begin{array}{rcl} E[X(c - X)] - E[X]E[c - x] & = & E[cX - X^2] - E[X](c - E[X]) \\ & = & cE[X] - E[X^2] - cE[X] + (E[X])^2 \\ & = & -(E[X])^2 + E[X^2] = -Var[X] \leq 0, \\ E[X(X - c)] - E[X]E[X - c] & = & E[X^2 - cX] - E[X](E[X] - c) \\ & = & E[X^2] - cE[X] - (E[X])^2 + cE[X] \\ & = & (E[X])^2 - E[X^2] = Var[X] \geq 0. \end{array}$$

(ii) Mit $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2 \geq 0$ gilt:

$$\begin{array}{rcl} \frac{E[X^2]}{E[X]} & = & \frac{Var[X] + (E[X])^2}{E[X]} \quad = \quad \frac{(E[X])^2}{E[X]} + \frac{Var[X]}{E[X]} \\ & = & E[X] + \underbrace{\frac{Var[X]}{E[X]}}_{\geq 0} \quad \geq \quad E[X]. \end{array}$$

(iii) Hinrichtung: Aus $\frac{x_2}{y_2} > \frac{x_1}{y_1}$ folgt $x_2 > \frac{x_1 y_2}{y_1}$, so dass damit gilt:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_1(1 + y_2/y_1)}{y_1(1 + y_2/y_1)} = \frac{x_1 + \frac{x_1 y_2}{y_1}}{y_1 + y_2} < \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$$

und mit $x_1 < \frac{x_2 y_1}{y_2}$ gilt:

$$\frac{x_2}{y_2} = \frac{x_2(1 + y_1/y_2)}{y_2(1 + y_1/y_2)} = \frac{x_2 + \frac{x_2 y_1}{y_2}}{y_1 + y_2} > \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}.$$

Rückrichtung: Aus $\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2} > \frac{x_1}{y_1}$ folgt $x_1 + x_2 > \frac{x_1}{y_1}(y_1 + y_2) = x_1 + \frac{x_1 y_2}{y_1}$ und damit $x_2 > \frac{x_1 y_2}{y_1}$. Somit gilt:

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_1 \frac{y_2}{y_1}}{y_1 \frac{y_2}{y_1}} = \frac{\frac{x_1 y_2}{y_1}}{y_2} < \frac{x_2}{y_2}.$$

Damit sind alle Aussagen bewiesen.

□

Lemma 4.5 *Seien a und b wie in (3.10) definiert. Dann gilt:*
Die Funktion $R_1(\eta) := \frac{E[(\eta-Z)^+ Z]}{E[(\eta-Z)^+]}$ ist stetig und streng monoton wachsend für jedes $\eta \in (a, +\infty)$. Die Funktion $R_2(\eta) := \frac{E[(Z-\eta)^+ Z]}{E[(Z-\eta)^+]}$ ist stetig und streng monoton wachsend für jedes $\eta \in (-\infty, b)$.[1]

Beweis:
Da a nach (3.11) die größte untere Schranke ist, für die die Wahrscheinlichkeit, dass Z kleiner ist, größer als Null ist, gilt für alle $\eta > a$: $P(Z < \eta) > 0$ und damit $P(\eta - Z > 0) > 0$. Damit ist auch $P((\eta - Z)^+ > 0) > 0$, also ist mit positiver Wahrscheinlichkeit $(\eta - Z)^+$ größer als Null und damit muss ebenfalls für den Erwartungswert gelten: $E[(\eta - Z)^+] > 0$.
Analog gilt für b: Da b nach (3.11) die kleinste obere Schranke ist, für die die Wahrscheinlichkeit, dass Z größer ist, größer als Null ist, gilt für alle $\eta < b$: $P(\eta < Z) > 0$ und damit $P(Z - \eta > 0) > 0$. Damit ist auch $P((Z - \eta)^+ > 0) > 0$, also ist mit positiver Wahrscheinlichkeit $(Z - \eta)^+$ größer als Null und damit muss ebenfalls für den Erwartungswert gelten: $E[(Z - \eta)^+] > 0$. Somit sind $R_1(\eta)$ und $R_2(\eta)$ stetig.
Nun zeigen wir, dass $R_1(\eta)$ streng monoton wachsend ist. Sei dazu $\eta_1 > \eta_2 > a$. Mit der

[1] Hier irren Bielecki et al. Sie behaupten, dass die Funktion $R_2(\eta)$ streng monoton fallend ist (vgl. [3], S. 227), ohne aber den Beweis dafür explizit zu führen.

Rechenregel für den Erwartungswert[2] $E[Z \mid Z < \eta_2] = \frac{E[Z\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}]}{E[\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}]}$ gilt dann:

$$
\begin{aligned}
\frac{E[(\eta_2 - Z)^+ Z]}{E[(\eta_2 - Z)^+]} \quad &= \quad \frac{E[(\eta_2 - Z)Z \mid Z < \eta_2]}{E[(\eta_2 - Z) \mid Z < \eta_2]} \\
&\overset{L.\ 4.4(i)}{\leq} \quad E[Z \mid Z < \eta_2] \;=\; \frac{E[Z\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}]}{E[\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}]} \qquad (4.6)\\
&< \quad \frac{E[\eta_2\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}]}{E[\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}]} \;=\; \frac{\eta_2 E[\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}]}{E[\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}]} \;=\; \eta_2 \\
&\qquad\quad \leq \; \frac{E[(\eta_1 - Z)Z\mathbf{1}_{\{\eta_2 \leq Z \leq \eta_1\}}]}{E[(\eta_1 - Z)\mathbf{1}_{\{\eta_2 \leq Z \leq \eta_1\}}]}.
\end{aligned}
$$

Im besonderen erhalten wir daraus:

$$
\frac{E[(\eta_1 - \eta_2)Z\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}]}{E[(\eta_1 - \eta_2)\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}]} = \frac{(\eta_1 - \eta_2)E[Z\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}]}{(\eta_1 - \eta_2)E[\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}]} = \frac{E[Z\mathbf{1}_{Z<\eta_2\}}]}{E[\mathbf{1}_{Z<\eta_2\}}]} < \frac{E[(\eta_1 - Z)Z\mathbf{1}_{\{\eta_2 \leq Z \leq \eta_1\}}]}{E[(\eta_1 - Z)\mathbf{1}_{\{\eta_1 \leq Z \leq \eta_1\}}]}.
$$

Setze nun

$$
\frac{x_1}{y_1} := \frac{E[(\eta_1 - \eta_2)Z\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}]}{E[(\eta_1 - \eta_2)\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}]} \quad < \quad \frac{E[(\eta_1 - Z)Z\mathbf{1}_{\{\eta_2 \leq Z \leq \eta_1\}}]}{E[(\eta_1 - Z)\mathbf{1}_{\{\eta_2 \leq Z \leq \eta_1\}}]} =: \frac{x_2}{y_2},
$$

so gilt nach Aussage (iii) von Lemma 4.4:

$$
\frac{E[(\eta_1 - \eta_2)Z\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}] + E[(\eta_1 - Z)Z\mathbf{1}_{\{\eta_2 \leq Z \leq \eta_1\}}]}{E[(\eta_1 - \eta_2)\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}] + E[(\eta_1 - Z)\mathbf{1}_{\{\eta_2 \leq Z \leq \eta_1\}}]} \quad > \quad \frac{E[(\eta_1 - \eta_2)Z\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}]}{E[(\eta_1 - \eta_2)\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}]}. \qquad (4.7)
$$

Nun gilt:

$$
\begin{aligned}
\frac{E\{[(\eta_1 - Z)^+ - (\eta_2 - Z)^+]Z\}}{E[(\eta_1 - Z)^+ - (\eta_2 - Z)^+]} \quad &= \quad \frac{E[((\eta_1 - Z) - (\eta_2 - Z))Z\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}} + (\eta_1 - Z)Z\mathbf{1}_{\{\eta_2 \leq Z \leq \eta_1\}}]}{E[((\eta_1 - Z) - (\eta_2 - Z))\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}} + (\eta_1 - Z)\mathbf{1}_{\{\eta_2 \leq Z \leq \eta_1\}}]} \\
&= \quad \frac{E[(\eta_1 - \eta_2)Z\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}] + E[(\eta_1 - Z)Z\mathbf{1}_{\{\eta_2 \leq Z \leq \eta_1\}}]}{E[(\eta_1 - \eta_2)\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}] + E[(\eta_1 - Z)\mathbf{1}_{\{\eta_2 \leq Z \leq \eta_1\}}]} \\
&\overset{(4.7)}{>} \quad \frac{E[(\eta_1 - \eta_2)Z\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}]}{E[(\eta_1 - \eta_2)\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}]} \\
&= \quad \frac{(\eta_1 - \eta_2)E[Z\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}]}{(\eta_1 - \eta_2)E[\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}]} \;=\; \frac{E[Z\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}]}{E[\mathbf{1}_{\{Z<\eta_2\}}]} \\
&\overset{(4.6)}{\geq} \quad \frac{E[(\eta_2 - Z)^+ Z]}{E[(\eta_2 - Z)^+]}. \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Setze nun

$$
\frac{x_1^*}{y_1^*} := \frac{E[(\eta_2 - Z)^+ Z]}{E[(\eta_2 - Z)^+]} \quad < \quad \frac{E\{[(\eta_1 - Z)^+ - (\eta_2 - Z)^+]Z\}}{E[(\eta_1 - Z)^+ - (\eta_2 - Z)^+]} =: \frac{x_2^*}{y_2^*},
$$

[2] vgl. [7], S. 246 und S. 111.

so gilt wieder nach Aussage (iii) von Lemma 4.4:

$$\frac{E[(\eta_2 - Z)^+ Z] + E\{[(\eta_1 - Z)^+ - (\eta_2 - Z)^+]Z\}}{E[(\eta_2 - Z)^+] + E[(\eta_1 - Z)^+ - (\eta_2 - Z)^+]} \quad > \quad \frac{E[(\eta_2 - Z)^+ Z]}{E[(\eta_2 - Z)^+]}. \tag{4.9}$$

Somit gilt nun insgesamt:

$$\begin{aligned}
R_1(\eta_1) \;=\; \frac{E[(\eta_1 - Z)^+ Z]}{E[(\eta_1 - Z)^+]} \quad &= \quad \frac{E[\{(\eta_1 - Z)^+ - (\eta_2 - Z)^+ + (\eta_2 - Z)^+\}Z]}{E[(\eta_1 - Z)^+ - (\eta_2 - Z)^+ + (\eta_2 - Z)^+]} \\
&= \quad \frac{E[(\eta_2 - Z)^+ Z] + E\{[(\eta_1 - Z)^+ - (\eta_2 - Z)^+]Z\}}{E[(\eta_2 - Z)^+] + E[(\eta_1 - Z)^+ - (\eta_2 - Z)^+]} \\
&\overset{(4.9)}{>} \quad \frac{E[(\eta_2 - Z)^+ Z]}{E[(\eta_2 - Z)^+]} \;=\; R_1(\eta_2).
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $R_1(\eta)$ streng monoton wachsend ist.

Schließlich muss noch gezeigt werden, dass $R_2(\eta)$ streng monoton wachsend ist. Sei dazu $\eta_1 < \eta_2 < b$. Mit der Rechenregel für den Erwartungswert[3] $E[Z \mid Z > \eta_2] = \frac{E[Z\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}]}{E[\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}]}$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\frac{E[(Z - \eta_2)^+ Z]}{E[(Z - \eta_2)^+]} \quad &= \quad \frac{E[(Z - \eta_2)Z \mid Z > \eta_2]}{E[(Z - \eta_2) \mid Z > \eta_2]} \\
&\overset{L.\ 4.4(i)}{\geq} \quad E[Z \mid Z > \eta_2] \;=\; \frac{E[Z\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}]}{E[\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}]} \\
&> \quad \frac{E[\eta_2 \mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}]}{E[\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}]} \;=\; \frac{\eta_2 E[\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}]}{E[\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}]} \;=\; \eta_2 \\
&\quad\; \geq \; \frac{E[(Z - \eta_1)Z\mathbf{1}_{\{\eta_1 \leq Z \leq \eta_2\}}]}{E[(Z - \eta_1)\mathbf{1}_{\{\eta_1 \leq Z \leq \eta_2\}}]}.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Im besonderen erhalten wir daraus:

$$\frac{E[(\eta_2 - \eta_1)Z\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}]}{E[(\eta_2 - \eta_1)\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}]} \;=\; \frac{(\eta_2 - \eta_1)E[Z\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}]}{(\eta_2 - \eta_1)E[\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}]} \;=\; \frac{E[Z\mathbf{1}_{Z>\eta_2\}}]}{E[\mathbf{1}_{Z>\eta_2\}}]} \;>\; \frac{E[(Z - \eta_1)Z\mathbf{1}_{\{\eta_1 \leq Z \leq \eta_2\}}]}{E[(Z - \eta_1)\mathbf{1}_{\{\eta_1 \leq Z \leq \eta_2\}}]}.$$

Setze nun

$$\frac{\hat{x}_2}{\hat{y}_2} := \frac{E[(\eta_2 - \eta_1)Z\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}]}{E[(\eta_2 - \eta_1)\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}]} \;>\; \frac{E[(Z - \eta_1)Z\mathbf{1}_{\{\eta_1 \leq Z \leq \eta_2\}}]}{E[(Z - \eta_1)\mathbf{1}_{\{\eta_1 \leq Z \leq \eta_2\}}]} =: \frac{\hat{x}_1}{\hat{y}_1},$$

so gilt nach Aussage (iii) von Lemma 4.4:

$$\frac{E[(\eta_2 - \eta_1)Z\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}] + E[(Z - \eta_1)Z\mathbf{1}_{\{\eta_1 \leq Z \leq \eta_2\}}]}{E[(\eta_2 - \eta_1)\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}] + E[(Z - \eta_1)\mathbf{1}_{\{\eta_1 \leq Z \leq \eta_2\}}]} \;<\; \frac{E[(\eta_2 - \eta_1)Z\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}]}{E[(\eta_2 - \eta_1)\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}]}. \tag{4.11}$$

[3] vgl. [7], S. 246 und S. 111.

Nun gilt:

$$
\begin{aligned}
\frac{E\{[(Z-\eta_1)^+ - (Z-\eta_2)^+]Z\}}{E[(Z-\eta_1)^+ - (Z-\eta_2)^+]} &= \frac{E[((Z-\eta_1)-(Z-\eta_2))Z\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}} + (Z-\eta_1)Z\mathbf{1}_{\{\eta_1\le Z\le\eta_2\}}]}{E[((Z-\eta_1)-(Z-\eta_2))\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}} + (Z-\eta_1)\mathbf{1}_{\{\eta_1\le Z\le\eta_2\}}]} \\
&= \frac{E[(\eta_2-\eta_1)Z\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}] + E[(Z-\eta_1)Z\mathbf{1}_{\{\eta_1\le Z\le\eta_2\}}]}{E[(\eta_2-\eta_1)\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}] + E[(Z-\eta_1)\mathbf{1}_{\{\eta_1\le Z\le\eta_2\}}]} \\
&\overset{(4.11)}{<} \frac{E[(\eta_2-\eta_1)Z\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}]}{E[(\eta_2-\eta_1)\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}]} \\
&= \frac{(\eta_2-\eta_1)E[Z\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}]}{(\eta_2-\eta_1)E[\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}]} = \frac{E[Z\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}]}{E[\mathbf{1}_{\{Z>\eta_2\}}]} \\
&\overset{(4.10)}{\le} \frac{E[(Z-\eta_2)^+Z]}{E[(Z-\eta_2)^+]}
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Setze nun

$$
\frac{\hat{x}_2^*}{\hat{y}_2^*} := \frac{E[(Z-\eta_2)^+Z]}{E[(Z-\eta_2)^+]} > \frac{E\{[(Z-\eta_1)^+ - (Z-\eta_2)^+]Z\}}{E[(Z-\eta_1)^+ - (Z-\eta_2)^+]} =: \frac{\hat{x}_1^*}{\hat{y}_1^*},
$$

so gilt wieder nach Aussage (iii) von Lemma 4.4:

$$
\frac{E[(Z-\eta_2)^+Z] + E\{[(Z-\eta_1)^+ - (Z-\eta_2)^+]Z\}}{E[(Z-\eta_2)^+] + E[(Z-\eta_1)^+ - (Z-\eta_2)^+]} < \frac{E[(Z-\eta_2)^+Z]}{E[(Z-\eta_2)^+]}. \tag{4.13}
$$

Somit gilt nun insgesamt:

$$
\begin{aligned}
R_2(\eta_1) = \frac{E[(Z-\eta_1)^+Z]}{E[(Z-\eta_1)^+]} &= \frac{E[\{(Z-\eta_1)^+ - (Z-\eta_2)^+ + (Z-\eta_2)^+\}Z]}{E[(Z-\eta_1)^+ - (Z-\eta_2)^+ + (Z-\eta_2)^+]} \\
&= \frac{E[(Z-\eta_2)^+Z] + E\{[(Z-\eta_1)^+ - (Z-\eta_2)^+]Z\}}{E[(Z-\eta_2)^+] + E[(Z-\eta_1 Z)^+ - (Z-\eta_2)^+]} \\
&\overset{(4.13)}{<} \frac{E[(Z-\eta_2)^+Z]}{E[(Z-\eta_2)^+]} = R_2(\eta_2).
\end{aligned}
$$

Damit ist ebenfalls gezeigt, dass $R_2(\eta)$ streng monoton wachsend ist.

□

Nun wollen wir die Wertemengen der Funktionen $R_1(\cdot)$ und $R_2(\cdot)$ bestimmen.

Lemma 4.6 *Für die Wertemengen der Funktionen $R_1(\eta)$ und $R_2(\eta)$ können wir folgende Intervalle angeben:*

$$
\begin{aligned}
\{R_1(\eta):\ \eta > a\} &= (a, E[Z]), & (4.14)\\
\{R_2(\eta):\eta < 0\} &= \left(E[Z], \frac{E[Z^2]}{E[Z]}\right), & (4.15)\\
\{R_2(\eta):\ 0 \le \eta < b\} &= \left[\frac{E[Z^2]}{E[Z]}, b\right). & (4.16)
\end{aligned}
$$

Beweis:
Nach der Eigenschaft (3.11) von a gilt: $P(Z < a) = 0$. Also ist $Z \geq a \geq 0$ f.s. Somit gilt für alle $\eta > a$:

$$R_1(\eta) = \frac{E[(\eta - Z)^+ Z]}{E[(\eta - Z)^+]} \geq \frac{E[(\eta - Z)^+ a]}{E[(\eta - Z)^+]} = \frac{aE[(\eta - Z)^+]}{E[(\eta - Z)^+]} = a. \tag{4.17}$$

Weiter gilt:

$$E[(\eta - Z)^+ Z] \leq E[(\eta - Z)^+ \eta] = \eta E[(\eta - Z)^+],$$

da für $Z \geq \eta$ stets $(\eta - Z)^+ = 0$ gilt.
Daraus ergibt sich ebenfalls:

$$R_1(\eta) = \frac{E[(\eta - Z)^+ Z]}{E[(\eta - Z)^+]} \leq \frac{E[(\eta - Z)^+ \eta]}{E[(\eta - Z)^+]} = \frac{\eta E[(\eta - Z)^+]}{E[(\eta - Z)^+]} = \eta, \ \forall \ \eta > a. \tag{4.18}$$

Aus (4.17) und (4.18) ergibt sich nun durch die Stetigkeit von $R_1(\eta)$:

$$\lim_{\eta \to a+} R_1(\eta) = a. \tag{4.19}$$

Angenommen, es gebe ein $\eta^* > a$ mit $R_1(\eta^*) = a$ und sei $a < \eta^{**} < \eta^*$. Dann gilt wegen Lemma 3.2 und (4.17): $a \leq R_1(\eta^{**}) < R_1(\eta^*) = a$. Ein Widerspruch!
Dies impliziert $R_1(\eta) > a, \ \forall \ \eta > a$.
Für die obere Schranke gilt nun:

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \to +\infty} R_1(\eta) &= \lim_{\eta \to +\infty} \tfrac{E[(\eta - Z)^+ Z]}{E[(\eta - Z)^+]} = \lim_{\eta \to +\infty} \tfrac{E[\eta(1 - Z/\eta)^+ Z]}{E[\eta(1 - Z/\eta)^+]} \\ &= \lim_{\eta \to +\infty} \tfrac{\eta E[(1 - Z/\eta)^+ Z]}{\eta E[(1 - Z/\eta)^+]} = \lim_{\eta \to +\infty} \tfrac{E[(1 - Z/\eta)^+ Z]}{E[(1 - Z/\eta)^+]} = E[Z]. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Aus (4.19) und (4.20) ergibt sich nun mit der Stetigkeit und des streng monotonen Anstiegs von $R_1(\eta)$ (Lemma 4.5) die Aussage (4.14).

Kommen wir nun zur zweiten Aussage: Wir wissen, dass $Z \geq 0$ f.s. Somit gilt für jedes $\eta < 0$: $E[(Z - \eta)^+ Z] = E[(Z - \eta) Z]$ und $E[(Z - \eta)^+] = E[(Z - \eta)]$.
Damit können wir den Grenzwert von $R_2(\eta)$ für $\eta \to -\infty$ bestimmen:

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \to -\infty} R_2(\eta) &= \lim_{\eta \to -\infty} \tfrac{E[(Z - \eta)^+ Z]}{E[(Z - \eta)^+]} = \lim_{\eta \to -\infty} \tfrac{E[(Z - \eta) Z]}{E[Z - \eta]} \\ &= \lim_{\eta \to -\infty} \tfrac{E[Z^2 - \eta Z]}{E[Z - \eta]} = \lim_{\eta \to -\infty} \tfrac{E[Z^2] - \eta E[Z]}{E[Z] - \eta} \\ &= \lim_{\eta \to -\infty} \tfrac{-\eta(E[Z] - E[Z]/\eta)}{-\eta(1 - E[Z]/\eta)} = \lim_{\eta \to -\infty} \tfrac{E[Z] - E[Z]/\eta}{1 - E[Z]/\eta} = E[Z]. \end{aligned}$$

Mit

$$R_2(0) = \frac{E[(Z-0)^+ Z]}{E[(Z-0)^+]} = \frac{E[Z \cdot Z]}{E[Z]} = \frac{E[Z^2]}{E[Z]} \tag{4.21}$$

und der Aussage von Lemma 4.5 ergibt sich Aussage (4.15) .

Nun bestimmen wir noch die obere Schranke von $R_2(\eta)$: Nach der Eigenschaft (3.11) von b gilt: $P(Z > a) = 0$. Also ist $Z \leq b \geq 0$ f.s. Somit gilt für alle $\eta < b$:

$$R_2(\eta) = \frac{E[(Z-\eta)^+ Z]}{E[(Z-\eta)^+]} \leq \frac{E[(Z-\eta)^+ b]}{E[(Z-\eta)^+]} = \frac{bE[(Z-\eta)^+]}{E[(Z-\eta)^+]} = b. \tag{4.22}$$

Weiter gilt:

$$E[(Z-\eta)^+ Z] \geq E[(Z-\eta)^+ \eta] = \eta E[(\eta - Z)^+],$$

da für $Z \leq \eta$ stets $(Z-\eta)^+ = 0$ gilt.
Daraus ergibt sich ebenfalls:

$$R_2(\eta) = \frac{E[(Z-\eta)^+ Z]}{E[(Z-\eta)^+]} \geq \frac{E[(Z-\eta)^+ \eta]}{E[(Z-\eta)^+]} = \frac{\eta E[(Z-\eta)^+]}{E[(Z-\eta)^+]} = \eta, \ \forall\, \eta < b. \tag{4.23}$$

Aus (4.22) und (4.23) ergibt sich nun durch die Stetigkeit von $R_2(\eta)$:

$$\lim_{\eta \to b-} R_2(\eta) = b. \tag{4.24}$$

Angenommen, es gebe ein $\eta^* < b$ mit $R_2(\eta^*) = b$ und sei $\eta^* < \eta^{**} < b$. Dann gilt wegen Lemma 4.5 und (4.22): $b = R_2(\eta^*) < R_2(\eta^{**}) \leq b$. Ein Widerspruch!
Dies impliziert $R_2(\eta) < b, \ \forall\, \eta < b$.
Damit und mit (4.24) sowie (4.21) haben wir die Aussage (4.16) gezeigt.

□

4.3 Existenz und Eindeutigkeit der Multiplikatoren

Nun können wir die Kernaussage dieses Kapitels, dass es eine eindeutige Lösung des Gleichungssystems (4.5) gibt, formulieren und beweisen. Dies impliziert zugleich die Eindeutigkeit der Lagrange-Multiplikatoren. Zugleich können wir angeben, ob die Multiplikatoren positiv oder negativ sind.

Theorem 4.7 (Eindeutigkeit) *Das Gleichungssystem* (4.5) *hat eine eindeutige Lösung* (λ, μ) *für jedes* $x_0 > 0$ *und* $z > 0$*, die die Bedingung* $a < \frac{x_0}{z} < b$ *erfüllen. Für* λ *und* μ *gilt insbesondere:*

(i) $\frac{x_0}{z} = E[Z] \ \Rightarrow\ \lambda = z,\ \mu = 0;$

(ii) $a < \frac{x_0}{z} < E[Z] \;\Rightarrow\; \lambda > 0,\; \mu > 0;$

(iii) $\frac{E[Z^2]}{E[Z]} \leq \frac{x_0}{z} < b \;\Rightarrow\; \lambda \leq 0,\; \mu < 0;$

(iv) $E[Z] < \frac{x_0}{z} < \frac{E[Z^2]}{E[Z]} \;\Rightarrow\; \lambda > 0,\; \mu < 0.$

Beweis:
Für $Z := c \in \mathbb{R}$ *const.* gilt: $E[Z^2] = (E[Z])^2 \Rightarrow Var[Z] = 0$. Damit würde allerdings nach (3.10) gelten: $a = b$, was im Widerspruch zu den Voraussetzungen des Theorems steht. Daher gilt: $E[Z^2] > (E[Z])^2$.
Weiter gilt: Setzen wir $Y = 1$, so erhalten wir für $a = E[Z]$; für $Y = Z$ ist $b = \frac{E[Z^2]}{(E[Z])^2}$. Damit und nach Aussage (ii) von Lemma 4.4 gilt:

$$a \leq E[Z] < \frac{E[Z^2]}{(E[Z])^2} \leq b.$$

Betrachten wir nun unsere einzelnen Fälle:

(i) Sei $\frac{x_0}{z} = E[Z] \Leftrightarrow x_0 = zE[Z]$, so löst $(\lambda^*, \mu^*) = (z, 0)$ das Gleichungssystem (4.5):

$$\begin{cases} E[(\lambda^* - \mu^* Z)^+] &= E[(z - 0 \cdot Z)^+] &= E[z] &= z, \\ E[(\lambda^* - \mu^* Z)^+ Z] &= E[(z - 0 \cdot Z)^+ Z] &= zE[Z] &= x_0. \end{cases}$$

Für die Fälle (ii) bis (iv) mit $\mu \neq 0$ gilt allgemein: Sei das Paar (λ^*, μ^*) Lösung des Gleichungssystems (4.5) und sei $\mu^* > 0$, so löst das Paar $(\eta, \mu) := (\frac{\lambda^*}{\mu^*}, \mu^*)$ das Gleichungsystem:

$$\begin{cases} E[(\eta - Z)^+] &= \frac{z}{\mu}, \\ \frac{E[(\eta - Z)^+ Z]}{E[(\eta - Z)^+]} &= \frac{x_0}{z}. \end{cases} \tag{4.25}$$

Sei andererseits $\mu^* < 0$, so löst das Paar $(\eta, \mu) := (\frac{\lambda^*}{\mu^*}, \mu^*)$ das Gleichungssystem:

$$\begin{cases} E[(Z - \eta)^+] &= -\frac{z}{\mu}, \\ \frac{E[(Z - \eta)^+ Z]}{E[(Z - \eta)^+]} &= \frac{x_0}{z}. \end{cases} \tag{4.26}$$

(ii) Nun sei $a < \frac{x_0}{z} < E[Z]$. Nach Aussage (i) von Lemma 4.6 hat die zweite Gleichung von (4.25) eine eindeutige (vgl. Lemma 4.5) Lösung $\eta^* > a \geq 0$ und nach Aussage (ii) von Lemma 4.6 hat das Gleichungssystem (4.26) keine Lösung, da $R_2(\eta) = \frac{E[(Z-\eta)^+ Z]}{E[(Z-\eta)^+]} > E[Z] > \frac{x_0}{z},\ \forall\, \eta \in (-\infty, b)$, gilt. Setze nun

$$\mu^* := \frac{z}{\underbrace{E[(\eta^* - Z)^+]}_{>0,\ \text{(Lemma 4.5)}}} > 0, \quad \lambda^* := \eta^* \mu^* > 0,$$

so ist (λ^*, μ^*) die eindeutige Lösung von (4.5):

$$\begin{array}{rcccl}
E[(\lambda^* - \mu^* Z)^+] & = & E[(\eta^*\mu^* - \mu^* Z)^+] & = & \mu^* E[(\eta^* - Z)^+] \\
& = & \frac{z}{E[(\eta^*-Z)^+]} \cdot E[(\eta^* - Z)^+] & = & z, \\
E[(\lambda^* - \mu^* Z)^+ Z] & = & E[(\eta^*\mu^* - \mu^* Z)^+ Z] & = & \mu^* E[(\eta^* - Z)^+ Z] \\
& = & \frac{z}{E[(\eta^*-Z)^+]} \cdot E[(\eta^* - Z)^+] & \overset{(4.25)}{=} & z \cdot \frac{x_0}{z} \; = \; x_0.
\end{array}$$

(iii) Sei $\frac{E[Z^2]}{E[Z]} \leq \frac{x_0}{z} < b$. Nach Aussage (iii) von Lemma 4.6 hat die zweite Gleichung von (4.26) eine eindeutige Lösung $\eta^* \geq 0$ und nach Aussage (i) von Lemma 4.6 hat das Gleichungssystem (4.25) keine Lösung, da $R_1(\eta) = \frac{E[(\eta-Z)^+ Z]}{E[(\eta-Z)^+]} < E[Z] < \frac{E[Z^2]}{E[Z]} \leq \frac{x_0}{z}$, $\forall\, \eta \in (a, +\infty)$, gilt. Setze nun

$$\mu^* := -\frac{z}{E[(Z-\eta^*)^+]} < 0, \quad \lambda^* := \eta^*\mu^* \leq 0,$$

so ist (λ^*, μ^*) die eindeutige Lösung von (4.5):

$$\begin{array}{rcccl}
E[(\lambda^* - \mu^* Z)^+] & = & E[(\eta^*\mu^* - \mu^* Z)^+] & = & -\mu^* E[(Z - \eta^*)^+] \\
& = & \frac{z}{E[(Z-\eta^*)^+]} \cdot E[(Z - \eta^*)^+] & = & z, \\
E[(\lambda^* - \mu^* Z)^+ Z] & = & E[(\eta^*\mu^* - \mu^* Z)^+ Z] & = & -\mu^* E[(Z - \eta^*)^+ Z] \\
& = & \frac{z}{E[(Z-\eta^*)^+]} \cdot E[(Z - \eta^*)^+] & \overset{(4.26)}{=} & z \cdot \frac{x_0}{z} \; = \; x_0.
\end{array}$$

(iv) Sei $E[Z] < \frac{x_0}{z} < \frac{E[Z^2]}{E[Z]}$. Nach Aussage (ii) von Lemma 4.6 hat die zweite Gleichung von (4.26) eine eindeutige Lösung $\eta^* < 0$ und nach Aussage (i) von Lemma 4.6 hat das Gleichungssystem (4.25) keine Lösung, da $R_1(\eta) = \frac{E[(\eta-Z)^+ Z]}{E[(\eta-Z)^+]} < E[Z] < \frac{x_0}{z}$, $\forall\, \eta \in (a, +\infty)$, gilt. Setze nun

$$\mu^* := -\frac{z}{E[(Z-\eta^*)^+]} < 0, \quad \lambda^* := \eta^*\mu^* > 0,$$

so ist (λ^*, μ^*) die eindeutige Lösung von (4.5):

$$\begin{array}{rcccl}
E[(\lambda^* - \mu^* Z)^+] & = & E[(\eta^*\mu^* - \mu^* Z)^+] & = & -\mu^* E[(Z - \eta^*)^+] \\
& = & \frac{z}{E[(Z-\eta^*)^+]} \cdot E[(Z - \eta^*)^+] & = & z, \\
E[(\lambda^* - \mu^* Z)^+ Z] & = & E[(\eta^*\mu^* - \mu^* Z)^+ Z] & = & -\mu^* E[(Z - \eta^*)^+ Z] \\
& = & \frac{z}{E[(Z-\eta^*)^+]} \cdot E[(Z - \eta^*)^+] & \overset{(4.26)}{=} & z \cdot \frac{x_0}{z} \; = \; x_0.
\end{array}$$

□

Obwohl wir damit die eindeutige Lösung des Gleichungssystems (4.5) noch nicht exakt bestimmen können, können wir allerdings noch eine weitere Aussage über die Eigenschaften der Lagrange-Multiplikatoren λ und μ treffen. Die Aussage, dass sie vom Anfangskapital x_0 und vom erwarteten Ertrag z mit bestimmt werden, können wir noch weiter präzisieren.

Bemerkung 4.8 (Homogenität) Die Lagrange-Multiplikatoren sind homogen. Denn es gilt folgendes: Seien $x_0 > 0$ und $z > 0$ gegeben. Seien $\lambda^* = \lambda^*(x_0, z)$ und $\mu^* = \mu^*(x_0, z)$ die eindeutigen Lösungen des Gleichungssystems (4.5). Nun suchen wir die eindeutigen Lösungen $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(1, \frac{z}{x_0})$ und $\hat{\mu} = \hat{\mu}(1, \frac{z}{x_0})$ des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{cases} E[(\lambda - \mu Z)^+] &= \frac{z}{x_0}, \\ E[(\lambda - \mu Z)^+ Z] &= 1. \end{cases}$$

Durch Umformungen ergibt sich:

$$\begin{cases} x_0 \cdot E[(\lambda - \mu Z)^+] &= z, \\ x_0 \cdot E[(\lambda - \mu Z)^+ Z] &= x_0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E[(x_0\lambda - x_0\mu Z)^+] &= z, \\ E[(x_0\lambda - x_0\mu Z)^+ Z] &= x_0. \end{cases}$$

Da das Paar (λ^*, μ^*) das Gleichungssystem (4.5) löst, muss damit gelten: $\lambda^* = x_0\hat{\lambda}$ und $\mu^* = x_0\hat{\mu}$, oder allgemein:

$$\lambda(x_0, z) = x_0\lambda\left(1, \frac{z}{x_0}\right) \qquad \text{und} \qquad \mu(x_0, z) = x_0\mu\left(1, \frac{z}{x_0}\right).$$

Dies bedeutet, dass die Lösung des Gleichungssystems (4.5) insbesondere von dem Quotienten $\frac{z}{x_0}$ abhängt, also vom erwarteten relativen Gewinn des Marktteilnehmers, ganz gleich, von welchem Anfangskapital er startet.

Bemerkung 4.9 (Der Fall von nichtlinearen Vermögensgleichungen) Bisher haben wir bei unseren Untersuchungen stets den Fall der linearen Vermögensgleichungen betrachtet. Allerdings kann man auch annehmen, dass sich die Vermögensgleichungen nicht linear verhalten. Betrachten wir zum Beispiel den Fall eines sehr großen Investors. Hier sind die Preisprozesse $S_i(\cdot)$, $i = 0, \ldots, d$, für $d + 1$ Anleihen gegeben durch:[4]

$$\begin{aligned} dS_0(t) &= S_0(t)\left[r(t) + l_0(X(t), \pi(t))\right] dt, \quad S_0(0) \;=\; s_0; \\ dS_i(t) &= S_i(t)\left[(b_i(t) + l_i(X(t), \pi(t)))dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t) dW(t)\right], \quad S_i(0) \;=\; s_i \;>\; 0, \end{aligned}$$

wobei die Funktionen $l_i : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $i = 0, \ldots, d$, gegebene beschränkte Funktionen sind, die die Auswirkungen des Vermögens und der Handelsstrategie beschreiben. Sei der Vermögensprozess $x(\cdot)$ über die stochastische Differentialgleichung wie in (2.10) beschrieben, so gilt in diesem Fall:

$$f(x(t), \sigma(t)'\pi(t), t) = -r(t)x(t) - (x(t) - \pi(t)'\mathbf{1})l_0(x(t), \pi(t)) - \pi(t)'\left[b(t) - r(t)\mathbf{1} + l(x(t), \pi(t))\right].$$

Mit ähnlichem Vorgehen wie in dieser Arbeit beschrieben, kann auch das optimale Vermögen sowie das optimale Portfolio für die Optimierung unter nichtlinearen Vermögensgleichungen bestimmt werden. Für genauere Betrachtungen sei dazu auf das Paper [8] verwiesen.

[4] vgl. [8], a.a.O., S. 92.

Kapitel 5

Effiziente Portfolios und die effiziente Grenze

Während wir im dritten Kapitel varianzminimierende Portfolios betrachtet haben, wenden wir uns nun den *effizienten Portfolios* für das Mean-Variance Optimierungsproblem zu. Diese unterscheiden sich zu den ersteren dadurch, dass das erwartete Endvermögen als eine Konstante nicht vorausgesetzt wird, sondern dass zu diesem Vermögens zum Zeitpunkt T gleichzeitig der Erwartungswert maximiert und die Varianz minimiert wird.
In einem zweiten Abschnitt wenden wir uns noch spezieller der Optimierung eines Portfolios zu, bei dem die Bedingung des Insolvenzverbotes des Investors insofern verschärft wird, dass das Vermögen zu jedem Zeitpunkt $t \in [0, T]$ über einer gewissen Untergrenze oder *Benchmark* liegen muss.

Generell soll in diesem Kapitel gelten, dass das Anfangskapital $x_0 > 0$ fest gewählt ist.

5.1 Definition und Eigenschaften

Zuerst beschreiben wir das Optimierungsproblem eines Mean-Variance-Portfolios allgemein. Analog zu Definition 3.4 definieren wir:

Definition 5.1 (Effizientes Portfolio) *Das Problem des optimalen Mean-Variance-Portfolios ist wie folgt formuliert:*

$$(J_1(\pi(\cdot)), J_2(\pi(\cdot))) \;:=\; (Var[x(T)], -E[x(T)]) \;\longrightarrow\; \min,$$

$$\textit{unter den Bedinungen} \begin{cases} X(T) \geq 0, \quad \textit{f.s.}, \\ \pi(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0; T; \mathbb{R}^m), \\ (x(\cdot), \pi(\cdot)) \; \textit{erfüllt Gleichung (2.7)}. \end{cases} \tag{5.1}$$

Ein zulässiges Portfolio $\pi^*(\cdot)$ heißt **effizientes Portfolio***, wenn kein anderes zulässiges*

Portfolio $\pi(\cdot)$ *existiert, das* (5.1) *erfüllt, so dass gilt:*

$$J_1(\pi(\cdot)) \leq J_1(\pi^*(\cdot)) \quad \textit{und} \quad J_2(\pi(\cdot)) \leq J_2(\pi^*(\cdot)),$$

wobei mindestens eine Ungleichung echt sein muss.
$(J_1(\pi^*(\cdot)), J_2(\pi^*(\cdot)))$ *heißt* **effizienter Punkt**. *Die Menge aller effizienten Punkte heißt* **effiziente Grenze**.

Die Beziehung zu den varianzminierenden Ausdrücken aus dem dritten Kapitel sind offensichtlich und werden in folgender Bemerkung festgehalten.

Bemerkung 5.2 Die Definition besagt, dass eine effiziente Grenze eine Teilmenge der entsprechenden varianzminimierenden Grenze ist. Dementsprechend sind alle effizienten Portfolios varianzminimierende Portfolios. Somit gilt folgendes: ein varianzminimierendes Portfolio $\tilde{\pi}_z$ mit dem Erwartungswert z heißt effizient, wenn sein Wert ebenso maximiert wird, d.h. dass für den Vermögensprozess x^π aller Portfolios π gilt: $E[x^\pi] \leq E[x^{\tilde{\pi}_z}]$, wobei die Portfolios folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{cases} x^\pi(T) \geq 0, \quad \text{f.s.}, \\ \pi(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0;T;\mathbb{R}^m), \\ (x^\pi(\cdot), \pi(\cdot)) \text{ erfüllt Gleichung (2.7)}, \\ Var[x^\pi(T)] = Var[x^{\tilde{\pi}_z}(T)] \end{cases}$$

Nun wollen wir zu unserem varianzminimierenden Portfolio (3.4) die optimale Handelsstrategie $\pi^*(\cdot)$ beschreiben, die uns das optimale Endvermögen $x^*(T) = (\lambda - \mu\rho(T))^+$ liefert.

Theorem 5.3 (Optimale Handelsstrategie) *Das eindeutige varianzminimierende Portfolio zum Optimierungsproblem* (3.4) *in Abhängigkeit von* $z > 0$ *mit* $a < \frac{x_0}{z} < b$ *ist gegeben durch*

$$\pi^*(t) \quad = \quad (\sigma(t)')^{-1} z^*(t), \tag{5.2}$$

wobei das Paar $(x^*(\cdot), z^*(\cdot))$ *die eindeutige Lösung der der BSDE*

$$\begin{cases} dx(t) &= [r(t)x(t) + \theta(t)z(t)]dt + z(t)'dW(t), \\ x(T) &= (\lambda - \mu\rho(T))^+ \end{cases} \tag{5.3}$$

ist. Hierbei ist das Paar (λ, μ) *die Lösung des Gleichungssystems* (4.3).

Beweis:
Wir zeigen, dass $(x^*(\cdot), \pi^*(\cdot))$ die Gleichung (2.8) mit $X^* = (\lambda - \mu\rho(T))^+$ erfüllt:

$$\begin{aligned}
dx^*(t) &\overset{(2.8)}{=} [r(t)x^*(t) + \theta(t)z^*(t)]dt + z^*(t)'dW(t) \\
&\overset{(5.2)}{=} [r(t)x^*(t) + \theta(t)\sigma(t)'\pi^*(t)]dt + (\sigma(t)'\pi^*(t))'dW(t) \\
&\overset{(2.6)}{=} [r(t)x^*(t) + B(t)(\sigma(t)')^{-1}\sigma(t)'\pi^*(t)]dt + (\pi^*(t))'\sigma(t)dW(t) \\
&= [r(t)x^*(t) + B(t)\pi^*(t)]dt + (\pi^*(t))'\sigma(t)dW(t) \\
x^*(T) &\overset{(5.3)}{=} (\lambda - \mu\rho(T))^+ \ = \ X^*
\end{aligned}$$

Nach Theorem 4.2 gilt: Da das Paar (λ, μ) das Gleichungssystem (4.3) erfüllt, ist $X^* = (\lambda - \mu\rho(T))^+$ eine optimale Lösung des Problems (3.6) und nach Theorem 3.5 muss $\pi^*(\cdot)$ auch optimal für das Problem (3.4) sein.

□

Nach Definition 2.6(i) repliziert das optimale Portfolio somit den contingent claim $(\lambda - \mu\rho(T))^+$. Eine explizite Bestimmung des Portfolios ist nur bei deterministischen Marktkoeffizienten möglich, was wir im folgenden Kapitel genauer untersuchen.
Ein Sonderfall ergibt sich, wenn das erwartete Endvmögen $E[x(T)]$ genau den Wert $\frac{x_0}{E[\rho(T)]}$ entspricht. Dann ist es für den Agenten optimal, sein gesamtes Vermögen in das Bankkonto zu investieren, wie das folgende Theorem besagt.

Theorem 5.4 (Risikofreies Portfolio) *Das varianzminimierende Portfolio in Abhängigkeit von $z = \frac{x_0}{E[\rho(T)]}$ ist ein risikofreies Portfolio.*

Beweis:
Nach Aussage (i) von Theorem 4.7 gilt für $z = \frac{x_0}{E[\rho(T)]} \Leftrightarrow \frac{x_0}{z} = E[\rho(T)]$ für die Multiplikatoren: $\lambda = z$ und $\mu = 0$. Damit gilt nach der Aussage von Theorem 5.3 für das Vermögen $x(\cdot)$ zum Zeitpunkt T: $x(T) = (\lambda - \mu\rho(T))^+ = \lambda = z$. Da z gegeben ist, ist das Portfolio somit risikofrei.

□

Bemerkung 5.5 Auch wenn alle Marktkoeffizienten stochastisch sind, existiert das risikofreie Portfolio $\pi_0(\cdot)$. Hier gilt: $\pi_0(T) = N_0(T)S_0(T)$ und die Auszahlung $\frac{x_0}{E[\rho(T)]}$ ist gesichert. eine andere Interpretation ist die folgende: Nach Gleichung (3.3) gilt: $x(0) = x_0 = S_0(0)E[S_0(T)^{-1}x(T)|\mathcal{F}_0] = s_0E[S_0(T)^{-1}z]$. Dies bedeutet, dass das Anfangsvermögen des Agenten gleich dem erwarteten Wert von z Einheiten eines sicheren Cash Flows zum Zeitpunkt T ist. Da der Markt nach Voraussetzung vollständig ist, muss es ein Portfolio geben, das diesen Cash Flow repliziert. Dies ist das Portfolio $\pi_0(\cdot)$.
Durch die Existenz eines risikofreien Portfolios mit sicherer Auszahlung $\frac{x_0}{E[\rho(T)]}$ ist klar, dass für das Optimierungsproblem (3.4) das erwartete Endvermögen $z \geq \frac{x_0}{E[\rho(T)]}$ sein muss. Andererseits gilt nach Proposition 3.11, dass es für $z > \frac{x_0}{a}$ keine Lösung dieses Optimierungsproblems gibt. Somit muss für das erwartete Endvermögen gelten: $\frac{x_0}{E[\rho(T)]} \leq z < \frac{x_0}{a}$ bzw. im

Fall von deterministischen Marktkoeffizienten: $z \in \left[x_0 e^{\int_0^T r(s)ds}, +\infty\right)$.

Für die eben beschriebenen Werte von z wollen wir nun das varianzminimierende Portfolio genauer spezifizieren.

Proposition 5.6 *Sei z so, dass $\frac{x_0}{E[\rho(T)]} \leq z < \frac{x_0}{a}$. Das eindeutige varianzminimierende Portfolio von (3.4) ist ein replizierendes Portfolio für eine europäische Put-Option auf eine fiktive Anlage $\mu\rho(\cdot)$ mit Ausübungspreis $\lambda > 0$ und Laufzeit T.*

Beweis:
Es gilt:

$$\frac{x_0}{E[\rho(T)]} \leq z < \frac{x_0}{a} \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{x_0} < \frac{1}{z} \leq \frac{E[\rho(T)]}{x_0} \;\Leftrightarrow\; a < \frac{x_0}{z} \leq E[\rho(T)].$$

Nach der zweiten Aussage von Theorem 4.7 sind also $\lambda > 0$ und $\mu > 0$.
Nun gilt nach Theorem 5.3, dass das einzige varianzminimierende Portfolio für $z > 0$ durch $\pi^*(t) = (\sigma(t)')^{-1} z^*(t)$ gegeben ist, wobei das Paar $(x^*(\cdot), z^*(\cdot))$ die eindeutige Lösung der BSDE (5.3) ist. Nach Definition 2.11 beschreibt dabei $X(T) = (\lambda - \mu\rho(T))^+$ den Preis einer europäischen Put-Option einer fiktiven Anleihe $\mu\rho(\cdot)$ zum Zeitpunkt T, die einen Ausübungspreis von λ hat.

□

Nun wollen wir von den Ergebnissen für das optimale varianzminimierende Portfolio auf die Bestimmung der effizienten Grenze schließen. Dazu benötigen wir zuerst folgenden Hilfssatz.

Lemma 5.7 (Monotonie der Varianz) *Sei $J_1^*(z) = Var[x^*(T)]$ der minimale Wert für das Optimierungsproblem (3.4) in Abhängigkeit von $z > 0$ mit $a < \frac{x_0}{z} < b$. Dann gilt: $J_1^*(z)$ ist streng monoton wachsend für $z \in \left[\frac{x_0}{E[\rho(T)]}, \frac{x_0}{a}\right)$ und streng monoton fallend für $z \in \left(\frac{x_0}{b}, \frac{x_0}{E[\rho(T)]}\right]$.*

Beweis:
Wir untersuchen zunächst den ersten Fall: Wähle z_1 und z_2 so, dass gilt: $\frac{x_0}{E[\rho(T)]} =: z_0 \leq z_1 < z_2 < \frac{x_0}{a}$. Es bezeichne $x_i^*(\cdot)$ den optimalen Vermögensprozess des Problems (3.4), der zu z_i, $i = 0, 1, 2$, gehört. Nun gilt für z_1:

$$\begin{aligned}
z_1 &= z_1 \frac{z_2 - z_0}{z_2 - z_0} = \frac{z_1 z_2 - z_0 z_1}{z_2 - z_0} &&= \frac{z_1 z_2 - z_0 z_2 + z_0 z_2 - z_0 z_1}{z_2 - z_0} \\
&= \frac{z_1 z_2 - z_0 z_2 + (z_2 - z_1) z_0}{z_2 - z_0} &&= \frac{(z_1 - z_0) z_2 + (z_2 - z_0 - z_1 + z_0) z_0}{z_2 - z_0} \\
&= \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} z_2 + \left(\frac{z_2 - z_0}{z_2 - z_0} - \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}\right) z_0 &&= \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} z_2 + \left(1 - \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0}\right) z_0.
\end{aligned}$$

Mit $k := \frac{z_1 - z_0}{z_2 - z_0} z_2 \in [0,1)$ gilt somit:

$$z_1 = kz_2 + (1-k)z_1.$$

Wir definieren

$$\tilde{x}(t) \;:=\; kx_2^*(t) + (1-k)x_0^*(t), \qquad \forall\, t \in [0,T].$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
E[\tilde{x}(T)] &= kE[x_2^*(T)] + (1-k)E[x_0^*(T)] \\
&= kz_2 + (1-k)z_0 \;=\; z_1, \\
Var[\tilde{x}(T)] &= k^2 Var[x_2^*(T)],
\end{aligned}$$

da nach Theorem 5.4 $Var[x_0^*(T)] = 0$ ist.
$\tilde{x}(t)$ ist ebenfalls ein zu z_0 gehörender möglicher Vermögensprozess, denn, da $x_0^*(t)$ und $x_2^*(t)$ die stochastische Differentialgleichung (2.7) erfüllen, gilt:

$$\begin{aligned}
d\tilde{x}(t) &= kx_2^*(t) + (1-k)x_0^*(t) \\
&= k\left\{[r(t)x_2^*(t) + B(t)\pi(t)]dt + \pi(t)'\sigma(t)dW(t)\right\} \\
&\quad +(1-k)\left\{[r(t)x_0^*(t) + B(t)\pi(t)]dt + \pi(t)'\sigma(t)dW(t)\right\} \\
&= \left\{r(t)[kx_2^*(t) + (1-k)x_0^*(t)] + (k+1-k)B(t)\pi(t)\right\}dt + (k+1-k)\pi(t)'\sigma(t)dW(t) \\
&= [r(t)x(t) + B(t)\pi(t)]dt + \pi(t)'\sigma(t)dW(t), \\
\tilde{x}(0) &= kx_2^*(0) + (1-k)x_0^*(0) \\
&= kx_0 + (1-k)x_0 \;=\; x_0,
\end{aligned}$$

somit erfüllt auch $\tilde{x}(t)$ die stochastische Differentialgleichung (2.7). Nun gilt:

$$\begin{aligned}
J_1^*(z_1) &= Var[x_1^*(T)] &&= \min_{E[x(T)]=z_1} Var[x(T)] \\
&\le Var[\tilde{x}(T)] &&= \underbrace{k^2}_{<1} Var[x_2^*(T)] \\
&< Var[x_2^*(T)] &&= J_1^*(z_2).
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Somit ist $J_1^*(z)$ für $z \in \left[\frac{x_0}{E[\rho(T)]}, \frac{x_0}{a}\right)$ streng monoton steigend.
Betrachten wir nun den zweiten Fall: Wir wählen nun z_1 und z_2 so, dass gilt: $\frac{x_0}{E[\rho(T)]} =: z_0 \ge z_1 > z_2 > \frac{x_0}{a}$. Alle anderen Variablen und Bezeichnungen bleiben konstant. Damit gilt wieder (5.4), also ist $J_1^*(z)$ für $z \in \left(\frac{x_0}{b}, \frac{x_0}{E[\rho(T)]}\right]$ streng monoton fallend.

□

Aus dieser Aussage ergibt sich nun eine exakte Bestimmung der effizienten Grenze.

Theorem 5.8 (Effiziente Grenze) *Sei x_0 fest. Dann ist die effiziente Grenze für (5.1) durch die folgenden Gleichungen festgelegt:*

$$\left\{\begin{array}{l} E[x^*(T)] = z, \\ Var[x^*(T)] = \lambda(z)z - \mu(z)x_0 - z^2, \quad \frac{x_0}{E[\rho(T)]} \le z < \frac{x_0}{a}, \end{array}\right. \tag{5.5}$$

wobei $(\lambda(z), \mu(z))$ die eindeutige Lösung von (4.3) mit dem Parameter z ist. Weiterhin haben alle effizienten Portfolios die Eigenschaft, dass ihre zugehörigen varianzminimierenden Portfolios von $z \in \left[\frac{x_0}{E[\rho(T)]}, \frac{x_0}{a}\right)$ abhängen.

Beweis:
Zuerst wollen wir die varianzminimierende Grenze bestimmen. Sei $x^*(\cdot)$ der Vermögensprozess unter dem varianzminimierenden Portfolio, das von $z = E[x^*(T)]$ abhängt. Nach Theorem 4.2 gilt: $x^*(T) = (\lambda(z) - \mu(z)\rho(T))^+$. Weiter gilt nach (3.6): $E[\rho(T)x^*(T)] = x_0$. Mit dem Fakt, dass $x^2 = \alpha x$ für $x = \alpha^+$ gilt, folgt dann:

$$\begin{aligned} Var[x^*(T)] &= E[(x^*(T))^2] - z^2 \\ &= E[(\lambda(z) - \mu(z)\rho(T))x^*(T)] - z^2 \\ &= \lambda(z)E[x^*(T)] - \mu(z)E[\rho(T)x^*(T)] - z^2 \\ &= \lambda(z)z - \mu(z)x_0 - z^2. \end{aligned}$$

Damit wird die varianzminimierende Grenze durch diese Gleichung festgelegt. Da die effiziente Grenze nach Definition eine Teilmenge der varianzminimierenden Grenze ist, muss die effiziente Grenze ebenso das Gleichungssystem (5.5) erfüllen.
Schließlich folgt: Da nach Lemma 5.7 gilt, dass bei steigendem Erwartungswert $z = E[x^*(T)] \in \left[\frac{x_0}{E[\rho(T)]}, \frac{x_0}{a}\right)$ auch die Varianz $Var[x^*(T)]$ zunimmt, sind damit varianzminimierende Portfolios genau dann effizient, wenn $z \in \left[\frac{x_0}{E[\rho(T)]}, \frac{x_0}{a}\right)$ gilt. Für $\hat{z} \in \left(\frac{x_0}{b}, \frac{x_0}{E[\rho(T)]}\right)$ ist das zugehörige varianzminimierende Portfolio $\hat{\pi}(\cdot)$ nicht effizient, da für das Portfolio $\tilde{\pi}(\cdot)$ zu $\tilde{z} = \frac{x_0}{E[\rho(T)]} > \hat{z}$ gilt: $J_1(\tilde{\pi}(\cdot)) < J_1(\hat{\pi}(\cdot))$ und $J_2(\tilde{\pi}(\cdot)) < J_2(\hat{\pi}(\cdot))$, was im Widerspruch zur Definition 5.1 eines effizienten Portfolios steht.

□

5.2 Das Optimierungsproblem bei einem Benchmark-Portfolio

Wir wollen nun noch einen Fall betrachten, bei dem wir das Optimierungsproblem insofern verschärfen, dass wir nicht nur die Insolvenz des Investors ausschließen, sondern auch fordern, dass sein Vermögen $x(t)$ zu jedem Zeitpunkt über einem bestimmten Satz oder der *Benchmark* $\underline{x}(t)$ für jeden Zeitpunkt $t \in [0, T]$ liegt. Wir formulieren das Problem wie folgt:

$$Var[x(T)] = E[x(T)^2] - z^2 \to \min, \quad z \in \mathbb{R}$$

$$\text{unter den Bedinungen} \begin{cases} E[x(T)] = z, \\ x(t) \geq \underline{x}(t), \quad \text{f.s.}, \\ \pi(\cdot) \in L^2_{\mathcal{F}}(0; T; \mathbb{R}^m), \\ (x(\cdot), \pi(\cdot)) \text{ erfüllt Gleichung (2.7).} \end{cases} \tag{5.6}$$

$\underline{x}(t)$ ist der Vermögensprozess eines *Benchmark-Portfolios*, dass ebenfalls akzeptabel ist (vgl. Definition 3.1), aber nicht zwingend mit dem gleichen Anfangsvermögen x_0 startet. Aus $x(t) \geq \underline{x}(t)$ ergibt sich folgendes: $x_0 \geq \underline{x}(0)$ und $z = E[x(T)] \geq E[\underline{x}(T)]$. Mit den Argumenten von Proposition 3.2 können wir ebenfalls zeigen: $x(T) \geq \underline{x}(T)$.
Ähnlich wie in Abschnitt 3.2 formulieren wir das Optimierungsproblem (5.6) als äquivalenten Problem der Optimierung der Zufallsvariable X, die alle erreichbaren Endvermögen $x(T)$ darstellt:

$$Var[X] = E[X^2] - z^2 \to \min, \quad z \in \mathbb{R}$$

$$\text{unter den Bedinungen} \begin{cases} E[X] = z, \\ E[\rho(T)X] = x_0, \\ X \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R}),\ X \geq \underline{x}(T), \quad \text{f.s.} \end{cases} \tag{5.7}$$

Setzen wir nun $Y := X - \underline{x}(T)$, so ist Y ebenfalls eine Zufallsvariable mit $Y \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$ und $Y \geq 0$, f.s. Weiter gilt:

$$E[Y] = E[X - \underline{x}(T)] = E[X] - E[\underline{x}(T)] = z - E[\underline{x}(T)] =: \underline{z}$$

und mithilfe der Gleichungen (3.7) und (3.8) gilt:

$$E[\rho(T)Y] = E[\rho(T)(X - \underline{x}(T))] = E[\rho(T)X] - E[\rho(T)\underline{x}(T)] = x_0 - \underline{x}(0) =: \underline{y}_0.$$

Somit können wir das Problem (5.7) äquivalent in folgendes Optimierungsproblem umformen:

$$Var[X] = E[(Y + \underline{x}(T))^2] - z^2 \to \min, \quad z \in \mathbb{R}$$

$$\text{unter den Bedinungen} \begin{cases} E[Y] = \underline{z}, \\ E[\rho(T)Y] = \underline{y}_0, \\ Y \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R}),\ Y \geq 0, \quad \text{f.s.} \end{cases} \tag{5.8}$$

Analog zu Theorem 4.2 wollen wir nun die Form der Lösung für das Optimierungsproblem (5.8) bestimmen.

Theorem 5.9 *Hat das Optimierungsproblem* (5.8) *eine Lösung* Y^**, dann ist sie von der Form* $Y^* = (\lambda - \mu\rho(T) - \underline{x}(T))^+$*, wobei für das Paar* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ *folgendes Gleichungssystem erfüllt:*

$$\begin{cases} E[(\lambda - \mu\rho(T))^+] &= z, \\ E[\rho(T)(\lambda - \mu\rho(T))^+] &= x_0. \end{cases} \tag{5.9}$$

Beweis:
Sei Y^* eine Lösung des Optimierungsproblems (5.8), d.h. Y^* minimiert:

$$E[(Y + \underline{x}(T))^2] - z^2 \to \min, \quad z \in \mathbb{R}$$

$$\text{unter den Bedinungen} \begin{cases} E[Y] = \underline{z}, \\ E[\rho(T)Y] = \underline{y}_0, \\ Y \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R}),\ Y \geq 0, \quad \text{f.s.} \end{cases}$$

Setzen wir nun $f(Y) := (Y + \underline{x}(T))^2$, $\xi_1 := 1$, $\xi_2 := \rho(T) \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R})$ und $D := \{Y : \; Y \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R}),\; Y \geq 0, \;\; \text{f.s.},\}$, so lässt sich das Problem folgendermaßen formulieren:

$$E[f(Y)] - z^2 \to \min$$

$$\text{unter den Bedingungen} \begin{cases} E[\xi_1 Y] = \underline{z}, \\ E[\xi_2 Y] = \underline{x}(0), \\ Y \in D. \end{cases}$$

Wenden wir nun die Proposition 4.1 an, so gilt, dass es einen Vektor $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ gibt, so dass Y^* Lösung des folgenden Optimierungsproblems ist:

$$E\left[f(Y) - Y \cdot \sum_{i=1}^{2} \lambda_i \xi_i\right] - z^2 \to \min,$$

$$\text{unter der Bedingung } Y \in D.$$

Nun formen wir dieses Problem um, indem wir die entsprechenden Werte für f, ξ_1, ξ_2 und D einsetzen:

$$\begin{cases} E\left[(Y + \underline{x}(T))^2 - Y(\lambda_1 + \lambda_2\rho(T))\right] - z^2 \to \min, \\ \\ \text{unter der Bedingung } Y \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R}),\; Y \geq 0, \;\; \text{f.s.} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} E\left[\left(Y - \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2\rho(T)}{2} - \underline{x}(T)\right)\right)^2 - \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2\rho(T)}{2} - \underline{x}(T)\right)^2\right] - z^2 \to \min, \\ \\ \text{unter der Bedingung } Y \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R}),\; Y \geq 0, \;\; \text{f.s.} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} E\left[\left(Y - \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2\rho(T)}{2} - \underline{x}(T)\right)\right)^2\right] - E\left[\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2\rho(T)}{2} - \underline{x}(T)\right)^2\right] - z^2 \to \min, \\ \\ \text{unter der Bedingung } Y \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega;\mathbb{R}),\; Y \geq 0, \;\; \text{f.s.} \end{cases}$$

Nun wissen wir, dass der Ausdruck $E\left[\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2\rho(T)}{2} - \underline{x}(T)\right)^2\right] - z^2$ nicht von Y abhängt. D.h. die optimale Lösung Y^* muss nur den Ausdruck $E\left[\left(Y - \left(\frac{\lambda_1+\lambda_2\rho(T)}{2} - \underline{x}(T)\right)\right)^2\right]$ minimieren. Die minimale Lösung wäre also $\frac{\lambda_1+\lambda_2\rho(T)}{2} - \underline{x}(T)$, wobei die Bedingung greifen muss, dass $Y \geq 0$, f.s., so dass sich als einzige optimale Lösung

$$Y^* = \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2\rho(T)}{2} - \underline{x}(T)\right)^+$$

ergibt. Wählen wir nun $\lambda := \frac{\lambda_1}{2}$ und $\mu := -\frac{\lambda_2}{2}$, so ist Y^* in der gewünschten Form und das Paar (λ, μ) muss folgendes Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{cases} E[(\lambda - \mu\rho(T) - \underline{x}(T))^+] &= \underline{z} &= z - E[\underline{x}(T)], \\ E[\rho(T)(\lambda - \mu\rho(T) - \underline{x}(T))^+] &= \underline{y}_0 &= x_0 - \underline{x}(0). \end{cases}$$

Durch Umformung ergibt sich das Gleichungssystem (5.9).

□

Damit zeigt sich, dass die optimale Lösung für das Optimierungsproblem (5.8) genau die gleichen Lagrange-Multiplikatoren wie das Optimierungsproblem (3.6) liefert.

Allerdings kann das Benchmark-Portfolio nicht frei gewählt werden. Ob es ein solches Portfolio gibt, hängt wiederum von der Wahl der Parameter $\underline{y}_0$ und $\underline{z}$ ab. Nach Korollar 3.13 hat das Optimerungsproblem (5.8) eine eindeutige Lösung, wenn gilt: $a < \frac{\underline{y}_0}{\underline{z}} < b$.

Nun wollen wir noch den Fall betrachten, bei dem das Endvermögen des Benchmark-Portfolios konstant ist: $\underline{x}(T) = \underline{x}_T > 0$. Der Preisprozess $\underline{x}(\cdot)$ lässt sich damit durch ein risikofreies Portfolio (vgl. Theorem 5.4) beschreiben:

$$\underline{x}(t) = \underline{x}_T e^{-\int_0^t r(s)ds}.$$

Insb. ist gilt somit: $\underline{x}_0 = \underline{x}_T e^{-\int_0^t r(s)ds}$.
Damit liefert der Preisprozess $\underline{x}(\cdot)$ eine natürliche untere Grenze für unseren Vermögensprozess $x(\cdot)$, wenn der Investor ein Endvermögen $x(T) > \underline{x}_T$ mit der Wahrscheinlichkeit 1 anstrebt. Damit können wir auch das Optimierungsproblem (5.8) wie folgt umformen:

$$Var[X] = E[(Y + \underline{x}_T)^2] - z^2 = E[Y^2] + \underline{x}_T^2 + 2\underline{x}_T\underline{z} - z^2 \to \min, \quad z \in \mathbb{R}$$

$$\text{unter den Bedinungen} \begin{cases} E[Y] = \underline{z} = z - \underline{x}_T, \\ E[\rho(T)Y] = \underline{y}_0 = x_0 - \underline{x}_0, \\ Y \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R}), \ Y \geq 0, \quad \text{f.s.} \end{cases} \tag{5.10}$$

Kapitel 6

Das effiziente Portfolio bei deterministischen Marktkoeffizienten

Im folgenden Kapitel wollen wir eine praktische Anwendung der zuvor aufgestellten Ergebnisse betrachten. Nach Proposition 5.6 wissen wir, dass das effiziente Portfolio $\pi^*(\cdot)$ für unser Optimierungsproblem ein replizierendes Portfolio einer europäischen Put-Option mit dem Ausübungspreis λ auf die fiktive Anleihe $\mu\rho(T)$ mit Laufzeit T ist. Zusammen mit dem optimalen Vermögensprozess $x^*(\cdot)$ erfüllt es folgende BSDE:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dx^*(t) & = & [r(t)x^*(t) + B(t)\pi^*(t)]dt + \pi^*(t)'\sigma(t)dW(t), \\ x^*(T) & = & (\lambda - \mu\rho(T))^+. \end{array} \right. \tag{6.1}$$

Theorem 2.18 besagt, dass es für dieses Gleichungssystem eine eindeutige Lösung gibt, die im allgemeinen Fall allerdings nicht immer explizit bestimmbar ist. Deshalb wenden wir uns nun dem Fall zu, in dem die Marktkoeffizienten $r(\cdot)$ und $\theta(\cdot)$ deterministisch, allerdings nicht konstant, sondern von der Zeit t abhängig sind. Die Funktionen $b(\cdot)$ und $\sigma(\cdot)$ müssen selbst hingegen nicht deterministisch sein.
Hierzu bestimmen wir das explizite Portfolio und den expliziten Vermögensprozess. Weiterhin stellen wir ein neues Gleichungssystem auf, um unsere Lagrange-Multiplikatoren (λ, μ) bestimmen zu können. Daraus entwickeln wir auch ein Gleichungssystem für die effiziente Grenze, die uns zur Gleichung für die *Kapitalmarktlinie* führt. Schließlich schließen wir das Kapitel mit zwei Beispielen ab.

6.1 Das explizite Portfolio

Zuerst wollen wir die Ergebnisse aus dem vorherigen Kapitel nutzen, um unser effizientes Portfolio für die Optimierung eines Mean-Variance-Portfolios (5.1) genauer zu spezifizieren. Daraus können wir dann auch eine explizite Gleichung für den dazugehörigen optimalen Vermögensprozess aufstellen.

Für dieses Kapitel definieren wir noch folgende Funktionen:

$$N(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \tag{6.2}$$

ist die kumulierte Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Weiter definieren wir:

$$\begin{cases} d_+(t,y,k) & := & \frac{\ln(y/k)+\int_t^T [r(s)+\frac{1}{2}|\theta(s)|^2]ds}{\sqrt{\int_t^T |\theta(s)|^2 ds}}, \\ \\ d_-(t,y,k) & := & d_+(t,y,k) - \sqrt{\int_t^T |\theta(s)|^2 ds}. \end{cases} \tag{6.3}$$

Damit können wir nun folgende erste wichtige Aussage treffen:

Theorem 6.1 (Explizite Form der Lösung) *Sei $\int_0^T |\theta(t)|^2 dt > 0$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes effizientes Portfolio für (3.4), das von beliebig gegebenen $z \geq x_0 e^{\int_0^T r(s)ds}$ abhängt. Weiterhin sind das effiziente Portfolio und der zugehörige Vermögensprozess gegeben durch*

$$\begin{aligned} \pi^*(t) &= N(-d_+(t,y(t),\lambda))(\sigma(t)\sigma(t)')^{-1}B(t)'y(t) \\ &= -(\sigma(t)\sigma(t)')^{-1}B(t)'\left[x^*(t) - \lambda N(-d_-(t,y(t),\lambda))e^{\int_0^T r(s)ds}\right] \end{aligned} \tag{6.4}$$

und

$$x^*(t) = \lambda N(-d_-(t,y(t),\lambda))e^{\int_0^T r(s)ds} - N(-d_+(t,y(t),\lambda))y(t), \tag{6.5}$$

wobei $N(\cdot)$, $d_+(\cdot,\cdot,\cdot)$ und $d_-(\cdot,\cdot,\cdot)$ wie oben definiert sind und

$$y(t) := \mu \exp\left\{-\int_0^T \left[2r(s) - |\theta(s)|^2\right] ds + \int_0^t \left[r(s) - \frac{3}{2}|\theta(s)|^2\right] ds - \int_0^t \theta(s)dW(s)\right\}. \tag{6.6}$$

Weiterhin ist das Paar (λ, μ) mit $\lambda > 0$ und $\mu \geq 0$ die eindeutige Lösung von (4.5).

Beweis:
Nach Lemma 3.10 gilt: $a = 0$ und $b = +\infty$.
Mit $\rho(t) = \exp\left\{-\int_0^t \left[r(s) + \frac{1}{2}|\theta(s)|^2\right] ds - \int_0^t \theta(s)\, dW(s)\right\}$ folgt: $E[\rho(T)] = e^{-\int_0^T r(s)ds}$.
Nach Theorem 5.8 und Bemerkung 5.2 gibt es ein effizientes Portfolio zu (3.4), das von jedem $z \geq x_0 e^{\int_0^T r(s)ds} = \frac{x_0}{E[\rho(T)]}$ eindeutig bestimmt wird. Setze $y(t) = f(X(t))$ mit $f(x) := y(0)e^x = f'(x) = f''(x)$ und $X(t) = \int_0^t \left[r(s) - \frac{3}{2}|\theta(s)|^2\right] ds - \int_0^t \theta(s)dW(s)$, so gilt nach der

Itô-Formel nun für $y(\cdot)$:

$$\begin{aligned}
dy(t) &= df(X(t)) \\
&= f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}f''(X(t))dX(t)dX(t) \\
&= y(0)e^{X(t)}dX(t) + \frac{1}{2}y(0)e^{X(t)}dX(t)dX(t) \\
&= y(t)dX(t) + \frac{1}{2}y(t)dX(t)dX(t) \\
&= y(t)\left[dX(t) + \frac{1}{2}dX(t)dX(t)\right] \\
&= y(t)\left[\left(r(t) - \frac{3}{2}|\theta(t)|^2\right)dt - \theta(t)dW(t) + \frac{1}{2}|\theta(t)|^2 dt\right] \\
&= y(t)\left[(r(t) - |\theta(t)|^2)dt - \theta(t)dW(t)\right] && (6.7) \\
y(0) &= \mu \exp\left\{-\int_0^T \left[2r(s) - |\theta(s)|^2\right] ds\right\} && (6.8) \\
y(T) &= \mu \exp\left\{-\int_0^T \left[2r(s) - |\theta(s)|^2\right] ds + \int_0^T \left[r(s) - \frac{3}{2}|\theta(s)|^2\right] ds - \int_0^T \theta(s)sW(s)\right\} \\
&= \mu \exp\left\{-\int_0^T \left[r(s) + \frac{1}{2}|\theta(s)|^2\right] ds - \int_0^t \theta(s)sW(s)\right\} \\
&= \mu\rho(T). && (6.9)
\end{aligned}$$

Nach Proposition 5.6 ist ein effizientes Portfolio $\pi^*(\cdot)$ in Abhängigkeit von $z \geq x_0 e^{\int_0^T r(s)ds} = \frac{x_0}{E[\rho(T)]}$ ein replizierendes Portfolio für eine europäische Put-Option auf $y(\cdot)$ mit Ausübungspreis λ und Fälligkeit T. Wir suchen nun das Paar $(x^*(\cdot), \pi^*(\cdot))$, das die BDSE (6.1) erfüllt. Setze dazu $x^*(t) = f(t, y(t))$ für eine noch näher zu bestimmende Funktion $f(\cdot, \cdot)$. wobei f nach der Feynman-Kac-Formel folgende partielle Differentialgleichung erfüllt[1]:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t}(t,y) + r(t)y\frac{\partial f}{\partial y}(t,y) + \frac{1}{2}|\theta(t)|^2 y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,y) \;=\; r(t)f(t,y), \\ f(T,y) \;=\; (\lambda - y)^+. \end{cases} \tag{6.10}$$

Dies entspricht der Black-Scholes-Gleichung für eine europäische Put-Option. Dadurch können wir die Lösung explizit angeben[2]:

$$f(t,y) \;=\; \lambda N(-d_-(t,y,\lambda))e^{-\int_t^T r(s)ds} - N(-d_+(t,y,\lambda))y. \tag{6.11}$$

[1]vgl. [16], S. 157
[2]vgl. [16], S. 159.

Nun gilt nach der Itô-Formel gilt für $f(\cdot,\cdot)$:

$$
\begin{aligned}
dx^*(t) &= df(t,y(t)) \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}(t,y(t))dt + \frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))dy(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,y(t))dy(t)dy(t) \\
&= \frac{\partial f}{\partial t}(t,y(t))dt + \frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))y(t)\left[(r(t)-|\theta(t)|^2)dt - \theta(t)dW(t)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,y(t))\theta^2(t)dt \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))y(t)r(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t,y(t))\theta^2(t)\right)dt \\
&\quad -\frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))y(t)|\theta(t)|^2 dt - \frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))y(t)\theta(t)dW(t) \\
&= \left(r(t)\underbrace{f(t,y(t))}_{=x^*(t)} - \frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))y(t)|\theta(t)|^2\right)dt - \frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))y(t)\theta(t)dW(t).
\end{aligned}
$$

Über Koeffizientenvergleich mit der ersten Gleichung von (6.1) gilt nun:

$$
\begin{cases}
B(t)\pi^*(t) = -\frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))y(t)|\theta(t)|^2, \\
\pi^*(t)'\sigma(t) = -\frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))y(t)\theta(t).
\end{cases}
$$

Mit der Definition von $\theta(t)$ (vgl. (2.6)), sieht man leicht, dass beide Gleichungen dasselbe aussagen:

$$
\begin{aligned}
B(t)\pi^*(t) &= -\frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))y(t)|\theta(t)|^2 \\
&= -\frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))y(t)\theta(t)\theta(t)' \\
&= \pi^*(t)'\sigma(t)(B(t)(\sigma(t)')^{-1})' \\
&= \pi^*(t)'\sigma(t)(\sigma(t))^{-1}B(t)' \\
&= (\underbrace{B(t)\pi^*(t)}_{\in\mathbb{R}})' = B(t)\pi^*(t).
\end{aligned}
$$

Für das effiziente Portfolio gilt damit:

$$
\begin{aligned}
\pi^*(t)'\sigma(t) &= -\frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))y(t)\theta(t) \\
\Leftrightarrow \quad \pi^*(t)' &= -\frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))y(t)B(t)(\sigma(t)')^{-1}(\sigma(t))^{-1} \\
\Leftrightarrow \quad \pi^*(t) &= -(\sigma(t)')^{-1}(\sigma(t))^{-1}B(t)'\frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))y(t) \\
&= -(\sigma(t)\sigma(t)')^{-1}B(t)'\frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))y(t). \qquad (6.12)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Mit } & \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \\
= \ & -\lambda e^{-\int_t^T r(s)ds} \frac{\partial N(-d_-(t,y,\lambda))}{\partial y} \frac{\partial d_-(t,y,\lambda)}{\partial y} \\
& + \frac{\partial N(-d_+(t,y,\lambda))}{\partial y} \frac{d_+(t,y,\lambda)}{\partial y} y - N(-d_+(t,y,\lambda)) \\
= \ & -\lambda e^{-\int_t^T r(s)ds} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{-d_-^2(t,y,\lambda)}{2}} \frac{\partial d_+(t,y,\lambda)}{\partial y} \\
& + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{-d_+^2(t,y,\lambda)}{2}} \frac{y}{y \cdot \sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}} - N(-d_+(t,y,\lambda)) \\
= \ & -\lambda e^{-\frac{-d_-^2(t,y,\lambda)}{2}} e^{-\frac{d_+^2(t,y,\lambda)}{2} + d_+(t,y,\lambda) \cdot \sqrt{\int_t^T |\theta(s)|^2 ds} - \frac{\int_t^T |\theta(s)|^2 ds}{2}} \frac{1}{y \cdot \sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}} \\
& + \frac{1}{y \cdot \sqrt{\int_0^T |\theta(s)| ds}} - N(-d_+(t,y,\lambda)) \\
= \ & -\lambda e^{-\frac{d_+^2(t,y,\lambda)}{2}} \cdot e^{\ln(y/\lambda) + \int_t^T [r(s) + \frac{1}{2}|\theta(s)|^2] ds - \frac{\int_t^T |\theta(s)|^2 ds}{2}} \frac{1}{y \cdot \sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}} \\
& + \frac{1}{y \cdot \sqrt{\int_0^T |\theta(s)| ds}} - N(-d_+(t,y,\lambda)) \\
= \ & -\lambda e^{-\frac{d_+^2(t,y,\lambda)}{2}} \cdot e^{\int_t^T r(s)ds} \frac{y}{\lambda} \frac{1}{y \cdot \sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}} + \frac{1}{y \cdot \sqrt{\int_0^T |\theta(s)| ds}} - N(-d_+(t,y,\lambda)) \\
= \ & -N(-d_+(t,y,\lambda))
\end{aligned}
$$

erhalten wir durch (6.12):

$$
\pi^*(t) \ = \ N(-d_+(t,y(t),\lambda))(\sigma(t)\sigma(t)')^{-1} B(t)' y(t)
$$

und mit (6.11) und der Eigenschaft, dass $x^*(t) = f(t, y(t))$ ist, gilt:

$$
x^*(t) \ = \ \lambda N(-d_-(t,y(t),\lambda)) e^{\int_0^T r(s)ds} - N(-d_+(t,y(t),\lambda)) y(t).
$$

Mit $-N(-d_+(t,y(t),\lambda))y(t) = x^*(t) - \lambda N(-d_-(t,y(t),\lambda)) e^{\int_0^T r(s)ds}$ folgt dann schließlich:

$$
\pi^*(t) = -(\sigma(t)\sigma(t)')^{-1} B(t)' \left[x^*(t) - \lambda N(-d_-(t,y(t),\lambda)) e^{\int_0^T r(s)ds} \right].
$$

$\square$

Wir haben gesehen, dass die optimale Lösung $(x^*(\cdot), \pi^*(\cdot))$ von dem Prozess $y(\cdot)$ abhängt, den wir wie folgt interpretieren wollen:

Bemerkung 6.2 (Fiktive Sicherheit) $y(\cdot)$ kann als *fiktive Sicherheit* interpretiert werden.[3] Damit ist die optimale Handelsstrategie $\pi^*(\cdot)$ aus (6.4) nicht praktikabel für mögliche Anwendungen. Um eine Verbindung mit dem Vermögensprozess $y(\cdot)$ herzustellen, können wir die Differentialgleichung (2.7) folgendermaßen umformen, indem wir $y(t) = x(t)$ und das Portfolio

$$\hat{\pi}(t) := -(\sigma(t)\sigma(t)')^{-1}B(t)'y(t)$$

setzen:

$$\begin{aligned}
dy(t) &= [r(t)y(t) + B(t)\hat{\pi}(t)]dt + \hat{\pi}(t)'\sigma(t)dW(t) \\
&= [r(t)y(t) - B(t)(\sigma(t)\sigma(t)')^{-1}B(t)'y(t)]dt + (-(\sigma(t)\sigma(t)')^{-1}B(t)'y(t))'\sigma(t)dW(t) \\
&= y(t)\left\{[r(t) - B(t)(\sigma(t)')^{-1}\sigma(t)^{-1}B(t)']dt - \underbrace{B(t)(\sigma(t)')^{-1}}_{=\theta(t)}\underbrace{\sigma(t)^{-1}\sigma(t)}_{=1}dW(t)\right\} \\
&= y(t)\left\{[r(t) - \theta(t)\underbrace{(B(t)(\sigma(t)')^{-1})'}_{=\theta(t)'}]dt - \theta(t)dW(t)\right\} \\
&= y(t)\left\{[r(t) - |\theta(t)|^2]dt - \theta(t)dW(t)\right\}.
\end{aligned}$$

Mit $y(0) = \mu \exp\left\{-\int_0^T [2r(s) - |\theta(s)|^2]\, ds\right\} = x_0$ sehen wir damit, dass der Vermögensprozess $y(\cdot)$ die Vermögensgleichung (2.7) erfüllt. Das Portfolio $\hat{\pi}(\cdot)$ ist damit ein reguläres zeitstetiges Portfolio zu $y(\cdot)$. Es wird *Anlagefonds* oder *Aktienkorb* genannt.

Ein weiterer Sonderfall ergibt sich, wenn wir fordern, dass die Marktkoeffizienten $r(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ und $b(\cdot)$ konstant sind.

Bemerkung 6.3 (Zeitinvariante Marktkoeffizienten) Unter der Annahme, dass unsere Koeffizienten $r(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ und $b(\cdot)$ von der Zeit unabhängig sind, können wir unseren fiktiven Prozess $y(\cdot)$ explizit als Preis für eine Aktie ausdrücken. Dazu müssen wir zuerst einige Vorüberlegungen treffen. Es gilt für den Preisprozess von m Anleihen $S_i(\cdot)$ nach (2.3):

$$dS_i(t) = S_i(t)\left[b_i(t)dt + \sum_{j=1}^{m}\sigma_{ij}(t)dW^j(t)\right].$$

Setze nun $DS(t) := \left(\frac{dS_1(t)}{S_1(t)}, \ldots, \frac{dS_m(t)}{S_m(t)}\right)'$ und $b(t) := (b_1(t), \ldots, b_m(t))'$, so gilt:

$$\begin{aligned}
& DS(t) &= b(t)dt + \sigma(t)dW(t) \\
\Longleftrightarrow \quad & dW(t) &= \sigma(t)^{-1}[DS(t) - b(t)dt].
\end{aligned}$$

[3] vgl. [3], S. 237.

Nun wenden wir auf $dS_i(t)$ die Itô-Formel an, indem wir $S_i(t) =: f(X(t))$ mit $f(x) = S_i(0)e^x$ setzen:

$$
\begin{aligned}
dS_i(t) &= S_i(t)\left[b_i dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} dW^j(t)\right] \\
&= S_i(t)\left[\left(b_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} |\sigma_{ij}|^2\right) dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} dW^j(t) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} |\sigma_{ij}|^2 dt\right] \\
&= S_i(t)\left[dX(t) + \frac{1}{2} dX(t)dX(t)\right] \\
&= S_i(0)e^{X(t)} dX(t) + \frac{1}{2} S_i(0)e^{X(t)} dX(t)dX(t) \\
&= f'(X(t))dX(t) + \frac{1}{2} f''(X(t))dX(t)dX(t) \;=\; df(X(t)).
\end{aligned}
$$

Über Koeffizientenvergleich gilt nun: $dX(t) = \left(b_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} |\sigma_{ij}|^2\right) dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} dW^j(t)$ und damit: $X(t) = \left(b_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} |\sigma_{ij}|^2\right) t + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} W^j(t)$. Somit gilt nun für $S_i(t)$:

$$
\begin{aligned}
S_i(t) &= S_i(0) \cdot \exp\left\{\left(b_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} |\sigma_{ij}|^2\right) t + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} W^j(t)\right\} \\
\Longleftrightarrow \frac{S_i(t)}{S_i(0)} &= \exp\left\{\left(b_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} |\sigma_{ij}|^2\right) t + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} W^j(t)\right\} \\
\Longleftrightarrow \ln S_i(t) - \ln S_i(0) &= \left(b_i - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} |\sigma_{ij}|^2\right) t + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} W^j(t) \\
&= \left(r - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} |\sigma_{ij}|^2\right) t + (b_i - r)t + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{ij} W^j(t).
\end{aligned}
$$

Setze nun $V(t) := (v_1(t), \ldots, v_m(t))'$ mit $v_i(t) := \ln S_i(t) - \ln S_i(0) - \left(r - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} |\sigma_{ij}|^2\right) t$, $i = 1, \ldots, m$, dann gilt mit $B = (b_1 - r, \ldots, b_m - r)'$ und $\theta' = \sigma^{-1} \cdot B'$ (vgl. (2.6)):

$$
\begin{aligned}
V(t) &= B \cdot t + \sigma \cdot W(t) \\
\Longleftrightarrow W(t) &= \sigma^{-1} \cdot V(t) + \theta' \cdot t.
\end{aligned}
$$

Setzen wir nun dies in (6.6) sein, so gilt für $y(t)$ nach (6.6) mit zeitinvariante Koeffizienten:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mu \exp\left\{-\int_0^T \left[2r - |\theta|^2\right] ds + \int_0^t \left[r - \frac{3}{2}|\theta|^2\right] ds - \int_0^t \theta dW(s)\right\} \\ &= y(0) \exp\left\{\left[r - \frac{3}{2}|\theta|^2\right] t - \theta W(t)\right\} \\ &= y(0) \exp\left\{\left[r - \frac{3}{2}|\theta|^2\right] t - \theta\sigma^{-1}V(t) + \theta\theta' t\right\} \\ &= y(0) \exp\left\{\left[r - \frac{1}{2}|\theta|^2\right] t - \theta\sigma^{-1}V(t)\right\}. \end{aligned}$$

6.2 Zu lösende Gleichungen

In diesem Abschnitt wollen wir uns nochmals den Lagrange-Multiplikatoren λ und μ widmen, die nach Theorem 4.7 die eindeutige Lösung des Gleichungssystems (4.3) sind. In Kapitel 5 konnten wir λ und μ nicht explizit bestimmen. In dem Fall der deterministischen Marktkoeffizienten gelingt uns das, indem wir verändertes Gleichungssystem lösen müssen. Aus diesem können wir dann die effiziente Grenze und zwei Gleichungen explizit beschreiben, woraus sich dann auch die Gleichung für die sogenannte *Kapitalmarktlinie* ergibt.

Proposition 6.4 (Gleichungsystem für die Multiplikatoren) *Seien $\int_0^T |\theta(t)|^2 dt > 0$ und $z > x_0 e^{\int_0^T r(s)ds}$ wie in Theorem 6.1. Dann ist das Paar (λ, μ) die eindeutige Lösung des folgenden Gleichungssystems:*

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda N\left(\frac{\ln(\lambda/\mu) + \int_0^T [r(s) - \frac{1}{2}|\theta(s)|^2]ds}{\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}}\right) - \mu e^{-\int_0^T [r(s) - |\theta(s)|^2]ds} \\ &\quad \times N\left(\frac{\ln(\lambda/\mu) + \int_0^T [r(s) - \frac{3}{2}|\theta(s)|^2]ds}{\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}}\right) = x_0 e^{\int_0^T r(s)ds}, \\ &\lambda N\left(\frac{\ln(\lambda/\mu) + \int_0^T [r(s) + \frac{1}{2}|\theta(s)|^2]ds}{\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}}\right) - \mu e^{-\int_0^T r(s)ds} \\ &\quad \times N\left(\frac{\ln(\lambda/\mu) + \int_0^T [r(s) - \frac{1}{2}|\theta(s)|^2]ds}{\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}}\right) = z. \end{aligned}\right. \tag{6.13}$$

Beweis:
Mit $z > x_0 e^{\int_0^T r(s)ds} = \frac{x_0}{E[\rho(T)]}$ folgt: $\frac{x_0}{z} < E[\rho(T)]$ und damit gilt nach Aussage (ii) vonTheorem 4.7: $\lambda > 0$ und $\mu > 0$.
Nach Theorem 6.1 gilt für den optimalen Vermögensprozess: $x^*(t) = f(t, y(t))$ mit $f(t,y) = \lambda N(-d_-(t,y), \lambda) e^{-\int_t^T r(s)ds} - N(-d_+(t,y), \lambda) y$ (vgl. (6.11)). Für das Anfangsvermögen x_0 gilt

damit:

$$\begin{aligned}
x_0 &= x^*(0) \;=\; f(0, y(0)) \\
\text{mit} \quad y(0) &= \mu \cdot \exp\left\{ -\int_0^T [2r(s) - |\theta(s)|^2] ds \right\} \quad \text{(vgl. (6.8))} \\
\Rightarrow \quad x_0 &= \lambda N(-d_-(0, y(0), \lambda)) e^{-\int_0^T r(s) ds} - N(-d_+(0, y(0), \lambda)) \\
&= \lambda N \left(-\frac{\ln\left(\frac{y(0)}{\lambda}\right) + \int_0^T [r(s) + \frac{1}{2}|\theta(s)|^2] ds}{\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}} + \sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds} \right) e^{-\int_0^T r(s) ds} \\
&\quad - N \left(-\frac{\ln\left(\frac{y(0)}{\lambda}\right) + \int_0^T [r(s) + \frac{1}{2}|\theta(s)|^2] ds}{\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}} \right) y(0) \\
&= \lambda N \left(-\frac{\ln\left(\frac{\mu \cdot \exp\left\{-\int_0^T [2r(s) - |\theta(s)|^2] ds\right\}}{\lambda}\right) + \int_0^T [r(s) + \frac{1}{2}|\theta(s)|^2] ds}{\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}} + \sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds} \right) \\
&\quad \times e^{-\int_0^T r(s) ds} - N \left(-\frac{\ln\left(\frac{\mu \cdot \exp\left\{-\int_0^T [2r(s) - |\theta(s)|^2] ds\right\}}{\lambda}\right) + \int_0^T [r(s) + \frac{1}{2}|\theta(s)|^2] ds}{\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}} \right) \\
&\quad \times \mu e^{-\int_0^T [2r(s) - |\theta(s)|^2] ds} \\
&= \lambda N \left(\frac{-\ln\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + \int_0^T [2r(s) - |\theta(s)|^2] ds - \int_0^T [r(s) + \frac{1}{2}|\theta(s)|^2] ds + \int_0^T |\theta(s)|^2 ds}{\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}} \right) \\
&\quad \times e^{-\int_0^T r(s) ds} - N \left(\frac{-\ln\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) + \int_0^T [2r(s) - |\theta(s)|^2] ds - \int_0^T [r(s) + \frac{1}{2}|\theta(s)|^2] ds}{\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}} \right) \\
&\quad \times \mu e^{-\int_0^T [2r(s) - |\theta(s)|^2] ds} \\
&= \lambda N \left(\frac{\ln\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \int_0^T [r(s) - \frac{1}{2}|\theta(s)|^2] ds}{\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}} \right) e^{-\int_0^T r(s) ds} \\
&\quad - N \left(\frac{\ln\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \int_0^T [r(s) - \frac{3}{2}|\theta(s)|^2] ds}{\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}} \right) \mu e^{-\int_0^T [2r(s) - |\theta(s)|^2] ds}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad x_0 e^{\int_0^T r(s)ds} &= \lambda N\left(\frac{\ln\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)+\int_0^T[r(s)-\frac{1}{2}|\theta(s)|^2]ds}{\sqrt{\int_0^T|\theta(s)|^2ds}}\right) \\
&\quad -N\left(\frac{\ln\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)+\int_0^T[r(s)-\frac{3}{2}|\theta(s)|^2]ds}{\sqrt{\int_0^T|\theta(s)|^2ds}}\right)\mu e^{-\int_0^T[2r(s)-|\theta(s)|^2]ds}e^{\int_0^T r(s)ds} \\
&= \lambda N\left(\frac{\ln\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)+\int_0^T[r(s)-\frac{1}{2}|\theta(s)|^2]ds}{\sqrt{\int_0^T|\theta(s)|^2ds}}\right) \\
&\quad -N\left(\frac{\ln\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)+\int_0^T[r(s)-\frac{3}{2}|\theta(s)|^2]ds}{\sqrt{\int_0^T|\theta(s)|^2ds}}\right)\mu e^{-\int_0^T[r(s)-|\theta(s)|^2]ds}.
\end{aligned}
$$

Damit ist die erste Gleichung gezeigt.
Wir betrachten nun die erste Gleichung von (4.3): $E[(\lambda-\mu\rho(T))^+]=z$, die wir wie folgt umformen: $E\left[\rho(T)\left(\frac{\lambda}{\rho(T)}-\mu\right)^+\right]=z$. Damit gilt[4]: z ist der Ausgangspreis einer europäischen Call-Option auf das Wertpapier $\frac{\lambda}{E[\rho(T)]}$ mit Laufzeit T und Ausübungspreis μ. Nun definieren wir folgende Funktion:

$$
\overline{y}(t) := \lambda \exp\left\{\int_0^t\left[r(s)+\frac{1}{2}|\theta(s)|^2\right]ds+\int_0^t\theta(s)dW(s)\right\}. \tag{6.14}
$$

Offensichtlich ist $y(0)=\lambda$. Setze $\overline{y}(t)=f(X(t))$ mit $f(x)=\lambda e^x=f'(x)=f''(x)$ und $X(t)=\int_0^t\left[r(s)+\frac{1}{2}|\theta(s)|^2\right]ds+\int_0^t\theta(s)dW(s)$. Nach der Itô-Formel gilt nun für $\overline{y}(\cdot)$ (vgl. die Schritte wie unter (6.7)):

$$
\begin{aligned}
d\overline{y}(t) &= \overline{y}(t)\left[dX(t)+\frac{1}{2}dX(t)dX(t)\right] \\
&= \overline{y}(t)\left[\left(r(t)+\frac{1}{2}|\theta(t)|^2\right)dt+\theta(t)dW(t)+\frac{1}{2}|\theta(t)|^2dt\right] \\
&= \overline{y}(t)\left[(r(t)+|\theta(t)|^2)dt+\theta(t)dW(t)\right] && (6.15) \\
\overline{y}(T) &= \lambda\cdot\exp\left\{\int_0^T\left[r(s)+\frac{1}{2}|\theta(s)|^2\right]ds+\int_0^T\theta(s)dW(s)\right\} && (6.16) \\
&= \lambda\left(\underbrace{\exp\left\{-\int_0^T\left[r(s)+\frac{1}{2}|\theta(s)|^2\right]ds-\int_0^T\theta(s)dW(s)\right\}}_{=E[\rho(T)]\text{ , vgl. (3.2)}}\right)^{-1} && (6.17) \\
&= \frac{\lambda}{E[\rho(T)]}. && (6.18)
\end{aligned}
$$

[4]vgl. [6], S. 66.

Nach der Black-Scholes-Formel gilt für den Preis C einer europäische Call-Option auf das Wertpapier S mit Ausübungspreis K und Leifzeit T:

$$C = S \cdot N(d_+(t, S, \mu)) - K \cdot N(d_-(t, S, \mu))e^{-\int_t^T r(s)ds}, \tag{6.19}$$

wobei $N(\cdot)$ wieder die kumulierte Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist (vgl. (6.2)) und $d_+(\cdot,\cdot,\cdot)$ und $d_-(\cdot,\cdot,\cdot)$ wie in (6.3) definiert sind[5]. Somit gilt: $z = g(0, \overline{y}(0))$ mit

$$g(t, y) = N(d_+(t, y, \mu)) \cdot y - \mu \cdot N(d_-(t, y, \mu))e^{-\int_t^T r(s)ds}. \tag{6.20}$$

Daraus folgt die zweite Gleichung von (6.13).

□

Nach Theorem 5.8 ist die minimale Varianz $Var[x^*(T)]$ abhängig von $z = E[x^*(T)]$, da die Lagrange-Multiplikatoren λ und μ von z abhängen. Wir wollen nun untersuchen, ob wir im deterministischen Fall die minimale Varianz explizit als Funktion von einer positiven reellwertigen Variable η beschreiben können.

Theorem 6.5 (Gleichungssystem für die effiziente Grenze) *Seien $\int_0^T |\theta(t)|^2 dt > 0$ sowie $z > x_0 e^{\int_0^T r(s)ds}$ wie in Theorem 6.1. Dann wird die effiziente Grenze durch folgendes Gleichungssystem bestimmt:*

$$\begin{cases} E[x^*(T)] &= \dfrac{\eta e^{\int_0^T r(s)ds} N_1(\eta) - N_2(\eta)}{\eta N_2(\eta) - e^{-\int_0^T [r(s) - |\theta(s)|^2]ds} N_3(\eta)} x_0 \\[2ex] Var[x^*(T)] &= \left[\dfrac{\eta}{\eta N_1(\eta) - e^{-\int_0^T r(s)ds} N_2(\eta)} - 1\right] (E[x^*(T)])^2 \\[2ex] & \quad - \dfrac{x_0}{\eta N_1(\eta) - e^{-\int_0^T r(s)ds} N_2(\eta)} E[x^*(T)], \quad \eta \in (0, +\infty], \end{cases} \tag{6.21}$$

wobei gilt:

$$\begin{aligned} N_1(\eta) &:= N\left(\frac{\ln \eta + \int_0^T [r(s) + \frac{1}{2}|\theta(s)|^2]ds}{\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}}\right) \\ N_2(\eta) &:= N\left(\frac{\ln \eta + \int_0^T [r(s) - \frac{1}{2}|\theta(s)|^2]ds}{\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}}\right) \\ N_3(\eta) &:= N\left(\frac{\ln \eta + \int_0^T [r(s) - \frac{3}{2}|\theta(s)|^2]ds}{\sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds}}\right). \end{aligned}$$

[5] vgl. [6], S. 36.

Beweis:
Setze $\eta := \frac{\lambda}{\mu}$.
Es gilt: $E[\rho(T)] = e^{-\int_0^T r(s)ds}$. Nach Theorem 5.8 gilt, dass die effiziente Grenze durch $z \in [\frac{x_0}{E[\rho(T)]}, \frac{x_0}{a})$ bestimmt wird. Im deterministischen Fall gilt nach Lemma 3.10: $a = 0$. Somit gilt für die Werte von z: $x_0 \cdot e^{\int_0^T r(s)ds} \leq z < +\infty$. Nach der zweiten Aussage von Theorem 4.7 gilt damit: $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Für $z = x_0 \cdot e^{\int_0^T r(s)ds}$ gilt weiter: $\lambda = z$ und $\mu = 0$, daraus folgt: $\eta = +\infty$. Für $z > x_0 \cdot e^{\int_0^T r(s)ds}$ gilt nach Lemma 4.5 für die Funktion $R_1(\eta) := \frac{E[(\eta-\rho(T))^+\rho(T)]}{E[(\eta-\rho(T))^+]} = \frac{x_0}{z}$, dass sie streng monoton steigend ist für $\eta \in (0, +\infty)$. Für $z_2 > z_1$ gilt damit: $R_1(\eta_2) < R_1(\eta_1)$ und somit: $\eta_2 < \eta_1$. Für steigendes z fällt also η streng monoton, wobei η stets größer als Null ist, da sonst $\lambda = 0$ gelten würde. Insgesamt erhalten wir also: $\eta \in (0, +\infty]$.
Damit ist $\lambda = \mu\eta$ und mit der Definition von $N_1(\eta)$, $N_2(\eta)$ und $N_3(\eta)$ gilt nach (6.13) nun folgendes:

$$\begin{aligned}
\mu\eta N_2(\eta) - \mu \cdot e^{-\int_0^T [r(s)-|\theta(s)|^2]ds} N_3(\eta) &= x_0 \cdot e^{\int_0^T r(s)ds} \\
\mu\eta N_1(\eta) - \mu \cdot e^{-\int_0^T [r(s)-|\theta(s)|^2]ds} N_2(\eta) &= z \\
\iff \mu \cdot \left(\eta N_1(\eta) - e^{-\int_0^T [r(s)-|\theta(s)|^2]ds} N_2(\eta)\right) &= z.
\end{aligned}$$

Lösen wir nun die erste Gleichung nach μ auf, so gilt:

$$\mu = \frac{x_0 e^{\int_0^T r(s)ds}}{\eta N_2(\eta) - e^{-\int_0^T [r(s)-|\theta(s)|^2]ds} N_3(\eta)}.$$

Setzen wir dies in die zweite Gleichung ein, so erhalten wir:

$$\frac{\eta e^{\int_0^T r(s)ds} N_1(\eta) - N_2(\eta)}{\eta N_2(\eta) - e^{-\int_0^T [r(s)-|\theta(s)|^2]ds} N_3(\eta)} x_0 = z = E[x^*(T)].$$

Damit haben wir die erste Gleichung von (6.21) gezeigt. Nach (5.5) gilt:

$$\begin{aligned}
Var[x^*(T)] &= \lambda z - \mu x_0 - z^2 \\
&= \mu\eta z - \mu x_0 - z^2.
\end{aligned}$$

Lösen wir nun die zweite Gleichung von (6.13) nach μ, so gilt:

$$\mu = \frac{x_0}{\eta N_1(\eta) - e^{-\int_0^T [r(s)-|\theta(s)|^2]ds} N_2(\eta)}.$$

Mit $z \equiv E[x^*(T)]$ gilt damit:

$$\begin{aligned}
&Var[x^*(T)] = \\
&= \frac{\eta \cdot (E[x^*(T)])^2}{\eta N_1(\eta) - e^{-\int_0^T r(s)ds} N_2(\eta)} - \frac{x_0 \cdot E[x^*(T)]}{\eta N_1(\eta) - e^{-\int_0^T r(s)ds} N_2(\eta)} - (E[x^*(T)])^2 \\
&= \left[\frac{\eta}{\eta N_1(\eta) - e^{-\int_0^T r(s)ds} N_2(\eta)} - 1\right] (E[x^*(T)])^2 - \frac{x_0}{\eta N_1(\eta) - e^{-\int_0^T r(s)ds} N_2(\eta)} E[x^*(T)].
\end{aligned}$$

Damit haben wir auch die zweite Gleichung von (6.21) gezeigt.

□

Bemerkung 6.6 Durch die Beschreibung der effizienten Grenze nach (6.21) durch nur einen Parameter $\eta \in (0, +\infty]$ können wir sie durch numerische Berechnungen auch in einem zweidimensionalen Koordinatensystem darstellen, wobei eine Achse den erwarteten Ertrag $E[x^*(T)]$ und die andere die Volatilität $Var[x^*(T)]$ darstellt.

Bemerkung 6.7 (Kapitalmarktlinie) Häufig wird die effiziente Grenze nicht in Abhängigkeit vom absoluten Vermögen $x^*(T)$, sondern vom relativen Gewinn $r^*(T)$ ausgedrückt. Wir definieren allgemein für ein beliebiges Anfangskapital $x_0 > 0$:

$$r^*(t) := \frac{x^*(t) - x_0}{x_0}, \qquad t \in [0, T].$$

Im Fall, dass die Insolvenz des Agenten ausgeschlossen ist, gilt mit $x^*(t) = r^*(t)x_0 + x_0$ nach (6.21):

$$\begin{aligned}
E[x^*(T)] &= E[r^*(T)x_0 + x_0] \\
&= x_0 \cdot E[r^*(T)] + x_0 \\
&= \frac{\eta e^{\int_0^T r(s)ds} N_1(\eta) - N_2(\eta)}{\eta N_2(\eta) - e^{-\int_0^T [r(s)-|\theta(s)|^2]ds} N_3(\eta)} x_0 \\
\iff E[r^*(T)] &= \frac{\eta e^{\int_0^T r(s)ds} N_1(\eta) - N_2(\eta)}{\eta N_2(\eta) - e^{-\int_0^T [r(s)-|\theta(s)|^2]ds} N_3(\eta)} - 1. \qquad (6.22)
\end{aligned}$$

Diese Gleichung wird auch als *Kapitalmarktlinie* (*capital market line* , CML) bezeichnet. Im Gegensatz zu dem Fall, dass eine Insolvenz des Agenten zugelassen ist[6], ist die CML keine Gerade. Für die Varianz gilt nach (6.21) somit:

$$\begin{aligned}
Var[x^*(T)] &= \left[\frac{\eta}{\eta N_1(\eta) - e^{-\int_0^T r(s)ds} N_2(\eta)} - 1\right] (x_0(E[r^*(T)] + 1))^2 \\
&\quad - \frac{x_0}{\eta N_1(\eta) - e^{-\int_0^T r(s)ds} N_2(\eta)} (x_0(E[x^*(T)] + 1)) \\
&= x_0^2 \left[\frac{\eta}{\eta N_1(\eta) - e^{-\int_0^T r(s)ds} N_2(\eta)} - 1\right] (E[r^*(T)] + 1)^2 \\
&\quad - \frac{x_0^2}{\eta N_1(\eta) - e^{-\int_0^T r(s)ds} N_2(\eta)} (E[r^*(T)] + 1).
\end{aligned}$$

6.3 Beispiele

Im Folgenden werden wir nun einige Beispiele betrachten. Dabei gehen wir folgt vor: Zunächst sind folgende Größen gegeben: Die Zinsrate $r(\cdot)$, die Wertsteigerungsrate $b(\cdot)$, die Volatilität

[6] vgl. [3], a.a.O., S. 240.

$\sigma(\cdot)$, das Anfangsvermögen des Agenten x_0, das erwartete Endvermögen $z = E[x^*]$ sowie die Laufzeit T. Aus diesen ergeben sich dann die Risikoptämie $B(\cdot)$ und der Prämienprozess $\theta(\cdot)$. Zum einen suchen wir die Varianz unseres Vermögens $Var[x^*(T)]$, zum anderen die Multiplikatoren λ und μ, die die fiktive Anleihe $y(\cdot)$ bestimmen.
Wir simulieren unsere Beispiele in einem Microsoft Excel-Sheet. Um die Rechenleistung dieser Simulation zu verringern, suchen wir zuerst das η, das die erste Gleichung von (6.21) löst. Damit liefert uns die zweite Gleichung die Varianz unseres Vermögens. Im zweiten Schritt bestimmen wir über die erste Gleichung von (6.13) unsere Multiplikatoren λ und μ, wobei wir $\mu = \frac{\lambda}{\eta}$ setzen, so dass wir darüber unsere fiktive Anleihe $y(\cdot)$ angeben können.
Allerdings lassen sich die angegebenen Gleichungen nicht analytisch, sondern nur numerisch lösen. Hierbei werden die errechneten Größen bis mind. zur vierten Stelle nach dem Komma exakt angegeben.
Zuerst werden wir uns der Approximation der kumulierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung $N(x)$ durch die Funktion

$$\Phi(x) := \frac{\exp(2y)}{1 + \exp(2y)}, \quad y = 0,7988x(1 + 0,04417x^2)$$

zuwenden.[7]

Bemerkung 6.8 (Approximation) Tochter fand 1963 heraus, dass sich die kumulierte Verteilungsfunktion wie folgt approximieren lässt[8]:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds \approx \frac{\exp(2kx)}{1 + \exp(2kx)} =: A(x), \quad k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Insbesondere gilt[9]:

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{\exp(kx)}{\exp(-kx)(1 + \exp(2kx))} &&= \frac{\exp(kx)}{\exp(kx) + \exp(-kx)} \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\exp(kx) - \exp(-kx)}{\exp(kx) + \exp(-kx)}\right) &&= \frac{1}{2}(1 + \tanh(kx)). \end{aligned}$$

Die größte Abweichung von $A(x)$ zu $N(x)$ beträgt 0,017670. Page [14] verringerte diese Abweichung, indem er für Approximationfunktion $A(x)$ eine allgemeinere Form wählte:

$$\Phi(x) := \frac{\exp(2y)}{1 + \exp(2y)}, \quad y = a_1 x(1 + a_2 x^2).$$

Für die Koeffizienten a_1 und a_2 fand er zwei mögliche Werte:

(a) für $a_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \approx 0,798846$ und $a_2 = 0,044715$ beträgt die Abweichung von $\Phi(x)$ zu $N(x)$ höchstens 0,000179 und orientiert sich damit an der Form von $A(x)$;

[7] nach [10], S. 118.
[8] vgl. [14], S. 75.
[9] vgl. [2], S. 311f.

(b) für $a_1 = 0,7988$ und $a_2 = 0,04417$ beträgt die Abweichung von $\Phi(x)$ zu $N(x)$ höchstens 0,000140.

Weitere Approximationen der kumulierten Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung sind bei Johnson et al. [10] zusammengestellt, wobei die erwähnte Approximation von Page die genauste ist. Hier tritt eine Abweichung vom exakten Wert erst in der dritten Nachkommastelle auf.[10]

Beispiel 6.9 Wir beginnen mit einem einfachen Beispiel, bei dem unser Markt aus einem Bankkonto, das mit $r(t) = 0,02$ verzinst wird, und einer Aktie, deren Zinsen $b(t) = 0,07$ und deren Volatilität $\sigma(t) = 0,1$ betragen, besteht. Als Risikoprämie ergibt sich damit: $B(t) = 0,05$ und für den Risikoprämienprozess gilt damit: $\theta(t) = 0,5$.
Der Anleger hat ein Anfangskapital von $x_0 = 1$ Mio. € und erwartet einen Ertrag von $z = 1,1$ Mio. € bei einer Laufzeit von $T = 1$ Jahr. Damit ergibt sich nach Bemerkung 6.7 für die CML folgende Gleichung:

$$E[r^*(1)] = \frac{\eta e^{0,02} N\left(\frac{\ln\eta+0,145}{0,5}\right) - N\left(\frac{\ln\eta-0,105}{0,5}\right)}{\eta N\left(\frac{\ln\eta-0,105}{0,5}\right) - e^{0,23} N\left(\frac{\ln\eta-0,355}{0,5}\right)} - 1 = 0,1.$$

Approximieren wir dies mit Werten für η, erhalten wir den Wert: $\eta = 4,8442$. Für die Varianz ergibt sich ebenfalls nach Bemerkung 6.7 damit folgendes:

$$\begin{aligned} Var[x^*(1)] &= \left[\frac{\eta}{\eta N\left(\frac{\ln\eta+0,145}{0,5}\right) - e^{-0,02} N\left(\frac{\ln\eta-0,104}{0,5}\right)} - 1\right] (E[r^*(T)]+1)^2 \\ &\quad - \frac{1}{\eta N\left(\frac{\ln\eta+0,145}{0,5}\right) - e^{-0,02} N\left(\frac{\ln\eta-0,105}{0,5}\right)} (E[r^*(T)]+1) \\ &= 0,0230. \end{aligned}$$

Nach Proposition 6.4 ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{cases} \lambda N\left(\frac{\ln\eta-0,105}{0,5}\right) - \frac{\lambda}{\eta} e^{0,23} N\left(\frac{\ln\eta-0,355}{0,5}\right) = e^{0,02}, \\ \lambda N\left(\frac{\ln\eta+0,145}{0,5}\right) - \frac{\lambda}{\eta} e^{-0,02} N\left(\frac{\ln\eta-0,105}{0,5}\right) = 1,1. \end{cases}$$

Setzen wir die Lösung von η ein und approximieren wir die erste Gleichung mit Werten für λ, so erhalten wir schließlich mit $\mu = \frac{\lambda}{\eta}$ Lösungen:

$$\lambda = 1,3798, \qquad \mu = 0,2848.$$

Damit ergibt sich als effizientes Portfolio das eines replizierenden Portofolios einer europäischen Put-Option mit dem fiktiven Wertpapier nach (6.7) und (6.8):

$$\begin{cases} dy(t) = y(t)[-0,23dt - 0,5dW(t)], \\ y(0) = 0,3514 \text{ €}, \end{cases}$$

[10]vgl. [1], S. 428.

die einen Ausübungspreis von $\lambda = 1,3798$ und Fälligkeit nach $T = 1$ Jahr.
Somit erhalten wir bei einer erwarteten Rendite von 10 % auf dieses Portfolio eine Standardabweichung von 15,16 %.

Um die Entwicklung der Varianz in Abhängigkeit des erwarteten Ertrages grafisch darzustellen, wurde dieses Beispiel mit veränderten Werten von z simuliert. Dabei bewegte sich das erwartete Vermögen zum Zeitpunkt T zwischen 1,1 und 2 mit Schritten von 0,01. Für kleinere Werte von z lieferten die Berechnungen zu große Abweichungen, so dass auf diese Werte verzichtet wurde. Nach Bemerkung 6.7 wurde über den erwarteten Ertrag die Variable η approximiert und mit diesem Wert dann die entsprechende Varianz berechnet.
Wie der Graph auf Seite 78 verdeutlicht, steigt die Varianz überproportional zum erwarteten Ertrag an, die Funktion ist also konvex. Somit muss der Agent damit rechnen, dass ein Zuwachs des erwarteten Ertrages um x % eine Varianzsteigerung um y % $> x$ % bedeutet. Insb. ab einer erwarteten Rendite von ca. 55 % ist die Anlage äußerst volatil, da dann die Varianz den Wert von 100 % übersteigt.

In einem zweiten Beispiel wollen wir das Problem unter nicht konstanten Marktkoeffizienten $b(\cdot)$ und $\sigma(\cdot)$ sowie unter einem längerem Anlagezeitraum T betrachten.

Beispiel 6.10 Wir betrachten einen Markt, auf dem das Bankkonto mit $r(t) = 0,05$ verzinst wird. Die Zinsen und die Volatilität unserer Anleihe sind konjunkturell verschieden. Seien die Zinsen gegeben durch $b(t) = 0,03 \cdot \sin(2\pi \cdot t) + 0,08$ die Volatilität durch $\sigma(t) = 0,1 \cdot e^{t-3} \sin(2\pi \cdot t) + 0,1$. Als Risikoprämie ergibt sich damit: $B(t) = b(t) - r(t) = 0,03 \cdot (\sin(2\pi \cdot t) + 1)$ und für den Risikoprämienprozess gilt damit:

$$\theta(t) = B(t)(\sigma(t)')^{-1} = \frac{0,03 \cdot (\sin(2\pi \cdot t) + 1)}{0,1 \cdot e^{t-3} \cdot (\sin(2\pi \cdot t) + 1)} = 0,3 \cdot e^{3-t}.$$

Der Anleger hat ein Anfangskapital von $x_0 = 1$ Mio. € und erwartet einen Ertrag von $z = 1,35$ Mio. € bei einer Laufzeit von $T = 3$ Jahren. Damit gilt:

$$\begin{array}{rclrcl}
\int_0^T [r(s) - \frac{1}{2}|\theta(s)|^2] ds &=& -8,905, & \int_0^T [r(s) - |\theta(s)|^2] ds &=& -17,959, \\
\int_0^T [r(s) - \frac{3}{2}|\theta(s)|^2] ds &=& -27,014, & \int_0^T [r(s) + \frac{1}{2}|\theta(s)|^2] ds &=& 9,205, \\
\int_0^T r(s) ds &=& 0,15, & \sqrt{\int_0^T |\theta(s)|^2 ds} &=& 4,256.
\end{array}$$

Da $\theta(\cdot)$ deterministisch ist, gilt nach Lemma 3.10: $a = 0$. Weiter ist $E[\rho(T)] = e^{-\int_0^T r(s)ds} = 0,8607$ und damit gilt: $a \leq \frac{x_0}{z} = 0,7407 \leq E[\rho(T)]$. Nach der zweiten Aussage von Theorem 4.7 ist damit $\lambda > 0$ und $\mu > 0$.
Nach Bemerkung 6.7 ergibt sich für die CML folgendes:

$$E[r^*(3)] = \frac{\eta e^{0,15} N\left(\frac{\ln \eta + 9,205}{4,256}\right) - N\left(\frac{\ln \eta - 8,905}{4,256}\right)}{\eta N\left(\frac{\ln \eta - 8,905}{4,256}\right) - e^{17,959} N\left(\frac{\ln \eta - 27,014}{4,256}\right)} - 1 = 0,35,$$

Für η ergibt sich damit: $\eta = 354459,5229$. Damit folgt für die Varianz:

$$\begin{aligned} Var[x^*(3)] &= \left[\frac{\eta}{\eta N\left(\frac{\ln\eta+9{,}205}{4{,}256}\right) - e^{-0{,}15}N\left(\frac{\ln\eta-8{,}905}{4{,}256}\right)} - 1\right](E[r^*(T)]+1)^2 \\ &\quad - \frac{1}{\eta N\left(\frac{\ln\eta+9{,}205}{4{,}256}\right) - e^{-0{,}15}N\left(\frac{\ln\eta-8{,}205}{4{,}256}\right)}(E[r^*(T)]+1) \\ &= 0,000060. \end{aligned}$$

Es ergibt sich nach Proposition 6.4 folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{cases} \lambda N\left(\frac{\ln(\lambda/\mu)-8{,}905}{4{,}256}\right) - \mu e^{17{,}959}N\left(\frac{\ln(\lambda/\mu)-27{,}014}{4{,}256}\right) = e^{0{,}15}, \\ \lambda N\left(\frac{\ln(\lambda/\mu)+9{,}205}{4{,}256}\right) - \mu e^{-0{,}15}N\left(\frac{\ln(\lambda/\mu)-8{,}905}{4{,}256}\right) = 1,35. \end{cases}$$

Mit dem Excel-Sheet erhalten wir folgende approximierte Lösungen für λ und μ:

$$\lambda = 1,3500, \qquad \mu = 0,0000038.$$

Damit ergibt sich als effizientes Portfolio das eines replizierenden Portofolios einer europäischen Put-Option mit dem fiktiven Wertpapier nach (6.7) und (6.8):

$$\begin{cases} dy(t) = y(t)[(0,05 - 0,09 \cdot e^{2(3-x)})dt - 0,03 \cdot e^{3-x}dW(t)], \\ y(0) = 206,6550 \text{ €}, \end{cases}$$

die einen Ausübungspreis von $\lambda = 1,35$ und Fälligkeit nach $T = 3$ Jahren.
Somit erhalten wir bei einer erwarteten Rendite von 35 % eine Standardabweichung von 0,77 %.

Auch hier wollen wir uns die Entwicklung der Varianz in Abhängigkeit des erwarteten Ertrages grafisch veranschaulichen. Analog zum ersten Vorgehen wurden die Werten von z zum Zeitpunkt T zwischen 1,17 und 2 mit Schritten von 0,01. Für kleinere Werte von z lieferten die Berechnungen zu große Abweichungen, so dass auf diese Werte verzichtet wurde. Nach Bemerkung 6.7 wurde wiederum über den erwarteten Ertrag die Variable η approximiert und mit diesem Wert dann die entsprechende Varianz berechnet.
Auf Seite 79 ist der Graph für dieses Beispiel zu finden. Auch hier steigt die Varianz überproportional zum erwarteten Ertrag an, die Funktion ist also konvex. Die Ertragssteigerung wirkt sich somit prozentual stärker auf die Steigerung der Varianz aus. Auffällig ist hier, dass die Werte der Varianz sehr gering sind, d.h. die Abweichung vom erwarteten Ertrag ist in den meisten Fällen sehr klein.

Kapitel 7

Zusammenfassung

Diese Diplomarbeit hat die Optimierung eines Mean-Variance Portfolios in einem vollständigen und arbitragefreien Markt untersucht, bei der die Insolvenz des Investors ausgeschlossen wurde. Die Untersuchung liefert als eindeutiges Ergebnis für ein solches optimales Portfolio ein replizierendes Portfolio einer europäischen Put-Option.

Die Arbeit verzichtet auf die numerische Simulation von effizienten Portfolios bei stochastischen Marktkoeffizienten. Im Falle von deterministischen Marktkoeffizienten lässt sich allerdings ein effizientes Portfolio und für einen vorgegebenen erwarteten Ertrag auch dessen Varianz berechnen, wie zwei Beispiele am Ende zeigen.

Weiterhin wurde in dieser Arbeit die Optimierung eines Benchmark-Portfolios untersucht und dessen Ergebnisse ebenfalls bewiesen. Ebenso wurden Vergleiche zu den Ergebnissen anderer Optimierungsprobleme hergestellt, so zu der Optimierung von nichtlinearen Vermögensprozessen, zu der Optimierung von gewichteten Mean-Variance Portfolios und zur Optimierung von Nutzenfunktionen. Im Kapitel über die mathematischen Grundlagen wurden die rückwärts stochastischen Differentialgleichungen besonders betrachtet.

Allerdings bringt die Untersuchung den Nachteil, dass sie die Minimierung der Varianz des Vermögens als Ganzes zur Optimierung des Portfolios betrachtet. Dies ist insofern nicht unbedingt wünschenswert, da für einen Investor nur die Abweichung nach unten als negativ bewertet wird. Eine Lösung für ein solches Optimierungsproblem ist nach jetzigem Stand allerdings nicht möglich.

Außerdem konnte in der Arbeit die Untersuchung der Nutzenoptimierung nur angerissen, aber nicht näher darauf eingegangen werden. Hier wäre die Frage interessant gewesen, unter welchen Voraussetzungen die optimale Lösung für das Mean-Variance Problem auch den Nutzen des Investors maximiert.

Literaturverzeichnis

[1] Aludaat, K.M. & Alodat, M.T. (2008), A Note on Approximation the Normal Distribution Function, in: *Applied Mathematical Sciences*, Vol 2(9), S. 425-429.

[2] Amann, H. & Escher, J. (2006), *Analysis I*, 3. Auflage, Birkhäuser Verlag.

[3] Bielecki, T.R., Jin, H., Pliska, S.T. & Zhou, X.Y. (2005), Continous-Time Mean-Variance Portfolio Selection With Bankruptcy Prohibition, in: *Mathematical Finance*, Vol. 15(2), April, S. 213-244.

[4] Duffie, D. & Richardson, H.R. (1991), Mean-Variance Hedging in Continuous Time, in: *The Annals of Applied Probability*, Vol. 1(1), Februar, S. 1-15.

[5] El Karoui, N., Peng, S. & Quenez, M.C. (1997), Backward Stochastic Differential Equations in Finance, in: *Mathematical Finance*, Vol. 7(1), Januar, S. 1-71.

[6] Frey, R. (2009), *Financial Mathematics in Continuous Time*, Version from April 3, 2009.

[7] Irle, A. (2001), *Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik: Grundlagen - Resultate - Anwendungen*, 1. Auflage, Vieweg+Teubner.

[8] Ji, S. (2010), Dual method for continuous-time Marowitz's problems with nonlinear wealth equations, in: *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, Vol. 366, S. 90-100.

[9] Jin, H., Yan, J.-A. & Zhou, X.Y. (2005), Continuous-time mean-risk portfolio selection, in: *Annales de L'Institut Henri Poincare*, Elsevier, PR 41, S. 559-580.

[10] Johnson, N.L., Kotz, S. & Balakrishnan, N. (1994), *Continuous Unvariate Distributions*, Vol. 1, 2. Auflage, Wiley Series in Probability ans Mathematical Statistics.

[11] Karatzas, I. & Shreve, S.E. (1997), *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, Second Edition, Springer Verlag, New York.

[12] Li, X., Zhou, X.Y. & Lim, A.E.B. (2002), Dynamic Mean-Variance Portfolio Selection with No-Shorting Contraints, in: *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 40(5), S. 1540-1555.

[13] Markowitz, H. (1952), Portfolio Selection, in: *The Journal of Finance*, Vol. 7(1), März, S. 77-91.

[14] Page, E. (1977), Approximations to the Cumulative Normal Function and its Inverse for Use on a Pocket Calculator, in: *Journal of the Royal Statistical Society. Series C (Applied Statistics)*, Vol. 26(1), S. 75-76.

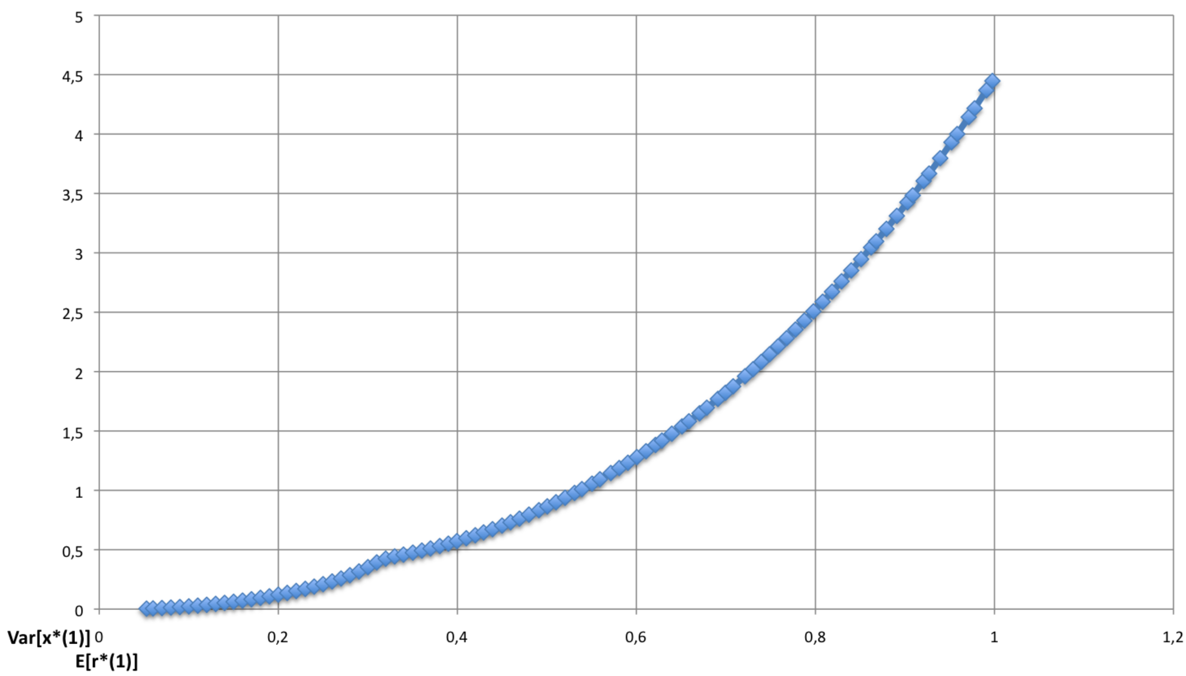
[15] Schmidt, T. & Frey, R. (2008), *Vorlesungsskript Finanzmathematik I*, Version vom 18. Januar 2008.

[16] Shreve, S.E. (2010), *Stochastic Calculus in Finance II: Continuous Time Models*, Springer Science+Business Media, New York.

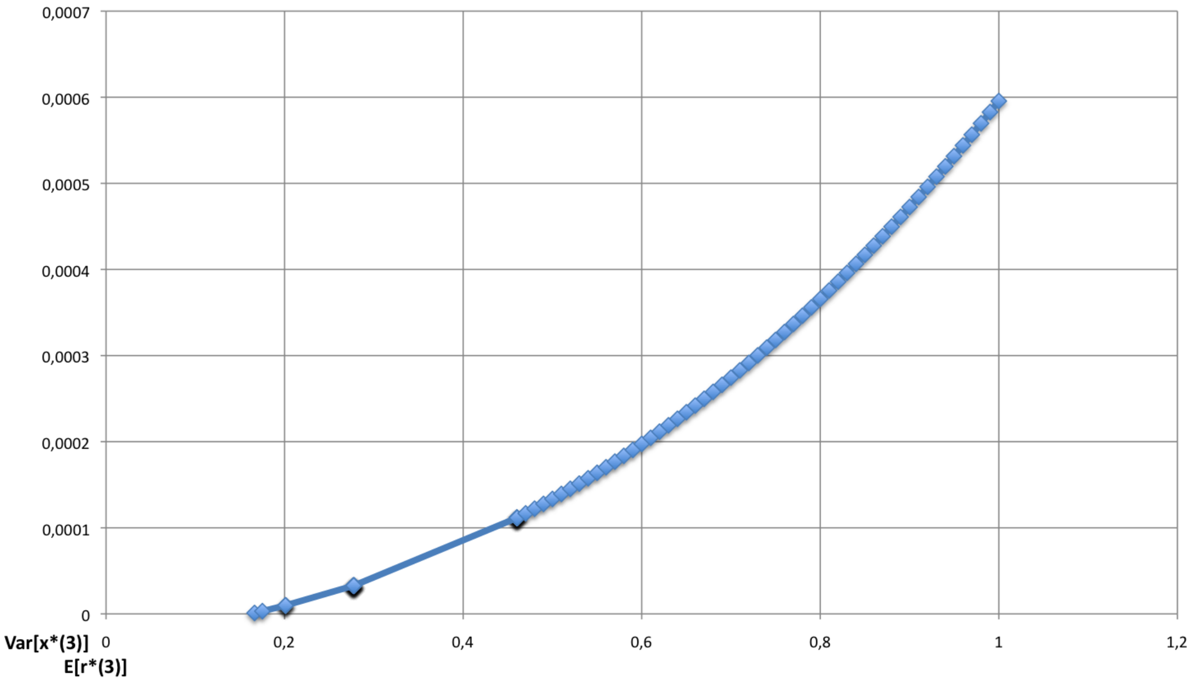
Anlagen

In den Anlagen befinden sich zwei Grafiken zu den unter Abschnitt 6.3 dargestellten Beispielen. Sie stellen die Varianz des entsprechenden Portfolios (auf der Ordinate) in Abhängigkeit von dessen erwarteten Ertrag (auf der Abzisse) dar. Die Abstände zwischen dem erwarteten Ertrag sind stets gleich und haben die Länge 0,01. Sie beginnen bei Werten, die größer als Null sind, und enden bei einem erwarteten Ertrag von 100 %.
Die Grafiken beruhen auf den beschriebenen näherungsweisen Berechnungen und wurden mit Microsoft Excel durchgeführt. Die Ergebnisse wurden bis zur dritten Stelle hinter dem Komma genau berechnet. Für sehr kleine Werte des erwarteten Ertrags wird die entsprechende Varianz allerdings nicht angegeben, da hier die Messungenauigkeit zu groß sind.

Grafik zum Beispiel 6.9



Grafik zum Beispiel 6.10



Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe, insbesondere sind wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet. Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandlung auch nachträglich zur Aberkennung des Abschlusses führen kann.

Leipzig, 23. Januar 2012

gez. Oliver Janke