Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut

Innere Regularität von Lösungen der p-Laplacegleichung

Diplomarbeit

Leipzig, 11. Oktober 2010

Vorgelegt von
Kriener, Florian
Studiengang Mathematik

Betreuender Hochschullehrer:
Prof. Dr. Rainer Schumann
Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik
Mathematisches Institut
Abteilung Analysis

Danksagung

Vielen Dank an Prof. Rainer Schumann für seine sehr gute, konstante und freundliche Betreuung und seine praktische Hilfe bei den zahlreichen Problemen, über die ich auf dem Weg zur Diplomarbeit gestolpert bin.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1
Einleitung

Sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, und sei $p > 2$. Wir betrachten die degeneriert elliptische quasilineare partielle Differentialgleichung

$$-D_i\left(|Du|^{p-2}D_iu\right) = 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{1.1}$$

Diese Gleichung wird häufig als *p-Laplacegleichung* bezeichnet, da sie der Struktur der Laplacegleichung sehr ähnlich ist. Tatsächlich ist sie im Spezialfall $p = 2$ mit der Laplacegleichung identisch. Wir werden auf die p-Laplacegleichung in Kapitel 2 näher eingehen.

Offensichtlich ist eine Lösung $u \in W^{2,p}(\Omega)$ der starken Gleichung (1.1) auch eine Lösung der *schwachen Gleichung*

$$\int_\Omega |Du|^{p-2}D_iuD_iv\,dx = 0 \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.2}$$

Andersherum folgt aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung, dass eine Lösung $u \in W^{2,p}(\Omega)$ der schwachen Gleichung auch eine Lösung der starken Gleichung ist. Da es aber nicht immer möglich ist eine Lösung in $W^{2,p}(\Omega)$ zu finden, begnügt man sich häufig mit einer Lösung $u \in W^{1,p}(\Omega)$ der schwachen Gleichung. Eine solche Lösung heißt *schwache Lösung* von (1.1). Wie wir in Abschnitt 2.2 zeigen werden, besitzt die p-Laplacegleichung für mindestens eine Klasse von Randwertproblemen eine eindeutige schwache Lösung. Auf den Zusammenhang zwischen klassischer und schwacher Lösung werden wir in Abschnitt 1.4 kurz eingehen.

Es stellt sich die Frage, welche Regularitätseigenschaften eine solche schwache Lösung $u \in W^{1,p}(\Omega)$ der p-Laplacegleichung hat. Untersucht wurde diese Frage unter anderem von Ural'ceva[1] und Uhlenbeck [Uhl77], welche unabhängig voneinander lokale $C^{1,\alpha}$-Regularität für eine größere Klasse quasilinearer partieller Differentialgleichungen nachwiesen.

Das in dieser Arbeit behandelte Resultat stammt von Evans [Eva82]. Es ist ein relativ neuer Beweis der lokalen Hölderstetigkeit des Gradienten von Lösungen der p-Laplacegleichung. Evans benutzt dazu eine geschickte Modifikation der Techniken

[1] Laut [Eva82, S. 357] gelang Ural'ceva in einem 1968 auf Russisch veröffentlichtem Paper mit dem Titel „Degenerate quasilinear elliptic systems" als erste der Beweis der $C^{1,\alpha}$-Regularität.

von Moser [Mos60] und De Giorgi. Wir beweisen die Hauptaussage des Papers [Eva82, Theorem 1] in Kapitel 3, sie lautet:

Satz 1.1. *Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ eine schwache Lösung der p-Laplacegleichung* (1.1). *Dann gibt es eine Konstante $\alpha = \alpha(p,n) > 0$ und, für jede Teilmenge $\Omega' \Subset \Omega$, eine Konstante $C = C(\Omega', p, n, \|u\|_{1,p,\Omega})$, so dass gilt*

$$\sup_{\Omega'} |Du| \leq C \tag{1.3}$$

und

$$[Du]_{\alpha,\Omega'} \leq C. \tag{1.4}$$

Die folgenden Abschnitte bieten einen unvollständigen Einblick in verschiedene, für den Beweis des Satzes wichtige Themengebiete. Wir beschränken uns dabei auf ein paar wenige, ausgewählte Sätze (zudem meistens ohne Beweis), da eine ausführlichere Betrachtung den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, und verweisen statt dessen auf die zahlreichen einschlägigen Lehrbücher.

1.1 Notation

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ dann ist $x = (x_1, \dots, x_n)$ und es bezeichne

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

die euklidische Norm von x. Sei weiter $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine (schwach) differenzierbare Funktion, dann bezeichne

$$Du = \operatorname{grad} u = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$$

den Gradienten von u und $D_i u = D_{x_i} u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}$ die (schwachen) partiellen Ableitungen von u in Richtung x_i. Wir bezeichnen eine Kugel mit Radius $R > 0$ und Mittelpunkt $x^0 \in \Omega$ mit

$$B(x^0, R) := \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x^0| < R\}.$$

Ist der Mittelpunkt beliebig oder durch den Kontext eindeutig, so schreiben wir auch einfach $B(R)$ anstatt $B(x^0, R)$.

Weiterhin sei der Mittelwert einer integierbaren Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ über einer messbaren Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, mit dem Lebesgue-Maß $|M| < \infty$, definiert durch

$$\fint_M f \, dx = \frac{1}{|M|} \int_M f \, dx.$$

Außerdem verwenden wir, um die Notation zu vereinfachen, eine modifizierte Form der Einsteinschen Summenkonvention; über mehrfach auftretende Indicies wird summiert, dabei unterscheiden wir nicht zwischen hoch- und tiefgestellten Indicies. Ferner steht der Buchstabe C in der ganzen Arbeit für verschiedene Konstanten, welche nur von bekannten Größen abhängen.

1.2 Lebesgue-, Sobolev- und Hölder-Räume

Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und seien für $1 \leq p \leq \infty$ die Lebesgue-Räume $L^p(\Omega)$ und Sobolov-Räume $W^{1,p}(\Omega)$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ definiert wie üblich (cf. [AF03]). Die Lebesgue-Norm auf $L^p(\Omega)$ sei definiert durch

$$\|u\|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

und die Sobolev-Norm auf $W^{1,p}(\Omega)$ durch

$$\|u\|_{1,p,\Omega} = \left(\int_\Omega |u|^p + |Du|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Außerdem ist

$$|u|_{1,p,\Omega} = \left(\int_\Omega |Du|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.5}$$

eine Halbnorm auf $W^{1,p}(\Omega)$. Diese Halbnorm ist auf $W_0^{1,p}(\Omega)$ eine Norm, äquivalent zur Sobolev-Norm.

Satz 1.2 (Hölder-Ungleichung). *Sei $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ mit $p, q > 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt*

$$\int_\Omega uv \, dx \leq \left(\int_\Omega |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Beweis siehe [AF03].

Definition 1.3. Wir sagen $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$, wenn für jeden Punkt $x^0 \in \partial\Omega$ ein $R > 0$ existiert und eine Funktion $F \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$, so dass – eventuell nach Umordnung der Koordinatenachsen – gilt

$$\Omega \cap B(x^0, R) = \{x \in B(x^0, R) : x_n > F(x_1, \ldots, x_{n-1})\}.$$

Satz 1.4 (Sobolev-Ungleichung für $W^{1,p}$). *Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $1 \leq p < n$ und sei $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$, dann gibt es eine positive Konstante $C = C(p, n, \Omega)$, so dass gilt*

$$\left(\int_\Omega |u|^{p^*} \, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C \left(\int_\Omega |u|^p + |Du|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

mit $p^* = \frac{np}{n-p}$.

Beweis siehe [Eva98, Theorem 5.6.2].

Satz 1.5 (Sobolev-Ungleichung für $W_0^{1,p}$). *Sei $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $1 \leq p < n$, dann gilt für $1 \leq q \leq p^*$ die Abschätzung*

$$\left(\int_\Omega |u|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_\Omega |Du|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

mit $C = C(p, q, n, \Omega)$.

Beweis siehe [Eva98, Theorem 5.6.3].

Lemma 1.6. *Sei $u \in W^{1,2}(B(R))$ ($R > 0$, $B(R) \subset \mathbb{R}^n$) und sei M eine messbare Teilmenge von $B(R)$ mit $|M| \geq \delta|B(R)|$ für ein $\delta > 0$. Dann existiert eine Konstante $C = C(n, \delta)$, so dass gilt*

$$\fint_{B(R)} w^2\, dx \leq C\left(R^2 \fint_{B(R)} |Dw|^2\, dx + \fint_M w^2\, dx\right).$$

Beweis siehe [Mos60, Lemma 2].

Definition 1.7. Eine auf Ω definierte Funktion u heißt *Hölder-stetig in $x^0 \in \Omega$ mit Exponent α*, wenn gilt

$$[u]_{\alpha,x^0} = \sup_{x\in\Omega} \frac{|u(x) - (x^0)|}{|x - x^0|^\alpha} < \infty$$

und sie heißt *gleichmäßig Hölder-stetig in Ω mit Exponent α* wenn gilt

$$[u]_{\alpha,\Omega} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty.$$

Für $\alpha = 1$ entspricht die Hölder-Stetigkeit der Lipschitz-Stetigkeit.

Sei $0 < \alpha \leq 1$ und $C^{0,\alpha}(\Omega)$ der Raum der in Ω gleichmäßig Hölder-stetigen Funktionen mit Exponent α, dann ist

$$[u]_{\alpha,\Omega} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega\\ x\neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

eine Halbnorm auf $C^{0,\alpha}(\Omega)$. Wir bezeichnen diesen Raum auch kurz $C^\alpha(\Omega)$. Die Hölder-Räume $C^{k,\alpha}(\Omega)$ definieren wir als Unterräume von $C^k(\Omega)$, bestehend aus Funktionen, deren k-ten Ableitungen in $C^\alpha(\Omega)$ sind.

Bemerkung 1.8. Im Laufe dieser Arbeit verwenden wir hauptsächlich, aber nicht ausschließlich, die hier vorgestellten Räume und verweisen für die weiteren Räume auf [AF03][2].

1.3 Glättung und Approximation durch glatte Funktionen

Eine wichtige Technik in der Theorie über Funktionen in Sobolev-Räumen ist die Glättung und die Approximation durch glatte Funktionen. Auch wir benötigen sie zum Beweis von Satz 1.1 in Kapitel 3.

Wir definieren zunächst den Glättungsoperator. Sei dazu $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine nicht-negative Funktion mit den Eigenschaften

[2] Anstatt C_0^∞ verwenden wir jedoch C_c^∞ für den Raum der unedlich differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger.

(i) $\operatorname{supp}\varphi \subset B(1,0)$ und

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = 1$.

Ein typisches Beispiel für eine solche Funktion ist

$$\varphi(x) = \begin{cases} c\exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{für } |x| < 1 \\ 0 & \text{für } |x| \geq 1, \end{cases}$$

wobei $c > 0$ so gewählt wird, dass Bedingung (ii) erfüllt ist. Dann gehört, für $\delta > 0$, die (ebenfalls nicht-negative) Funktion $\varphi_\delta(x) = \delta^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\delta}\right)$ ebenfalls zu $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ und es gilt

(i) $\operatorname{supp}\varphi_\delta \subset B(\delta,0)$ und

(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\delta(x)\, dx = 1$.

Die Funktion φ_δ heißt *Glättungsfunktion*.

Definition 1.9 (Glättungsoperator)**.** Sei u eine lokal integrierbare Funktion. Dann ist der *Glättungsoperator* S_δ definiert durch

$$(S_\delta u)(x) = (\varphi_\delta * u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\varphi_\delta(x-y)\, dx. \tag{1.6}$$

Wir nennen $S_\delta u$ *Glättung von* u.

Satz 1.10 (Eigenschaften des Glättungsoperators)**.** *Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$ und u eine Funktion mit Definitionsbereich $\mathbb{R}^n$, die außerhalb von Ω identisch verschwindet.*

(a) Ist $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, dann ist $S_\delta u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(b) Ist $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ und $\operatorname{supp} u \Subset \Omega$, dann ist $S_\delta u \in C^\infty(\Omega)$ für alle $\delta > 0$ mit $\delta < \operatorname{dist}(\operatorname{supp} u, \partial\Omega)$.

(c) Ist $u \in L^p(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$, dann ist $S_\delta u \in L^p(\Omega)$ und es gilt

$$\|S_\delta u\|_{p,\Omega} \leq \|u\|_{p,\Omega} \quad \textit{und} \quad \lim_{\delta\to 0^+} \|S_\delta u - u\|_{p,\Omega} = 0$$

(d) Ist $u \in C(\Omega)$ und $K \Subset \Omega$, dann $\lim_{\delta\to 0^+} S_\delta u(x) = u(x)$ gleichmäßig auf K.

(e) Ist $u \in C(\overline{\Omega})$, dann $\lim_{\delta\to 0^+} S_\delta u(x) = u(x)$ gleichmäßig auf Ω.

Beweis siehe [AF03, Theorem 2.29].

Satz 1.11 (Glättung in $W^{m,p}(\Omega)$)**.** *Sei $1 \leq p < \infty$ und $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Wenn $\Omega' \Subset \Omega$ ein Untergebiet ist, dann gilt $S_\delta u \longrightarrow u$ in $W^{m,p}(\Omega')$ für $\delta \to 0^+$.*

Beweis siehe [AF03, Theorem 3.16].

1.4 Quasilineare elliptische Gleichungen 2. Ordnung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, ein Gebiet und sei Q ein quasilinearer Differentialoperator der Form

$$Qu = a^{ij}(x, u, Du)D_{ij}u + b(x, u, Du), \tag{1.7}$$

dabei seien $a^{ij}(x, z, p)$, $i, j = 1, \dots, n$ und $b(x, z, p)$ auf ganz $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ definiert und es gelte $a^{ij} = a^{ji}$.

Definition 1.12. Sei $U \subset \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Dann heißt der Operator Q *elliptisch in* U, wenn es ein $\lambda(x, z, p)$ und ein $\Lambda(x, z, p)$ gibt, so dass für alle $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ und für alle $(x, z, p) \in U$ gilt

$$0 < \lambda(x, z, p)|\xi|^2 \leq a^{ij}(x, z, p)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x, z, p)|\xi|^2. \tag{1.8}$$

Ist außerdem $\Lambda(x, z, p)/\lambda(x, z, p)$ in U beschränkt, so nennen wir Q *gleichmäßig elliptisch in* U. Gilt anstatt $\lambda(x, z, p) > 0$ nur $\lambda(x, z, p) \geq 0$, so nennen wir Q *degeneriert elliptisch in* U.

Definition 1.13. Der Operator Q ist in *Divergenzform*, wenn es differenzierbare Funktionen $A^1(x, z, p), \dots, A^n(x, z, p)$ gibt, so dass gilt

$$Qu = D_iA^i(x, u, Du) + B(x, u, Du) \tag{1.9}$$

also in (1.7)

$$a^{ij}(x, z, p) = \frac{1}{2}\left(D_{q_i}A^j(x, z, p) + D_{q_j}A^i(x, z, p)\right). \tag{1.10}$$

Im Folgenden werden wir uns im Allgemeinen nur mit Differentialoperatoren in Divergenzform beschäftigen. Sei daher nun

$$Qu = D_iA^i(x, u, Du) + B(x, u, Du),$$

mit $A^i(x, u, Du)$, $i = 1, 2, \dots, n$ und $B(x, u, Du)$ lokal integrierbar. Differentialoperatoren in Divergenzform haben den Vorteil, dass sie für eine wesentlich größere Klasse von Funktionen definiert werden können als in der klassischen Theorie:

Definition 1.14. Eine Funktion $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$ heißt *schwache* oder *verallgemeinerte Lösung von* $Qu = 0$ bzw. *erfüllt* $Qu = 0$ *im schwachen* oder *verallgemeinerten Sinn*, wenn gilt

$$\int_\Omega A^i(x, u, Du)D_i\eta + B(x, u, Du)\eta \, dx = 0 \quad \text{für alle } \eta \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1.11}$$

Entsprechend heißt obige Gleichung *schwache Gleichung*.

Ist außerdem $D_i A^i(x, u, Du)$ lokal integrierbar, so folgt aus dem Fundamentallemma der Variationsrechnung durch partielle Integration der obigen Gleichung, dass eine schwache Lösung $u \in C^2(\Omega)$ auch eine klassische Lösung ist. Andersherum erfüllt eine klassische Lösung $u \in C^2(\Omega)$ dann die schwache Gleichung.

Häufig ist es außerdem sinnvoll Unter- und Oberlösungen von partiellen Differentialgleichungen zu betrachten. Dabei heißt u *Unterlösung von* Q, wenn gilt $Qu \geq 0$ und *Oberlösung*, wenn gilt $Qu \leq 0$.

Definition 1.15. Eine Funktion $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$ heißt *schwache Unterlösung von* Q, bzw. *erfüllt* $Qu \geq 0$ *im schwachen* oder *verallgemeinerten Sinn*, wenn gilt

$$\int_\Omega A^i(x, u, Du) D_i \eta + B(x, u, Du) \eta \, dx \leq 0 \quad \text{für alle } \eta \in W_0^{1,p}(\Omega), \eta \geq 0. \tag{1.12}$$

Und sie heißt *schwache Oberlösung von* Q, bzw. *erfüllt* $Qu \leq 0$ *im schwachen* oder *verallgemeinerten Sinn*, wenn gilt

$$\int_\Omega A^i(x, u, Du) D_i \eta + B(x, u, Du) \eta \, dx \geq 0 \quad \text{für alle } \eta \in W_0^{1,p}(\Omega), \eta \geq 0. \tag{1.13}$$

Selbstverständlich gilt auch für Unter- und Oberlösungen die Äquivalenz von schwacher und klassischer Lösung im Fall lokaler Integrierbarkeit der Funktion $D_i A^i(x, u, Du)$ und $u \in C^2(\Omega)$.

Lemma 1.16. *Sei* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine nicht-negative, konvexe, monoton wachsende Funktion und sei* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *eine schwache Unterlösung des elliptischen Operators* Q. *Dann ist* $f \circ u$ *eine schwache Unterlösung von* Q.

Für einen Beweis siehe [GM05, Lemma 8.9] und [Mos60, Lemma 1].

1.5 Drei Ungleichungen

Lemma 1.17. *Sei* $(y_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ *eine nicht-negative Folge und es gelte*

$$y_{k+1} \leq c b^k y_k^{1+\varepsilon} \quad \textit{für } k = 0, 1, 2, \ldots$$

mit Konstanten $\varepsilon, c > 0$ *und* $b > 1$. *Dann gilt*

$$y_k \leq c^{\frac{(1+\varepsilon)^k - 1}{\varepsilon}} b^{\frac{(1+\varepsilon)^k - 1}{\varepsilon^2} - \frac{k}{\varepsilon}} y_0^{(1+\varepsilon)^k}.$$

Gilt außerdem

$$y_0 \leq \theta = c^{-\frac{1}{\varepsilon}} b^{-\frac{1}{\varepsilon^2}},$$

dann ist

$$y_k \leq \theta b^{-\frac{k}{\varepsilon}}$$

und es folgt

$$y_k \longrightarrow 0 \quad \textit{für } k \to \infty.$$

Beweis siehe [LU68, Lemma 4.7].

Lemma 1.18 (Young'sche Ungleichung). *Sei $a, b, p, q \in \mathbb{R}^+$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, dann gilt*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Außerdem gilt für $\varepsilon > 0$

$$ab \leq \varepsilon \frac{a^p}{p} + \varepsilon^{-q/p} \frac{b^q}{q} \leq \varepsilon a^p + \varepsilon^{-q/p} b^q.$$

Beweis siehe [Eva98, Appendix B.2].

Lemma 1.19. *Seien $\omega_1, \ldots, \omega_M$ und $\bar{\omega}_1, \ldots, \bar{\omega}_N$ monoton wachsende Funktionen auf dem Intervall $(0, R_0)$ und für jedes $0 < R \leq R_0$ existiere eine Funktion $\bar{\omega}_k$, $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, die folgenden Ungleichungen genügt*

(i) $\bar{\omega}_k(R) \geq \delta_0 \omega_i(R)$ *für* $i = 1, 2, \ldots, M$ *und*

(ii) $\bar{\omega}_k(\tau R) \leq \kappa \bar{\omega}_k(R)$,

mit $\delta_0 > 0$ und $0 < \kappa, \tau < 1$. Dann gibt es Konstanten $C = C(N, M, \delta_0, \kappa, \tau)$ und $\beta = \beta(N, M, \delta_0, \kappa, \tau) > 0$, so dass für alle $i = 1, \ldots, M$ und alle $0 < R < R_0$ gilt

$$\omega_i(R) \leq C \left(\frac{R}{R_0} \right)^\beta \max_{j=1,\ldots,N} \bar{\omega}_j(R_0). \tag{1.14}$$

Diese Aussage bleibt war, wenn es im Intervall $(0, R_0)$ eine Lücke $(\tau R_1, R_1]$ gibt mit $0 < R_1 < R_0$ in der die Ungleichungen (i) und (ii) nicht erfüllt sind. Die Konstanten C, β hängen nicht *von R_1 ab.*

Beweis. Sei zunächst keine Lücke im Intervall $(0, R_0)$ vorhanden. Dann können wir für jedes $R \leq R_0$ ein m wählen, so dass gilt

$$\tau^m R_0 < R \leq \tau^{m-1} R_0$$

und es folgt

$$m > \frac{\log \frac{R}{R_0}}{\log \tau}. \tag{1.15}$$

Also gibt es ein $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$, so dass nach (i) für alle $i = 1, 2, \ldots, M$ gilt

$$\omega_i(R) \leq \omega_i(\tau^{m-1} R_0) \leq \frac{1}{\delta_0} \bar{\omega}_k(\tau^{m-1} R_0). \tag{1.16}$$

Diese Gleichung können wir nach (ii) iterieren, folglich gilt

$$\frac{1}{\delta_0} \bar{\omega}_k(\tau^{m-1} R_0) \leq \frac{1}{\delta_0} \kappa^{m-1} \bar{\omega}_k(R_0). \tag{1.17}$$

Außerdem folgt aus (1.15)

$$\frac{1}{\delta_0}\kappa^{m-1}\bar{\omega}_k(R_0) \le \frac{1}{\delta_0\kappa}\kappa^{\log_\kappa\left(\frac{R}{R_0}\right)\log\kappa/\log\tau}\bar{\omega}_k(R_0).$$

Zusammen gilt also

$$\begin{aligned}\omega_i(R) &\le \frac{1}{\delta_0\kappa}\kappa^{\log_\kappa\left(\frac{R}{R_0}\right)\log\kappa/\log\tau}\bar{\omega}_k(R_0)\\ &= \frac{1}{\delta_0\kappa}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\log\kappa/\log\tau}\bar{\omega}_k(R_0).\end{aligned}$$

Gibt es nun im Intervall $(0, R_0)$ eine Lücke $(\tau R_1, R_1]$, in der weder (i) noch (ii) gilt, gehen wir zunächst wie oben vor und wählen uns für jedes $R \le R_0$ ein m, so dass gilt

$$\tau^m R_0 < R \le \tau^{m-1}R_0.$$

Ist dabei $\tau^{m-1}R_0$ in der Lücke, d.h. $\tau R_1 < \tau^{m-1}R_0 \le R_1$, dann folgt durch Divistion mit τ, dass $\tau^{m-2}R_0$ nicht mehr in der Lücke liegt, denn es gilt $R_1 < \tau^{m-2}R_0$. Somit erhalten wir

$$\tau^m R_0 < R \le \tau^{m-2}R_0.$$

Da ferner $\tau^{m-l}R_0$ für steigende l wächst, und somit $\tau^{m-l}R_0$ für $l = 2, 3, \ldots, m$ nicht in der Lücke liegen, erhalten wir, analog zu obiger Rechnung – wir ersetzen in (1.16) τ^{m-1} durch τ^{m-2},

$$\omega_i(R) \le \frac{1}{\delta_0\kappa^2}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\log\kappa/\log\tau}\bar{\omega}_k(R_0)$$

für ein $k \in \{1, 2, \ldots, N\}$ und für alle $i = 1, 2, \ldots, M$.

Ist dagegen $\tau^{m-1}R_0 \le \tau R_1$, so können wir nicht ohne weiters wie in (1.17) iterieren, da (ii) nicht für alle $\tau^{m-l}R_0$ gilt. Sei nun l die größte Zahl die $\tau^{m-l}R_0 \le \tau R_1$ erfüllt, dann ist

$$\frac{1}{\delta_0}\bar{\omega}_k(\tau^{m-1}R_0) \le \frac{1}{\delta_0}\kappa^l\bar{\omega}_k(\tau^{m-1-l}R_0)$$

und es gilt $\tau R_1 < \tau^{m-1-l}R_0 \le R_1$. Wie oben gilt aber auch hier $R_1 < \tau^{m-2-l}R_0$ und es folgt, dank Monotonie und durch Iteration,

$$\frac{1}{\delta_0}\kappa^l\bar{\omega}_k(\tau^{m-1-l}R_0) \le \frac{1}{\delta_0}\kappa^l\bar{\omega}_k(\tau^{m-2-l}R_0) \le \frac{1}{\delta_0}\kappa^{m-2}\bar{\omega}_k(R_0).$$

Wir haben also auch hier

$$\omega_i(R) \le \frac{1}{\delta_0\kappa^2}\left(\frac{R}{R_0}\right)^{\log\kappa/\log\tau}\bar{\omega}_k(R_0).$$

Schließlich erledigt sich der Fall $\tau^{m-1}R_0 > R_1$ von selbst, da hier genau so vorgegangen werden kann wie am Anfang des Beweises. ∎

Kapitel 2
Die p-Laplacegleichung

Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ein Gebiet und $p > 2$. Für den Beweis von Satz 1.1 benötigen wir ein paar grundlegende Eigenschaften der p-Laplacegleichung

$$-D_i\left(|Du|^{p-2}D_iu\right) = 0 \quad \text{in } \Omega \tag{2.1}$$

und die einer mit dem Parameter $\varepsilon > 0$ regularisierten Version dieser Gleichung auf einer Kugel $B(R) \subset \Omega$

$$-D_i\left(\left(|Du|^{p-2} + \varepsilon\right)D_iu\right) = 0 \quad \text{in } B(R). \tag{2.2}$$

Wir beschränken uns bei der Darstellung der Eigenschaften auf die Elliptizität und die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung und verweisen auf Serrin [Ser64], Marcellini [Mar91], Lindqvist [Lin06] und Chipot [Chi09] für tiefergehende Betrachtungen dieser beiden Gleichungen.

2.1 Elliptizität

Lemma 2.1. *Der p-Laplaceoperator $\triangle_p u = D_i\left(|Du|^{p-2}D_iu\right)$ ist degeneriert elliptisch in $U = \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit $\lambda(q) = |q|^{p-2}$ und $\Lambda(q) = (p-1)|q|^{p-2}$.*

Beweis. Es gilt $A^i(x,z,q) = A^i(q) = |q|^{p-2}q_i$, $i = 1,\dots,n$. Berechne zunächst a^{ij}:

$$\begin{aligned}
D_{q_i}A^j(q) &= D_{q_i}(|q|^{p-2})q_j + \delta_{ij}|q|^{p-2} \\
&= D_{q_i}\left(q_1^2 + \cdots + q_n^2\right)^{\frac{p-2}{2}} q_j + \delta_{ij}|q|^{p-2} \\
&= \frac{p-2}{2}\left(q_1^2 + \cdots + q_n^2\right)^{\frac{p-4}{2}} D_{q_i}\left(q_1^2 + \cdots + q_n^2\right) q_j + \delta_{ij}|q|^{p-2} \\
&= (p-2)\,|q|^{p-4}q_iq_j + \delta_{ij}|q|^{p-2} \\
&= D_{q_j}A^i(q)
\end{aligned}$$

Damit gilt also $a^{ij}(q) = (p-2)\,|q|^{p-4}q_iq_j + \delta_{ij}|q|^{p-2}$. Betrachte nun

$$\begin{aligned}
a^{ij}(q)\xi_i\xi_j &= (p-2)\,|q|^{p-4}q_iq_j\xi_i\xi_j + \delta_{ij}|q|^{p-2}\xi_i\xi_j \\
&= (p-2)\,|q|^{p-4}(q_i\xi_i)^2 + |q|^{p-2}|\xi|^2,
\end{aligned}$$

wobei hier die Summe außerhalb $(q_i \xi_i)^2$ gebildet wird. Einerseits ist der erste Term der letzten Zeile dieser Gleichung positiv und andererseits gilt nach der Hölder-Ungleichung $(q_i \xi_i)^2 \leq |q|^2 |\xi|^2$. Daraus folgt

$$|q|^{p-2}|\xi|^2 \leq a^{ij}(q)\xi_i\xi_j \leq (p-1)|q|^{p-2}|\xi|^2,$$

denn es folgt aus der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} a^{ij}(q)\xi_i\xi_j &= (p-2)\,|q|^{p-4}(q_i\xi_i)^2 + |q|^{p-2}|\xi|^2 \\ &\leq (p-2)\,|q|^{p-4}|q|^2|\xi|^2 + |q|^{p-2}|\xi|^2 \\ &= (p-1)|q|^{p-2}|\xi|^2. \end{aligned}$$

■

Lemma 2.2. *Der Differentialoperator $\triangle_{p,\varepsilon} u = D_i\left(\left(|Du|^{p-2} + \varepsilon\right) D_i u\right)$ aus (2.2) ist für alle $\varepsilon > 0$ gleichmäßig elliptisch in $U = \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ mit $\lambda(q) = |q|^{p-2} + \varepsilon$ und $\Lambda(q) = (p-1)|q|^{p-2} + \varepsilon$.*

Beweis. Gehe vor wie im vorherigen Beweis. Es ist daher $A^i_\varepsilon(q) = (|q|^p + \varepsilon)\, q_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Also folgt

$$a^{ij}_\varepsilon \xi_i\xi_j = (p-2)\,|q|^{p-4}(q_i\xi_i)^2 + (|q|^{p-2} + \varepsilon)|\xi|^2.$$

Und mit dem selben Argument wie im vorherigen Beweis folgt hieraus

$$(|q|^{p-2} + \varepsilon)|\xi|^2 \leq a^{ij}_\varepsilon(q)\xi_i\xi_j \leq \left((p-1)|q|^{p-2} + \varepsilon\right)|\xi|^2.$$

Es bleibt noch die Gleichmäßigkeit zu zeigen. Betrachte dazu

$$\frac{\Lambda(q)}{\lambda(q)} = \frac{(p-1)|q|^{p-2} + \varepsilon}{|q|^{p-2} + \varepsilon} \leq (p-1)\frac{|q|^{p-2} + \varepsilon}{|q|^{p-2} + \varepsilon} \leq p - 1.$$

■

Das nächste Lemma ist aus [Mar91] und behandelt eine aus der Elliptizität folgende Eigenschaft der regularisierten Gleichung.

Lemma 2.3. *Für alle $\xi, \eta, q \in \mathbb{R}^n$ und für alle $\varepsilon > 0$ gilt*

$$\left|D_{q_j}A^i_\varepsilon(q)\,\xi_i\eta_j\right| \leq C\left(D_{q_j}A^i_\varepsilon(q)\,\xi_i\xi_j\right)^{\frac{1}{2}}\left(|q|^{p-2} + \varepsilon\right)^{\frac{1}{2}}|\eta|$$

Beweis. Da die Matrix $(D_{q_j}A^i_\varepsilon)_{i,j}$ positiv definit ist, wird durch

$$(\xi, \eta) := D_{q_j}A^i_\varepsilon(q)\,\xi_i\eta_j$$

ein Skalarprodukt definiert. Aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Elliptizität folgt somit

$$\begin{aligned} |(\xi,\eta)| &\leq (\xi,\xi)^{\frac{1}{2}}\,(\eta,\eta)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(D_{q_j}A^i_\varepsilon(q)\,\xi_i\xi_j\right)^{\frac{1}{2}}\left(D_{q_j}A^i_\varepsilon(q)\,\eta_i\eta_j\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (p-1)\left(D_{q_j}A^i_\varepsilon(q)\,\xi_i\xi_j\right)^{\frac{1}{2}}\left(|q|^{p-2} + \varepsilon\right)^{\frac{1}{2}}|\eta|. \end{aligned}$$

■

2.2 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung

Für den Beweis der Existenz und Eindeutigkeit benötigen wir eine Folgerung aus dem Hauptsatz über monotone Operatoren (cf. [Chi09, Abschnitt 17.3]):

Satz 2.4. *Sei X ein reflexiver Banachraum und A ein stetiger Operator von X in den dualen Raum X' und sei $f \in X'$. Sei A außerdem strikt monoton und koerzitiv, d.h. es gelte*

$$\langle Au - Av, u - v\rangle > 0 \quad \text{für alle } u, v \in X, u \neq v$$

und

$$\langle Av, v\rangle / \|v\| \longrightarrow +\infty \quad \text{für } \|v\| \to +\infty,$$

wobei $\|\cdot\|$ die Norm des Banachraumes X und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Dualitätsprodukt von X' und X sei, d.h. $\langle Au, v\rangle = (Au)(v)$. Dann hat die Gleichung

$$Au = f$$

eine eindeutige Lösung in X.

Lemma 2.5. *Für jede Randwertbedingung $h \in W^{1,p}(\Omega)$ existiert eine eindeutige schwache Lösung $u \in W^{1,p}(\Omega)$ des Dirichletproblems*

$$\begin{cases} -D_i\left(|Du|^{p-2}D_iu\right) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = h & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

wobei hiermit gemeint ist $u - h \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und

$$\int_\Omega |Du|^{p-2}D_iuD_iv\,dx = 0 \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Beweis. Seien $\tilde{u}, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und sei A ein Operator von $W_0^{1,p}(\Omega)$ in den Raum der linearen Abbildungen $W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit

$$\langle A\tilde{u}, v\rangle = \int_\Omega |D\tilde{u} + Dh|^{p-2}(D_i\tilde{u} + D_ih)D_iv\,dx.$$

Wenn A eine stetige Abbildung von $W_0^{1,p}(\Omega)$ in den Dualraum $(W_0^{1,p}(\Omega))'$ ist und A außerdem koerzitiv und monoton ist, dann können wir Satz 2.4 mit $X = W_0^{1,p}(\Omega)$ anwenden, d.h. dann besitzt das Dirichletproblem

$$\begin{cases} -D_i\left(|D\tilde{u} + Dh|^{p-2}(D_i\tilde{u} + D_ih)\right) = 0 & \text{in } \Omega \\ \tilde{u} = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

eine eindeutige Lösung $\tilde{u} \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Definiere nun $u := \tilde{u} + h$. Durch Einsetzen in obiges Problem erhalten wir (2.3).

Wir weisen nun nach, dass A ein koerzitver, monotoner und stetiger Operator von $W_0^{1,p}(\Omega)$ in den Dualraum $(W_0^{1,p}(\Omega))'$ ist.

Schritt 1. Zeige zunächst die Koerzitivität. Sei dazu $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und betrachte

$$\begin{aligned}
\langle Av, v\rangle &= \int_\Omega |Dv + Dh|^{p-2}\,(D_i v + D_i h) D_i v\,dx \\
&= \int_\Omega |Dv + Dh|^p\,dx - \int_\Omega |Dv + Dh|^{p-2}\,(D_i v + D_i h) D_i h\,dx \\
&\geq |v + h|_{1,p,\Omega}^p - \int_\Omega |Dv + Dh|^{p-1}\,|Dh|\,dx \qquad \text{(nach Cauchy-Schwarz)} \\
&\geq |v + h|_{1,p,\Omega}^p - \frac{p-1}{p}\int_\Omega |Dv + Dh|^p - \frac{1}{p}\int_\Omega |Dh|^p \qquad \text{(nach Young)} \\
&= \frac{1}{p}|v + h|_{1,p,\Omega}^p - \frac{1}{p}|h|_{1,p,\Omega}^p
\end{aligned}$$

Wir lassen nun $|v|_{1,p,\Omega} \to +\infty$ laufen. Dann können wir $\frac{1}{2}|v|_{1,p,\Omega} \geq |h|_{1,p,\Omega}$ annehmen. Folglich gilt nach der Dreicksungleichung

$$\begin{aligned}
p\frac{\langle Av, v\rangle}{|v|_{1,p,\Omega}} &\geq \frac{|v+h|_{1,p,\Omega}^p}{|v|_{1,p,\Omega}} - \frac{|h|_{1,p,\Omega}^p}{|v|_{1,p,\Omega}} \\
&\geq \frac{\left(|v|_{1,p,\Omega} - |h|_{1,p,\Omega}\right)^p}{|v|_{1,p,\Omega}} - \frac{|h|_{1,p,\Omega}^p}{|v|_{1,p,\Omega}} \\
&= \left(1 - \frac{|h|_{1,p,\Omega}}{|v|_{1,p,\Omega}}\right)\left(|v|_{1,p,\Omega} - |h|_{1,p,\Omega}\right)^{p-1} - \frac{|h|_{1,p,\Omega}^p}{|v|_{1,p,\Omega}} \\
&\geq \frac{1}{2}\left(|v|_{1,p,\Omega} - |h|_{1,p,\Omega}\right)^{p-1} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Und somit

$$\frac{\langle Av, v\rangle}{|v|_{1,p,\Omega}} \longrightarrow +\infty \quad \text{für } |v|_{1,p,\Omega} \to +\infty.$$

Schritt 2. Betrachte für die Monotonie zunächst[3]

$$\begin{aligned}
&(|\xi|^{p-2}\xi_i - |\eta|^{p-2}\eta_i)(\xi_i - \eta_i) \\
&\quad = |\xi|^p + |\eta|^p - (|\xi|^{p-2} + |\eta|^{p-2})\xi_i\eta_i \\
&\quad = |\xi|^p + |\eta|^p - \frac{1}{2}(|\xi|^{p-2} + |\eta|^{p-2})(|\xi|^2 + |\eta|^2 - |\xi - \eta|^2) \\
&\quad = \frac{1}{2}(|\xi|^{p-2} - |\eta|^{p-2})(|\xi|^2 - |\eta|^2) + \frac{1}{2}(|\xi|^{p-2} + |\eta|^{p-2})|\xi - \eta|^2 \\
&\quad \geq \frac{1}{2}(|\xi|^{p-2} + |\eta|^{p-2})|\xi - \eta|^2.
\end{aligned}$$

[3] Wir benutzen, dass für $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ gilt: $2\xi_i\eta_i = \xi_i^2 + \eta_i^2 - (\xi_i - \eta_i)^2 = |\xi|^2 + |\eta|^2 - |\xi - \eta|^2$

Hiermit erhalten wir für $v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $v \neq w$ und $\xi = Dv + Dh$, $\eta = Dw + Dh$

$$\begin{aligned}
\langle Av - Aw, v - w\rangle &= \int_\Omega \left(|\xi|^{p-2}\xi_i - |\eta|^{p-2}\eta_i\right)(\xi_i - \eta_i)\,dx \\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|\xi|^{p-2} + |\eta|^{p-2}\right)|\xi - \eta|^2\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|Dv + Dh|^{p-2} + |Dw + Dh|^{p-2}\right)|Dv - Dw|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Da $v, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ folgt aus $v \neq w$ auch $Dv \neq Dw$.[4] Dann findet sich eine Menge M mit $Dv \neq Dw$ auf M und $|M| > 0$ und es gilt

$$\langle Av - Aw, v - w\rangle \geq \frac{1}{2}\int_M \left(|Dv + Dh|^{p-2} + |Dw + Dh|^{p-2}\right)|Dv - Dw|^2\,dx > 0$$

Schritt 3. Wir zeigen nun, dass der Bildraum von A tatsächlich $(W_0^{1,p}(\Omega))'$ ist. Dazu reicht es aus die Beschränktheit von Au für alle $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ zu zeigen, da die Linearität sofort aus der Linearität der Differentialoperatoren D_i und der Linearität des Intergrals folgt.

Seien also $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Wir benutzen nacheinander die Hölder-Ungleichung für Summen und die Hölder-Ungleichung für Integrale:

$$\begin{aligned}
|\langle Au, v\rangle| &= \int_\Omega |Du + Dh|^{p-2}(D_i u + D_i h)D_i v\,dx \\
&\leq \int_\Omega |Du + Dh|^{p-1}|Dv|\,dx \\
&\leq \left(\int_\Omega |Du + Dh|^p\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega |Dv|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |u + h|_{1,p,\Omega}^{p-1}\cdot|v|_{1,p,\Omega} < \infty.
\end{aligned}$$

Folglich ist auch A beschränkt und es gilt

$$\|Au\| \leq |u + h|_{1,p,\Omega}^{p-1} < \infty, \tag{2.4}$$

wobei $\|\cdot\|$ die Norm des Dualraums $(W_0^{1,p}(\Omega))'$ sei.

Schritt 4. Als letztes zeigen wir die Stetigkeit von A. Seien dazu $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ und sei $(u_k) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $u_k \to u$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ für $k \to +\infty$. Insbesondere gilt also $|Du_k| \to |Du|$ in $L^p(\Omega)$ für $k \to +\infty$ und damit gilt $|Du_k + Dh| \to |Du + Dh|$

[4] Denn es gilt $\int_\Omega (v - w)D_i\varphi\,dx = -\int_\Omega D_i(v - w)\varphi\,dx$ für alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$.

natürlich ebenfalls. Analog zu obiger Rechnung erhalten wir[5]

$$\begin{aligned}
|\langle Au - Au_k, v\rangle| &= \int_\Omega |Du + Dh|^{p-2}(D_i u + D_i h) D_i v \, dx \\
&\quad - \int_\Omega |Du_k + Dh|^{p-2}(D_i u_k + D_i h) D_i v \, dx \\
&\le \int_\Omega \left(|Du + Dh|^{p-1} - |Du_k + Dh|^{p-1}\right) |Dv| \, dx \\
&\le \left(\int_\Omega \left(|Du + Dh|^{p-1} - |Du_k + Dh|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\quad \cdot \left(\int_\Omega |Dv|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\le C \left(\int_\Omega |Du + Dh|^p - |Du_k + Dh|^p \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} |v|_{1,p,\Omega}.
\end{aligned}$$

Es gilt also, da $u_k \to u$ für $k \to +\infty$

$$\|Au - Au_k\| \le C \left(\int_\Omega |Du + Dh|^p - |Du_k + Dh|^p \, dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \longrightarrow 0 \quad \text{für } k \to +\infty. \quad \blacksquare$$

Lemma 2.6. *Für jede Randwertbedingung $h \in W^{1,p}(\Omega)$ existiert eine eindeutige schwache Lösung $u \in W^{1,p}(\Omega)$ des Dirichletproblems*

$$\begin{cases} -D_i \left(\left(|Du|^{p-2} + \varepsilon \right) D_i u \right) = 0 & \text{in } \Omega \\ u = h & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Da der Beweis bis auf ein paar Kleinigkeiten identisch mit dem vorhergehenden ist, verzichten wir an dieser Stelle auf seine Ausführung.

[5] Für $a, b > 0$ und $q > 0$ gilt: $(a + b)^q \le 2^{q-1}(a^q + b^q)$

Kapitel 3
Der Beweis von L. Evans

Wir wollen uns nun Evans Beweis von Satz 1.1 widmen. Sei Ω ein Gebiet in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ und $p > 2$ fest. Zunächst betrachten wir die Gleichung

$$-D_i\left(\left(|Du^\varepsilon|^{p-2}+\varepsilon\right)D_i u^\varepsilon\right)=0 \quad \text{in } B(R_0) \tag{3.1}$$

mit $\varepsilon > 0$ auf einer Kugel $B(R_0) \subset \Omega$ mit Radius R_0 und Mittelpunkt x^0. Der Beweis folgt aus einer Reihe von Propositionen und Lemmas, die wir in den nächsten drei Abschnitten behandeln.

In Abschnitt 3.1 werden wir eine Hölder-Abschätzung des Gradienten Du^ε in einem Degenerationspunkt, bzw. wenn gilt $Du^\varepsilon = 0$, mithilfe einer Modifikation der Methode von Moser [Mos60] beweisen. Diese Abschätzung werden wir in Abschnitt 3.2 auf jeden Punkt der Kugel $B(R_0/2)$ erweitern.

Schließlich zeigen wir in Abschnitt 3.3, dass das Dirichlet-Problem

$$\begin{cases} -D_i\left(\left(|Du^\varepsilon|^{p-2}+\varepsilon\right)D_i u^\varepsilon\right)=0 & \text{in } B(R_0) \\ u^\varepsilon = S_\delta u & \text{auf } \partial B(R_0) \end{cases} \tag{3.2}$$

eine glatte Lösung u^ε hat, deren Gradient unabhängig von ε und δ beschränkt ist und die für $\varepsilon, \delta \to 0^+$ gegen ein v konvergiert, das die p-Laplacegleichung (1.1) in $B(R_0)$ löst. S_δ ist hierbei wieder der Glättungsoperator.

Die Eindeutigkeit der Lösung von (3.2), die wir im vorhergehenden Kapitel gezeigt haben, liefert uns dann $u = v$ auf $B(R_0)$ und die Aussage des Satzes folgt aus der Überdeckung jeder in Ω kompakt enthaltenen Teilmenge mit endlich vielen solcher Kugeln.

3.1 Eine a-priori Abschätzung des Gradienten in einer Umgebung eines Degenerationspunktes

Sei $\varepsilon \geq 0$ beliebig und sei mit $u^\varepsilon \in C^2(B(R_0))$ zunächst eine *Glatte* Lösung von (3.1) gegeben[6]. Wir nehmen für diesen Abschnitt außerdem an

$$Du^\varepsilon(x^0) = 0 \tag{3.3}$$

und

$$\sup_{B(R_0)} |Du^\varepsilon| \leq K. \tag{3.4}$$

Definiere nun für $0 < R < R_0$

$$M(R) = \sup_{B(R)} |Du^\varepsilon|.$$

Unsere erste Proposition behandelt die Hölder-Stetigkeit des Gradienten Du^ε nahe $Du^\varepsilon = 0$. Wir werden zeigen, dass es eine von ε unabhängige Hölder-Abschätzung für Du^ε gibt. Die Unabhängigkeit von ε ist insbesondere deswegen so bemerkenswert, als für $\varepsilon = 0$ im Punkt $Du = 0$ ein Degenerationspunkt vorliegt.

Proposition 3.1. *Sei $u^\varepsilon \in C^2(B(R_0))$ eine Lösung von* (3.1) *und es gelten die Annahmen* (3.3) *und* (3.4). *Dann gibt es Konstanten $C_1 = C_1(p,n)$ und $\beta = \beta(p,n) > 0$, so dass gilt*

$$M(R) \leq C_1 K \left(\frac{R}{R_0}\right)^\beta.$$

C_1 und β hängen dabei nicht von ε ab.

Den Beweis dieser Proposition erhalten wir aus einer Reihe von Lemmas sowie ein paar einleitenden Bemerkungen. Zur Vereinfachung der Schreibweise lassen wir den ε-Index zunächst weg und schreiben statt u^ε einfach nur u. Wir definieren

$$M_k^\pm(R) = \sup_{B(R)} \pm u_{x_k}.$$

Dann muss es einen Index i geben, so dass entweder gilt

$$M_i^+(R) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} M(R)$$

oder

$$M_i^-(R) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} M(R).$$

Denn für alle $\sigma = +, -$ und $i = 1, \ldots, n$ gälte andernfalls

$$\sqrt{n} M_i^\sigma(R) < M(R),$$

[6] Wie wir in Abschnitt 3.3 zeigen werden, existiert für jedes $0 < \varepsilon \leq 1$ eine Lösung $u^\varepsilon \in C^{2,\mu}(B(R_0))$.

ein Widerspruch, denn sofort würde folgen

$$M(R)^2 = \sup_{B(R)} \left(u_{x_1}^2 + \cdots + u_{x_n}^2\right) \le n \max_{i=1,\dots,n} \sup_{B(R)} u_{x_i}^2 = n \max_{\substack{\sigma=+,- \\ i=1,\dots,n}} M_i^\sigma(R)^2 < M(R)^2.$$

Sei daher nun, eventuell nach Umordnung der Koordinatenachsen,

$$M_1^+(R) \ge \frac{1}{\sqrt{n}} M(R) > 0. \tag{3.5}$$

Wir wollen uns nun dem ersten Lemma zuwenden. Es behandelt die Eigenschaften einer sehr nützlichen linearen Differentialgleichung, welche aus (3.1) durch Differentiation hervorgeht.

Lemma 3.2. *Sei $u \in C^2(B(R_0))$ eine Lösung von* (3.1), *dann ist die (lineare) Differentialgleichung*

$$-D_i\left(A_\varepsilon^{ij} D_j v\right) = 0 \quad \text{in } B(R_0) \tag{3.6}$$

mit

$$A_\varepsilon^{ij} = a_{ij}\,|Du|^{p-2} + \varepsilon \delta_{ij}$$

und

$$a_{ij} = \begin{cases} (p-2)\,\dfrac{u_{x_j} u_{x_i}}{|Du|^2} + \delta_{ij} & \text{für } |Du| \neq 0 \\ \delta_{ij} & \text{für } |Du| = 0 \end{cases}$$

elliptisch mit

$$\lambda = |Du|^{p-2} + \varepsilon \quad \text{und} \quad \Lambda = (p-1)\,|Du|^{p-2} + \varepsilon$$

und es gilt

$$|A_\varepsilon^{ij}| \le (p-1)\,|Du|^{p-2} + \varepsilon. \tag{3.7}$$

Weiterhin sind $v := M_k^\pm(R) \mp u_{x_k}$ und $w := u_{x_k}$, für $k = 1, \dots, n$, schwache Lösungen dieser Gleichung.

Beweis. Zeige zunächst die Elliptizität. Betrachte dafür den Differentialoperator

$$Qv = D_i\left(A_\varepsilon^{ij} D_j v\right) = A_\varepsilon^{ij} D_{ij} v + D_i A_\varepsilon^{ij} D_j v.$$

Setze nun $q := Du$ und betrachte für $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$

$$\begin{aligned} A_\varepsilon^{ij} \xi_i \xi_j &= \left(a_{ij}\,|q|^{p-2} + \varepsilon \delta_{ij}\right) \xi_i \xi_j \\ &= |q|^{p-2} \delta_{ij} \xi_i \xi_j + (p-2)\,|q|^{p-4} q_i q_j \xi_i \xi_j + \varepsilon \delta_{ij} \xi_i \xi_j \\ &= |q|^{p-2} |\xi|^2 + (p-2)\,|q|^{p-4} q_i q_j \xi_i \xi_j + \varepsilon |\xi|^2 \\ &= |q|^{p-2} |\xi|^2 + (p-2)\,|q|^{p-4} (q_i \xi_i)^2 + \varepsilon |\xi|^2, \end{aligned}$$

wobei hier die Summe außerhalb von $(q_i \xi_i)^2$ gebildet wird. Da einerseits $(q_i \xi_i)^2 \ge 0$ ist und andererseits, nach der Hölder-Ungleichung, $(q_i \xi_i)^2 \le |q|^2 |\xi|^2$, erhalten wir die Elliptizität von Q aus obiger Formel:

$$\left(|q|^{p-2} + \varepsilon\right) |\xi|^2 \le A_\varepsilon^{ij} \xi_i \xi_j \le \left((p-1)\,|q|^{p-2} + \varepsilon\right) |\xi|^2.$$

Weiterhin ist für $q = (q_1, \ldots, q_n)$ mit $q_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$,

$$q_i q_j \leq q_i^2 + q_j^2 \leq q_1^2 + \cdots + q_n^2 = |q|^2,$$

also

$$\frac{q_i q_j}{|q|^2} \leq 1.$$

Dies impliziert die Abschätzung

$$|a_{ij}| \leq |\delta_{ij}| + (p-2)\left|\frac{u_{x_i} u_{x_j}}{|Du|^2}\right| \leq p - 1.$$

Woraus folgt

$$|A_\varepsilon^{ij}| \leq (p-1)\,|Du|^{p-2} + \varepsilon.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $v = M_1^\pm(R) \mp u_{x_1}$ und $w = u_{x_k}$ schwache Lösungen von (3.6) sind. Sei $k \in \{1, \ldots, n\}$ beliebig und betrachte die schwache Gleichung

$$\int_{B(R_0)} \left(|Du|^{p-2} + \varepsilon\right) D_i u\, D_i \eta\, dx = 0 \quad \text{für alle } \eta \in C_c^\infty(B(R_0)).$$

Für $\varphi \in C_c^\infty(B(R_0))$ setzen wir in dieser Gleichung $\eta := D_k \varphi$ ein. Es folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{B(R_0)} \left(|Du|^{p-2} + \varepsilon\right) D_i u\, D_i D_k \varphi\, dx \\
&= \int_{B(R_0)} \left(|Du|^{p-2} + \varepsilon\right) D_i u\, D_k D_i \varphi\, dx \\
&= -\int_{B(R_0)} D_k \left(\left(|Du|^{p-2} + \varepsilon\right) D_i u\right) D_i \varphi\, dx
\end{aligned}$$

Sei nun $M := \{x \in B(R_0) : |Du(x)| \neq 0\}$. Da $u \in C^2(B(R_0))$ ist M insbesondere offen und auf M^c ist $|Du(x)| = 0$. Damit gilt für alle $\varphi \in C_c^\infty(B(R_0))$

$$\begin{aligned}
\int_{B(R_0)} D_k |Du|^{p-2} D_i u\, D_i \varphi\, dx &= \int_M D_k |Du|^{p-2} D_i u\, D_i \varphi\, dx \\
&= (p-2) \int_M |Du|^{p-4} u_{x_j} u_{x_i} D_j u_{x_k}\, D_i \varphi\, dx \\
&= (p-2) \int_M |Du|^{p-2} \frac{u_{x_j} u_{x_i}}{|Du|^2} D_j u_{x_k}\, D_i \varphi\, dx
\end{aligned}$$

Denn die Ableitung von $|Du|^{p-2}$ errechnet sich wie folgt

$$\begin{aligned}
D_k |Du|^{p-2} &= D_k \left(u_{x_1}^2 + \cdots + u_{x_n}^2\right)^{\frac{p-2}{2}} \\
&= \frac{p-2}{2} \left(u_{x_1}^2 + \cdots + u_{x_n}^2\right)^{\frac{p-4}{2}} D_k \left(u_{x_1}^2 + \cdots + u_{x_n}^2\right) \\
&= \frac{p-2}{2} \left(u_{x_1}^2 + \cdots + u_{x_n}^2\right)^{\frac{p-4}{2}} 2\left(u_{x_1} D_k u_{x_1} + \cdots + u_{x_n} D_k u_{x_n}\right) \\
&= (p-2)\, |Du|^{p-4} u_{x_j} D_j u_{x_k}.
\end{aligned}$$

Zusammen gilt also für alle $\varphi \in C_c^\infty(B(R_0))$

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{B(R_0)} D_k\left(\left(|Du|^{p-2}+\varepsilon\right)D_i u\right) D_i\varphi\, dx \\
&= \int_{B(R_0)} D_k|Du|^{p-2}\, D_i u\, D_i\varphi\, dx + \int_{B(R_0)} \left(|Du|^{p-2}+\varepsilon\right) D_k D_i u\, D_i \varphi\, dx \\
&= (p-2)\int_M |Du|^{p-2}\frac{u_{x_j}u_{x_i}}{|Du|^2} D_j u_{x_k} D_i\varphi\, dx + \int_{B(R_0)} \left(|Du|^{p-2}+\varepsilon\right)\delta_{ij} D_j u_{x_k} D_i\varphi\, dx \\
&= \int_{B(R_0)} \left(a_{ij}|Du|^{p-2}+\varepsilon\delta_{ij}\right) D_j u_{x_k}\, D_i\varphi\, dx \\
&= \int_{B(R_0)} A_\varepsilon^{ij} D_i u_{x_k}\, D_j\varphi\, dx.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung, da $D_j v = \mp D_j u_{x_k}$ und $D_j w = D_j u_{x_k}$. ∎

Das nächste Lemma sichert uns, dass wenn u_{x_1} auf $B(R)$ im Mittel sehr nah an seinem Supremum $M_1^+(R)$ ist, u_{x_1} strikt positiv auf $B(R/2)$ ist. Für dieses Lemma lassen wir die Voraussetzung (3.3) zeitweilig fallen.

Lemma 3.3. *Sei $u \in C^2(B(R_0))$ eine Lösung von* (3.1) *und es gelte die Annahme* (3.4). *Dann gibt es eine Konstante $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(p,n) > 0$, so dass aus*

$$\fint_{B(R)} \left(M_1^+(R) - u_{x_1}\right)^{+^2} dx \le \varepsilon_0 M_1^+(R)^2 \tag{3.8}$$

folgt

$$\inf_{B(R/2)} u_{x_1} \ge \frac{M_1^+(R)}{2}.$$

Beweis. Wir unterteilen den Beweis in mehrere Schritte.

Schritt 1. Setze zur Abkürzung $M_1 := M_1^+(R)$ und sei, wie in Lemma 3.2, $v := M_1 - u_{x_1}$ eine schwache Lösung der Gleichung (3.6), d.h.

$$\int_{B(R_0)} A_\varepsilon^{ij} D_i v D_j \eta\, dx = 0 \quad \text{für alle } \eta \in C_c^\infty(B(R)).$$

Wähle nun als Testfunktion in dieser Gleichung die Funktion $\eta := \zeta^2(v-k)^+$, wobei $\zeta \in C_c^\infty(B(R))$, $\zeta \ge 0$ eine später genauer zu definierende Abschneidefunktion sei, welche außerhalb von $B(R)$ identisch verschwinde. Sei außerdem k eine Konstante mit

$$0 \le k \le \frac{M_1}{2}. \tag{3.9}$$

Wir erhalten

$$\int_{B(R_0)} A_\varepsilon^{ij} D_i v D_j\left(\zeta^2(v-k)^+\right)\, dx = 0$$

und nach Anwendung der Produktregel[7]

$$\int_{B(R_0)} A_\varepsilon^{ij} D_i v \left(2\zeta D_j \zeta (v-k)^+ + \zeta^2 D_j (v-k)^+\right)\, dx = 0.$$

Mit $D_j(v-k)^+ = 0$, wenn $v < k$, und $D_j(v-k)^+ = D_j v$, wenn $v > k$, folgt

$$\left| \int_{B(R)\cap\{v>k\}} A_\varepsilon^{ij}\, D_i v\, D_j v\, \zeta^2\, dx \right| = 2 \left| \int_{B(R)\cap\{v>k\}} A_\varepsilon^{ij}\, D_i v\, D_j \zeta\, (v-k)^+ \zeta\, dx \right|.$$

Mit der Abschätzung (3.7) und der Elliptizität von (3.6) folgt

$$\begin{aligned} &\int_{B(R)\cap\{v>k\}} \left(|Du|^{p-2} + \varepsilon\right) |Dv|^2\, \zeta^2\, dx \\ &\qquad\qquad \le (p-1) \int_{B(R)\cap\{v>k\}} \left(|Du|^{p-2} + \varepsilon\right) |D_i v|\, \left|D_j \zeta\right|\, (v-k)^+ \zeta\, dx \end{aligned}$$

wobei die rechte Seite über $i, j = 1, \ldots, n$ summiert wird.

Wende auf die rechte Seite nun die Young'sche Ungleichung $ab \le \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ mit $a = \sum_i |D_i v|\zeta$ und $b = \sum_j |D_j \zeta|(v-k)^+$ an. Wir erhalten

$$\begin{aligned} &\int_{B(R)\cap\{v>k\}} \left(|Du|^{p-2} + \varepsilon\right) |Dv|^2 \zeta^2\, dx \\ &\quad \le \frac{1}{2} \int_{B(R)\cap\{v>k\}} \left(|Du|^{p-2} + \varepsilon\right) |Dv|^2 \zeta^2\, dx \\ &\qquad + C \int_{B(R)\cap\{v>k\}} (v-k)^{+^2} \left(|Du|^{p-2} + \varepsilon\right) |D\zeta|^2\, dx. \end{aligned}$$

Nach dem „Rüberbringen" des ersten Terms der rechten Seite erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{B(R)\cap\{v>k\}} \left(|Du|^{p-2} + \varepsilon\right) |Dv|^2 \zeta^2\, dx &\le C \int_{B(R)} (v-k)^{+^2} \left(|Du|^{p-2} + \varepsilon\right) |D\zeta|^2\, dx \\ &\le C \left(M(R)^{p-2} + \varepsilon\right) \int_{B(R)} (v-k)^{+^2} |D\zeta|^2\, dx. \end{aligned}$$

Wenn wir nun den Integrationsbereich des linksseitigen Integrals verkleinern, kann das Integral nicht wachsen. Daher ist die linke Seite größer oder gleich

$$\int_{B(R)\cap\{k<v<k+\frac{1}{4}M_1\}} \left(|Du|^{p-2} + \varepsilon\right) |Dv|^2 \zeta^2\, dx.$$

Auf der Menge $\{x \in B(R) : v = M_1 - u_{x_1} \le k + \frac{1}{4}M_1\}$ gilt nach (3.9) und (3.5)

$$u_{x_1} \ge \frac{3}{4}M_1 - k \ge \frac{1}{4}M_1 \ge \frac{1}{4\sqrt{n}} M(R).$$

[7] Die Produktregel kann angewendet werden, da – nach Fortsetzung durch 0 – gilt $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$

Hieraus folgt auf der Menge $\{x \in B(R_0) : k < v < k + \frac{1}{4}M_1\}$

$$\begin{aligned}
|Du|^{p-2} &= (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2 + \cdots + u_{x_n}^2)^{\frac{p-2}{2}} \\
&\geq \left(\left(\frac{1}{4\sqrt{n}} M(R) \right)^2 + u_{x_2}^2 + \cdots + u_{x_n}^2 \right)^{\frac{p-2}{2}} \\
&\geq \left(\frac{1}{4\sqrt{n}} M(R) \right)^{p-2} \\
&= CM(R)^{p-2}
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Abschätzung in die Obige erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left(M(R)^{p-2} + \varepsilon\right) \int_{B(R) \cap \{k < v < k + \frac{1}{4}M_1\}} |Dv|^2 \zeta^2 \, dx \\
&\qquad\qquad \leq C \left(M(R)^{p-2} + \varepsilon\right) \int_{B(R)} (v-k)^{+^2} |D\zeta|^2 \, dx
\end{aligned}$$

und somit, durch kürzen der beiden $(M(R)^{p-2} + \varepsilon)$ Terme,

$$\int_{B(R)} |D\phi_k(v)|^2 \zeta^2 \, dx \leq C \int_{B(R)} (v-k)^{+^2} |D\zeta|^2 \, dx \tag{3.10}$$

mit

$$\phi_k(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < k \\ t - k & \text{für } k \leq t \leq k + \frac{1}{4}M_1 \\ \frac{1}{4}M_1 & \text{für } t > k + \frac{1}{4}M_1. \end{cases} \tag{3.11}$$

Denn es gilt

$$D_i \phi_k(v) = \begin{cases} D_i v & \text{für } k \leq v \leq k + \frac{1}{4}M_1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiterhin ist $\phi_k(v)\zeta \in W_0^{1,2}(B(R))$, denn es ist $\zeta \in C_c^\infty(B(R))$ und ϕ_k stückweise stetig differenzierbar. Wir können also die Sobolev-Ungleichung auf $\phi_k(v)\zeta$ anwenden[8]. Wir erhalten

$$\left(\int_{B(R)} |\phi_k(v)\zeta|^{\frac{2n}{n-2}} \, dx \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C \int_{B(R)} |D(\phi_k(v)\zeta)|^2 \, dx.$$

Aus oben genannten Gründen können wir außerdem die Produktregel anwenden und erhalten für den rechtsseitigen Integranten

$$\begin{aligned}
|D_i(\phi_k(v)\zeta)|^2 = (D_i(\phi_k(v)\zeta))^2 &= (D_i\phi_k(v)\zeta + \phi_k(v)D_i\zeta)^2 \\
&\leq 2(D_i\phi_k(v)\zeta)^2 + 2(\phi_k(v)D_i\zeta)^2.
\end{aligned}$$

[8] Im Fall $n = 2$ können wir die kompakte Einbettung $W^{1,2}(B(R_0)) \longrightarrow L^q(B(R_0))$ für alle $q \geq 2$ benutzen. Die entsprechende Modifikation dieses Beweises lassen wir zum Zwecke der Übersichtlichkeit allerdings aus.

Es folgt also

$$\left(\int_{B(R)} |\phi_k(v)\zeta|^{\frac{2n}{n-2}}\, dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C\int_{B(R)} |D\phi_k(v)|^2\zeta^2\, dx + C\int_{B(R)} \phi_k(v)^2|D\zeta|^2\, dx.$$

Aus der Definition von ϕ_k folgt sofort $\phi_k(v) \leq (v-k)^+$. Hiermit und mit (3.10) folgt aus der vorherigen Gleichung

$$\begin{aligned}\left(\int_{B(R)} |\phi_k(v)\zeta|^{\frac{2n}{n-2}}\, dx\right)^{\frac{n-2}{n}} &\leq C\int_{B(R)} (v-k)^{+^2}|D\zeta|^2\, dx \\ &\leq C\sup_{B(R)} |D\zeta|^2 \int_{B(R)} (v-k)^{+^2}\, dx.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Schritt 2. Definiere für $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} k_m &:= \frac{M_1}{2}\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) < \frac{M_1}{2}, \\ R_m &:= \frac{R}{2}\left(1 + \frac{1}{2^m}\right)\end{aligned}$$

und wähle Abschneidefunktionen $\zeta_m \in C_c^\infty(B(R_0))$, $0 \leq \zeta_m \leq 1$, so dass

$$\zeta_m \equiv \begin{cases} 1 & \text{auf } B(R_{m+1}) \\ 0 & \text{außerhalb von } B(R_m)\end{cases}$$

und

$$|D\zeta_m| \leq \frac{C2^m}{R}.$$

Verwende nun die Ungleichung (3.12) aus Schritt 1 mit $R = R_m$, $k = k_m$ und $\zeta = \zeta_m$ und verkleinere das Integral auf der linken Seite auf die Kugel $B(R_{m+1})$, so dass $\zeta \equiv 1$ ist. Zusammen mit der Abschätzung für $|D\zeta|$ erhalten wir

$$\left(\int_{B(R_{m+1})} \phi_{k_m}(v)^{\frac{2n}{n-2}}\, dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \leq \frac{C4^m}{R^2}\int_{B(R_m)} (v-k_m)^{+^2}\, dx. \tag{3.13}$$

Definiere für $m = 0, 1, 2, \ldots$

$$J_m := \int_{B(R_m)} \phi_{k_m}(v)^2\, dx.$$

Da $\phi_{k_m}(v) \neq (v-k_m)^{+^2}$ nur auf $\{x \in B(R_0) : v(x) > \frac{1}{4}M_1 + k_m\}$ gilt, folgt auf dieser Menge die Ungleichungskette[9]

$$(v-k_m)^{+^2} \leq CM(R)^2 \overset{(3.5)}{\leq} CM_1^2 \overset{(3.11)}{\leq} C\phi_{k_m}(v)^2.$$

Somit folgt

$$J_m \leq \int_{B(R_m)} (v-k_m)^{+^2}\, dx \leq CJ_m. \tag{3.14}$$

[9] Es gilt: $(v-k_m)^{+^2} \leq (M_1 - u_{x_1})^2 \leq 2M_1^2 \leq 2M(R)^2$

Schritt 3. Betrachte nun die Menge

$$\{x \in B(R_{m+1}) : \phi_{k_{m+1}}(v) > 0\} = \{x \in B(R_{m+1}) : v > k_{m+1}\}.$$

Da $k_m < k_{m+1}$ ist, im zu integrierenden Bereich $v > k_{m+1}$ gilt und $R_m > R_{m+1}$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
|\{x \in B(R_{m+1}) : v > k_{m+1}\}| &= \int_{\{x\in B(R_{m+1}):\, v>k_{m+1}\}} \frac{(v-k_m)^{+^2}}{(v-k_m)^{+^2}}\,dx \\
&\leq \frac{1}{(k_{m+1}-k_m)^2}\int_{\{x\in B(R_{m+1}):\, v>k_m\}} (v-k_m)^{+^2}\,dx \\
&= \frac{1}{(k_{m+1}-k_m)^2}\int_{B(R_{m+1})} (v-k_m)^{+^2}\,dx \\
&\leq \frac{4^{m+2}}{M_1^2}\int_{B(R_m)} (v-k_m)^{+^2}\,dx \\
&\leq \frac{C4^m}{M_1^2} J_m
\end{aligned}$$

Wenn wir nun die Hölder-Ungleichung auf J_{m+1} anwenden und die beiden Multiplikanten nach (3.13) und nach obiger Ungleichung abschätzen erhalten wir, da die Funktionenfolge (ϕ_{k_m}) monoton fallend ist

$$\begin{aligned}
J_{m+1} &= \int_{B(R_{m+1})} \phi_{k_{m+1}}(v)^2\,dx \\
&\leq \left(\int_{B(R_{m+1})} \phi_{k_{m+1}}(v)^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \cdot |\{x \in B(R_{m+1}) : \phi_{k_{m+1}}(v) > 0\}|^{\frac{2}{n}} \\
&\leq \left(\int_{B(R_{m+1})} \phi_{k_m}(v)^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{n-2}{n}} \cdot \left(\frac{C4^m}{M_1^2} J_m\right)^{\frac{2}{n}} \\
&\leq \left(\frac{\widetilde{C}4^m}{R^2} J_m\right) \cdot \left(\frac{C4^m}{M_1^2} J_m\right)^{\frac{2}{n}} = \frac{C_2 C_3^m}{R^2 M_1^{4/n}}\, J_m^{1+2/n}.
\end{aligned}$$

Wenn also gilt

$$J_0 \leq \int_{B(R)} v^{+^2}\,dx = \int_{B(R)} (M_1 - u_{x_1})^{+^2}\,dx \leq \varepsilon_0 M_1^2\,|B(R)|.$$

so folgt nach Lemma 1.17[10]

$$J_m \longrightarrow 0 \quad \text{für } m \to +\infty.$$

[10] Setze dazu in Lemma 1.17 $l := m$, $\varepsilon := \frac{2}{n}$, $y_l := J_m$, $c := C_2 R^{-2} M_1^{-4/n}$ und $b := C_3^m$. Dann ist, mit $|B(R)| = \omega_n R^n$,

$$\theta := c^{-1/\varepsilon} b^{-1/\varepsilon^2} = \varepsilon_0 M_1^2 |B(R)| \quad \text{und} \quad \varepsilon_0 = \omega_n^{-1} C_2^{-n/2} C_3^{-4/n^2}.$$

Aus (3.14) folgt zusammen mit der Definition von R_m und k_m

$$\inf_{B(R/2)} v \leq \frac{M_1}{2}.$$

Es folgt die Behauptung des Lemmas durch Einsetzen von v. ∎

Lemma 3.4. *Sei $u \in C^2(B(R_0))$ eine Lösung von* (3.1) *und es gelten die Annahmen* (3.3), (3.4) *und* (3.5), *d.h.*

$$|Du(x^0)| = 0, \quad \sup_{B(R_0)} |Du| \leq K \quad \text{und} \quad M_1^+(R) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} M(R).$$

Dann gibt es Konstanten $\lambda = \lambda(n,p)$ und $\mu = \mu(n,p)$ mit $0 < \lambda, \mu < 1$, so dass gilt

$$|\{x \in B(R) : u_{x_1}(x) \leq \lambda M_1^+(R)\}| \geq \mu |B(R)|. \tag{3.15}$$

Beweis. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, dass (3.15) für ein λ und ein μ, die noch ausgewählt werden müssen, nicht zuträfe. Sei nun wieder $M_1 = M_1^+(R)$ und definiere

$$\begin{aligned} \{u_{x_1} \leq \lambda M_1\} &:= \{x \in B(R) : u_{x_1}(x) \leq \lambda M_1\}, \\ \{\lambda M_1 \leq u_{x_1} \leq M_1\} &:= \{x \in B(R) : \lambda M_1 \leq u_{x_1}(x) \leq M_1\}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \fint_{B(R)} (M_1 - u_{x_1})^{+^2} \, dx = &\frac{1}{|B(R)|} \int_{\{u_{x_1} \leq \lambda M_1\}} (M_1 - u_{x_1})^{+^2} \, dx \\ &+ \frac{1}{|B(R)|} \int_{\{\lambda M_1 \leq u_{x_1} \leq M_1\}} (M_1 - u_{x_1})^{+^2} \, dx. \end{aligned}$$

Das erste rechtsseitige Integral lässt sich dank unserer Annahme wie folgt abschätzen:

$$\frac{1}{|B(R)|} \int_{\{u_{x_1} \leq \lambda M_1\}} (M_1 - u_{x_1})^{+^2} \, dx \leq \frac{|\{u_{x_1} \leq \lambda M_1\}|}{|B(R)|} M_1^2 \leq \mu M_1^2.$$

Und für das Zweite erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{|B(R)|} \int_{\{\lambda M_1 \leq u_{x_1} \leq M_1\}} (M_1 - u_{x_1})^{+^2} \, dx &\leq \frac{|\{\lambda M_1 \leq u_{x_1} \leq M_1\}|}{|B(R)|} (1-\lambda)^2 M_1^2 \\ &\leq C(1-\lambda)^2 M_1^2. \end{aligned}$$

Zusammen folgt demnach

$$\fint_{B(R)} (M_1 - u_{x_1})^{+^2} \, dx \leq C((1-\lambda)^2 + \mu) M_1^2 \leq \varepsilon_0 M_1^2. \tag{3.16}$$

mit $\mu > 0$ klein genug und $\lambda < 1$ groß genug und mit ε_0 aus vorherigem Lemma. Dann folgt aus dem selben Lemma

$$\inf_{B(\frac{R}{2})} u_{x_1} \geq \frac{M_1}{2} > 0,$$

ein Widerspruch zu (3.3). ∎

Wie man leicht sieht, reicht die Ungültigkeit von (3.16) für den Beweis des Lemmas aus. Wir notieren das für den späteren Gebrauch.

Korollar 3.5. *Sei $u \in C^2(B(R_0))$ eine Lösung von* (3.1) *mit beschränktem Gradienten und es gelte*

$$\fint_{B(R)} (M_1^+(R) - u_{x_1})^{+^2}\, dx > \varepsilon_0 M_1^+(R)^2$$

mit ε_0 aus Lemma 3.3. Dann gibt es Konstanten $\lambda = \lambda(n,p)$ und $\mu = \mu(n,p)$, mit $0 < \lambda, \mu < 1$, so dass gilt

$$|\{x \in B(R) : u_{x_1}(x) \le \lambda M_1^+(R)\}| \ge \mu |B(R)|.$$

Laut Lemma 3.4 bleibt die Funktion u_{x_1} im Fall $|Du(x^0)| = 0$ also auf einer „ausreichend großen" Teilmenge von $B(R)$ um einen festen Faktor $\lambda < 1$ kleiner als ihr Supremum $M_1(R)$. Da u_{x_1} im Zentrum der Kugel $B(R)$ verschwindet, können wir eine Abschätzung für u_{x_1} auf $B(R/2)$ herleiten.

Lemma 3.6. *Sei $u \in C^2(B(R_0))$ eine Lösung von* (3.1) *und es gelten wieder die Annahmen* (3.3), (3.4) *und* (3.5), *d.h.*

$$|Du(x^0)| = 0, \qquad \sup_{B(R_0)} |Du| \le K \quad \textit{und} \quad M_1^+(R) \ge \frac{1}{\sqrt{n}} M(R).$$

Dann gibt eine positive Konstante $\gamma = \gamma(p,n) < 1$, so dass gilt

$$M_1^+\left(\frac{R}{2}\right) \le \gamma M_1^+(R). \tag{3.17}$$

Den Beweis dieses Lemmas führen wir mit einer abgewandelten Form einer Methode von Moser [Mos60].

Beweis. Wir unterteilen den Beweis in mehrere Schritte.

Schritt 1. Schreibe wie in den vorherigen Beweisen M_1 für $M_1^+(R)$ und definiere für $\delta > 0$ und dem λ aus Lemma 3.4

$$\phi(x) = \phi_\delta(x) := \left(-\ln\left(\frac{M_1 - x + \delta}{M_1(1-\lambda)}\right)\right)^+ \qquad \text{für } x < M_1.$$

Wir zeigen zunächst ein paar Eigenschaften von ϕ, die in den folgenden Schritten benötigt werden:

$$\begin{aligned} &\phi \text{ ist monoton wachsend und konvex,} \\ &(\phi')^2 \equiv \phi'' \text{ für } x \ne \lambda M_1 + \delta \text{ und} \\ &\phi \equiv 0 \text{ für } x \le \lambda M_1 + \delta. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Da der Logarithmus monoton wachsend ist, ist für ein $a > 0$ und $x < a$ auch $-\ln(a - x)$ monoton wachsend und damit auch $(-\ln(a-x))^+$, also auch ϕ, da ϕ

aus $(-\ln(a-x))^+$ durch entspechende Wahl von a und Streckung bzw. Stauchung hervorgeht. Außerdem ist $\ln(x)$ konkav, woraus folgt, dass $-\ln(x)$ konvex ist. Dann ist aber auch $-\ln(a-x)$ konvex und zusammen mit der Konvexität von $(x)^+$ und obigem Argument folgt die Konvexität für ϕ.

Weiterhin gilt

$$\phi(x) = 0 \Leftrightarrow -\ln\left(\tfrac{M_1-x+\delta}{M_1(1-\lambda)}\right) \leq 0 \Leftrightarrow M_1 - x + \delta \geq M_1(1-\lambda) \Leftrightarrow x \leq \lambda M_1 + \delta.$$

Hiermit folgt sofort $(\phi')^2 \equiv \phi'' \equiv 0$ auf $x < \lambda M_1 + \delta$. Und für $x > \lambda M_1 + \delta$ folgt durch Nachrechnen:

$$(\phi'(x))^2 = \frac{1}{(M_1 - x + \delta)^2} = \phi''(x). \tag{3.19}$$

Schritt 2. Setze nun

$$w = \phi(u_{x_1}). \tag{3.20}$$

Durch das vorherige Lemma und die Eigenschaften von ϕ erhalten wir

$$|\{x \in B(R) : w = 0\}| \geq \mu\, |B(R)|.$$

Damit gibt es ein $\theta = \theta(n)$ mit $\frac{3}{4} < \theta < 1$, so dass gilt

$$|\{x \in B(\theta R) : w = 0\}| \geq \frac{\mu}{2}\, |B(R)|.$$

Denn andernfalls müsste für alle $\frac{3}{4} < \theta < 1$ gelten

$$|\{x \in B(\theta R) : w = 0\}| < \frac{\mu}{2}\, |B(R)|,$$

ein Widerspruch, denn daraus würde folgen

$$\begin{aligned}
\mu\, |B(R)| &\leq |\{x \in B(R) : w = 0\}| \\
&\leq |\{x \in B(\theta R) : w = 0\}| + |B(R) - B(\theta R)| \\
&< \frac{\mu}{2}\, |B(R)| + (1-\theta^n)|B(R)| \\
&< \mu\, |B(R)|,
\end{aligned}$$

für hinreichend großes $\theta < 1$, da $(1-\theta^n) \to 0$ für $\theta \to 1$.

Es ist ferner $w \in W^{1,2}(B(R))$, denn w ist auf $B(R)$ beschränkt und ϕ_k ist stückweise stetig differenzierbar. Wende nun Lemma 1.6 auf w an, mit $R := \theta R$ und $N := \{x \in B(\theta R) : w = 0\}$, dann erhalten wir für eine Konstante $C = C(\mu, \theta, n)$

$$\fint_{B(\theta R)} w^2\, dx \leq CR^2 \fint_{B(\theta R)} |Dw|^2\, dx. \tag{3.21}$$

Schritt 3. Da ϕ monoton wachsend und konvex ist und $v = u_{x_1}$ die partielle Differentialgleichung (3.6) löst, ist w eine nicht-negative Unterlösung dieser Gleichung (siehe Lemma 1.16):

$$\int_{B(R_0)} A_\varepsilon^{ij} D_i w D_j \eta\, dx \leq 0 \quad \text{für alle } \eta \in C_c^\infty(B(R_0)), \eta \geq 0 \tag{3.22}$$

Außerdem haben wir auf der Menge $\{x \in B(R_0) : w(x) > 0\}$, also wenn gilt $u_{x_1} \geq \lambda M_1 + \delta \geq \lambda M_1$, die folgende Ungleichungskette

$$M(R)^{p-2} \overset{(3.5)}{\leq} C M_1^{p-2} \leq C|Du|^{p-2} \leq C M(R)^{p-2}, \tag{3.23}$$

wobei die Konstanten nur von n und p abhängen. Also können wir die Iterationsmethode von Moser auf (3.22) anwenden, wobei wir die obige Ungleichungskette benutzen um die $|Du|^{p-2}$ Terme, die sich hinter den A_ε^{ij} verstecken, unter den Integralen zu kürzen.[11] Wir erhalten die Abschätzung

$$\sup_{B(R/2)} w^2 \leq C \fint_{B(\theta R)} w^2 \, dx \tag{3.24}$$

mit $C = C(p, n, \theta)$.

Schritt 4. Wähle eine Abschneidefunktion $\zeta \in C_c^\infty(B(R))$ mit $0 \leq \zeta \leq 1$ und $\zeta \equiv 1$ auf $B(\theta R)$, sowie

$$|D\zeta| \leq \frac{C}{(1-\theta)R}. \tag{3.25}$$

Setze nun $\eta = \phi'(u_{x_1})\zeta^2 \geq 0$ in (3.22) ein. Wir erhalten

$$\int_{B(R_0)} A_\varepsilon^{ij} D_i w D_j(\phi'(u_{x_1})\zeta^2) \, dx \leq 0$$

Die Ableitung der Abschneidefunktion berechnet sich aufgrund von $\phi'' = (\phi')^2$ und $D_j w = \phi'(u_{x_1}) D_j u_{x_1}$ wie folgt

$$\begin{aligned} D_j(\phi'(u_{x_1})\zeta^2) &= \phi''(u_{x_1}) D_j u_{x_1} \zeta^2 + 2\phi'(u_{x_1})\zeta D_j \zeta \\ &= \phi'(u_{x_1}) \left(D_j w \zeta^2 + 2\zeta D_j \zeta \right). \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\int_{B(R_0)} A_\varepsilon^{ij} D_i w \, \phi'(u_{x_1}) \left(D_j w \zeta^2 + 2\zeta D_j \zeta \right) \, dx \leq 0.$$

Außerdem ist $\phi' \geq \frac{1}{\delta}$ (siehe (3.19)), somit folgt

$$\int_{B(R_0)} A_\varepsilon^{ij} \, D_i w \, D_j w \, \zeta^2 \, dx + 2 \int_{B(R_0)} A_\varepsilon^{ij} \, D_i w \, \zeta D_j \zeta \, dx \leq 0.$$

Die Elliptizität liefert uns

$$\int_{B(R_0)} \left(|Du|^{p-2} + \varepsilon \right) |Dw|^2 \zeta^2 \, dx \leq -2 \int_{B(R_0)} A_\varepsilon^{ij} \, D_i w \, \zeta D_j \zeta \, dx.$$

Da die linke Seite offensichtlich größer 0 ist, ist auch die rechte Seite größer 0 und wir erhalten nach der Dreiecksungleichung für Integrale und Abschätzung (3.7)

$$\int_{B(R_0)} \left(|Du|^{p-2} + \varepsilon \right) |Dw|^2 \, \zeta^2 \, dx \leq C \int_{B(R_0)} \left(|Du|^{p-2} + \varepsilon \right) \, |D_i w| \, \zeta \, |D_j \zeta| \, dx,$$

[11] Einem ausführlichen Beweis dieser Folgerung aus der Iterationsmethode von Moser widmen wir uns, aufgrund des Umfangs, in Abschnitt 3.4.

wobei die rechte Seite über i und j summiert wird.

Die Young'sche Ungleichung $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ mit $a = \sum_i |D_i w|\zeta$ und $b = \sum_j |D_j \zeta|$ liefert die Abschätzung

$$\begin{aligned}\int_{B(R_0)} \left(|Du|^{p-2} + \varepsilon\right) |Dw|^2 \zeta^2 \, dx \leq \frac{C}{2} \int_{B(R_0)} & \left(|Du|^{p-2} + \varepsilon\right) |Dw|^2 \zeta^2 \, dx \\ + \frac{C}{2} \int_{B(R_0)} & \left(|Du|^{p-2} + \varepsilon\right) |D\zeta|^2 \, dx.\end{aligned}$$

Nun bringen wir noch den ersten Term der rechten Seite auf die andere Seite und verkleinern das Integral auf $B(\theta R)$ und erhalten

$$\int_{B(\theta R)} \left(|Du|^{p-2} + \varepsilon\right) |Dw|^2 \, dx \leq C \int_{B(R_0)} \left(|Du|^{p-2} + \varepsilon\right) |D\zeta|^2 \, dx.$$

Benutze nun (3.23) um die $(|Du|^p + \varepsilon)$ Terme zu kürzen und wir erhalten dank (3.25) die Abschätzung

$$⨍_{B(\theta R)} |Dw|^2 \, dx \leq \frac{C}{R^2} \tag{3.26}$$

mit $C = C(p, n, \theta)$.

Schritt 5. Durch Zusammenfassung der Abschätzungen (3.24), (3.21) und (3.26) erhalten wir

$$\sup_{B(R/2)} w^2 \leq C ⨍_{B(\theta R)} w^2 \, dx \leq CR^2 ⨍_{B(\theta R)} |Dw|^2 \, dx \leq C$$

bzw.

$$\sup_{B(R/2)} w \leq C_4, \qquad C_4 = C(p, n, \theta, \mu). \tag{3.27}$$

Ferner folgt aus den Definitionen von w und ϕ; für alle $x \in B(R/2)$, die $u_{x_1}(x) > \lambda M_1 + \delta$ erfüllen, gilt

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{M_1 - u_{x_1}(x) + \delta}{M_1(1-\lambda)}\right) &= -w(x) \\ \frac{M_1 - u_{x_1}(x) + \delta}{M_1(1-\lambda)} &= e^{-w(x)} \\ M_1 - u_{x_1}(x) + \delta &= (1-\lambda)e^{-w(x)} M_1 \\ u_{x_1}(x) &= \left(1 - (1-\lambda)e^{-w(x)}\right) M_1 + \delta\end{aligned}$$

Also gilt für alle $x \in B(R/2)$,

$$\begin{aligned}u_{x_1}(x) &\leq \left(1 - (1-\lambda)e^{-w(x)}\right) M_1 + \delta \\ &\leq \left(1 - (1-\lambda)e^{-C_4}\right) M_1 + \delta \\ &= \gamma M_1 + \delta\end{aligned}$$

mit $\gamma = 1 - (1-\lambda)e^{-C_4} < 1$, nach (3.27). Für $\delta \to 0^+$ erhalten wir somit

$$M_1^+\left(\frac{R}{2}\right) \le \gamma M_1^+(R). \qquad \blacksquare$$

Tatsächlich haben wir im Beweis die Annahmen (3.3) und (3.5) nur benutzt um Lemma 3.4 ausführen zu können. Dies notieren wir abermals für den späteren Gebrauch.

Korollar 3.7. *Sei $u \in C^2(B(R_0))$ eine Lösung von* (3.1) *mit beschränktem Gradienten und es existieren $\lambda = \lambda(n,p)$ und $\mu = \mu(n,p)$, mit $0 < \lambda, \mu < 1$, so dass gilt*

$$|\{x \in B(R) : u_{x_1}(x) \le \lambda M_1^+(R)\}| \ge \mu |B(R)|.$$

Dann gibt es eine positive Konstante $\gamma < 1$, so dass (3.17) *gilt, d.h.*

$$M_1^+\left(\frac{R}{2}\right) \le \gamma M_1^+(R).$$

Beweis von Proposition 3.1. Wir wenden Lemma 1.19 an und setzen

$$\begin{aligned} \omega_1(R) &= M(R), \\ \bar\omega_i(R) &= M_i^+(R) \qquad \text{für } i = 1,\dots,n, \\ \bar\omega_i(R) &= M_{i-n}^-(R) \quad \text{für } i = n+1,\dots,2n, \end{aligned}$$

$$M = 1, \quad N = 2n, \quad \tau = \frac{1}{2}, \quad \delta_0 = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \kappa = \gamma.$$

mit γ aus vorherigem Lemma. Wir erhalten[12]

$$\begin{aligned} M(R) &\le C_1\left(\frac{R}{R_0}\right)^\beta \max_{\substack{\sigma=+,- \\ i=1,\dots,n}} M_i^\sigma(R_0) \\ &\le C_1\left(\frac{R}{R_0}\right)^\beta M(R_0) \\ &\le C_1 K\left(\frac{R}{R_0}\right)^\beta \end{aligned}$$

mit Konstanten $\beta = \beta(p,n)$ und $C_1 = C_1(p,n)$. $\blacksquare$

Bemerkung 3.8. Proposition 3.1 besagt, dass Du in jedem Punkt $x^0 \in \Omega$, in dem $Du(x^0) = 0$ gilt, auf einer Kugel $B(x^0, R_0) \subset \Omega$ Hölder-stetig zum Exponenten β ist. Es gilt nämlich für jeden Punkt $x \in B(x^0, R_0)$ mit $R := |x^0 - x|$

$$|Du(x^0) - Du(x)| = |Du(x)| \le C_1 K\left(\frac{R}{R_0}\right)^\beta = C\,|x^0 - x|^\beta.$$

[12] Zur Erinnerung: Es gilt $M(R_0) = \sup_{B(R_0)} |Du| \le K$.

3.2 Eine a-priori Hölder-Abschätzung für den Gradienten

Wir wollen nun das Ergebnis des letzten Abschnitts auf alle inneren Punkte der Kugel $B(R_0/2)$ erweitern.

Proposition 3.9. *Sei* $u^\varepsilon \in C^2(B(R_0))$ *eine Lösung von* (3.1) *und es gelte wieder die Annahme* (3.4), *d.h.*

$$\sup_{B(R_0)} Du^\varepsilon \leq K.$$

Dann existieren Konstanten $C_2 = C_2(R_0, p, n, K)$ *und* $\alpha = \alpha(p, n) > 0$, *so dass gilt*

$$[Du^\varepsilon]_{\alpha, B(R_0/2)} \leq C_5. \tag{3.28}$$

Beweis. Wir lassen den ε-Index wieder weg. Nach Proposition 3.1 ist Du auf der Kugel $B(x^0, R_0/2)$ in jedem Punkt $x^1 \in B(x^0, R_0/2)$ mit $Du(x^1) = 0$ Hölder-stetig zum Exponenten β. Nehme nun an

$$|Du(x^1)| > 0. \tag{3.29}$$

Definiere für $k = 1, 2, \ldots, n$ und $0 < R \leq R_0/2$

$$\begin{aligned}
M(R) &:= \sup_{B(x^1,R)} |Du|, \\
M_k^\pm(R) &:= \sup_{B(x^1,R)} \pm u_{x_k}, \\
\operatorname*{osc}_{B(x^1,R)} u_{x_k} &:= \sup_{B(x^1,R)} u_{x_k} - \inf_{B(x^1,R)} u_{x_k} = M_k^+(R) + M_k^-(R)
\end{aligned}$$

Für jedes $0 < R \leq R_0/2$ gibt es ein $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ und ein $\sigma \in \{+, -\}$ für die $M_k^\sigma(R)$ die Ungleichung

$$M_k^\sigma(R) \geq \frac{1}{\sqrt{n}} M(R) > 0 \tag{3.30}$$

erfüllt (cf. (3.5)). Sei nun γ die Konstante aus Lemma 3.6 und definiere R_1 als das Supremum der Menge der Zahlen $0 < R \leq R_0/2$ für welche

$$M_k^\sigma\left(\frac{R}{2}\right) \leq \gamma M_k^\sigma(R) \tag{3.31}$$

nicht gilt für ein $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ und $\sigma \in \{+, -\}$, so dass (3.30) gilt. Dann ist $R_1 > 0$, denn andernfalls könnten wir wie in Abschnitt 3.1 schließen

$$M(R) \leq C\left(\frac{R}{R_0}\right)^\beta \quad \text{für alle } 0 < R < R_0/2, \tag{3.32}$$

ein Widerspruch zu (3.29). Denn für $R \to 0^+$ würde folgen:

$$|Du(x^1)| = \lim_{R \to 0^+} M(R) \leq 0.$$

Es existiert also ein R_2 mit $R_1/2 < R_2 \le R_1$, so dass o.B.d.A. gilt

$$M_1^+(R_2) \ge \frac{1}{\sqrt{n}} M(R_2) > 0,$$

aber (3.31) für $R = R_2$, $k = 1$ und $\sigma = +$ *nicht* gilt. Dann gilt aber mit ε_0 aus Lemma 3.3

$$\fint_{B(x^1,R_2)} (M_1^+(R_2) - u_{x_1})^{+^2}\, dx \le \varepsilon_0 M_1^+(R_2)^2. \tag{3.33}$$

Denn sonst würde aus den Korollaren 3.5 und 3.7 folgen, dass (3.31) gilt mit $R = R_2$, $k = 1$ und $\sigma = +$, ein Widerspruch. Also folgt aus Lemma 3.3

$$\inf_{B(x^1,R_2/2)} u_{x_1} \ge \frac{1}{2} \sup_{B(x^1,R_2)} u_{x_1} \ge \frac{1}{2\sqrt{n}} M(R_2) > 0. \tag{3.34}$$

Ferner löst $v = u_{x_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ die Gleichung (3.6) in $B(x^1, R_2/2)$

$$-D_i\left(A_\varepsilon^{ij} D_j v\right) = 0 \quad \text{in } B\left(x^1, R_2/2\right). \tag{3.35}$$

Da wegen (3.34) gilt

$$M(R_2)^{p-2} \ge |Du|^{p-2} \ge \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} M(R_2)\right)^{p-2} \quad \text{in } B\left(x^1, R_2/2\right)$$

haben wir für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \ne 0$

$$\lambda|\xi|^2 \le A_\varepsilon^{ij}(Du)\xi_i\xi_j \le \Lambda|\xi|^2$$

mit

$$\lambda = \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} M(R_2)\right)^{p-2} + \varepsilon \quad \text{und} \quad \Lambda = (p-1)M(R_2)^{p-2} + \varepsilon.$$

Also können wir den Satz von De Giorgi (cf. [GM05, Theorem 8.11]) anwenden. Folglich existiert eine Konstante $\delta = \delta(p, n) < 1$, so dass für alle $0 < R \le R_2/2$ und alle $k = 1, 2, \ldots, n$ gilt

$$\operatorname*{osc}_{B(x^1,R/4)} u_{x_k} \le \delta \operatorname*{osc}_{B(x^1,R)} u_{x_k} \tag{3.36}$$

und, für eine Konstante $C = C(R_2, p, n)$,

$$\operatorname*{osc}_{B(x^1,R)} u_{x_k} \le C\left(\frac{R}{R_2}\right)^\mu \operatorname*{osc}_{B(x^1,R_2/2)} u_{x_k}. \tag{3.37}$$

Im Fall $R_1 = R_0/2$ gilt $R_0/4 < R_2 \le R_0/2$. Folglich gilt nach (3.37) für alle $0 < R \le R_0/8$

$$\operatorname*{osc}_{B(x^1,R)} u_{x_k} \le C\left(\frac{R}{R_0}\right)^\mu \operatorname*{osc}_{B(x^1,R_2/2)} u_{x_k} \le C\left(\frac{R}{R_0}\right)^\mu M\left(\frac{R_2}{2}\right) \le CK\left(\frac{R}{R_0}\right)^\mu \tag{3.38}$$

mit $\mu > 0$ und $C = C(R_0, p, n)$ unabhängig von R_2.

Im Fall $R_1 < R_0/2$ können wir Lemma 1.19 anwenden mit

$$\begin{aligned} \omega_i(R) = \bar{\omega}_i(R) &= \operatorname*{osc}_{B(x^1,R)} u_{x_i} && \text{für } i = 1, 2, \ldots, n, \\ \bar{\omega}_i(R) &= M^+_{i-n}(R) && \text{für } i = n+1, \ldots, 2n, \\ \bar{\omega}_i(R) &= M^-_{i-2n}(R) && \text{für } i = 2n+1, \ldots, 3n, \end{aligned}$$

$$M = n, \quad N = 3n, \quad \tau = \frac{1}{4}, \quad \delta_0 = \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad \kappa = \max\{\delta, \gamma\}.$$

Denn offensichtlich gibt es für jedes $0 < R \le R_1/4 < R_2/2$ und für jedes $R_1 < R \le R_0/2$ ein $\bar{\omega}_k$, dass die Ungleichungen

(i) $\bar{\omega}_k(R) \ge \delta_0 \omega_i(R)$ für $i = 1, \ldots, M$ und

(ii) $\bar{\omega}_k(\tau R) \le \kappa \bar{\omega}_k(R)$,

erfüllt. Für den Bereich $R_1/4 < R \le R_1$ machen wir keine Aussage und nutzen aus, dass das Lemma, trotz dieser Lücke, anwendbar bleibt.

Für $0 < R \le R_1/4$ nehmen wir dazu

$$k := \operatorname*{arg\,max}_{i=1,..n} \bar{\omega}_i(R) = \operatorname*{arg\,max}_{i=1,..n} \operatorname*{osc}_{B(x^1,R)} u_{x_i},$$

hiermit folgen (i) und (ii) sofort aus der Definition von k und aus (3.36).

Für $R_1 < R \le R_0/2$ nehmen wir ein $k \in \{n+1, \ldots, 3n\}$, so dass für entsprechende σ, j gilt

$$\bar{\omega}_k(R) = M^\sigma_j(R) \ge \frac{1}{\sqrt{n}} M(R) \quad \text{und}$$

$$\bar{\omega}_k(\tau R) = M^\sigma_j(\tau R) \le M^\sigma_j\left(\frac{R}{2}\right) \le \gamma M^\sigma_j(R) \le \kappa \bar{\omega}_k(R).$$

Ein solches k (d.h. σ, j) findet sich, da $R > R_1$ ist. Damit ist (ii) gezeigt. Weiterhin gilt (i), da für $i = 1, 2, \ldots, n$ gilt

$$\omega_i(R) = \operatorname*{osc}_{B(x^1,R)} u_{x_i} = M^+_i(R) + M^-_i(R) \le 2M(R) \le 2\sqrt{n} M^\sigma_j(R) = \frac{1}{\delta_0} \bar{\omega}_k(R).$$

Also erhalten wir aus Lemma 1.19 für $0 < R < R_0/2$ und $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\begin{aligned} \operatorname*{osc}_{B(x^1,R)} u_{x_i} &\le C\left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha \max_{k=1,\ldots,3n} \bar{\omega}_k\left(\frac{R_0}{2}\right) \\ &\le 2C\left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha M\left(\frac{R_0}{2}\right) \\ &\le CK\left(\frac{R}{R_0}\right)^\alpha \end{aligned}$$

für ein $C > 0$ und ein $\alpha > 0$ unabhängig von R_1 und R_2.

Für alle $x_1 \in B(x^0, R_0/2)$ mit $|Du(x_1)| \neq 0$ gilt also entweder obige Abschätzung oder (3.38). Zusammen mit Proposition 3.1 folgt somit die Behauptung durch Überdeckung von $B(x^0, R_0/2)$ mit endlich vielen solcher Kugeln. ■

3.3 Der Beweis von Satz 1.1

Da wir von Lösungen der p-Laplacegleichung (1.1) a-priori nur wissen, dass sie in $W^{1,p}(\Omega)$ liegen, betrachten wir nun eine Folge von approximierenden Problemen, wie wir sie in den letzten beiden Abschnitten eingeführt haben.

Sei daher nun u eine Lösung von (1.1) und $g = S_\delta u$ mit $\delta > 0$, wobei S_δ wieder den Glättungsoperator bezeichne. Sei außerdem $B(R_0) \subset \Omega$ wieder eine Kugel mit Mittelpunkt $x_0 \in \Omega$ und Radius $R_0 > 0$. Halte nun $0 < \varepsilon \le 1$ fest und betrachte das Dirichlet-Problem

$$\begin{cases} -D_i\left(\left(|Du^\varepsilon|^{p-2} + \varepsilon\right) D_i u^\varepsilon\right) = 0 & \text{in } B(R_0) \\ u^\varepsilon = g & \text{auf } \partial B(R_0) \end{cases} \tag{3.39}$$

und seine schwache Formulierung: Finde eine Funktion $u^\varepsilon \in W^{1,p}(B(R_0))$ mit $u^\varepsilon - g \in W_0^{1,p}(B(R_0))$, so dass gilt

$$\int_{B(R_0)} \left(|Du^\varepsilon|^{p-2} + \varepsilon\right) D_i u^\varepsilon D_i \eta \, dx = 0 \quad \text{für alle } \eta \in W_0^{1,p}(B(R_0)). \tag{3.40}$$

Lemma 3.10. *Sei $u^\varepsilon \in W^{1,p}(B(R_0))$ eine schwache Lösung von* (3.39). *Dann gibt es eine Konstante $C = C(R_0, \delta)$, so dass gilt*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B(R_0)} |Du^\varepsilon| \le C, \tag{3.41}$$

und das Problem (3.39) *hat eine eindeutige Lösung $u \in C^{2,\mu}(B(R_0))$ für ein $\mu = \mu(R_0, \delta, \varepsilon)$ mit $0 < \mu \le 1$.*

Beweis. Wir unterteilen den Beweis in mehrere Schritte und lassen zur Vereinfachung der Schreibweise den ε-Index wieder einmal weg.

Schritt 1. Wir zeigen zunächst, dass Du auf dem Rand von $B(R_0)$ beschränkt ist;

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\partial B(R_0)} |Du| \le C_6 \tag{3.42}$$

mit $C_6 = C_6(R_0, \delta)$. Wähle dazu einen Punkt $x^* \in \partial B(R_0)$; wir nehmen o.B.d.A. $x^* = (0, 0, \dots, 0, -R_0)$ an, sonst erhalten wir diese Annahme durch Rotation von x^* auf $(0, 0, \dots, 0, -R_0)$. Definiere die Barrierefunktion

$$w(x) = g(x^*) + \sum_{i=1}^{n-1} g_{x_i}(x^*) x_i + \sup_{\partial B(R_0)} |D^2 g| \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + \mu(x_n + R_0) - \lambda(x_n + R_0)^2$$

mit $\mu, \lambda > 0$, die wir später genauer bestimmen werden. Nehme nun an

$$|w_{x_n}| \ge 1. \tag{3.43}$$

Dann gilt in $B(R_0)$ für hinreichend großes $\lambda < 1$

$$
\begin{aligned}
-D_i\left(\left(|Dw|^{p-2}+\varepsilon\right)D_i w\right) &= -\left(|Dw|^{p-2}+\varepsilon\right)D_iD_i w-(p-2)|Dw|^{p-4}w_{x_i}w_{x_j}w_{x_ix_j}\\
&= -\left(|Dw|^{p-2}+\varepsilon\right)\left(2(n-1)\sup_{\partial B(R_0)}|D^2g|-2\lambda\right)\\
&\quad -(p-2)|Dw|^{p-4}\left(\sum_{i=1}^{n-1}2w_{x_i}^2\sup_{\partial B(R_0)}|D^2g|-2w_{x_n}^2\lambda\right)\\
&\geq 0.
\end{aligned}
$$

Damit ist λ nun fest und wir wählen $\mu > 0$ so groß, dass (3.43) gilt und außerdem

$$w \geq g \quad \text{auf } \partial B(R_0).$$

Da u eine Lösung von (3.39) ist gilt $g = u$ auf $\partial B(R_0)$. Somit folgt aus dem Vergleichsprinzip (cf. [GT01, Theorem 10.7])

$$w \geq u \quad \text{in } B(R_0).$$

Außerdem gilt nach Konstruktion $w(x^*) = g(x^*) = u(x^*)$, für einen Repräsentanten von u, und somit

$$\frac{u(x)-u(x^*)}{|x-x^*|} \leq \frac{w(x)-w(x^*)}{|x-x^*|}.$$

Sei nun $\vec{n}$ der Normalenvektor im Punkt x^* und schreibe für $x = x^* - h\vec{n}$, dann erhalten wir

$$\frac{u(x^*-h\vec{n})-u(x^*)}{h} \leq \frac{w(x^*-h\vec{n})-w(x^*)}{h}$$

und durch den Grenzübergang[13] $h \to 0^+$

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}(x^*) \geq \frac{\partial w}{\partial \vec{n}}(x^*) = -\mu.$$

Auf die gleiche Art und Weise erhalten wir eine Abschätzung nach oben[14]. Da x^* für einen beliebigen Punkt auf $\partial B(R_0)$ stand und die tangentialen Ableitungen von u und g identisch sind, haben wir (3.42) bewiesen.

---

[13] Vgl. auch die Definition von $\frac{\partial}{\partial \vec{n}}f(x^*) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(x^*+h\vec{n})-f(x^*)}{h}$

[14] Definiere dazu w wie folgt

$$w(x) = g(x^*) - \sum_{i=1}^{n-1} g_{x_i}(x^*)x_i - \sup_{\partial B(R_0)}|D^2g|\sum_{i=1}^{n-1}(x_i)^2 - \mu(x_n+R_0) + \lambda(x_n+R_0)^2$$

dann ist analog, nach entsprechender Wahl von λ und μ,

$$-D_i\left(\left(|Dw|^{p-2}+\varepsilon\right)D_i w\right) \leq 0 \quad \text{in } B(R_0) \quad \text{und} \quad w \leq g \quad \text{auf } \partial B(R_0).$$

Schritt 2. Um nun eine Abschätzung im Innern von $B(R_0)$ zu bekommen halten wir ein $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ fest und betrachten die schwache Form der Ableitung von Gleichung (3.39), d.h. (3.6) mit $v = u_{x_k}$:

$$\int_{B(R_0)} A_\varepsilon^{ij} D_i u_{x_k}\, D_j \eta \, dx = 0 \quad \text{für alle } \eta \in C_c^\infty(B(R_0))$$

Wir nehmen hierzu an, dass die zweite verallgemeinerte Ableitung von u existiert und in $L^2_{\text{loc}}(B(R_0))$ liegt. Den Beweis dazu liefern wir im nächsten Schritt nach.

Setze nun $\eta := (\pm u_{x_k} - C_6)^+ > 0$. Wir erhalten durch ausrechnen und durch die Elliptizität (hier $a_{ij}\,|Du|^{p-2}\xi_i\xi_j \geq |Du|^{p-2}|\xi|^2$, cf. Beweis von Lemma 3.2)

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{B(R_0)} A_\varepsilon^{ij} D_i u_{x_k}\, D_j(\pm u_{x_k} - C_6)^+ \, dx \\
&= \int_{B(R_0)} a_{ij}\,|Du|^{p-2} u_{x_k x_i}\, D_j(\pm u_{x_k} - C_6)^+ + \varepsilon u_{x_k x_i}\, D_i(\pm u_{x_k} - C_6)^+ \, dx \\
&= \int_{B(R_0)\cap\{\pm u_{x_k} > C_6\}} a_{ij}\,|Du|^{p-2} u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} + \varepsilon u_{x_k x_i} u_{x_k x_i} \, dx \\
&= \int_{B(R_0)\cap\{\pm u_{x_k} > C_6\}} a_{ij}\,|Du|^{p-2} u_{x_k x_i} u_{x_k x_j} + \varepsilon |Du_{x_k}|^2 \, dx \\
&\geq \int_{B(R_0)\cap\{\pm u_{x_k} > C_6\}} |Du|^{p-2}|Du_{x_k}|^2 + \varepsilon |Du_{x_k}|^2 \, dx.
\end{aligned}$$

Angenommen $|B(R_0) \cap \{\pm u_{x_k} > C_6\}| > 0$, dann ist nach obiger Rechnung $Du_{x_k} = 0$ fast überall auf $B(R_0) \cap \{\pm u_{x_k} > C_6\}$, woraus folgt $D(\pm u_{x_k} - C_6)^+ = 0$ fast überall auf $B(R_0)$, ein Widerspruch, denn da $(\pm u_{x_k} - C_6)^+ \in W_0^{1,p}(B(R_0))$ ist würde folgen $(\pm u_{x_k} - C_6)^+ = 0$. Es ist also $|B(R_0) \cap \{\pm u_{x_k} > C_6\}| = 0$, damit folgt für $k = 1, 2, \dots, n$

$$\pm u_{x_k} \leq C_6 \quad \text{fast überall in } B(R_0).$$

Damit ist (3.41) bewiesen.

Schritt 3. Wir zeigen nun, dass $u \in W^{2,2}_{\text{loc}}(B(R_0))$ ist für jedes feste $\varepsilon > 0$. Dazu bedienen wir uns einem Trick von Marcellini [Mar91].

Seien $e_1, e_2, \dots, e_n$ die Einheitsvektoren von $\mathbb{R}^n$ und sei s eine natürliche Zahl $1 \leq s \leq n$. Dann ist für $h \in \mathbb{R} - \{0\}$ der Differenzenquotient definiert durch

$$\nabla_s^h u(x) = \frac{u(x + he_s) - u(x)}{h}$$

vorausgesetzt $u(x + he_s)$ ist definiert. Sei nun $\eta \in C_c^\infty(B(R_0))$ beliebig, dann ist für hinreichend kleines $h > 0$ auch $\nabla_s^{-h}\eta \in C_c^\infty(B(R_0))$ und es gilt nach diskreter partieller Integration

$$\begin{aligned}
0 &= -\int_{B(R_0)} A_\varepsilon^i(Du) D_i \nabla_s^{-h}\eta \, dx \\
&= -\int_{B(R_0)} A_\varepsilon^i(Du) \nabla_s^{-h} D_i\eta \, dx \\
&= \int_{B(R_0)} \nabla_s^h A_\varepsilon^i(Du) D_i\eta \, dx, \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

mit $A^i_\varepsilon(q) := (|q|^{p-2} + \varepsilon)\, q_i$ wie in Kapitel 2. Es gilt

$$\begin{aligned}\nabla^h_s A^i_\varepsilon(Du) &= \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d}{dt} A^i_\varepsilon\left(Du + th\nabla^h_s Du\right)\, dt\\ &= \int_0^1 D_{q_j} A^i_\varepsilon\left(Du + th\nabla^h_s Du\right) \nabla^h_s D_j u\, dt\\ &= \tilde{A}^{ij}_{h,\varepsilon}\, \nabla^h_s D_j u,\end{aligned}$$

dabei setzen wir

$$\tilde{A}^{ij}_{h,\varepsilon} = \int_0^1 D_{q_j} A^i_\varepsilon\left(Du + th\nabla^h_s Du\right)\, dt.$$

Weiterhin folgt aus (3.41) und der Elliptizität von $D_{q_j}A^i$ (cf. Lemma 2.1)

$$\begin{aligned}\left|\tilde{A}^{ij}_h\right| &= \left|\int_0^1 D_{q_j} A^i\left(Du + th\nabla^h_s Du\right) dt\right|\\ &\le (p-1)\int_0^1 \left|Du + th\nabla^h_s Du\right|^{p-2} dt + \varepsilon.\end{aligned}$$

Und für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}\tilde{A}^{ij}_h \xi_i \xi_j &= \int_0^1 D_{q_j} A^i\left(Du + th\nabla^h_s Du\right) \xi_i\xi_j\, dt\\ &\ge \left(\int_0^1 \left|Du + th\nabla^h_s Du\right|^{p-2} dt + \varepsilon\right)|\xi|^2\\ &\ge \varepsilon\,|\xi|^2.\end{aligned}$$

Wähle nun als Testfunktion in Gleichung (3.44) die Funktion $\eta := \nabla^h_s u\, \zeta^2$ mit der Abschneidefunktion $\zeta \in C^\infty_c(B(R))$ für ein beliebiges $R < R_0/3$ mit $\zeta \equiv 1$ auf $B(R/2)$ und $|D\zeta| \le \frac{C}{R}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}0 &= \int_{B(R_0)} \nabla^h_s A^i_\varepsilon(Du) D_i(\nabla^h_s u\, \zeta^2)\, dx\\ &= \int_{B(R_0)} \nabla^h_s A^i_\varepsilon(Du)\left(D_i\nabla^h_s u\, \zeta^2 + 2\zeta\nabla^h_s u\, D_i\zeta\right)\, dx.\end{aligned}$$

Also gilt nach der Dreiecksungleichung

$$\int\limits_{B(R_0)} \int\limits_0^1 D_{q_j} A^i_\varepsilon\, \nabla^h_s u_{x_i}\, \nabla^h_s u_{x_j}\, \zeta^2\, dt\, dx \le 2 \int\limits_{B(R_0)} \int\limits_0^1 \left|D_{q_j} A^i_\varepsilon\, \nabla^h_s u_{x_j}\, D_i\zeta\, \nabla^h_s u\, \zeta\right|\, dt\, dx$$

Wir wollen nun die rechte Seite abschätzen. Dazu wenden wir nacheinander Lemma 2.3 und die Young'sche Ungleichung an

$$\begin{aligned}&2\int_{B(R_0)}\int_0^1 \left|D_{q_j} A^i_\varepsilon\, \nabla^h_s u_{x_j}\, D_i\zeta\, \nabla^h_s u\, \zeta\right|\, dt\, dx\\ &\quad\le 2\, C_7 \int_{B(R_0)}\int_0^1 \left(D_{q_j} A^i_\varepsilon\, \nabla^h_s u_{x_i}\, \nabla^h_s u_{x_j}\, \zeta^2\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\qquad\cdot\left(\left(\left|Du + th\nabla^h_s Du\right|^{p-2} + \varepsilon\right)|D\eta|^2|\nabla^h_s u|^2\right)^{\frac{1}{2}}\, dt\, dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_7\gamma \int_{B(R_0)} \int_0^1 D_{q_j} A_\varepsilon^i \, \nabla_s^h u_{x_i} \, \nabla_s^h u_{x_j} \, \zeta^2 \, dt \, dx \\
&\quad + \frac{C_7}{\gamma} \int_{B(R_0)} \int_0^1 \left(\left| Du + th\nabla_s^h Du \right|^{p-2} + \varepsilon \right) |D\eta|^2 |\nabla_s^h u|^2 \, dt \, dx.
\end{aligned}$$

Zusammen gilt nach entsprechender Wahl von γ

$$\begin{aligned}
&\int_{B(R_0)} \int_0^1 D_{q_j} A_\varepsilon^i \, \nabla_s^h u_{x_i} \, \nabla_s^h u_{x_j} \, \zeta^2 \, dt \, dx \\
&\qquad\qquad \leq C \int_{B(R_0)} \int_0^1 \left(\left| Du + th\nabla_s^h Du \right|^{p-2} + \varepsilon \right) |D\eta|^2 |\nabla_s^h u|^2 \, dt \, dx.
\end{aligned}$$

Wobei wir hier die linke Seite über die Elliptizität nach unten abschätzen können. Es gilt also

$$\int_{B(R_0)} |\nabla_s^h Du|^2 \, \zeta^2 \leq C \int_{B(R_0)} \int_0^1 \left(\left| Du + th\nabla_s^h Du \right|^{p-2} + \varepsilon \right) |D\eta|^2 |\nabla_s^h u|^2 \, dt \, dx.$$

Um die rechte Seite abzuschätzen wenden wir die Young'sche Ungleichung an. Damit folgt

$$\begin{aligned}
&\int_{B(R_0)} \int_0^1 \left(\left| Du + th\nabla_s^h Du \right|^{p-2} + \varepsilon \right) |D\eta|^2 |\nabla_s^h u|^2 \, dt \, dx \\
&\quad \leq \frac{p-2}{p} \int_{B(R_0)} \int_0^1 \left(\left| Du + th\nabla_s^h Du \right|^{p-2} + \varepsilon \right)^{\frac{p}{p-2}} \, dt \, dx \\
&\quad\quad + \frac{2}{p} \int_{B(R_0)} |D\eta|^p |\nabla_s^h u|^p \, dx
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{B(R_0)} \int_0^1 \left(\left| Du + th\nabla_s^h Du \right|^{p-2} + \varepsilon \right)^{\frac{p}{p-2}} \, dt \, dx \\
&\quad \leq C \int_{B(R_0)} \int_0^1 \left| Du + th\nabla_s^h Du \right|^p + \varepsilon^{\frac{p}{p-2}} \, dt \, dx \\
&\quad \leq C \int_{B(R_0)} |Du(x + he_s)|^p + |Du(x)|^p + \varepsilon^{\frac{p}{p-2}} \, dt \, dx \\
&\quad \leq C.
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt somit nach Verkleinerung des Integrationsgebiets auf $B(R/2)$[15]

$$\begin{aligned}
\int_{B(R/2)} |\nabla_s^h Du|^2 &\leq C \left(R^{-p} \int_{B(R_0)} |\nabla_s^h u|^p \, dx + 1 \right) \\
&\leq C \left(R^{-p} \int_{B(R_0)} |Du|^p \, dx + 1 \right) \\
&\leq C.
\end{aligned}$$

[15] Denn für hinreichend kleine $h > 0$ gilt $\|\nabla_s^h u\|_{2,B(R_0)} \leq C\|Du\|_{2,B(R_0)}$ (cf. [GM05, Proposition 4.7 (i)])

Nach [GM05, Proposition 4.7 (ii)] gilt somit $\|D^2u\|_{2,B(R/2)} \le C$ unabhängig vom Mittelpunkt von $B(R/2)$. Wir erhalten somit $u \in W^{2,2}_{\text{loc}}(B(R_0))$ durch Überdeckung.

Schritt 4. Es bleibt zu zeigen, dass $u \in C^{2,\mu}(B(R_0))$ ist. Gehe dazu in (3.44) zum Grenzwert $h \to 0^+$ über. Wir erhalten die Gleichung

$$\int_{B(R_0)} D_{q_j} A^i_\varepsilon(Du) D_j D_s u \, D_i \eta \, dx = 0. \tag{3.45}$$

Außerdem ist nach Schritt 2 und Elliptizität $D_{q_j} A^i_\varepsilon(Du) \in L^\infty(B(R_0))$. Nach dem Satz von De Giorgi [GM05, Theorem 8.11] ist damit $D_s u \in C^\mu(B(R_0))$, also $u \in C^{1,\mu}(B(R_0))$. Damit sind aber in Gleichung (3.45) die Koeffizienten $D_{q_j} A^i_\varepsilon(Du) \in C^\mu(B(R_0))$. Es gilt daher nach [GM05, Theorem 5.17] $D_s u \in C^{1,\mu}(B(R_0))$ und somit ist $u \in C^{2,\mu}(B(R_0))$, womit die Behauptung bewiesen wäre. ∎

Lemma 3.11. *Sei $u^\varepsilon \in C^2(B(R_0))$ eine schwache Lösung von* (3.39). *Dann gibt es eine Konstante $C = C(R_0)$, so dass gilt*

$$\int_{B(R_0)} |Du^\varepsilon|^p \, dx \le C\left(\int_\Omega |Du|^p \, dx + 1\right). \tag{3.46}$$

Und eine Konstante $C_7 = C_7(R_0)$, so dass gilt

$$\sup_{B(R_0/2)} |Du^\varepsilon| \le C_8. \tag{3.47}$$

Diese Konstanten hängen weder von ε noch von δ ab.

Beweis. Wir unterteilen den Beweis in mehrere Schritte.

Schritt 1. Zeige zunächst (3.46). Setze dazu $\eta := u^\varepsilon - g$ in (3.40):

$$\int_{B(R_0)} \left(|Du^\varepsilon|^{p-2} + \varepsilon\right) D_i u^\varepsilon D_i(u^\varepsilon - g) \, dx = 0.$$

Dann gilt nach der Young'schen Ungleichung

$$\begin{aligned}
\int_{B(R_0)} \left(|Du^\varepsilon|^{p-2} + \varepsilon\right) |Du^\varepsilon|^2 \, dx &= \int_{B(R_0)} \left(|Du^\varepsilon|^{p-2} + \varepsilon\right) D_i u^\varepsilon D_i g \\
&\le \frac{1}{2} \int_{B(R_0)} \left(|Du^\varepsilon|^{p-2} + \varepsilon\right) |Du^\varepsilon|^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{B(R_0)} \left(|Du^\varepsilon|^{p-2} + \varepsilon\right) |Dg|^2.
\end{aligned}$$

Und damit

$$\int_{B(R_0)} \left(|Du^\varepsilon|^{p-2} + \varepsilon\right) |Du^\varepsilon|^2 \, dx \le \int_{B(R_0)} \left(|Du^\varepsilon|^{p-2} + \varepsilon\right) |Dg|^2.$$

Ebenfalls aus der Young'schen Ungleichung folgt

$$|Du^\varepsilon|^{p-2} \, |Dg|^2 \le \frac{p-2}{p} |Du^\varepsilon|^p + \frac{2}{p} |Dg|^p.$$

Weiterhin gilt nach Satz 1.10 da $u \in L^q(\Omega)$ für $1 \le q \le p$

$$\int_{B(R_0)} |Dg|^q \, dx = \|S_\delta Du\|^q_{q,B(R_0)} \le \|Du\|^q_{q,\Omega}$$

und somit gilt

$$\begin{aligned}
\int_{B(R_0)} |Du^\varepsilon|^p + \varepsilon |Du^\varepsilon|^2 \, dx &\le \int_{B(R_0)} |Dg|^p + \varepsilon |Dg|^2 \, dx \\
&\le \int_{B(R_0)} |Dg|^p \, dx + \varepsilon \|Du\|^2_{2,\Omega} \\
&\le C \left(\int_{B(R_0)} |Dg|^p \, dx + 1 \right) \\
&\le C \left(\int_\Omega |Du|^p \, dx + 1 \right).
\end{aligned}$$

Hiermit ist (3.46) bewiesen.

Schritt 2. Zeige nun (3.47). Die bekannte Ableitung von (3.40) impliziert

$$- D_i \left(b^{ij} |Du^\varepsilon|^{p-2} D_j u_{x_k} \right) = 0 \quad \text{auf } W \tag{3.48}$$

mit

$$W = W_\varepsilon = \{ x \in B(R_0) : |Du^\varepsilon(x)| > 1 \}$$

und

$$b^{ij} = a_{ij} + \frac{\varepsilon \delta_{ij}}{|Du^\varepsilon|^{p-2}}.$$

Auf W gilt somit nach Lemma 3.2 für $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$|\xi|^2 \le b^{ij} \xi_i \xi_j \le (p - 1 + \varepsilon) |\xi|^2. \tag{3.49}$$

Setze nun

$$w = w_\varepsilon = |Du^\varepsilon|^p.$$

Es gilt

$$D_j w = p \, |Du^\varepsilon|^{p-2} \, u^\varepsilon_{x_k} D_j u^\varepsilon_{x_k}.$$

Und somit folgt aus (3.48)

$$\begin{aligned}
-D_i \left(b^{ij} D_j w \right) &= -p \, D_i \left(b^{ij} |Du^\varepsilon|^{p-2} \, u^\varepsilon_{x_k} D_j u^\varepsilon_{x_k} \right) \\
&= -p \, D_i \left(b^{ij} |Du^\varepsilon|^{p-2} D_j u^\varepsilon_{x_k} \right) u^\varepsilon_{x_k} - p \, b^{ij} |Du^\varepsilon|^{p-2} D_j u^\varepsilon_{x_k} D_i u^\varepsilon_{x_k} \\
&= -p \, b^{ij} |Du^\varepsilon|^{p-2} D_j u^\varepsilon_{x_k} D_i u^\varepsilon_{x_k}.
\end{aligned}$$

Auf W gilt somit nach (3.49)

$$-D_i \left(b^{ij} D_j w \right) \le -p \, |Du^\varepsilon|^{p-2} \, |Du^\varepsilon_{x_k}|^2 \le 0,$$

außerdem merken wir uns

$$D_i\left(b^{ij}|Du^\varepsilon|^{p-2}\,u^\varepsilon_{x_k}D_ju^\varepsilon_{x_k}\right)=b^{ij}|Du^\varepsilon|^{p-2}D_ju^\varepsilon_{x_k}D_iu^\varepsilon_{x_k}. \tag{3.50}$$

Schritt 3. Definiere nun

$$v:=(w-1)^+.$$

Dann gilt

$$-D_i\left(b^{ij}D_jv\right)\leq 0 \quad \text{auf } B(R_0)$$

und b^{ij} erfüllt (3.49) auf der Menge W, wenn gilt $v\neq 0$. Daher können wir [GT01, Theorem 8.17] anwenden und erhalten

$$\sup_{B(R_0/2)} v\leq C\left(\fint_{B(\frac{3}{4}R_0)} v^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.51}$$

für jedes $q>1$ und für eine Konstante $C=C(q)$. Sei nun

$$q=1^*=\frac{n}{n-1}.$$

Aus der Sobolev-Ungleichung folgt

$$\left(\fint_{B(\frac{3}{4}R_0)} v^{1^*}dx\right)^{\frac{1}{1^*}}\leq C\fint_{B(\frac{3}{4}R_0)}|Dv|+v\,dx$$

mit $C=C(n)$. Betrachte nun die rechte Seite dieser Gleichung. Es gilt

$$\begin{aligned}\fint_{B(\frac{3}{4}R_0)}|Dv|+v\,dx&=\fint_{B(\frac{3}{4}R_0)}|D(w-1)^+|+(w-1)^+\,dx\\&\leq\fint_{B(\frac{3}{4}R_0)}|Dw|+w\,dx\\&=\fint_{B(\frac{3}{4}R_0)}|D|Du^\varepsilon|^p|+|Du^\varepsilon|^p\,dx\\&\leq C\fint_{B(\frac{3}{4}R_0)}|Du^\varepsilon|^{p-1}|D^2u^\varepsilon|+|Du^\varepsilon|^p\,dx\\&\leq C\fint_{B(\frac{3}{4}R_0)}|Du^\varepsilon|^p|D^2u^\varepsilon|^2+|Du^\varepsilon|^p\,dx.\end{aligned}$$

Dies folgt aus den Ungleichungen von Hölder und Young. Denn zum einen gilt

$$\begin{aligned}|D|Du^\varepsilon|^p|&=\left[\sum_{i=1}^n\left(D_i|Du^\varepsilon|^p\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\sum_{i=1}^n\left(p|Du^\varepsilon|^{p-2}\sum_{k=1}^n u^\varepsilon_{x_kx_i}u^\varepsilon_{x_k}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\&=p|Du^\varepsilon|^{p-2}\left[\sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=1}^n u^\varepsilon_{x_kx_i}u^\varepsilon_{x_k}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\&\leq p|Du^\varepsilon|^{p-2}\left[\sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=1}^n(u^\varepsilon_{x_kx_i})^2\right)\left(\sum_{k=1}^n(u^\varepsilon_{x_k})^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\\&=p|Du^\varepsilon|^{p-1}\left[\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n(u^\varepsilon_{x_kx_i})^2\right]=p|Du^\varepsilon|^{p-1}|D^2u^\varepsilon|\end{aligned}$$

und zum anderen

$$\begin{aligned}\fint_{B(\frac{3}{4}R_0)} |Du^\varepsilon|^{p-1}|D^2u^\varepsilon| + |Du^\varepsilon|^p \, dx &= \fint_{B(\frac{3}{4}R_0)} |Du^\varepsilon|^{p-2}\left(|Du^\varepsilon||D^2u^\varepsilon| + |Du^\varepsilon|^2\right) dx \\ &\le \fint_{B(\frac{3}{4}R_0)} |Du^\varepsilon|^{p-2}\left(\frac{1}{2}|D^2u^\varepsilon|^2 + \frac{3}{2}|Du^\varepsilon|^2\right) dx \\ &\le \frac{3}{2}\fint_{B(\frac{3}{4}R_0)} |Du^\varepsilon|^{p-2}|D^2u^\varepsilon|^2 + |Du^\varepsilon|^p \, dx.\end{aligned}$$

Zusammen gilt also

$$\sup_{B(R_0/2)} v \le C \fint_{B(\frac{3}{4}R_0)} |Du^\varepsilon|^{p-2}|D^2u^\varepsilon|^2 + |Du^\varepsilon|^p \, dx. \tag{3.52}$$

Schritt 4. Sei $\zeta \in C_c^\infty(B(R_0))$ eine Abschneidefunktion mit $\zeta = 1$ auf $B(\frac{3}{4}R_0)$ und $|D\zeta| \le \frac{1}{R_0}$. Setze nun ζ^2 als Testfunktion in die (schwache) Gleichung (3.50) ein

$$\int_{B(R_0)} b^{ij}|Du^\varepsilon|^{p-2}D_j u^\varepsilon_{x_k} D_i u^\varepsilon_{x_k}\zeta^2 \, dx = -\int_{B(R_0)} b^{ij}|Du^\varepsilon|^{p-2} u^\varepsilon_{x_k} D_j u^\varepsilon_{x_k} D_i\zeta^2 \, dx.$$

Aus der Elliptizität (3.49) folgt

$$\int_{B(R_0)} |Du^\varepsilon|^{p-2}|D^2u^\varepsilon|^2\zeta^2 \, dx \le -2\int_{B(R_0)} |Du^\varepsilon|^{p-2} u^\varepsilon_{x_k} D_j u^\varepsilon_{x_k}\zeta D_i\zeta \, dx.$$

Die rechte Seite ist also nicht-negativ und aus der Dreiecksungleichung und der Young'schen Ungleichung folgt für alle $\gamma > 0$

$$\begin{aligned}\int_{B(R_0)} |Du^\varepsilon|^{p-2}|D^2u^\varepsilon|^2\zeta^2 \, dx &\le \gamma\int_{B(R_0)} |Du^\varepsilon|^{p-2}|D^2u^\varepsilon|^2\zeta^2 \, dx \\ &\quad + \frac{1}{\gamma}\int_{B(R_0)} |Du^\varepsilon|^p|D_i\zeta|^2 \, dx.\end{aligned} \tag{3.53}$$

Es folgt also

$$\fint_{B(R_0)} |Du^\varepsilon|^{p-2}|D^2u^\varepsilon|^2\zeta^2 \, dx \le \frac{C}{R_0^2}\fint_{B(R_0)} |Du^\varepsilon|^p \, dx$$

Schritt 5. Obige Abschätzung liefert uns zusammen mit (3.52), (3.46) und den Definitionen von v und w

$$\begin{aligned}\sup_{B(R_0/2)} |Du^\varepsilon|^p - 1 &\le \frac{C}{R_0^2}\fint_{B(R_0)} |Du^\varepsilon|^p \, dx \\ &\le \frac{C}{R_0^{n+2}}\left(\int_\Omega |Du|^p \, dx + 1\right).\end{aligned}$$

Mit anderen Worten

$$\sup_{B(R_0/2)} |Du^\varepsilon| \le \left(\frac{C}{R_0^{n+2}}\left(\int_\Omega |Du|^p \, dx + 1\right) + 1\right)^{\frac{1}{p}}. \qquad \blacksquare$$

Beweis von Satz 1.1. Aufgrund vom Lemma 3.10 und Lemma 3.11 sind die Voraussetzungen von Proposition 3.9 auf $B(R_0/2)$ erfüllt und es gilt

$$[Du^\varepsilon]_{\alpha,B(R_0/4)} \le C \tag{3.54}$$

für ein $\alpha > 0$ und die Konstanten α und C sind von ε und δ unabhängig. Außerdem gilt nach der Poincaré'schen Ungleichung (cf. [GM05, Proposition 3.10]) und nach Lemma 3.11

$$\|u^\varepsilon - u^\varepsilon_{B(R_0)}\|_{p,B(R_0)} \le C\|Du^\varepsilon\|_{p,B(R_0)} \le C\left(\|Du\|_{p,\Omega} + 1\right),$$

mit $u^\varepsilon_{B(R_0)} = \fint_{B(R_0)} u^\varepsilon \, dx$ und $C = C(R_0)$. Aus der Dreiecksungleichung folgt

$$\|u^\varepsilon\|_{p,B(R_0)} \le C\|Du\|_{p,\Omega} + \left|u^\varepsilon_{B(R_0)}\right|.$$

Es folgt somit die Beschränktheit von u^ε in der Sobolev-Norm

$$\|u^\varepsilon\|_{1,p,B(R_0)} \le M,$$

mit $M = M(R_0)$, unabhängig von ε und δ. Das heißt aber auch, dass eine Teilfolge von (u^ε) existiert, die für $\varepsilon, \delta \to 0^+$ in $W^{1,p}(B(R_0))$ schwach gegen eine Funktion v konvergiert (cf. [Dob06, Satz 3.32]).

Sei nun $\Omega'' \Subset B(R_0)$, dann gibt es ein $0 < R < R_0$, so dass gilt $\Omega'' \subset B(R)$ und $B(R)$ kann mit endlich vielen Kugeln $B(\rho, x_i)$, $\rho = R_0 - R$, so überdeckt werden, dass gilt $B(2\rho, x_i) \subset B(R_0)$. Damit folgt aus den vorangegangenen Lemmas

$$\sup_{\Omega''} |Du^\varepsilon| + [Du^\varepsilon]_{\alpha,\Omega''} \le C(\Omega''). \tag{3.55}$$

Es ist also $Du^\varepsilon \in C^\alpha(\Omega'')$ und somit ist $u^\varepsilon \in C^{1,\alpha}(\Omega'')$. Aus der Kompaktheit der Einbettung $C^{1,\alpha}(\Omega'') \to C^1(\Omega'')$ (cf. [AF03, Theorem 1.34]), folgt, dass es eine Teilfolge von (u^ε) gibt, die für $\varepsilon, \delta \longrightarrow 0^+$ in $C^1(\Omega'')$ gegen v konvergiert.

Zusammen genommen gibt es eine Teilfolge von u^ε, die wir von nun an genauso bezeichnen, die für $\varepsilon, \delta \longrightarrow 0^+$ auf folgende Weisen gegen eine Funktion v konvergiert:

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\rightharpoonup v && \text{schwach in } W^{1,p}(B(R_0)), \\ u^\varepsilon &\to v && \text{gleichmäßig auf jedem } \Omega'' \Subset B(R_0), \\ Du^\varepsilon &\to Dv && \text{gleichmäßig auf jedem } \Omega'' \Subset B(R_0). \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass die Funktion v die Gleichung (1.1) in $B(R_0)$ löst. Es gilt nach dem Satz von Lebesgue für alles Testfunktionen $\eta \in C_c^\infty(B(R_0))$

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\varepsilon,\delta\to 0^+} \int_{B(R_0)} \left(|Du^\varepsilon|^{p-2} + \varepsilon\right) D_i u^\varepsilon D_i \eta \, dx \\ &= \int_{B(R_0)} \lim_{\varepsilon,\delta\to 0^+} \left(|Du^\varepsilon|^{p-2} + \varepsilon\right) D_i u^\varepsilon D_i \eta \, dx \\ &= \int_{B(R_0)} |Dv|^{p-2} D_i v D_i \eta \, dx. \end{aligned}$$

Ferner ist $u|_{\partial B(R_0)} = v|_{\partial B(R_0)}$, d.h. die Spur von u ist identisch mit der Spur von v. Entsprechend folgt aus der Eindeutigkeit der Lösung $u = v$. Aus den Abschätzungen (3.47) und (3.54) folgt somit

$$\sup_{B(R_0/2)} |Du| \le C \quad \text{und} \quad [Du]_{\alpha, B(R_0/4)} \le C.$$

Schließlich können wir jedes Untergebiet $\Omega' \Subset \Omega$ mit endlich vielen Kugeln $B_j \subset \Omega$ überdecken, für welche die obigen Abschätzungen gelten. Damit ist die Behauptung gezeigt. ∎

3.4 Beweis der modifizierten Iterationsmethode von Moser aus Lemma 3.6

Im Beweis zu Lemma 3.6 verwiesen wir auf Seite 34 auf eine Modifikation der Iterationsmethode von Moser [Mos60; Mos61] um für eine (schwache) nicht-negative Unterlösung der Hilfs-PDE (3.6) eine Abschätzung zu erhalten. Wir verschoben den Beweis an diese Stellen und wollen ihn nun nachholen.[16]

Sei $w = \phi\left(u^\varepsilon_{x_1}\right)$ mit $u^\varepsilon \in C^2(B(R_0))$ Lösung von (3.1) und ϕ aus dem Beweis zu Lemma 3.6. Wir wissen

$$\int_{B(R_0)} A^{ij}_\varepsilon D_i w D_j \eta \, dx \le 0 \quad \text{für alle } \eta \in C^\infty_c(B(R_0)), \eta \ge 0. \tag{3.56}$$

Aus $w = 0$ folgt außerdem $Dw = 0$ fast überall und für $w > 0$ gilt

$$M(R)^{p-2} \le C|Du|^{p-2} \le CM(R)^{p-2}. \tag{3.57}$$

Wir wollen nun beweisen, dass es für $0 < R < R_0$ und $\frac{3}{4} < \theta < 1$ eine Konstante $C = C(n, \theta, R)$ gibt, so dass gilt

$$\sup_{B(R/2)} w \le C \left(\fint_{B(\theta R)} w^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis. Sei $0 < R < R_0$ beliebig. Wir werden zeigen, dass für jedes $0 < \rho < R$ gilt

$$\sup_{B(\rho)} w \le C \left(\fint_{B(R)} w^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

mit $C = C(n, \rho, R)$. Hieraus folgt sofort die gesuchte Abschätzung.

Schritt 1. Wähle für jedes $0 < \rho < R$ eine Abschneidefunktion $\zeta \in C^\infty_c(B(R))$ mit $\zeta \equiv 1$ auf $B(\rho)$ und $|D\zeta| \le \frac{2}{R-\rho}$. Wähle ein $\xi \ge 1$ und setze in der Gleichung (3.56) die

[16] Wir halten uns dabei an den Beweis von Giaquinta und Martinazzi [GM05, Proposition 8.19], der eine leicht verständlichere Präsentation des Beweises von [Mos61, Theorem 2] ist.

Testfunktion $\eta := w^{\xi}\zeta^2 \geq 0$:

$$\begin{aligned}
0 &\geq \int_{B(R_0)} A_\varepsilon^{ij}\, D_i w D_j \left(w^{\xi}\zeta^2\right)\, dx \\
&= \xi \int_{B(R)} A_\varepsilon^{ij}\, D_i w D_j w\, w^{\xi-1}\zeta^2\, dx + 2\int_{B(R)} A_\varepsilon^{ij}\, D_i w w^{\xi}\zeta D_j\zeta\, dx
\end{aligned}$$

Die Elliptizität und die Abschätzung von A_ε^{ij} aus Lemma 3.2 liefert uns zusammen mit der Dreicksungleichung für Integrale

$$\begin{aligned}
&\int_{B(R)} \left(|Du|^{p-2} + \varepsilon\right) |Dw|^2\, w^{\xi-1}\zeta^2\, dx \\
&\qquad \leq \frac{C}{\xi}\int_{B(R)} \left(|Du|^{p-2} + \varepsilon\right) |D_i w| w^{\frac{\xi-1}{2}} w^{\frac{\xi+1}{2}} \zeta |D_j\zeta|\, dx,
\end{aligned}$$

wobei, die rechte Seite über $i, j = 1, \ldots, n$ summiert wird.

Wir verwenden nun die Ungleichungen (3.57) um in der obigen Formel die $\left(|Du|^{p-2} + \varepsilon\right)$ Terme zu kürzen. Wir erhalten

$$\int_{B(R)} |Dw|^2\, w^{\xi-1}\zeta^2\, dx \leq \frac{C}{\xi}\int_{B(R)} |D_i w| w^{\frac{\xi-1}{2}} w^{\frac{\xi+1}{2}} \zeta |D_j\zeta|\, dx$$

und verwenden darauf nun die Young'sche Ungleichung $ab \leq \delta a^2 + \delta^{-1}b^2$ mit $a = |D_i w| w^{\frac{\xi-1}{2}} \zeta$ und $b = \frac{C}{\xi} w^{\frac{\xi+1}{2}} |D_j\zeta|$. Es folgt

$$\int_{B(R)} |Dw|^2\, w^{\xi-1}\zeta^2\, dx \leq \frac{C}{\xi^2}\int_{B(R)} w^{\xi+1}\, |D\zeta|^2\, dx.$$

Da weiterhin gilt $\left|Dw^{\frac{\xi+1}{2}}\right|^2 = \left(\frac{\xi+1}{2}\right)^2 w^{\xi-1}\, |Dw|^2$ folgt

$$\int_{B(R)} \left|Dw^{\frac{\xi+1}{2}}\right|^2 \zeta^2\, dx \leq C\left(\frac{\xi+1}{\xi}\right)^2 \int_{B(R)} w^{\xi+1}\, |D\zeta|^2\, dx.$$

Als nächstes benutzen wir

$$\left|D\left(\zeta w^{\frac{\xi+1}{2}}\right)\right|^2 \leq 2\left|Dw^{\frac{\xi+1}{2}}\right|^2 \zeta^2 + 2w^{\xi+1}\, |D\zeta|^2$$

und erhalten

$$\int_{B(R)} \left|D\left(\zeta w^{\frac{\xi+1}{2}}\right)\right|^2 dx \leq C_1 \int_{B(R)} w^{\xi+1}\, |D\zeta|^2\, dx,$$

wobei $C_1 \geq 2\left(1 + C\left(\frac{\xi+1}{\xi}\right)^2\right)$ unabhängig von ξ gewählt werden kann, da $\xi \geq 1$.

Außerdem gilt nach der Sobolev-Ungleichung

$$\begin{aligned}\left(\int_{B(\rho)}\left(w^{\frac{\xi+1}{2}}\right)^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq \left(\int_{B(R)}\left(\zeta w^{\frac{\xi+1}{2}}\right)^{2^*} dx\right)^{\frac{2}{2^*}}\\ &\leq \int_{B(R)}\left|D\left(\zeta w^{\frac{\xi+1}{2}}\right)\right|^2 dx\\ &\leq \frac{C_9}{(R-\rho)^2}\int_{B(R)} w^{\xi+1}\,dx.\end{aligned}$$

Setze nun $\lambda := \frac{2^*}{2}$ und $\sigma := \xi + 1$, dann gilt

$$\left(\int_{B(\rho)} w^{\lambda\sigma}\,dx\right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq \frac{C_9}{(R-\rho)^2}\int_{B(R)} w^{\sigma}\,dx \quad \text{für alle } \sigma \geq 2. \tag{3.58}$$

Schritt 2. Wir definieren für $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\sigma_i := 2\lambda^i, \quad R_i := \rho + \frac{R-\rho}{2^i}, \quad (R_i - R_{i+1})^2 = \frac{(R-\rho)^2}{4^{i+1}}.$$

Dank Lemma 1.16 ist auch w^{σ_i} eine Unterlösung und wir können die Gleichung (3.58) iterieren. Es gilt

$$\begin{aligned}\left(\int_{B(R_{i+1})} w^{\sigma_{i+1}}\,dx\right)^{\frac{1}{\lambda^{i+1}}} &= \left(\int_{B(R_{i+1})} w^{\lambda\sigma_i}\,dx\right)^{\frac{1}{\lambda^i}\frac{1}{\lambda}}\\ &\leq \left(\frac{4^{i+1}C_9}{(R-\rho)^2}\right)^{\frac{1}{\lambda^i}}\left(\int_{B(R_i)} w^{\sigma_i}\,dx\right)^{\frac{1}{\lambda^i}}\\ &\leq \prod_{k=0}^{i}\left(\frac{4^{k+1}C_9}{(R-\rho)^2}\right)^{\frac{1}{\lambda^k}}\int_{B(R)} w^2\,dx.\end{aligned}$$

Wir zerlegen nun das Produkt in einzelne Teile und betrachten diese separat. Es gilt

$$\ln\left(\prod_{k=0}^{i}\left(4^{k+1}C_9\right)^{\frac{1}{\lambda^k}}\right) = \sum_{k=0}^{i}\frac{1}{\lambda^k}\left(\ln C_9 + (k+1)\ln 4\right), \tag{3.59}$$

$$\prod_{k=0}^{i}\left(\frac{1}{(R-\rho)^2}\right)^{\frac{1}{\lambda^k}} = \left(\frac{1}{(R-\rho)^2}\right)^{\sum_{k=0}^{i}\frac{1}{\lambda^k}}, \tag{3.60}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^k = \frac{n}{2}.$$

Ferner liefert uns das Wurzelkriterium die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{\lambda^k} = \sum_{k=0}^{\infty}k\left(\frac{n-2}{n}\right)^k,$$

es gilt nämlich

$$\sqrt[k]{k\left(\frac{n-2}{n}\right)^k} = \frac{n-2}{n}\sqrt[k]{k} \longrightarrow \frac{n-2}{n} \quad \text{für } k \to +\infty.$$

Damit ist auch (3.59) konvergent für $i \to +\infty$ und es gibt ein $C_{10} = C_{10}(n, R)$, so dass für alle $i = 0, 1, 2, \ldots$ gilt

$$\ln\left(\prod_{k=0}^{i}\left(4^{k+1}C_9\right)^{\frac{1}{\lambda^k}}\right) = \sum_{k=0}^{i}\frac{1}{\lambda^k}\left(\ln C_9 + (k+1)\ln 4\right) \le C_{10}.$$

Zusammen gilt also mit $C = e^{C_{10}}$

$$\prod_{k=0}^{i}\left(\frac{4^{k+1}C_9}{(R-\rho)^2}\right)^{\frac{1}{\lambda^k}} \le C\prod_{k=0}^{i}\left(\frac{1}{(R-\rho)^2}\right)^{\frac{1}{\lambda^k}} \longrightarrow C(R-\rho)^{-n} \quad \text{für } i \to +\infty$$

und es folgt sofort

$$\left(\int_{B(\rho)} w^{\sigma_i}\, dx\right)^{\frac{1}{\lambda^i}} \le \left(\int_{B(R_i)} w^{\sigma_i}\, dx\right)^{\frac{1}{\lambda^i}} \le C(R-\rho)^{-\frac{n}{2}}\left(\int_{B(R)} w^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Für $i \to +\infty$ konvergiert die linke Seite gegen $\sup_{B(\rho)} w$ und es folgt für eine Konstante $C = C(n, \rho, R)$

$$\sup_{B(\rho)} w \le C\left(\int_{B(R)} w^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad \blacksquare$$

Bemerkung 3.12. Auf die gleiche Art und Weise lässt sich die Abschätzung

$$\sup_{B(\rho)} w \le C\left(\int_{B(R)} w^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

für alle $p \ge 2$ gewinnen (hierfür muss man nur $\sigma_i := p\lambda^i$ setzen). Ferner bekommt man diese Abschätzung für den Bereich $0 < p < 2$ durch eine Erweiterung des oben angegeben Beweises.

Kapitel 4
Auswertung

Wie in der Einleitung bemerkt, benutzt der Beweis von Evans die Techniken von Moser und De Giorgi geschickt aus um Satz 1.1 zu beweisen. Von besonderer Bedeutung ist hier Lemma 3.3, welches eine Abschätzung der partiellen Ableitungen nach unten in der Nähe ihres Supremums liefert, wenn der Wert der partiellen Ableitung im Mittel sehr nahe an seinem Supremum liegt.

Es ist sogar möglich den Beweis auf eine größere Klasse von nonlinearen Problem zu erweitern. Auf eine genaue Ausführung dieser Erweiterung wurde mit Blick auf den Umfang dieser Arbeit und zugunsten einer sauberen Darstellung des Beweises von Evans jedoch verzichtet. In Abschnitt 4.1 behandeln wir dennoch eine Skizze einer möglichen Verallgemeinerung.

In Abschnitt 4.2 beschäftigen wir uns dann kurz mit der Einordnung des Beweises von Evans in den aktuellen Stand der Forschung. Und in Abschnitt 4.3 beschreiben wir, welche Ungenauigkeiten bei der Analyse der Arbeit von Evans gefunden wurden und wie sie gelöst werden konnten.

4.1 Erweiterbarkeit auf allgemeinere Nonlinearitäten

Im Paper von Evans wird die Erweiterbarkeit auf Nonlinearitäten der Form $\phi(|Du|)$ anstatt $|Du|^{p-2}$ angedeutet, aber nicht ausgeführt. Der Beweis von Satz 1.1 lässt sich jedoch mit relativ wenig Aufwand erweitern auf eine Klasse von degeneriert elliptischen Gleichungen der Form

$$-D_i A^i(Du) = 0 \quad \text{auf } \Omega,$$

mit konvexen $A^i(q) \in C^{1,\mu}_{\text{loc}}(\Omega)$, die folgende Wachstumseigenschaften erfüllen

$$\begin{cases} \left|A^i(q)\right| \leq C\,|q|^{p-2} \\ \left|D_{q_j} A^i(q)\right| \leq C\,|q|^{p-2} \\ D_{q_j} A^i(q)\xi_i\xi_j \geq \lambda(q)\,|q|^{p-2}\,|\xi|^2. \end{cases}$$

In den Abschnitten 3.1 und 3.2 benutzen wir zum Beweis fast ausschließlich die von der regularisierten Gleichung

$$-D_i A^i(Du) - \varepsilon \bigtriangleup u = 0 \quad \text{auf } B(R_0)$$

abgeleitete Gleichung (3.6), welche dann übergeht zu

$$-D_i \left(\left(D_{q_j} A^i(Du) + \varepsilon \right) D_j v \right) = 0 \quad \text{auf } B(R_0).$$

Da diese Gleichung aber ihre Eigenschaften behält, folgen die Beweise in den oben genannten Abschnitten sofort. In Abschnitt 3.3 können wir in Lemma 3.10 außerdem ein Resultat von Marcellini [Mar91] benutzen, um die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung in $C^{2,\alpha}(B(R_0))$ zu zeigen.

4.2 Stand der Forschung

Die Resultate von Ural'ceva, Uhlenbeck und Evans zeigen $C^{1,\alpha}$-Regularität für Lösungen der p-Laplacegleichung mit $p > 2$ bzw. von verwandten Problemen. Nahezu gleichzeitig mit Evans bewiesen DiBenedetto [DiB83] und Lewis [Lew83] unabhängig von einander $C^{1,\alpha}$-Regularität für $1 < p < 2$. Seitdem sind diese Resultate in unzähligen Papers immer weiter verallgemeinert worden, zuletzt mithilfe der Sobolev-Orlicz-Räume auf Nonlinearitäten der Form $\phi(|Du|)$, zum Beispiel [DSV09].

4.3 Kritik

Der Beweis von Evans [Eva82] enthält ein paar Ungenauigkeiten, welche in dieser Arbeit adressiert wurden. Zudem wurde versucht den Beweis in größerer Ausführlichkeit zu präsentieren. So wurde großer Wert auf die explizite und genaue Nennung sämtlicher Voraussetzungen und Referenzen gelegt.

Die Propositionen 2.1 und 3.1 (hier Propositionen 3.1 und 3.9) werden im Original ausschließlich für glatte Lösungen der p-Laplacegleichung bewiesen, der Beweis für Lösungen der regularisierten Version, der am Ende tatsächlich benötigt wird, wird dem Leser überlassen. Wie gezeigt benötigen die Beweise nur eine kleine Modifikation um in beiden Fällen zu funktionieren.

Ein schwerer wiegendes Problem steckt im Beweis von Proposition 3.1 (hier Proposition 3.9). Dort wird auf S. 368 ein Lemma (Lemma 2.4 ähnlich Lemma 1.19 in dieser Arbeit) angewendet, dessen Voraussetzungen nicht erfüllt sind. Für dieses Lemma müssen zwei Bedingungen auf einem Intervall $(0, R_0)$ erfüllt sein. In dem originalen Beweis gibt es allerdings eine Lücke in diesem Intervall. Erfreulicherweise ließen sich Lemma 2.4 und Proposition 3.1 so erweitern, dass diese Lücke zugelassen ist – siehe Lemma 1.19 und Proposition 3.9 in dieser Arbeit.

Ferner wurde der Beweis zu Lemma 4.1 (Lemma 3.10) um mehrere Seiten erweitert um eine Teilaussage des Lemmas tatsächlich zu zeigen. Das Original lieferte bloß eine Andeutung der Möglichkeit eines Beweises (S. 370).

Kurzzusammenfassung

Lawrence C. Evans veröffentlichte in [Eva82] einen neuen Regularitätsbeweis für Lösungen der p-Laplacegleichung

$$-D_i\left(|Du|^{p-2}\,D_i u\right) = 0 \quad \text{auf } \Omega,$$

es sei hierbei Ω ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{R}^n$, $n > 2$ und $p > 2$.

Satz. *Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ eine schwache Lösung der p-Laplacegleichung Dann gilt für jede Teilmenge $\Omega' \Subset \Omega$*

$$\max_{\Omega'} |Du| \le C \quad \text{und} \quad [Du]_{\alpha,\Omega'} \le C$$

mit Konstanten $\alpha = \alpha(p,n)$, $0 < \alpha \le 1$ und $C = C(\Omega', p, n, \|u\|_{1,p,\Omega})$.

Der Beweis dieses Satzes wird aus einer Kombination der Techniken von De Giorgi und Moser [Mos60] gewonnen. Hierzu wird die degeneriert elliptische p-Laplacegleichung durch ein gleichmäßig elliptisches Problem approximiert. Die Schwierigkeit dieser Methode besteht in dem Nachweis einer „brauchbaren“ Konvergenz der Lösungen des approximierenden Problems zu der Lösung der p-Laplacegleichung. In diesem Fall benötigen wir die gleichmäßige Konvergenz des Gradienten auf jeder kompakt enthaltenen Teilmenge. Dazu ist eine a-priori Hölder-Abschätzung des Gradienten der Lösungen des approximierenden Problems *unabhängig* von der Nähe der Approximation notwendig.

Literatur

[AF03] Robert A. Adams und John J. F. Fournier. *Sobolev Spaces*. 2. Aufl. Pure and Applied Mathematics 140. New York: Academic Press, 2003.

[Chi09] Michel Chipot. *Elliptic Equations. An Introductory Course*. Birkhäuser Advanced Texts. Berlin: Birkhäuser, 2009.

[DiB83] Emmanuele DiBenedetto. „$C^{1+\alpha}$ local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations“. In: *Nonlinear Analysis* 7.8 (1983), S. 827 –850. DOI: 10.1016/0362-546X(83)90061-5.

[DSV09] Lars Diening, Bianca Stroffolini und Anna Verde. „Everywhere regularity of functionals with φ-growth“. In: *manuscripta math.* 129.4 (2009), S. 449–481. DOI: 10.1007/s00229-009-0277-0.

[Dob06] Manfred Dobrowolski. *Angewandte Funktionalanalysis, Sobolev-Räume und elliptische Differentialgleichungen*. Berlin: Springer, 2006.

[Eva82] Lawrence C. Evans. „A new proof of local $C^{1,\alpha}$ regularity for solutions of certain degenerate elliptic p.d.e.“ In: *Journal of Differential Equations* 45.3 (1982), S. 356 –373. DOI: 10.1016/0022-0396(82)90033-X.

[Eva98] Lawrence C. Evans. *Partial Differntial Equations*. Bd. 19. Graduate Studies in Mathmatics. Providence: American Mathematical Society, 1998.

[Gia83] Mariano Giaquinta. *Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems*. Annals of Math. Studies 105. Princeton University Press, 1983.

[Gia93] Mariano Giaquinta. *An introduction to the Regularity Theory for Nonlinear Elliptic Systems*. Lectures in Mathematics. Basel: Birkhäuser, 1993.

[GM05] Mariano Giaquinta und Luca Martinazzi. *An introduction to the regularity theory for elliptic systems, harmonic maps and minimal graphs*. Appunti 2. Pisa: Edizioni della Normale, 2005.

[GT01] David Gilbarg und Neil S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. 3. Aufl. Nachdruck der Auflage von 1998. Berlin: Springer, 2001.

[LU68] Olga A. Ladyzhenskaya und Nina N. Ural'tseva. *Linear and Quasilinear Differential Elliptic Equations*. Übers. von Leon Ehrenpreis. Mathematics in Science and Engineering 46. New York: Academic Press, 1968.

[Lew83] John Lewis. „Regularity of the Derivatives of Solutions to Certain Degenerate Elliptic Equations“. In: *Indiana University Math. J.* 32.6 (1983), S. 849–858.

[Lin06] Peter Lindqvist. *Notes on the p-Laplace equation*. Report 102. University of Jyväsklä, Institut für Mathematik und Statistik, 2006.

[Mar91] Paolo Marcellini. „Regularity and existence of solutions of elliptic equations with p, q-growth conditions“. In: *Journal of Differential Equations* 90.1 (1991), S. 1 –30. DOI: 10.1016/0022-0396(91)90158-6.

[Mos60] Jürgen Moser. „A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations“. In: *Comm. on Pure and Applied Math.* 13.3 (1960), S. 457 –468. DOI: 10.1002/cpa.3160130308.

[Mos61] Jürgen Moser. „On Harnack's theorem for elliptic differential equations“. In: *Comm. on Pure and Applied Math.* 14.3 (1961), S. 577 –591. DOI: 10.1002/cpa.3160140329.

[Ser64] James Serrin. „Local behavior of solutions of quasi-linear equations“. In: *Acta Math.* 111.1 (1964), S. 247–302. DOI: 10.1007/BF02391014.

[Uhl77] Karen Uhlenbeck. „Regularity for a class of non-linear elliptic systems“. In: *Acta Math.* 138 (1977), S. 219–240. DOI: 10.1007/BF02392316.

Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe, insbesondere sind wörtliche oder sinngemäße Zitate als solche gekennzeichnet. Mir ist bekannt, dass Zuwiderhandlung auch nachträglich zur Aberkennung des Abschlusses führen kann.

Ort, Datum Unterschrift